TD - Calcul algébrique - Correction

1 Sommes :

1.1 Sommes :

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$$

Solution de l'exercice 1 : On a :

$$\sum_{k=0}^{n} kk! = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=0}^{n}((k+1)k! - k!) = \sum_{k=0}^{n}((k+1)! - k!) = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

car $\sum_{k=0}^{n}((k+1)! - k!)$ est une somme télescopique.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Solution de l'exercice 2 : On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 3 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Solution de l'exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

– **Méthode 1 :** On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} (k^2+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(2n+4) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

– **Méthode 2 :** On remarque que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{(k-1)((k-1)+1)((k-1)+2)}{3} &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \\
&= \frac{k(k+1)(k+2-(k-1))}{3} \\
&= \frac{3k(k+1)}{3} \\
&= k(k+1)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{(k-1)((k-1)+1)((k-1)+2)}{3}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(0-1)\times((0-1)+1)\times((0-1)+2)}{3}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

car la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{(k-1)((k-1)+1)((k-1)+2)}{3}\right)$ est télescopique.

- **Méthode 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0\times 1 = 0 = \frac{0\times(0+1)\times(0+2)}{3}$ donc la relation est vraie pour $n=0$.
  - Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\\ &= \frac{(n+1)((n+1)+2)((n+1)+2)}{3}\end{aligned}$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$.

On déduit, d'après *le principe de récurrence*, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

1 : Montrer que :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \sin(kx)\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{kx}{2} - \sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k-1)x}{2}$$

2 : En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Solution de l'exercice 4 :

1 : Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. On a :

$$\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{kx}{2} - \sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k-1)x}{2} = \sin\frac{kx}{2}\left(\sin\frac{(k+1)x}{2} - \sin\frac{(k-1)x}{2}\right)$$

or :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

donc :

$$\sin\frac{(k+1)x}{2} - \sin\frac{(k-1)x}{2} = 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)x}{2} - \frac{(k-1)x}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)x}{2} + \frac{(k-1)x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{kx}{2}$$

d'où :

$$\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{kx}{2}-\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k-1)x}{2}=\sin\frac{kx}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{kx}{2}\right)=2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin(kx)\sin\frac{x}{2}$$

2 : On a :

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\sin\frac{x}{2}$$

Or, d'après la question 1, :

$$\forall k\in\{1,\dots,n\},\sin(kx)\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{kx}{2}-\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k-1)x}{2}$$

donc :

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{kx}{2}-\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k-1)x}{2}\right)$$

On pose $\forall k\in\mathbb{N}, a_k=\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k-1)x}{2}$ donc :

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$

La somme $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$ étant télescopique donc :

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=a_{n+1}-a_1=\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$$

On déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

car $\sin\frac{x}{2}\neq 0$ puisque $x\notin\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$.

1.2 Sommes doubles :

Exercice 5 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{i,j=1}^{n} i2^j$$

Solution de l'exercice 5 : Les indices sont séparés donc :

$$\sum_{i,j=1}^{n} i2^j=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}2^j\right)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{2^{n+1}-2}{2-1}\right)=n(n+1)\left(2^n-1\right)$$

Exercice 6 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer la somme :

$$\sum_{i,j=0}^{n}(2^i-1)2^{ij}$$

Solution de l'exercice 6 : On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=0}^{n}(2^i-1)2^{ij} &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(2^i-1)2^{ij}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((2^i-1)\sum_{j=0}^{n}2^{ij}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((2^i-1)\sum_{j=0}^{n}\left(2^i\right)^j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}(2^i-1)\frac{2^{i(n+1)}-1}{2^i-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(2^{i(n+1)}-1\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}2^{i(n+1)}-\sum_{i=0}^{n}1\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(2^{n+1}\right)^i-(n+1)\\
&= \frac{2^{(n+1)^2}-1}{2^{n+1}-1}-(n+1)
\end{aligned}$$

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j),\quad \sum_{1\le i,j\le n}\max(i,j) \text{ et } \sum_{1\le i,j\le n}|i-j|$$

Solution de l'exercice 7 :

– **Calcul de** $\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)$: On a :

$$\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)$$

Or :

– $\forall j\in\{1,\dots,i\}, \min(i,j)=j$ donc :

$$\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)=\sum_{j=1}^{i}j=\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}(i^2+i)$$

– $\forall j\in\{i+1,\dots,i\}, \min(i,j)=i$ donc :

$$\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)=\sum_{j=i+1}^{n}i=(n-(i+1)+1)i=(n-i)i=ni-i^2$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(i^2+i)+\sum_{i=1}^{n}(ni-i^2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i+n\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}i^2\\
&= \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

donc :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On remarque que :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

– **Calcul de** $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)$:

– **Méthode** 1 : On a :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\max(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\max(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)$$

Or :

– $\forall j\in\{1,\dots,i\},\max(i,j)=i$ donc :

$$\sum_{j=1}^{i}\max(i,j)=\sum_{j=1}^{i}i=i\sum_{j=1}^{i}1=i^2$$

– $\forall j\in\{i+1,\dots,i\},\max(i,j)=j$ donc :

$$\sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)=\sum_{j=i+1}^{n}j=\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{i}j=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}=\frac{n(n+1)-i^2-i}{2}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n(n+1)-i^2-i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}n(n+1)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}\text{ et }\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

donc :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{12}(2n+1+6n-3)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

– **Méthode** 2 : On remarque que :

$$\forall i,j\in\{1,\dots,n\},\max(i,j)+\min(i,j)=i+j$$

donc :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)+\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)=\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)$$

Or :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)=\sum_{1\leq i,j\leq n}i+\sum_{1\leq i,j\leq n}j=2\sum_{1\leq i,j\leq n}i=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i=2\sum_{i=1}^{n}ni=2n\sum_{i=1}^{n}i=2n\frac{n(n+1)}{2}=n^2(n+1)$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j) &= \sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)-\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)\\ &= n^2(n+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)}{6}(6n-2n-1)\\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\end{aligned}$$

– **Calcul de** $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}|i-j|$: On remarque que :

$$\forall i,j\in\{1,\dots,n\}, |i-j|=\max(i,j)-\min(i,j)$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j| &= \sum_{1\leq i,j\leq n}(\max(i,j)-\min(i,j))\\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)-\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)\\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(n-1}{3}\\ &= \frac{n(n^2-1)}{3}\end{aligned}$$

Exercice 8 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

Soit $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$.

1 : Montrer que :

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2=2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\right)$$

2 : En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

Solution de l'exercice 8 :

1 : On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}(x_i^2y_j^2-2x_iy_jx_jy_i+x_j^2y_i^2)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}x_i^2y_j^2-2\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_ix_jy_j+\sum_{i,j=1}^{n}x_j^2y_i^2\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_jy_j\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\\ &= 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\right)\end{aligned}$$

2 : On a :

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geq 0$$

car il s'agit d'une somme de nombre positifs donc, d'après la question précédente, :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\geq 0$$

d'où :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2$$

1.3 Sommes triangulaires :

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme :

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n}(i+j)$$

Solution de l'exercice 9 : On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i\leq j\leq n}(i+j) &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}(i+j)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}i+\sum_{i=0}^{j}j\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2}+j(j+1)\right)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n}j(j+1)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n}(j^2+j)\\
&= \frac{3}{2}\left(\sum_{j=0}^{n}j^2+\sum_{j=0}^{n}j\right)\\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{4}(2n+1+3)\\
&= \frac{n(n+1)}{4}(2n+4)\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} j$$

Solution de l'exercice 10 : On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} j &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j \\
&= \sum_{j=2}^{n}(j-1)j \\
&= \sum_{j=2}^{n}(j^2-j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(j^2-j) \\
&= \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3) \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(2n-2) \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 11 : Soit x un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k$$

Solution de l'exercice 11 :

- Si $x = 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

– On suppose que $x \neq 1$. On a $\forall k \in \{1, \dots, n\}, k = \sum_{p=1}^{k} 1$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{k} 1\right) x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} x^k \\
&= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} x^k \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{x^{n+1} - x^p}{x - 1} \\
&= \frac{1}{x-1} \sum_{p=1}^{n} \left(x^{n+1} - x^p\right) \\
&= \frac{1}{x-1} \left(\sum_{p=1}^{n} x^{n+1} - \sum_{p=1}^{n} x^p\right) \\
&= \frac{1}{x-1} \left(nx^{n+1} - \frac{x^{n+1} - x}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \left(n(x-1)x^{n+1} - x^{n+1} + x\right) \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \left(nx^{n+2} - nx^{n+1} - x^{n+1} + x\right) \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \left(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\right) \\
&= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

Solution de l'exercice 12 : On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} j\frac{(j-1)j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24}\left(3n(n+1)-2(2n+1)\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24}\left(3n^2+3n-4n-2\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24}\left(3n^2-n-2\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24}(3n+2)(n-1) \\
&= \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}
\end{aligned}$$

Exercice 13 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer la somme :

$$\sum_{i+j\leq n}(i+j)^2$$

Solution de l'exercice 13 :

– **Méthode 1 :**

$$\begin{aligned}
\sum_{i+j\le n}(i+j)^2 &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}(i+j)^2\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}k^2\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}k^2\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(k^2\sum_{i=0}^{k}1\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)k^2\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+k^2\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}k^3+\sum_{k=0}^{n}k^2\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(3n(n+1)+2(2n+1))\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+3n+4n+2)\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+7n+2)\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(3n+1)(n+2)\\
&= \frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{12}
\end{aligned}$$

– **Méthode 2 :**

$$\begin{aligned}
\sum_{i+j\leq n}(i+j)^2 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(i+j)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}j^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}j^2-\sum_{j=0}^{i-1}j^2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(i-1)i(2(i-1)+1)}{6}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\sum_{i=0}^{n}\frac{(i-1)i(2(i-1)+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n}\left((i^2-i)(2i-1)\right) \\
&= \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n}\left(2i^3-3i^2+i\right) \\
&= \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{12}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{n(n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(2(n+1)(2n+1)-n(n+1)+(2n+1)-1\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(4n^2+6n+2-n^2-n+2n+1-1\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+7n+2) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}(3n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{12}
\end{aligned}$$

Vérification à l'aide de Python :

```
def test(n):
    S = 0
    for i in range(n + 1):
        for j in range(n + 1):
            if i + j <= n:
                S += (i + j)**2
    print(S)

In [1]: n = 10

In [2]: test(n)
3410

In [3]: n*(n + 1)*(n + 2)*(3*n + 1)/12
Out[3]: 3410.0

In [4]: n = 20

In [5]: test(n)
46970

In [6]: n*(n + 1)*(n + 2)*(3*n + 1)/12
Out[6]: 46970.0
```

2 Produits :

2.1 Produits :

Exercice 14 : Calculer :

$$\prod_{k=1}^{7}\cos\frac{k\pi}{15}$$

Solution de l'exercice 14 : On pose :

$$C=\prod_{k=1}^{7}\cos\frac{k\pi}{15}\text{ et }S=\prod_{k=1}^{7}\sin\frac{k\pi}{15}$$

donc :

$$\begin{aligned}CS &= \left(\prod_{k=1}^{7}\cos\frac{k\pi}{15}\right)\left(\prod_{k=1}^{7}\sin\frac{k\pi}{15}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{7}\left(\sin\frac{k\pi}{15}\cos\frac{k\pi}{15}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{7}\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{15}\\ &= \frac{1}{2^7}\prod_{k=1}^{7}\sin\frac{2k\pi}{15}\\ &= \frac{1}{2^7}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{6\pi}{15}\sin\frac{8\pi}{15}\sin\frac{10\pi}{15}\sin\frac{12\pi}{15}\sin\frac{14\pi}{15}\end{aligned}$$

Or :

- $\sin\frac{8\pi}{15}=\sin\left(\pi-\frac{8\pi}{15}\right)=\sin\frac{7\pi}{15}$.
- $\sin\frac{10\pi}{15}=\sin\left(\pi-\frac{10\pi}{15}\right)=\sin\frac{5\pi}{15}$.
- $\sin\frac{12\pi}{15}=\sin\left(\pi-\frac{12\pi}{15}\right)=\sin\frac{3\pi}{15}$.
- $\sin\frac{14\pi}{15}=\sin\left(\pi-\frac{14\pi}{15}\right)=\sin\frac{\pi}{15}$.

donc :

$$CS=\frac{1}{2^7}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{6\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\sin\frac{5\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}=\frac{1}{2^7}S$$

On a $\forall k\in\{1,\dots,7\},\frac{k\pi}{15}\notin\{n\pi/n\in\mathbb{Z}\}$ donc $\forall k\in\{1,\dots,7\},\sin\frac{k\pi}{15}\neq 0$ d'où $S\neq 0$.

On a $CS=\frac{1}{2^7}S$ et $S\neq 0$ donc $CS=\frac{1}{2^7}S$.

2.2 Produits télescopiques :

Exercice 15 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer le produit :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k+1}$$

Solution de l'exercice 15 : On a :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2(k+1)+1}{2k+1}=\frac{2(n+1)+1}{2\times 1+1}=\frac{2n+3}{3}$$

car le produit $\prod_{k=1}^{n}\frac{2(k+1)+1}{2k+1}$ est télescopique.

Exercice 16 : Soit $n \geq 3$. Calculer le produit :

$$\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right)$$

Solution de l'exercice 16 :

- **Méthode 1 :** On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right) &= \prod_{k=3}^{n}\frac{k^2-4}{k^2}\\
&= \prod_{k=3}^{n}\frac{(k-2)(k+2)}{k^2}\\
&= \prod_{k=3}^{n}\left(\frac{k-2}{k-1}\frac{k-1}{k}\frac{k+2}{k+1}\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \left(\prod_{k=3}^{n}\frac{k-2}{k-1}\right)\left(\prod_{k=3}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=3}^{n}\frac{k+2}{k+1}\right)\left(\prod_{k=3}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \frac{3-2}{n-1}\frac{3-1}{n}\frac{n+2}{3+1}\frac{n+1}{3}\\
&= \frac{2(n+2)(n+1)}{6n(n-1)}
\end{aligned}$$

- **Méthode 2 :** On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right) &= \prod_{k=3}^{n}\frac{k^2-4}{k^2}\\
&= \prod_{k=3}^{n}\frac{(k-2)(k+2)}{k^2}\\
&= \frac{\left(\prod_{k=3}^{n}(k-2)\right)\left(\prod_{k=3}^{n}(k+2)\right)}{\prod_{k=3}^{n}k^2}\\
&= \frac{\left(\prod_{k=3}^{n}(k-2)\right)\left(\prod_{k=3}^{n}(k+2)\right)}{\left(\prod_{k=3}^{n}k\right)^2}
\end{aligned}$$

Or :

- $\prod_{k=3}^{n}(k-2) = \prod_{k=1}^{n-2}k = (n-2)!$.
- $\prod_{k=3}^{n}(k+2) = \prod_{k=5}^{n+2}k = \frac{1}{24}\prod_{k=1}^{n+2}k = \frac{(n+2)!}{24}$.
- $\prod_{k=3}^{n}k = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}k = \frac{n!}{2}$.

donc :

$$\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right) = \frac{4(n-2)!(n+2)!}{24(n!)^2} = \frac{(n-2)!(n+2)(n+1)n!}{6n!n(n-1)(n-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{6n(n-1)}$$

Exercice 17 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et on se propose de calculer le produit :

$$P = \prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x$$

1 : Calculer P lorsque $x \in \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
2 : On suppose que $x \notin \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
2 - 1 : Vérifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \cos \sin 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2 \sin 2^k x}$$

2 - 2 : En déduire la valeur de P.

Solution de l'exercice 17 :
1 : On a $x \in \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ donc $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pi m$ d'où :

$$\prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x = \prod_{k=0}^{n} \cos 2^k \pi m = \prod_{k=0}^{n} (-1)^{2^k m} = (-1)^{2^0 m} \prod_{k=1}^{n} (-1)^{2^k m} = (-1)^{2^0 m} \prod_{k=1}^{n} 1 = (-1)^m$$

car $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(k\pi) = (-1)^k$.
2 :
2 - 1: On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sin 2^{k+1} x = 2 \sin 2^k x \cos \sin 2^k x$$

Or $x \notin \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, 2^k x \notin \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, \sin 2^k x \neq 0$ d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \cos \sin 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2 \sin 2^k x}$$

2 - 2: D'après la question précédente :

$$\prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x = \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin 2^{k+1} x}{2 \sin 2^k x} = \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin 2^{k+1} x}{\sin 2^k x} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin 2^{n+1} x}{\sin 2^0 x} = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$$

car le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin 2^{k+1} x}{\sin 2^k x}$ est télescopique.

3 Factorielle et coefficients binomiaux :

3.1 Factorielle :

Exercice 18 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$$

Solution de l'exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$n! = 2 \times 3 \times \cdots \times n \leq n \times n \times \cdots \times n = n^{n-1}$$

et :

$$n! = 2 \times 3 \times \cdots \times n \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$$

donc $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$.

Exercice 19 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

Solution de l'exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Méthode 1 :** On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(n+k) &= (n+1)(n+2)\cdots(n+n) \\
&= (n+1)(n+2)\cdots(2n) \\
&= \frac{1\times 2\times\cdots\times n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= \frac{(1\times 3\times\cdots(2n-1))\,(2\times 4\times\cdots\times(2n))}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= \frac{(1\times 3\times\cdots(2n-1))\,((2\times 1)\times(2\times 2)\times\cdots\times(2n))}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= \frac{(1\times 3\times\cdots(2n-1))\,(2^n(1\times 2\times\cdots\times n))}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= 2^n\frac{(1\times 3\times\cdots(2n-1))\,(1\times 2\times\cdots\times n)}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= 2^n\,(1\times 3\times\cdots(2n-1)) \\
&= 2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)
\end{aligned}$$

- **Méthode 2 :** On a :

$$\begin{aligned}
2^n n!\prod_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2^n\prod_{k=1}^{n}k\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= \prod_{k=1}^{n}2k\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= \prod_{k=1}^{n}(2k)(2k-1) \\
&= (2n)!
\end{aligned}$$

donc :

$$2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{n!}=\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}k}=\prod_{k=n+1}^{2n}k=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

Exercice 20 : Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

Solution de l'exercice 20 : On va procéder par récurrence sur n. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On a $1!=1\le 1=\left(\frac{1+1}{2}\right)^{1+1}$ donc la relation est vraie pour $n=0$.

On suppose que la relation est vraie pour n donc :

$$n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

donc :

$$(n+1)!=(n+1)n!\le(n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}=2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+2}$$

Or, d'après *le binôme de Newton* :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}\frac{1}{(n+1)^k}\ge\sum_{k=0}^{1}\binom{n+2}{k}\frac{1}{(n+1)^k}=1+\binom{n+2}{1}\frac{1}{n+1}=1+\frac{n+2}{n+1}\ge 1+1=2$$

donc :

$$(n+2)^{n+2} \geq 2(n+1)^{n+2}$$

d'où :

$$(n+1)! \leq 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+2} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+2}$$

On déduit que la relation est vraie pour $n+1$ donc, d'après *le principe de récurrence* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

3.2 Coefficients binomiaux :

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le produit :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}} - 1\right)$$

Solution de l'exercice 21 : D'après *la formule du triangle de Pascal* :

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\}, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

donc :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}} - 1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} + 1 - 1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{0}} = 1$$

car le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$ est télescopique.

Exercice 22 : Montrer que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$$

Solution de l'exercice 22 : Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

– Si $n = 0$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p}{0} = 1 = \binom{p+1}{0} = \binom{p+n+1}{n}$$

– Sinon, d'après *la formule du triangle de Pascal*, $\forall k \in \{1,\dots,n\}$:

$$\binom{p+k+1}{k} = \binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1}$$

donc :

$$\binom{p+k}{k} = \binom{p+k+1}{k} - \binom{p+k}{k-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} &= \binom{p}{0}+\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k}\\
&= 1+\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{p+k+1}{k}-\binom{p+k}{k-1}\right)\\
&= 1+\binom{p+n+1}{n}-\binom{p+1}{1-1} \qquad \text{car la somme } \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{p+k+1}{k}-\binom{p+k}{k-1}\right) \text{ est télescopique}\\
&= 1+\binom{p+n+1}{n}-\binom{p+1}{0}\\
&= 1+\binom{p+n+1}{n}-1\\
&= \binom{p+n+1}{n}
\end{aligned}$$

Exercice 23 : Soit $n,p\in\mathbb{N}$ tels que $p\leq n$.

1 : Montrer que $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

2 : En déduire $\sum_{k=1}^{n}k^m$ pour $m=1,2$ et 3.

Solution de l'exercice 23 :

1 : Soit $k\in\{p,\dots,n\}$. D'après *la formule du triangle de Pascal*, :

$$\binom{k}{p}+\binom{k}{p+1}=\binom{k+1}{p+1}$$

donc :

$$\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)\\
&= \binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1} \qquad \text{car il s'agit d'une somme télescopique.}\\
&= \binom{n+1}{p+1} \qquad \text{car } \tbinom{p}{p+1}=0 \text{ puisque } p<p+1.
\end{aligned}$$

2 :

- Pour $p=1$, $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{1+1}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Pour $p=2$, $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{2+1}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\binom{n+1}{3}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

– Pour $p=3$, $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3} = \binom{n+1}{3+1}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \binom{n+1}{4} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3-3k^2+2k) = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k\\ &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left((n-2)(n-1)+2(2n+1)-4\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(n^2-3n+2+4n+2-4\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n)\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Exercice 24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n-1}{p}$$

Solution de l'exercice 24 : Soit $k \in \{1,\dots,p\}$. D'après *la formule du triangle de Pascal*, :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

donc :

$$(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k} + (-1)^k\binom{n-1}{k-1} = (-1)^k\binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} &= (-1)^0\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{p}\left((-1)^k\binom{n-1}{k}-(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right)\\
&= 1+(-1)^p\binom{n-1}{p}-(-1)^{1-1}\binom{n-1}{1-1} \qquad \text{car il s'agit d'une somme télescopique.}\\
&= 1+(-1)^p\binom{n-1}{p}-(-1)^0\binom{n-1}{0}\\
&= 1+(-1)^p\binom{n-1}{p}-1\\
&= (-1)^p\binom{n-1}{p}
\end{aligned}$$

Exercice 25 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$$

Solution de l'exercice 25 :

- **Calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$:**
  - Si $n=0$ alors :
  $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{0}k\binom{0}{k}=0\binom{0}{0}=0$$
  - Supposons que $n\neq 0$: On a $\forall k\in\{1,\dots,n\}$:
  $$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=n\binom{n-1}{k-1}$$
  donc :
  $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$
  Or :
  $$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=2^{n-1}$$
  donc :
  $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

  On remarque que la relation $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ reste valable pour $n=0$ donc :
  $$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

- **Calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$:**
  - Si $n=0$ alors :
  $$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{0}k^2\binom{0}{k}=0^2\binom{0}{0}=0$$

– Si $n=1$ alors :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{1} k^2\binom{1}{k} = 0^2\binom{1}{0} + 1^2\binom{1}{1} = 1$$
– Supposons que $n \geq 2$: On a $\forall k \in \{2,\dots,n\}$:
$$k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)\left(k\binom{n}{k}\right) = (k-1)\left(n\binom{n-1}{k-1}\right) = n\left((k-1)\binom{n-1}{k-1}\right) = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$
donc :
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}$$
Or :
$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = 2^{n-2}$$
donc :
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$
On déduit que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n-1+2)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}\end{aligned}$$

On remarque que la relation $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$ reste valable pour $n=0$ et $n=1$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

Exercice 26 :

1 : Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \{0,\dots,n\}, \forall k \in \{0,\dots,p\}, \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$$
2 : En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \{0,\dots,n\}, \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$$

Solution de l'exercice 26 :

1 : Soit $n \in \mathbb{N}, p \in \{0,\dots,n\}$ et $k \in \{0,\dots,p\}$ donc :
$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!((n-k)-(p-k))!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$$
2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0,\dots,n\}$ donc, d'après la question précédente, :
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$$
Or :
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}$$

Exercice 27 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1 : Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 2$.

2 : Montrer que $\forall k\in\{1,\dots,n\},\ \dbinom{n}{k}\leq\dfrac{n^k}{k!}$.

3 : En déduire que $\forall k\in\{1,\dots,n\},\ \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}\leq\dfrac{1}{2^{k-1}}$.

4 : Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$.

Solution de l'exercice 27 :

1 : D'après *la formule du binôme de Newton* :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\geq\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}=1+\frac{n}{n}=2$$

2 : Soit $k\in\{1,\dots,n\}$ donc :

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\leq\frac{nnn\cdots n}{k!}=\frac{n^k}{k!}$$

3 : Soit $k\in\{1,\dots,n\}$ donc, d'après la question précédente, :

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\leq\frac{1}{n^k}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{k!}$$

- Si $k=1$ alors :
$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\leq\frac{1}{k!}=\frac{1}{1!}=1\leq 1=\frac{1}{2^{1-1}}=\frac{1}{2^{k-1}}$$
- Si $k\geq 2$ alors :
$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\leq\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k}=\frac{1}{2\times 3\times\cdots\times k}\leq\frac{1}{2\times 2\times\cdots\times 2}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

4 : D'après *la formule du binôme de Newton* :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\
&= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\
&\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\
&= 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\
&= 1+2-\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 3-\frac{1}{2^{n-1}}\\
&< 3
\end{aligned}$$