TD - Nombres réels - Correction

1 Nombres rationnels, nombres irrationnels :

Exercice 1 : Montrer que le nombre
$$31,72\,356\,356\,356\,356\cdots$$
est rationnel.

Solution de l'exercice 1 : On pose $x = 31,72\,356\,356\,356\,356\cdots$ donc :
$$\begin{cases} 100x & = & 3172 & , & 356\,356\,356\,356\cdots \\ 100\,000x & = & 3172\,356 & , & 356\,356\,356\,356\cdots \end{cases}$$
donc $100\,000x - 100x = 3172\,356 - 3172 = 3\,169\,184$ donc $99\,900x = 3\,169\,184$ d'où :
$$x = \frac{3\,169\,184}{99\,900} \in \mathbb{Q}$$
On déduit que x est rationnel.

Exercice 2 : Soit a, b deux nombres rationnels tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels.
Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 2 : Supposons que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel donc $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{a}+\sqrt{b} = r$ donc $\sqrt{a} = r-\sqrt{b}$ donc $a = (r-\sqrt{b})^2 = r^2 + b - 2r\sqrt{b}$ d'où $2r\sqrt{b} = r^2 + b - a$.
Si $r = 0$ alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$ donc $\sqrt{a} = 0$ d'où $a = 0$. Absurde car a est irrationnel d'où $r \neq 0$.
On déduit que $\sqrt{a} = \frac{r^2+b-a}{2r}$, or $r, a, b \in \mathbb{Q}$ donc $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. Absurde car $\sqrt{a}$ est irrationnel donc $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.
On remarque qu'on a montré en fait que si a et b sont deux nombres rationnels tels que $\sqrt{a}$ soit irrationnel alors $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 3 : Monter que $\log 2 \notin \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 3 : On suppose que $\log 2 \in \mathbb{Q}$ donc $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \log 2 = \frac{p}{q}$.
On a $\log 2 = \frac{p}{q}$ donc $q \log 2 = p$ donc $\log 2^q = p$ d'où $2^q = 10^p = 10^p$.
On déduit que $2^q = 2^p 5^p$ donc $2^{q-p} = 5^p$ donc 2^{q-p} est impaire donc $q - p = 0$ d'où $q = p$. Absurde car $p \neq q$ puisque $\frac{p}{q} = \log 2 \neq 1$ car $2 \neq 10$.

Exercice 4 : Montrer que :
$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$$

Solution de l'exercice 4 : Supposons que x est rationnel. On a $x > 0$ donc $\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$ donc $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ donc $q \ln 2 = p \ln 3$ donc $\ln 2^q = \ln 3^p$ d'où $2^q = 3^p$.
- On a $q \neq 0$ donc 2^q est pair.
- On a $2^q = 3^p$ donc 2^q.

On déduit que 2^p est à la fois pair et impair. Absurde, donc x est irrationnel.

Exercice 5 :
1 : Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$$
2 : Montrer que :
$$\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$
3 : En déduire que :
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

Solution de l'exercice 5 :
1 : *Par contraposée*, il suffit de montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair donc $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$ donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ d'où n^2 est impaire.
On déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$$

2 : Supposons que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ et soit $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ la forme irréductible de $\sqrt{6}$ donc m et n n'ont pas de facteur commun.
On a $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ donc $6 = \frac{m^2}{n^2}$ donc $6n^2 = m^2$ donc m^2 est pair d'où, d'après la question précédente, m est paire. On déduit que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$.
On a $6n^2 = m^2$ donc $6n^2 = 4k^2$ donc $3n^2 = 2k^2$ donc n^2 est pair d'où, d'après la question précédente, n est paire.
On déduit que m et n sont pairs donc 2 est un facteur commun de m et n. Absurde, donc $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

2 Ordre dans $\mathbb{R}$:

2.1 Ordre dans $\mathbb{R}$:

Exercice 6 : Montrer que :
$$\forall a,b \geq 0, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$$

Solution de l'exercice 6 : Soient $a, b \geq 0$.

- On a :
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b} = a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq a+b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2$$
donc $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
- On a :
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 &\leq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\\ &= \left(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)\\ &= \left(a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)+\left(a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)\\ &= 2a+2b = 2(a+b)\\ &= \left(\sqrt{2(a+b)}\right)^2\end{aligned}$$
donc $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.

On déduit que :
$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$$

Exercice 7 : Monter que :
$$\forall n \geq 2, 1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Solution de l'exercice 7 : Soit $n \geq 2$ et $k \in \{2, \dots, n\}$.
On a $k-1 < k < k+1$ donc $k(k-1) < k^2 < k(k+1)$ d'où :
$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$
donc :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$
Or :
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ et } \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
donc :
$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

d'où :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{2-1}-\frac{1}{n}$$

car les sommes :

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \text{ et } \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

sont télescopiques.
Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}$$

donc :

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2-1}-\frac{1}{n}=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$$

On a $n\geq 2$ donc $n+1\geq 3$ donc $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{3}$ d'où $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\geq 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>1$.
On déduit que :

$$1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$$

2.2 Intervalles de $\mathbb{R}$:

Exercice 8 : Montrer que l'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 8 : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
- Si $I\cap J=\emptyset$ alors $I\cap J$ est un intervalle.
- Sinon, soit $a,b\in I\cap J$ tels que $a\leq b$ donc $a,b\in I$ et $a,b\in J$.
  - On a $a,b\in I$ avec $a\leq b$ et I un intervalle donc $[a,b]\subset I$.
  - On a $a,b\in J$ avec $a\leq b$ et J un intervalle donc $[a,b]\subset J$.

  On déduit que $[a,b]\subset I\cap J$ donc $I\cap J$ est un intervalle.

On déduit que l'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Montrer que la réunion de deux intervalles d'intersection non vide est un intervalle.

Solution de l'exercice 9 : Soit I et J deux intervalles d'intersection non vide et $a,b\in I\cup J$ tels que $a<b$.
On a $I\cap J\neq\emptyset$ donc $\exists c\in I\cap J$.
- Si $c\leq a$: On a $c,b\in J$ et J intervalle donc $[c,b]\subset J\subset I\cup J$. Or $c\leq a<b$ donc $[a,b]\subset[c,b]$ d'où $[a,b]\subset I\cup J$.
- Si $a\leq c\leq b$:
  - On a $a,c\in I$ et I intervalle donc $[a,c]\subset J\subset I\cup J$.
  - On a $c,b\in J$ et J intervalle donc $[c,b]\subset J\subset I\cup J$.

  Or $a\leq c\leq b$ donc $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]\subset\subset I\cup J$.
- Si $b\leq c$: On a $a,c\in I$ et I intervalle donc $[a,c]\subset I\subset I\cup J$. Or $a<b\leq c$ donc $[a,b]\subset[a,c]$ d'où $[a,b]\subset I\cup J$.

On déduit que dans tous les cas, $[a,b]\subset I\cup J$ donc $I\cup J$ est un intervalle.

Exercice 10 : Soit $I\subset\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall x,y\in I,\forall t\in[0,1],(1-t)x+ty\in I$$

Solution de l'exercice 10 :

$\Rightarrow$) Soit $x,y\in I$ et $t\in[0,1]$. x et y jouent le même rôle donc on peut supposer que $x\leq y$.
On a $x,y\in I$ avec $x\leq y$ et I un intervalle donc $[x,y]\subset I$.
D'autre part, $x\leq y$ donc $(1-t)x+ty\leq(1-t)y+ty=y$ et $(1-t)x+ty\geq(1-t)x+tx=x$ donc $x\leq(1-t)x+ty\leq y$ d'où $(1-t)x+ty\in[x,y]\subset I$.

$\Leftarrow$) Soit $x,y\in I$ avec $x\leq y$ et $z\in[x,y]$.
- Si $x=y$ alors $z=x\in I$.
- Sinon, soit $t=\frac{z-x}{y-x}$. On a :

– $x \leq z \leq y$ donc $0 \leq z - x \leq y - x$ donc $0 \leq \dfrac{z-x}{y-x} \leq 1$ d'où $t \in [0,1]$.
– $t = \dfrac{z-x}{y-x}$ donc $z - x = t(y-x)$ d'où $z = x + t(y-x) = x - tx + ty = (1-t)x + ty$.
On déduit que $t \in [0,1]$ et $z = (1-t)x + ty$.

2.3 Valeur absolue :

Exercice 11 : Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

Solution de l'exercice 11 : On rappelle que $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (voir l'exercice 6 de la page 2).
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sqrt{|x|} = \sqrt{|(x-y)+y|} \leq \sqrt{|x-y|+|y|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y|}$$

donc :

$$\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x-y|}$$

De même :

$$\sqrt{|y|} = \sqrt{|(y-x)+x|} \leq \sqrt{|y-x|+|x|} \leq \sqrt{|y-x|} + \sqrt{|x|}$$

donc :

$$\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} \leq \sqrt{|y-x|} = \sqrt{|x-y|}$$

On déduit que $\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x-y|}$ et $-\left(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right) = \sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x-y|}$ donc $\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$.

Exercice 12 :
1 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, |x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

2 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, |x_1 + \dots + x_n| = |x_1| + \dots + |x_n| \iff x_1, \dots, x_n \text{ ont même signe}$$

Solution de l'exercice 12 :
1 :

– **Méthode 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  – Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ donc $|x_1| \leq |x_1|$ d'où la relation est vraie pour $n = 1$.
  – On suppose que la relation est vraie pour n et soit $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. D'après *l'inégalité triangulaire* :

$$|x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + \dots + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + \dots + x_n| + |x_{n+1}|$$

  Par hypothèse de récurrence, $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$ donc :

$$|x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + \dots + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|$$

  d'où la relation est vraie pour $n + 1$.

  On déduit, d'après *le principe de récurrence*, que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, |x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

– **Méthode 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
  D'après *l'inégalité triangulaire* :

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, |x_1 + \dots + x_k| = |(x_1 + \dots + x_{k-1}) + x_k| \leq |x_1 + \dots + x_{k-1}| + |x_k|$$

  donc :

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, |x_1 + \dots + x_k| - |x_1 + \dots + x_{k-1}| \leq |x_k|$$

  donc :

$$\sum_{k=2}^{n} (|x_1 + \dots + x_k| - |x_1 + \dots + x_{k-1}|) \leq \sum_{k=2}^{n} |x_k|$$

d'où :

$$|x_1+\cdots+x_n|-|x_1|\leq\sum_{k=2}^{n}|x_k|$$

car la somme :

$$\sum_{k=2}(|x_1+\cdots+x_k|-|x_1+\cdots+x_{k-1}|)$$

est télescopique.
On déduit que :

$$|x_1+\cdots+x_n|\leq|x_1|+\sum_{k=2}^{n}|x_k|=\sum_{k=1}^{n}|x_k|=|x_1|+\cdots+|x_n|$$

2 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$\Leftarrow$) Soit $n\geq 2$ et $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ de même signe.

- Si $x_1,\dots,x_n\geq 0$ alors $x_1+\cdots+x_n\geq 0$ donc :

$$|x_1+\cdots+x_n|=x_1+\cdots+x_n=|x_1|+\cdots+|x_n|$$

- Si $x_1,\dots,x_n\leq 0$ alors $x_1+\cdots+x_n\leq 0$ donc :

$$|x_1+\cdots+x_n|=-(x_1+\cdots+x_n)=-x_1+\cdots+-x_n=|x_1|+\cdots+|x_n|$$

On déduit que dans tous les cas, :

$$|x_1+\cdots+x_n|=-(x_1+\cdots+x_n)=-x_1+\cdots+-x_n=|x_1|+\cdots+|x_n|$$

$\Rightarrow$) Soit $n\geq 2$. On va procéder par récurrence sur n.

- Soit $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $|x_1+x_2|=|x_1|+|x_2|$ donc, d'après *le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire*, x_1 et x_2 ont même signe donc la relation est vraie pour $n=2$.
- On suppose que la relation est vraie pour n et soit $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\in\mathbb{R}$ tels que :

$$|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}|=|x_1|+\cdots+|x_{n+1}|$$

On a, d'après *l'inégalité triangulaire*, :

$$|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}|=|(x_1+\cdots+x_n)+x_{n+1}|\leq|x_1+\cdots+x_n|+|x_{n+1}|$$

donc :

$$|x_1|+\cdots+|x_{n+1}|=|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}|\leq|x_1+\cdots+x_n|+|x_{n+1}|$$

d'où :

$$|x_1|+\cdots+|x_n|\leq|x_1+\cdots+x_n|$$

Or, d'après la question précédente :

$$|x_1+\cdots+x_n|\leq|x_1|+\cdots+|x_n|$$

donc :

$$|x_1+\cdots+x_n|=|x_1|+\cdots+|x_n|$$

On déduit, d'après l'hypothèse de récurrence, que $x_1,\dots,x_n$ ont même signe.
On pose $y=x_1+\cdots+x_n$ donc y et $x_1,\dots,x_n$ ont même signe.
On a :

$$|x_1|+\cdots+|x_{n+1}|=|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}|=|(x_1+\cdots+x_n)+x_{n+1}|\leq|x_1+\cdots+x_n|+|x_{n+1}|=|x_1|+\cdots+|x_n|+|x_{n+1}|$$

donc :

$$|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}|=|x_1+\cdots+x_n|+|x_{n+1}|$$

d'où :

$$|y+x_{n+1}|=|y|+|x_{n+1}|$$

On déduit, d'après *le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire*, que x_{n+1} et y ont même signe donc $x_1,\dots,x_{n+1}$ ont même signe.
La relation est alors vraie pour $n+1$.

On déduit, d'après *le principe de récurrence*, :

$$\forall n\geq 2,\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},|x_1+\cdots+x_n|=|x_1|+\cdots+|x_n|\Rightarrow x_1,\dots,x_n \text{ ont même signe}$$

On déduit que :

$$\forall n\geq 2,\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},|x_1+\cdots+x_n|=|x_1|+\cdots+|x_n| \iff x_1,\dots,x_n \text{ ont même signe}$$

3 Partie entière :

3.1 Propriété d'Archimède :

Exercice 13 : Montrer que :

$$\forall x, y > 1, \exists n \in \mathbb{N}, x < y^n$$

Solution de l'exercice 13 : Soit $x, y > 1$ donc $\ln x, \ln y > 0$ donc, d'après *la propriété d'Archimède*, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\ln x < n \ln y$ donc $\ln x < \ln y^n$ d'où $x < y^n$.

3.2 Partie entière :

Exercice 14 :
1 : Montrer que le nombre de chiffres d'un entier naturel n non nul est $\lfloor \log(n) \rfloor + 1$ ($\log$ désigne le logarithme décimal).
2 : Calculer le nombre de chiffres de 2017^{2018}.

Solution de l'exercice 14 :
1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et p le nombre de chiffres de n donc $10^{p-1} \leq n < 10^p$ donc $\log 10^{p-1} \leq \log n < \log 10^p$ donc $p-1 \leq \log n < p$ donc $\lfloor \log(n) \rfloor = p - 1$ d'où $p = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$.
2 : On pose $n = 2017^{2018}$ donc $\log n = 2018 \log 2017 = 2018 \times 3.3047058982127653 = 6668.89650259336$ donc $\lfloor n \rfloor = 6668$ d'où le nombre de chiffres de 2017^{2018} est $\lfloor \log(n) \rfloor + 1 = 6669$.

Exercice 15 :
1 : Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \Rightarrow |x - y| < 1$$

2 : Application : Résoudre l'équation :

$$\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$$

Solution de l'exercice 15 :
1 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
- On a $x - 1 < \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \leq y$ donc $x - 1 < y$ d'où $x - y < 1$.
- On a $y - 1 < \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $y - 1 < x$ donc $y - x < 1$ d'où $-1 < x - y$.

On déduit que $-1 < x - y < 1$ donc $|x - y| < 1$.
2 : Soit x une solution de l'équation $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$ donc, d'après la question précédente, $|2x + 3 - x - 2| < 1$ donc $|x + 1| < 1$ donc $-1 < x + 1 < 1$ d'où $-2 < x < 0$. On déduit que $-2 < x < -1$ ou $-1 < x < 0$.
- Supposons que $-2 < x < -1$. On a $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$ donc $\lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor + 2$ donc $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1$ d'où $\lfloor 2x \rfloor = -2 - 1 = -3$ car $\lfloor x \rfloor = -2$ puisque $-2 < x < -1$.
  On a $\lfloor 2x \rfloor = -3$ donc $-3 \leq 2x < -2$ d'où $-\frac{3}{2} \leq x < -1$. On déduit que $x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.
- Supposons que $-1 < x < 0$. On a $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$ donc $\lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor + 2$ donc $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1$ d'où $\lfloor 2x \rfloor = -1 - 1 = -2$ car $\lfloor x \rfloor = -1$ puisque $-1 < x < 0$.
  On a $\lfloor 2x \rfloor = -2$ donc $-2 \leq 2x < -1$ d'où $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$. On déduit que $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[$.

On déduit que $x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[\cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right[= \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$.

Réciproquement, soit $x \in \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$ donc $x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[$ ou $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[$.
- Si $x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[$ alors $2x \in]-3, -2[$ donc $\lfloor x \rfloor = -2$ et $\lfloor 2x \rfloor = -3$ d'où $\lfloor 2x + 3 \rfloor - \lfloor x + 2 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + 3 - \lfloor x \rfloor - 2 = -3 + 3 + 2 - 2 = 0$. On déduit que $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$.
- Si $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[$ alors $2x \in [-2, -1[$ donc $\lfloor x \rfloor = -1$ et $\lfloor 2x \rfloor = -2$ d'où $\lfloor 2x + 3 \rfloor - \lfloor x + 2 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + 3 - \lfloor x \rfloor - 2 = -2 + 3 + 1 - 2 = 0$. On déduit que $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$.

On déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$ est $\mathcal{S} = \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$.

Exercice 16 :

1 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

2 : Calculer :

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$$

Solution de l'exercice 16 :

1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et :

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

donc .

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

3 : D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

. donc :

$$\sum_{k=2}^{2017}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2017}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{2017}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

Or les sommes :

$$\sum_{k=2}^{2017}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \text{ et } \sum_{k=2}^{2017}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

sont télescopiques donc :

$$\sqrt{2018}-\sqrt{2} < \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2017}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{2017}-1$$

d'où :

$$\sqrt{2018}-\sqrt{2}+\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{2017}-\frac{1}{2}$$

et puisque $\sqrt{2018}-\sqrt{2}+\frac{1}{2} = 44.00794132805931 \geq 44$ et $\sqrt{2017}-\frac{1}{2} = 44.41102314577124 < 45$ donc :

$$44 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{\sqrt{k}} < 45$$

d'où :

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 44$$

Exercice 17 : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Solution de l'exercice 17 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Méthode 1 :** On pose $p = \lfloor x \rfloor$ donc $p \leq x < p+1$ donc $np \leq nx < n(p+1)$ donc $np \leq \lfloor nx \rfloor < n(p+1)$ donc $p \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < p+1$ d'où $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = p = \lfloor x \rfloor$.

- **Méthode 2 :** On pose $x = p+r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0,1[$ (p est la partie entière de x et r sa partie fractionnaire) donc :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor n(p+r) \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor np+nr \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} \right\rfloor$$

D'autre part, $r \in [0,1[$ donc $0 \leq r < 1$ donc $0 \leq nr < n$ donc $0 \leq \lfloor nr \rfloor < n$ donc $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ d'où $\left\lfloor \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$.

On déduit que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = p = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 18 : Résoudre l'équation :

$$\lfloor 3x-5 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor - 2x$$

Solution de l'exercice 18 : Soit x une solution de l'équation $\lfloor 3x-5 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor - 2x$ et on pose $x = p+r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0,1[$ (p est la partie entière de x et r sa partie fractionnaire).
On a $\lfloor 3x-5 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor - 2x$ donc $\lfloor 3(p+r)-5 \rfloor = \lfloor (p+r)+1 \rfloor - 2(p+r)$ donc $\lfloor 3p+3r-5 \rfloor = \lfloor p+r+1 \rfloor - 2p - 2r$ donc $3p - 5 + \lfloor 3r \rfloor = p + 1 + \lfloor r \rfloor - 2p - 2r$ d'où $2r = 6 - 4p - \lfloor 3r \rfloor$.
On a $r \in [0,1[$ donc $2r \in [0,2[$, or $2r = 6 - 4p - \lfloor 3r \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $2r = 0$ ou $2r = 1$ d'où $r = 0$ ou $r = \frac{1}{2}$.

- Supposons que $r = 0$. On a $2r = 6 - 4p - \lfloor 3r \rfloor$ donc $0 = 6 - 4p$ donc $4p = 6$ d'où $p = \frac{3}{2}$. Absurde car $p \in \mathbb{Z}$.
- Supposons que $r = \frac{1}{2}$. On a $2r = 6 - 4p - \lfloor 3r \rfloor$ donc $1 = 6 - 4p - 1$ donc $4p = 4$ d'où $p = 1$. On déduit que $x = p + r = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Réciproquement, si $x = \frac{3}{2}$ alors :

$$\lfloor 3x-5 \rfloor - \lfloor x+1 \rfloor + 2x = \left\lfloor 3 \times \frac{3}{2} - 5 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{2} + 1 \right\rfloor + 2 \times \frac{3}{2} = \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor - 5 - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor - 1 + 3 = 4 - 5 - 1 - 1 + 3 = 0$$

donc $\lfloor 3x-5 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor - 2x$ d'où $x = \frac{3}{2}$ est une solution de l'équation $\lfloor 3x-5 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor - 2x$.
On déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor 3x-5 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor - 2x$ est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Exercice 19 : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Solution de l'exercice 19 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $x = n + r$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0,1[$ (n est la partie entière de x et r sa partie fractionnaire).
Or $r \in [0,1[$ donc $\frac{r}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\subset [0,1[$ et $\frac{r+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\subset [0,1[$ d'où $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor = 0$.

- Si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ donc :

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+r+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor k + \frac{r+1}{2} \right\rfloor = k + \left\lfloor k + \frac{r}{2} \right\rfloor + k + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor = 2k = n = \lfloor x \rfloor$$

- Si n est impair :
  - **Méthode 1 :** $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$ donc :

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2k+1+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1+r+1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor k + \frac{r+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor k + 1 + \frac{r}{2} \right\rfloor \\
&= k + \left\lfloor k + 1 + \frac{r}{2} \right\rfloor + k + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor \\
&= 2k + 1 = n = \lfloor x \rfloor
\end{aligned}$$

– **Méthode 2 :** Soit $y = x+1$ donc $\lfloor y \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ d'où $\lfloor y \rfloor$ est pair. On déduit, d'après le cas pair que :
$$\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor$$
donc :
$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(x+1)+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$$
donc :
$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2}+1 \right\rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$$
donc :
$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$$
d'où :
$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

On déduit que, dans tous les cas, :
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 20 : Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $x = p + r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0,1[$.

1 : Justifier que $\exists q \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $\frac{q}{n} \leq r < \frac{q+1}{n}$.

2 : En déduire que $\lfloor nx \rfloor = np + q$.

3 : Montrer que $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$:
$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} p & \text{si } k \leq n-1-q \\ p+1 & \text{si } k \geq n-q \end{cases}$$

4 : En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Solution de l'exercice 20 :

1 : Soit $q = \lfloor nr \rfloor$ donc $q \in \mathbb{Z}$.
- On a $r \in [0,1[$ donc $0 \leq r < 1$ d'où $0 \leq nr < n$.
  - On a $0 \leq nr$ donc $\lfloor 0 \rfloor \leq \lfloor nr \rfloor$ d'où $0 \leq q$.
  - On a $\lfloor nr \rfloor \leq nr$ et $nr < n$ donc $\lfloor nr \rfloor < n$ d'où $q < n$.

  On déduit que $0 \leq q < n$, or $q \in \mathbb{Z}$ donc $q \in \{0,\dots,n-1\}$.
- On a $q = \lfloor nr \rfloor$ donc $q \leq nr < q+1$ d'où $\frac{q}{n} \leq r < \frac{q+1}{n}$.

2 : On a $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n(p+r) \rfloor = \lfloor np + nr \rfloor = np + \lfloor nr \rfloor = np + q$.

3 : Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$ donc $0 \leq k < n$ d'où $0 \leq \frac{k}{n} < 1$, or $p \leq x < p+1$ car $p = \lfloor x \rfloor$ donc $p \leq x + \frac{k}{n} < p+2$.
- On suppose que $k \leq n-1-q$ donc $\frac{k}{n} \leq \frac{n-q-1}{n} = 1 - \frac{q+1}{n}$, or, d'après la première question, $r < \frac{q+1}{n}$ donc $\frac{k}{n} < 1 - r$ d'où $x + \frac{k}{n} < x + 1 - r = (x-r)+1 = p+1$.

  On déduit que $p \leq x + \frac{k}{n} < p+1$ donc $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = p$.
- On suppose que $k \geq n-q$ donc $\frac{k}{n} \geq \frac{n-q}{n} = 1 - \frac{q}{n}$, or, d'après la première question, $r \geq \frac{q}{n}$ donc $\frac{k}{n} \geq 1-r$ d'où $x + \frac{k}{n} \geq x + 1 - r = (x-r)+1 = p+1$.

  On déduit que $p+1 \leq x + \frac{k}{n} < p+2$ donc $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = p+1$.

5 : D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-1-q}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor+\sum_{k=n-q}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor\\ &= \sum_{k=0}^{n-1-q}p+\sum_{k=n-q}^{n-1}(p+1)\\ &= ((n-1-q)-0+1)p+((n-1)-(n-q)+1)(p+1)\\ &= (n-q)p+q(p+1)=np+q\end{aligned}$$

Or, d'après la question 2, $\lfloor nx\rfloor = np+q$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$$

4 Parties denses de $\mathbb{R}$:

Exercice 21 : Montrer que l'ensemble :

$$A=\left\{\frac{m}{n^3}/(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 21 : Soit $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x<y$. On a $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists r\in\mathbb{Q}$ tel que $x<r<y$.
On a $r\in\mathbb{Q}$ donc $\exists(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r=\frac{p}{q}$ donc, si on pose $m=pq^2$ et $n=q$ alors $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $x<\frac{m}{n^3}<y$ car $\frac{m}{n^3}=\frac{pq^2}{q^3}=\frac{p}{q}=r$.
On déduit que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22 : Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 22 : Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ donc $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que $1<(b-a)10^n$ d'où $\dfrac{1}{10^n}<b-a$.

On pose $d=\dfrac{\lfloor 10^n a\rfloor+1}{10^n}$ donc $d\in\mathbb{D}$ et on a :

- $d=\dfrac{\lfloor 10^n a\rfloor+1}{10^n}>\dfrac{10^n a}{10^n}=a$.
- $d=\dfrac{\lfloor 10^n a\rfloor+1}{10^n}\leq\dfrac{10^n a+1}{10^n}=a+\dfrac{1}{10^n}<a+b-a=b$.

On déduit que $a<d<b$ donc $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23 : Soit l'ensemble :

$$\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}=\left\{p+q\sqrt{2}/p,q\in\mathbb{Z}\right\}$$

1 : On pose $A=\left(\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}\right)\cap\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha=\inf A$.
1 - 1 : Justifier l'existence de α et vérifier que $\alpha\geq 0$.
1 - 2 : Montrer que si $\alpha>0$ alors $\exists a,b\in A$ tels que $\alpha<a<b<2\alpha$.
1 - 3 : En déduire que $\alpha=0$.
2 : Soit $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x<y$.
2 - 1 : Montrer que $\exists a\in\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ tel que $0<a<y-x$.
2 - 2 : On pose $n=\lfloor\frac{x}{a}\rfloor$. Montrer que $x<(n+1)a<y$.
3 : En déduire que $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 23 :
1 :
1 - 1: On a $1=1+1\sqrt{2}\in\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ et $1>0$ donc $1\in\left(\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}\right)\cap\mathbb{R}_+^*=A$ d'où A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
D'autre part, $\forall x\in A=\left(\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}\right)\cap\mathbb{R}_+^*, x\geq 0$ donc 0 est un minorant de A d'où A est minoré.
On déduit A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ donc, d'après *l'axiome de la borne supérieure*, A admet une borne inférieure d'où α est bien défini.
On a 0 minorant de A α est le plus grand des minorants de A car $\alpha=\inf A$ donc $\alpha\geq 0$.

3 - 1 : Supposons que $\alpha > 0$. On a $\alpha = \inf A$ donc, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, pour $\varepsilon = \alpha$, $\exists b \in A$ tel que $\alpha < b < \alpha + \alpha = 2\alpha$.
De même, on a $b > \alpha$ donc $b - \alpha > 0$, or $\alpha = \inf A$ donc, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, pour $\varepsilon = b - \alpha$, $\exists a \in A$ tel que $\alpha < a < \alpha + (b - \alpha) = b$.
On déduit que $a, b \in A$ et $\alpha < a < b < 2\alpha$.
3 - 2 : Supposons que $\alpha > 0$ donc, d'après la question précédente, $\exists a, b \in A$ tels que $\alpha < a < b < 2\alpha$.
- On a $b > a$ donc $b - a > 0$ d'où $b - a \in \mathbb{R}_+^*$.
- On a $a, b \in A = \left(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right) \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $a, b \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ d'où $\exists m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = m + n\sqrt{2}$ et $b = p + q\sqrt{2}$ d'où $b - a = p + q\sqrt{2} - \left(m + n\sqrt{2}\right) = (p - m) + (q - n)\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$.

On déduit que $b - a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b - a \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ donc $b - a \in \left(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right) \cap \mathbb{R}_+^* = A$.
D'autre par $\alpha < a < b < 2\alpha$ donc $b - a < 2\alpha - \alpha = \alpha$.
On déduit que $b - a \in A$ et $b - a < \alpha$. Absurde car $\alpha = \inf A$ donc $\alpha = 0$.
4 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
4 - 1 : On pose $\varepsilon = y - x$. On a $y > x$ donc $\varepsilon = y - x > 0$. Or $\inf A = 0$ donc, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, $\exists a \in A$ tel que $0 < a < \varepsilon = y - x$.
On a $A = \left(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right) \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $A \subset \left(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)$, or $a \in A$ donc $a \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$.
4 - 2 :
- On a $n = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$ donc $\frac{x}{a} < n + 1$ d'où $x < (n + 1)a$.
- On a $n = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$ donc $n \leq \frac{x}{a}$ d'où $na \leq x$. Or $a < y - x$ donc $na + a < x + (y - x)$ d'où $(n + 1)a < y$.

On déduit que $x < (n + 1)a < y$.
5 : On pose $b = (n + 1)a$.
- On a $a \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ donc $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = p + q\sqrt{2}$ d'où $(n+1)a = (n+1)\left(p + q\sqrt{2}\right) = (n+1)p + (n+1)q\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$. On déduit que $b \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$.
- On a $x < (n + 1)a < y$ donc $x < b < y$.

On déduit que $b \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ et $x < b < y$ donc $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24 : Montrer que l'ensemble :
$$E = \left\{r^3 / r \in \mathbb{Q}\right\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 24 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
- **Méthode 1 :** L'application $t \mapsto t^3$ est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $a^3 = x$ et $b^3 = y$.
  On a $a < b$ et $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$ donc $a^3 < r^3 < b^3$ d'où $x < r^3 < y$.
  On déduit que $x < r^3 < y$ avec $r^3 \in E$ donc E est dense dans $\mathbb{R}$.
- **Méthode 2 :** On va procéder par séparation des cas :
  - Si $0 < x < y$ alors $0 < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$, or $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x}$ d'où $x < r^3 < y$.
  - Si $x < 0 < y$ alors $x < 0^3 < y$ avec $0 \in \mathbb{Q}$.
  - Si $x < y < 0$ alors $0 < -y < -x$ donc, d'après le premier cas, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $-y < r^3 < -x$ d'où $x < (-r)^3 < y$ avec $-r \in \mathbb{Q}$.

  On déduit que, dans tous les cas, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r^3 < y$ et puisque $r^3 \in E$ donc E est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25 : Montrer que l'ensemble :
$$E = \left\{\ln \frac{1 + r}{1 - r} / r \in \mathbb{Q} \cap] - 1, 1[\right\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 25 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}$.
On a $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \dfrac{2e^t}{e^t + 1} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ d'où $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} < \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$. Or $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} < r < \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$.
- On a $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1 = \dfrac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} = \dfrac{2e^x}{e^x + 1} > 0$ donc $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > -1$.
- On a $1 - \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} = \dfrac{e^y + 1 - e^y + 1}{e^y + 1} = \dfrac{2}{e^y + 1} > 0$ donc $\dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} > 1$.

On déduit que $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > -1$ et $\dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} > 1$ et puisque $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} < r < \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$ donc $-1 < r < 1$ d'où $r \in \mathbb{Q} \cap] - 1, 1[$.

- On a $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}<r$ donc $e^x-1<r(e^x+1)$ donc $(1-r)e^x<r+1$ donc $e^x<\dfrac{1+r}{1-r}$ d'où $x<\ln\dfrac{1+r}{1-r}$.
- On a $\dfrac{e^y-1}{e^y+1}>r$ donc $e^y-1>r(e^y+1)$ donc $(1-r)e^y>r+1$ donc $e^y>\dfrac{1+r}{1-r}$ d'où $y>\ln\dfrac{1+r}{1-r}$.

On déduit que $x<\ln\dfrac{1+r}{1-r}<y$ avec $\ln\dfrac{1+r}{1-r}\in E$ car $r\in\mathbb{Q}\cap]-1,1[$ donc E est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 26 : On considère l'ensemble :

$$E=\{m-\ln n/(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\}$$

et soit $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x<y$.
1 : Justifier que $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que :

$$-\ln\left(e^{-x}-e^{-y}\right)<m$$

2 : Montrer que $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$e^{m-y}<n<e^{m-x}$$

3 : En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 26 :

1 : On a $x<y$ donc $-y<-x$ donc $e^{-y}<e^{-x}$ d'où $0<e^{-x}-e^{-y}$. En particulier, $\ln\left(e^{-x}-e^{-y}\right)\in\mathbb{R}$.
D'autre part, $\mathbb{N}$ n'est pas majoré donc $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que $m>-\ln\left(e^{-x}-e^{-y}\right)$.
2 : On pose $n=\lfloor e^{m-y}\rfloor+1$.
- On a $n>e^{m-y}$.
- On a $n\in\mathbb{N}^*$ car $n\in\mathbb{Z}$ et $n>e^{m-y}>0$.
- D'après la question précédente, $m>-\ln\left(e^{-x}-e^{-y}\right)$ donc $\ln\left(e^{-x}-e^{-y}\right)>-m$ donc $e^{-x}-e^{-y}>e^{-m}$ donc $e^me^{-x}-e^me^{-y}>e^me^{-m}=1$ donc $e^{m-x}-e^{m-y}>1$ d'où $e^{m-x}>e^{m-y}+1$.
  On déduit que $n=\lfloor e^{m-y}\rfloor+1\leq e^{m-y}+1<e^{m-x}$.

On déduit que $n\in\mathbb{N}^*$ et $e^{m-y}<n<e^{m-x}$.
3 : On a $e^{m-y}<n<e^{m-x}$ donc $m-y<\ln n<m-x$ donc $-y<-m+\ln n<-x$ d'où $x<m-\ln n<y$ et $m-\ln n\in A$ car $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.
On déduit que $\forall x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x<y$, $\exists a\in A$ tel que $x<a<y$ donc A est dense dans $\mathbb{R}$.

5 Parties majorées, parties minorées de $\mathbb{R}$:

5.1 Borne supérieure, borne inférieure :

Exercice 27 : Soient $a,b>0$.
Les parties suivantes sont-elles majorées ? minorées ? si oui admettent-elles un minimum, un maximum, une borne supérieure ou inférieure ?

$\bullet)A=\{a+bn/n\in\mathbb{N}\}$ $\bullet)B=\{a+(-1)^n/n\in\mathbb{N}\}$ $\bullet)C=\left\{a+\dfrac{b}{n}/n\in\mathbb{N}^*\right\}$ $\bullet)D=\left\{a+(-1)^n\dfrac{b}{n}/n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Solution de l'exercice 27 :

- **Cas de l'ensemble** $A=\{a+bn/n\in\mathbb{N}\}$:
  - On a $\forall n\in\mathbb{N},a+bn\geq a$ et $a=a+0b\in A$ donc A est minoré par a et on a $\inf A=\min A=a$.
  - Supposons que A est majoré donc $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},a+bn\leq M$ donc $\forall n\in\mathbb{N},n\leq\dfrac{M-a}{b}$ d'où $\mathbb{N}$ est majoré. Absurde, car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré d'o A n'est pas majoré.
- **Cas de l'ensemble** $B=\{a+(-1)^n/n\in\mathbb{N}\}$: On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},a+(-1)^n=\begin{cases}a+1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ a-1 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

  donc $B=\{a+1,a-1\}$ d'où B est borné et on a $\sup B=\max B=a+1$ et $\inf B=\min B=a-1$.
- **Cas de l'ensemble** $C=\left\{a+\dfrac{b}{n}/n\in\mathbb{N}^*\right\}$:
  - On a $\forall n\in\mathbb{N}^*,a+\dfrac{b}{n}\leq a+b$ et $a+b=a+\dfrac{b}{1}\in C$ donc C est majoré par $a+b$ et on a $\sup C=\max C=a+b$.

– On a $a+b\in C$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, a+\dfrac{b}{n}\geq a$ donc C est non vide minoré d'où, d'après *l'axiome de la borne inférieure*, C admet une borne inférieure.

  – a est un minorant de C.
  – Soit $\varepsilon>0$ et $n=\left\lfloor\dfrac{b}{\varepsilon}\right\rfloor+1$ donc $n>\dfrac{b}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon>\dfrac{b}{n}$ d'où $a+\varepsilon>a+\dfrac{b}{n}$ et on a $a+\dfrac{b}{n}\in C$.

  On déduit, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, que $\inf C=a$.
  Supposons que C admet un plus petit élément donc $\min C=\inf C=a$ donc $a\in C$ donc $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a=a+\dfrac{b}{n}$ donc $\dfrac{b}{n}=0$ d'où $b=0$. Absurde car $b>0$ donc C n'admet pas de plus petit élément.

- **Cas de l'ensemble** $D=\left\{a+(-1)^n\dfrac{b}{n}/n\in\mathbb{N}^*\right\}$:

– On a $\forall n\in\mathbb{N}^*, a+(-1)^n\dfrac{b}{n}\leq a-\dfrac{b}{n}\geq a-b$ et $a-b=a+(-1)^1\dfrac{b}{1}\in D$ donc D est minoré par $a-b$ et on a $\inf D=\min D=a-b$.
– Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
  – Si n est pair alors $a+(-1)^n\dfrac{b}{n}=a+\dfrac{b}{n}\leq a+\dfrac{b}{2}$ puisque $n\geq 2$ car n est pair.
  – Si n est impair alors $a+(-1)^n\dfrac{b}{n}=a-\dfrac{b}{n}\leq a\leq a+\dfrac{b}{2}$.

  donc, dans tous les cas, $a+(-1)^n\dfrac{b}{n}\leq a+\dfrac{b}{2}$.
  On a $a+\dfrac{b}{2}\in D$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, a+(-1)^n\dfrac{b}{n}\leq a+\dfrac{b}{2}$ donc D est majoré par $a+\dfrac{b}{2}$ et on a $\sup D=\max D=a+\dfrac{b}{2}$.

Exercice 28 : Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble :

$$A=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}/n\in\mathbb{N}\right\}$$

Solution de l'exercice 28 : On a $0=(-1)^0\dfrac{0}{0+1}\in A$ et $\forall n\in\mathbb{N}, \left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right|=\dfrac{n}{n+1}\leq 1$ donc A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ d'où, d'après *les axiomes des bornes supérieure et inférieure*, A admet une borne supérieure et une borne inférieure.

– Étude de la borne supérieure :
  – On a $\forall n\in\mathbb{N}, (-1)^n\dfrac{n}{n+1}\leq\dfrac{n}{n+1}\leq 1$ donc 1 est un majorant de A.
  – Soit $\varepsilon>0$ et $n=\left\lfloor\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)\right\rfloor+1$ donc $n>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)$ donc $2n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$ donc $2n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon>\dfrac{1}{2n+1}$ d'où $1-\varepsilon<1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$ et on a $\dfrac{2n}{2n+1}=(-1)^{2n}\dfrac{2n}{2n+1}\in A$.

  On déduit que 1 est un majorant de A et $\forall\varepsilon>0,\exists a\in A$ tel que $1-\varepsilon<a$ donc, d'après *la caractérisation de la borne supérieure*, $\sup A=1$.
  Supposons que A admet un plus grand élément donc $\max A=\sup A=1$ d'où $1\in A$. On déduit que $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que $1=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ donc $1=\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right|=\dfrac{n}{n+1}$ donc $n=n+1$ d'où $0=1$. Absurde donc A n'admet pas de plus grand élément.
– Étude de la borne inférieure :
  – On a $\forall n\in\mathbb{N}, (-1)^n\dfrac{n}{n+1}\geq -\dfrac{n}{n+1}\geq -1$ donc -1 est un minorant de A.
  – Soit $\varepsilon>0$ et $n=\left\lfloor\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-2\right)\right\rfloor+1$ donc $n>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-2\right)$ donc $2n>\dfrac{1}{\varepsilon}-2$ donc $2n+2>\dfrac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon>\dfrac{1}{2n+2}$ d'où $-1+\varepsilon>-1+\dfrac{1}{2n+2}=-\dfrac{2n+1}{2n+2}$ et on a $-\dfrac{2n+1}{2n+2}=(-1)^{2n+1}\dfrac{2n+1}{(2n+1)+1}\in A$.

  On déduit que -1 est un minorant de A et $\forall\varepsilon>0,\exists a\in A$ tel que $-1+\varepsilon>a$ donc, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, $\inf A=-1$.
  Supposons que A admet un plus petit élément donc $\min A=\inf A=-1$ d'où $-1\in A$. On déduit que $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que $-1=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ donc $1=|-1|=\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right|=\dfrac{n}{n+1}$ donc $n=n+1$ d'où $0=1$. Absurde donc A n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 29 : On considère la partie :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 2\}$$

1 : Montrer que A admet une borne supérieure.
2 : Montrer que $\sup A = \sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 29 :

1 :

- On a $0 \in \mathbb{Q}$ et $0^2 = 0 < 2$ donc $0 \in A$ d'où A est non vide.
- Soit $x \in A$ donc $x^2 < 2$ d'où $x < \sqrt{2}$. On déduit que $\sqrt{2}$ est un majorant de A donc A est majoré.

On a A partie majoré non vide de $\mathbb{R}$ donc, d'après *l'axiome de la borne supérieure*, A admet une borne supérieure.

2 :

- D'après la question précédente, $\sqrt{2}$ est un majorant de A.
- Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \max\left(\sqrt{2} - \varepsilon, 0\right)$.
  On a $\alpha < \sqrt{2}$ et $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha < r < \sqrt{2}$.
  - On a $\alpha = \max\left(\sqrt{2} - \varepsilon, 0\right)$ donc $\alpha \geq \sqrt{2} - \varepsilon$, or $r > \alpha$ d'où $r > \sqrt{2} - \varepsilon$.
  - On a $\alpha = \max\left(\sqrt{2} - \varepsilon, 0\right)$ donc $\alpha \geq 0$, or $\alpha < r < \sqrt{2}$ donc $0 < r < \sqrt{2}$ donc $r^2 < 2$ d'où $r^2 \leq 2$. On déduit que $r \in A$.

  On déduit que $r \in A$ et $\sqrt{2} - \varepsilon < r$.

On déduit, d'après *la caractérisation de la borne supérieure*, que $\sup A = \sqrt{2}$.

Exercice 30 : Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble :

$$A = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} / m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Solution de l'exercice 30 :

- Vérification de l'existence des bornes supérieure et inférieure de A :
  - On a $0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in A$ donc A est non vide.
  - On a $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$:
  $$-1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq 1$$
  donc A est borné.

  On déduit que A est non vide borné donc, d'après *les axiomes des bornes supérieure et inférieure*, A admet une borne supérieure et une borne inférieure.
- Étude de la borne supérieure :
  - On a $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geq -\frac{1}{n} \geq -1$$
  donc -1 est un minorant de A.
  - Soit $\varepsilon > 0$ et $m = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ donc $m > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon > \frac{1}{m}$ d'où $\frac{1}{m} - 1 < -1 + \varepsilon$ et on a $\frac{1}{m} - 1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{1} \in A$.

  On déduit, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, que $\inf A = -1$.
  Supposons que A admet un plus petit élément donc $\min A = \inf A = -1$ donc $-1 \in A$ donc $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $-1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$ donc $-1 > -\frac{1}{n}$ donc $1 < \frac{1}{n}$ d'où $n < 1$. Absurde car $n \geq 1$ donc A n'admet pas de plus petit élément.
- Étude de la borne inférieure :
  - On a $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq 1$$
  donc 1 est un majorant de A.
  - Soit $\varepsilon > 0$ et $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon > \frac{1}{n}$ d'où $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$ et on a $1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \in A$.

  On déduit, d'après *la caractérisation de la borne supérieure*, que $\sup A = 1$.
  Supposons que A admet un plus grand élément donc $\max A = \sup A = 1$ donc $1 \in A$ donc $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$ donc $1 < \frac{1}{m}$ d'où $m < 1$. Absurde car $m \geq 1$ donc A n'admet pas de plus grand élément.

Exercice 31 : Soit :

$$E = \left\{\frac{4n+9}{2n+3}/n \in \mathbb{N}\right\}$$

1 : Montrer que E est borné.
2 : Montrer que E admet un plus grand élément et que $\max E = 3$.
3 : Montrer que E admet une borne inférieure et que $\inf E = 2$.
4 : E possède-t-il un plus petit élément ?

Solution de l'exercice 31 :

1 : On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{4n+9}{2n+3} \leq \frac{6n+9}{2n+3} = \frac{3(2n+3)}{2n+3} = 3$$

donc E est majoré.

2 : On a $3 = \frac{9}{3} = \frac{4\times 0+9}{2\times 0+3} \in E$ donc E est non vide. Or E est majoré car borné donc, d'après *l'axiome de la borne supérieure*, E admet une borne supérieure.

D'après la question précédente :

- $3 \in E$.
- 3 est un majorant de E car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{4n+9}{2n+3} \leq 3$.

donc E admet un plus grand élément et que $\max E = 3$.

3 : On a E minoré non vide donc, d'après *l'axiome de la borne inférieure*, E admet une borne supérieure.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{4n+9}{2n+3} - 2 = \frac{4n+9-2(2n+3)}{2n+3} = \frac{4n+9-4n-6}{2n+3} = \frac{3}{2n+3} \geq 0$ donc 2 est un minorant de E.
- Soit $\varepsilon > 0$ et :

$$n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 3\right)\right\rfloor + 1$$

donc :

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 3\right)$$

donc :

$$2n+3 > \frac{3}{\varepsilon}$$

donc :

$$\varepsilon > \frac{3}{2n+3} = \frac{4n+9}{2n+3} - 2$$

d'où :

$$2+\varepsilon > \frac{4n+9}{2n+3}$$

et on a $\frac{4n+9}{2n+3} \in E$.

On déduit, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, que $\inf E = 2$.

4 : Supposons que E admet une borne inférieure donc $\min E = \inf E = 2$ donc $2 \in E$ d'où $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $2 = \frac{4n+9}{2n+3}$.
On déduit que $4n+9 = 2(2n+3) = 4n+6$ donc $9 = 6$. Absurde, donc E n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 32 : Soit :

$$E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$$

2 : Montrer que $\max E = \frac{3}{2}$.
3 : Montrer que E admet une borne inférieure et que $\inf E = -1$.
4 : E possède-t-il un plus petit élément ?

Solution de l'exercice 32 :

1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1 + \frac{1}{n} > -1$.

– – Si n est pair alors $(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{n}$ car $n \geq 2$ puisque n est pair.

– Si n est impair alors $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} \leq -1 + 1 = 0 \leq \frac{3}{n}$.

On déduit que, dans tous les cas, $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{n}$.

On déduit que :

$$-1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$$

2 : D'après la question précédente, $\frac{3}{2}$ est un majorant de E et on a $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \in E$ donc $\max E = \frac{3}{2}$.

3 : On a, d'après la première question, E minoré par -1 et non vide car, d'après la question précédente, $\frac{3}{2} \in E$ donc, d'après *l'axiome de la borne inférieure*, E admet une borne inférieure.

– D'après la première question -1 est un minorant de E.

– Soit $\varepsilon > 0$ et $n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \right\rfloor + 1$ donc $n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ donc $2n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $2n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon > \frac{1}{2n+1}$ d'où $-1 + \varepsilon < -1 + \frac{1}{2n+1}$ et on a $-1 + \frac{1}{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \in E$.

On déduit, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, que $\inf E = -1$.

4 : Supposons que E admet un plus petit élément donc $\min A = \inf E = -1$ donc $-1 \in E$ donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $-1 = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

– Si n est pair alors $-1 = (-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \geq 1$. Absurde.

– Si n est impair alors $-1 = (-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} > -1$. Absurde.

On déduit que E n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 33 : Soit :

$$E = \left\{ \frac{n}{np+1} / n, p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1 : Montrer que E admet une borne supérieure et que $\sup E = 1$.
2 : E possède-t-il un plus grand élément ?
3 : Montrer que E admet une borne inférieure et que $\inf E = 0$.
4 : E possède-t-il un plus petit élément ?

Solution de l'exercice 33 :

1 :

– On a $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{np+1} \leq 1$ donc 1 est un majorant de E.

– Soit $\varepsilon > 0$ et $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon > \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1}$ d'où $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1}$ et on a $\frac{n}{n+1} \in E$.

On déduit, d'après *la caractérisation de la borne supérieure*, que $\sup E = 1$.

2 : Supposons que E admet un plus grand élément donc $\max E = \sup E = 1$ donc $1 \in E$ d'où $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 = \frac{n}{np+1}$ donc $n = np + 1$ d'où $1 = n - np = n(1-p) \leq 0$ car $n, p \geq 1$. Absurde, donc E n'admet pas de plus grand élément.

3 :

– On a $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{np+1} \geq 0$ donc 0 est un minorant de E.

– Soit $\varepsilon > 0$ et $p = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ donc $p > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $p + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ d'où $\varepsilon > \frac{1}{p+1}$ et on a $\frac{1}{p+1} = \frac{1}{1p+1} \in E$.

On déduit, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, que $\inf E = 0$.

4 : Supposons que E admet un plus petit élément donc $\min E = \inf E = 0$ donc $0 \in E$ d'où $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 = \frac{n}{np+1}$ d'où $n = 0$. Absurde car $n \geq 1$ donc E n'admet pas de plus petit élément.

5.2 Exercices théoriques :

Exercice 34 : Soit A, B deux partie non vides de $\mathbb{R}$. On note :

$$A+B=\{a+b/(a,b)\in A\times B\}$$

1 : On suppose que A et B sont majorés. Montrer que $A+B$ est majoré et que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
2 : On suppose que A et B sont minorés. Montrer que $A+B$ est minoré et que $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

Solution de l'exercice 34 :

1 : A et B sont majorés donc $\exists M, N\in\mathbb{R}$ tels que $\forall a\in A, a\leq M$ et $\forall b\in A, b\leq N$.
Soit $x\in A+B$ donc $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $x=a+b$ d'où $x=a+b\leq M+N$. On déduit que $\forall x\in A+B, x\leq M+N$ donc $A+B$ est majoré.

- **Méthode 1 :**
  - Soit $x\in A+B$ donc $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $x=a+b$. Or $\sup A$ est un majorant de A et $\sup B$ majorant de B donc $a\leq\sup A$ et $b\leq\sup B$ d'où $x=a+b\leq\sup A+\sup B$. On déduit que $\forall x\in A+B, x\leq\sup A+\sup B$ donc $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
  - Soit $\varepsilon>0$. D'après *la caractérisation de la borne supérieure*, $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $a>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$ et $b>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$ d'où $a+b>\sup A+\sup B-\varepsilon$ et on a $a+b\in A+B$.

  On déduit que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$ et $\forall\varepsilon>0, \exists x\in A+B$ tel que $x>\sup A+\sup B-\varepsilon$ donc, d'après *la caractérisation de la borne supérieure*, $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
- **Méthode 2 :**
  - Soit $x\in A+B$ donc $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $x=a+b$. Or $\sup A$ est un majorant de A et $\sup B$ majorant de B donc $a\leq\sup A$ et $b\leq\sup B$ d'où $x=a+b\leq\sup A+\sup B$. On déduit que $\forall x\in A+B, x\leq\sup A+\sup B$ donc $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$ d'où $\sup(A+B)\leq\sup A+\sup B$ car $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$.
  - Soit $a\in A$ et $b\in B$.
    On a $\sup(A+B)$ majorant de $A+B$ donc $a+b\leq\sup(A+B)$ d'où $a\leq\sup(A+B)-b$. Cette relation étant vraie $\forall a\in A$ donc $\sup(A+B)-b$ est un majorant de A d'où $\sup A\leq\sup(A+B)-b$ car $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
    On a $\sup A\leq\sup(A+B)-b$ donc $b\leq\sup(A+B)-\sup A$. Cette relation étant vraie $\forall b\in B$ donc $\sup(A+B)-\sup A$ est un majorant de B d'où $\sup B\leq\sup(A+B)-\sup A$ car $\sup B$ est le plus petit des majorants de B. On déduit que $\sup A+\sup B\leq\sup(A+B)$.

  On déduit $\sup(A+B)\leq\sup A+\sup B$ et $\sup A+\sup B\leq\sup(A+B)$ donc $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

2 : A et B sont minorés donc $\exists m, n\in\mathbb{R}$ tels que $\forall a\in A, a\geq m$ et $\forall b\in A, b\geq n$.
Soit $x\in A+B$ donc $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $x=a+b$ d'où $x=a+b\geq m+n$. On déduit que $\forall x\in A+B, x\leq m+n$ donc $A+B$ est minoré.

- **Méthode 1 :**
  - Soit $x\in A+B$ donc $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $x=a+b$. Or $\inf A$ est un minorant de A et $\inf B$ minorant de B donc $a\geq\inf A$ et $b\geq\inf B$ d'où $x=a+b\geq\inf A+\inf B$. On déduit que $\forall x\in A+B, x\geq\inf A+\inf B$ donc $\inf A+\inf B$ est un minorant de $A+B$.
  - Soit $\varepsilon>0$. D'après *la caractérisation de la borne inférieure*, $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $a<\inf A+\frac{\varepsilon}{2}$ et $b<\inf B+\frac{\varepsilon}{2}$ d'où $a+b<\inf A+\inf B+\varepsilon$ et on a $a+b\in A+B$.

  On déduit que $\inf A+\inf B$ est un minorant de $A+B$ et $\forall\varepsilon>0, \exists x\in A+B$ tel que $x<\inf A+\inf B+\varepsilon$ donc, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.
- **Méthode 2 :**
  - Soit $x\in A+B$ donc $\exists a\in A, \exists b\in B$ tels que $x=a+b$. Or $\inf A$ est un minorant de A et $\inf B$ minorant de B donc $a\geq\inf A$ et $b\geq\inf B$ d'où $x=a+b\geq\inf A+\inf B$. On déduit que $\forall x\in A+B, x\geq\inf A+\inf B$ donc $\inf A+\inf B$ est un minorant de $A+B$ d'où $\inf(A+B)\geq\inf A+\inf B$ car $\inf(A+B)$ est le plus grand des minorants de $A+B$.
  - Soit $a\in A$ et $b\in B$.
    On a $\inf(A+B)$ minorant de $A+B$ donc $a+b\geq\inf(A+B)$ d'où $a\geq\inf(A+B)-b$. Cette relation étant vraie $\forall a\in A$ donc $\inf(A+B)-b$ est un minorant de A d'où $\inf A\geq\inf(A+B)-b$ car $\inf A$ est le plus grand des minorants de A.
    On a $\inf A\geq\inf(A+B)-b$ donc $b\geq\inf(A+B)-\inf A$. Cette relation étant vraie $\forall b\in B$ donc $\inf(A+B)-\inf A$ est un minorant de B d'où $\inf B\geq\inf(A+B)-\inf A$ car $\inf B$ est le plus grand des minorants de B. On déduit que $\inf A+\inf B\geq\sup(A+B)$.

  On déduit $\inf(A+B)\geq\inf A+\inf B$ et $\inf A+\inf B\geq\inf(A+B)$ donc $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

Exercice 35 : Soit A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A - B = \{a - b/(a,b) \in A \times B\}$$

1 : Montrer que $A - B$ est borné.
2 : Montrer que A admet une borne supérieure et que $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.
3 : Montrer que A admet une borne inférieure et que $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

Solution de l'exercice 35 :

1 : A et B sont bornés donc $\exists M, m, N, n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall a \in A, m \leq a \leq M$ et $\forall b \in A, n \leq b \leq N$.
Soit $x \in A - B$ donc $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $x = a - b$, or $m \leq a \leq M$ et $n \leq b \leq N$ donc $m - N \leq a - b \leq M - n$ d'où $m - N \leq x \leq M - n$. On déduit que $\forall x \in A - B, m - N \leq x \leq M - n$ donc $A - B$ est borné.
2 : A et B sont non vides donc $\exists a \in A$ et $b \in B$ d'où $a - b \in A - B$. On déduit que $A - B$ est non vide, or il est majoré car borné d'après la question précédente donc, d'après *l'axiome de la borne supérieure*, $A - B$ admet une borne supérieure.

- **Méthode 1 :**
  - Soit $x \in A - B$ donc $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $x = a - b$. Or $\sup A$ est un majorant de A et $\inf B$ minorant de B donc $a \leq \sup A$ et $b \geq \inf B$ d'où $x = a - b \leq \sup A - \inf B$. On déduit que $\forall x \in A - B, x \leq \sup A - \inf B$ donc $\sup A - \inf B$ est un majorant de $A - B$.
  - Soit $\varepsilon > 0$. D'après *les caractérisations des bornes supérieure et inférieure*, $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ et $b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $a - b > \sup A - \inf B - \varepsilon$ et on a $a - b \in A - B$.

  On déduit que $\sup A - \inf B$ est un majorant de $A - B$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A - B$ tel que $x > \sup A - \inf B - \varepsilon$ donc, d'après *la caractérisation de la borne supérieure*, $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.
- **Méthode 2 :**
  - Soit $x \in A - B$ donc $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $x = a - b$. Or $\sup A$ est un majorant de A et $\inf B$ minorant de B donc $a \leq \sup A$ et $b \geq \inf B$ d'où $x = a - b \leq \sup A - \inf B$. On déduit que $\forall x \in A - B, x \leq \sup A - \inf B$ donc $\sup A - \inf B$ est un majorant de $A - B$ d'où $\sup(A - B) \leq \sup A - \inf B$ car $\sup(A - B)$ est le plus petit des majorants de $A - B$.
  - Soit $a \in A$ et $b \in B$.
    On a $\sup(A - B)$ majorant de $A - B$ donc $a - b \leq \sup(A - B)$ d'où $a \leq \sup(A - B) + b$. Cette relation étant vraie $\forall a \in A$ donc $\sup(A - B) + b$ est un majorant de A d'où $\sup A \leq \sup(A - B) + b$ car $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
    On a $\sup A \leq \sup(A - B) + b$ donc $b \geq \sup A - \sup(A - B)$. Cette relation étant vraie $\forall b \in B$ donc $\sup A - \sup(A - B)$ est un minorant de B d'où $\inf B \geq \sup A - \sup(A - B)$ car $\inf B$ est le plus grand des minorants de B. On déduit que $\sup(A - B) \geq \sup A - \inf B$.

  On déduit $\sup(A - B) \leq \sup A - \inf B$ et $\sup(A - B) \geq \sup A - \inf B$ donc $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

3 : A et B sont non vides donc $\exists a \in A$ et $b \in B$ d'où $a - b \in A - B$. On déduit que $A - B$ est non vide, or il est minoré car borné d'après la première question donc, d'après *l'axiome de la borne inférieure*, $A - B$ admet une borne inférieure.

- **Méthode 1 :**
  - Soit $x \in A - B$ donc $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $x = a - b$. Or $\inf A$ est un minorant de A et $\sup B$ majorant de B donc $a \geq \inf A$ et $b \leq \sup B$ d'où $x = a - b \geq \inf A - \sup B$. On déduit que $\forall x \in A - B, x \geq \inf A - \sup B$ donc $\inf A - \sup B$ est un minorant de $A - B$.
  - Soit $\varepsilon > 0$. D'après *les caractérisations des bornes supérieure et inférieure*, $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $a < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ et $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $a - b < \inf A - \sup B + \varepsilon$ et on a $a - b \in A - B$.

  On déduit que $\inf A - \sup B$ est un minorant de $A - B$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A - B$ tel que $x < \inf A - \sup B + \varepsilon$ donc, d'après *la caractérisation de la borne inférieure*, $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.
- **Méthode 2 :**
  - Soit $x \in A + B$ donc $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $x = a - b$. Or $\inf A$ est un minorant de A et $\sup B$ majorant de B donc $a \geq \inf A$ et $b \leq \inf B$ d'où $x = a - b \geq \inf A - \sup B$. On déduit que $\forall x \in A - B, x \geq \inf A - \sup B$ donc $\inf A - \sup B$ est un minorant de $A - B$ d'où $\inf(A - B) \geq \inf A - \sup B$ car $\inf(A - B)$ est le plus grand des minorants de $A - B$.
  - Soit $a \in A$ et $b \in B$.
    On a $\inf(A - B)$ minorant de $A - B$ donc $a - b \geq \inf(A - B)$ d'où $a \geq \inf(A - B) + b$. Cette relation étant vraie $\forall a \in A$ donc $\inf(A + B) + b$ est un minorant de A d'où $\inf A \geq \inf(A + B) + b$ car $\inf A$ est le plus grand des minorants de A.
    On a $\inf A \geq \inf(A - B) + b$ donc $b \leq \inf A - \inf(A - B)$. Cette relation étant vraie $\forall b \in B$ donc $\inf A - \inf(A - B)$ est un majorant de B d'où $\sup B \leq \inf A - \inf(A - B)$ car $\sup B$ est le plus petit des majorants de B. On déduit que $\inf(A - B) \leq \inf A - \sup B$.

  On déduit $\inf(A - B) \geq \inf A - \sup B$ et $\inf(A - B) \leq \inf A - \sup B$ donc $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.