TD - Limite et continuité

Exercice 1 : Calculer les limites :

$$1)\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\quad 2)\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\quad 3)\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\quad 4)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}-\frac{1}{2x}\right)$$

Exercice 2 : Calculer les limites :

$$1)\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}\quad 2)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}\quad 3)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)\quad 4)\lim_{x\to 0}x^{\sin x}$$

Exercice 3 : Calculer les limites :

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln^5 x}{\ln(1+2x)}\quad 2)\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad 3)\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}\quad 4)\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Exercice 4 : Montrer que les limites suivantes n'existent pas :

$$1)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|x-1|}\quad 2)\lim_{x\to 0}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\quad 3)\lim_{x\to+\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\quad 4)\lim_{x\to +}\frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$$

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique.
Montrer que si f admet une limite en $+\infty$ alors f est constante.

Exercice 6 : Équation fonctionnelle : Soit une fonction $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(xf(y))=yf(x), \lim_{0}f=+\infty \text{ et } \lim_{+\infty}f=0$$

1 : Montrer que f admet au moins un point fixe a.
2 : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, f(a^n)=a^n$.
3 : En déduire que $a=1$.
4 : Montrer que $\forall x>0, f(x)=\frac{1}{x}$.

Exercice 7 : Équation fonctionnelle :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(2x+1)=f(x)$.
1 : Soit $x\in\mathbb{R}$ et on considère la suite (x_n) définie par $x_0=x$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=\frac{x_n-1}{2}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, f(x_n)=f(x)$.
2 : Déterminer le terme général de la suite (x_n). En déduire $\lim x_n$.
3 : En déduire que f est constante.

Exercice 8 : Équation fonctionnelle :
Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$.
1 : Calculer $f(0)$. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=-f(x)$.
2 : Montrer que $\forall n\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}, f(nx)=nf(x)$.
3 : On pose $f(1)=a$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a}{n}$.
4 : En déduire, $\forall r\in\mathbb{Q}, f(r)=ar$.
5 : Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ax$.

Exercice 9 :
1 : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, l'équation $x^n+x-1=0$ admet au moins une racine réelle.
2 : Montrer que l'équation $e^x=\sin^2 x$ admet au moins une racine réelle.

Exercice 10 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que $\exists c\in[a,b], 2f(a)+3f(b)=5f(c)$.

Exercice 11 :
1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle $\forall x \in I, f(x) \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est constante sur I.
2 : Application : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle $f^2 = f$. Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.
Exercice 12 :
1 : Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$ telle que $\lim_a f \lim_b f < 0$. Montrer que $\exists x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.
2 : Application : Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet une racine réelle.
3 : Application : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une racine dans $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
4 : Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$.
Exercice 13 : Points fixes : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
1 : Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2 : Application : Soient $f, g : [a, b] \to [a, b]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$.
2 - a : Montrer que l'ensemble A des points fixes de f admet une borne inférieure m.
2 - b : Montrez que $m \in A$.
2 - c : Montrez que $\forall a \in A, g(a) \in A$. En déduire que $g(m) \geq m$ puis que $g(m) \geq f(m)$.
2 - d : Conclure que $\exists c \in [a, b], f(c) = g(c)$.
Exercice 14 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a, b], f(x) > 0$.
Montrer que $\exists m > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \geq m$.
Exercice 15 : Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles :

$$A = \{x^3 - x / x \geq [0, 1]\} \text{ et } B = \{x \ln x / x > 0\}$$

Exercice 16 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.
1 : On pose $a = \lim_{+\infty} f$. Montrer que $\exists A > 0$ tel que $\forall x \in [A, +\infty[, a - 1 \leq f(x) < a + 1$.
2 : On pose $b = \lim_{-\infty} f$. Montrer que $\exists B > 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, B], b - 1 \leq f(x) < b + 1$.
3 : Montrer que f est bornée sur $[A, B]$.
4 : En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$. f atteint-elle ses bornes ?
Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$.
1 : Montrer que $\exists A > 0$ tel que $\forall |x| \geq A, f(x) \geq |f(0)| + 1$.
2 : Montrer que $\exists c \in [-A, A], f(c) = \inf_{[-A,A]} f$.
3 : En déduire que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et que f atteint sa borne inférieure.
Exercice 18 :
1 : Montrer que l'équation $x^2 = x \sin x + \cos x$ admet exactement deux solutions réelles.
2 : Construire une fonction *Python* qui retourne deux valeurs approchées des solutions à la précision 10^{-3}.
Exercice 19 :
1 : Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer.
2 : Étudier la continuité et la monotonie de f^{-1}.
Exercice 20 : On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x^2 + 1} \end{array}$$

1 : Déterminer les images des intervalles $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$, $]-2, +\infty[$ et $[-2, 2]$.
2 : Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, 1]$ vers un intervalle à déterminer.
3 : Déterminer la réciproque de f et donner, sans calcul, sa monotonie.