MATEMATIK B-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

2010

Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

MATEMATIK B-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

2010

Dette hæfte indeholder løsninger af matematik B eksamensopgaver og eksempler på eksamensopgaver fra opgavekommissionen. I kapitel 3 vil man som læser se, at delprøve 1 løses uden hjælpemidler og efterfølgende delprøve 2 med hjælpemidler. Eksamensopgaverne i kapitel 3 har den respektive overskrift og navn på eksamenssættet samt opgave nummeret X.XXX. De løste opgaver i kapitel 3 er hermed listet fra årstal 2007 til 2010. Der er ligeledes tilføjet appendiks 1 for opgavesæt, tilbage i år 2011.

For anvendelse af dokumentet, anbefales det, at man prøver at løse opgaven først, inden man anvender løsningerne.

Eksamensopgaver:
- Matematik B-niveau, HF - maj 2007
- Matematik B-niveau, HF - august 2007
- Matematik B-niveau, HF - december 2007
- Matematik B-niveau, HF - maj 2008
- Matematik B-niveau, HF - august 2008
- Matematik B-niveau, HF - december 2008
- Matematik B-niveau, HF - maj 2009
- Matematik B-niveau, HF - august 2009
- Matematik B-niveau, HF - december 2009
- Matematik B-niveau, HF - juni 2010
- Matematik B-niveau, HF - august 2010
- Matematik B-niveau, HF - december 2010

Appendiks 1:
- Matematik B-niveau, HF - maj 2011
- Matematik B-niveau, HF - august 2011
- Matematik B-niveau, HF - december 2011

Anders Jørgensen & Mark Kddafi
2016

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010

HF matematik B – niveau, kapitel 1 – opgaver ***uden*** *hjælpemidler.*

Opgave 1.001

$$\frac{a^7 \cdot a^{-2}}{a^4} = \frac{a^{7-2}}{a^4} = \frac{a^5}{a^4} = a^{5-4} = a^1 = a$$

Opgave 1.002

$$\frac{a^5}{(a^2)^3} = \frac{a^5}{a^{2\cdot 3}} = \frac{a^5}{a^6} = a^{5-6} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Opgave 1.003

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

$$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25, \qquad d > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

Opgave 1.004

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$a = 2, b = 1, c = -3$$

$$d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25, \qquad d > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -1.5 \end{matrix}$$

Opgave 1.005

$$(a+b)^2 - 2a(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2ab = -a^2 + b^2 = b^2 - a^2$$

Opgave 1.006

$$s = 5(n-4) + r \Leftrightarrow s - r = 5(n-4) \Leftrightarrow \frac{s-r}{5} = \frac{5(n-4)}{5} \Leftrightarrow \frac{s-r}{5} + 4 = n - 4 + 4 \Leftrightarrow n = \frac{s-r}{5} + 4$$

Opgave 1.007

Figuren findes på side 5 i matematik B vejledende opgaver fra eksamen.

$$a > 0, \qquad b < 0, \qquad c > 0, \qquad d > 0$$

Opgave 1.008

$$f(x) = x^2 - 6x + c$$

En rod betyder $d = 0$,

$(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \Leftrightarrow 36 - 4c = 0 \Leftrightarrow 4c = 36 \Leftrightarrow \frac{4c}{4} = \frac{36}{4} \Leftrightarrow c = 9$

Det indsættes og løses ligningen fås $d = 0$. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Opgave 1.009

Parabel

$$y = -x^2 + 4x - 7$$

Linjen

$$y = -4x + 3$$

Skærer hinanden i:

$$-4x + 3 = -x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$a = -1, b = 8, c = -10$$

$$d = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10) = 24, \qquad d > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{-2} = \begin{matrix} 4 + \sqrt{6} = 6.45 \\ 4 - \sqrt{6} = 1.55 \end{matrix}$$

Allerede ved $d > 0$ kunne man se, at de skærer i to punkter.

Opgave 1.010

Parablen

$$y = x^2 - 4x + 3$$

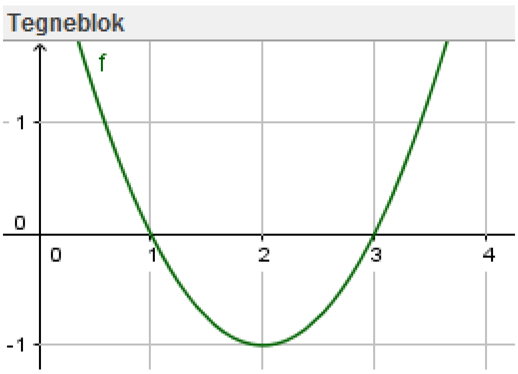
$$a = 1, b = -4, c = 3$$

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4, \qquad d > 0$$

Toppunktet findes

$$T_{x,y} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{d}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}; -\frac{4}{4 \cdot 1}\right) = (2, -1)$$

Det tegnes...



Opgave 1.011

Funktionen skal have et nulpunkt som er 2.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$$

Nulpunktet 2 indsættes.

$$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 16 = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$$

Det passer, at 2 er det ene nulpunkt.

Opgave 1.012

Oplysninger: det aflæses, at der er tale om en lineære model.

$$y = ax + b$$

Hvor $a = 0.1$ og $b = 1$

$$y = 0.1x + 1$$

Opgave 1.013

Figuren findes på side 6 i matematik B vejledende opgaver fra eksamen.

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad c < 0, \qquad d > 0$$

Opgave 1.014

Den lineære model: $y = 3x + b$ går gennem punktet $P(1, -4)$

Punktet indsættes og isoleres for variablen b.

$$-4 = 3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow -4 = 3 + b \Leftrightarrow b = -7$$

Indsættes i modellen. $y = 3x - 7$

Opgave 1.015

Der er givet to punkter i koordinatsystemet. $P(-6{,}4)$ og $Q(2{,}8)$. Der er tale om en lineære funktion.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{2 - (-6)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$b = y_1 - ax_1 = 4 - \frac{1}{2} \cdot (-6) = 4 - \frac{-6}{2} = 4 + 3 = 7$$

Dvs. $f(x) = ax + b$ med punkterne P og Q giver $f(x) = \frac{x}{2} + 7$

Opgave 1.016

Proportionalitet $f(x) = b \cdot x^3$

Opgave 1.017

Der er givet to punkter i koordinatsystemet. $P(2{,}8)$ og $Q(3{,}32)$. Der er tale om en eksponentiel funktion.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[3-2]{\frac{32}{8}} = 4$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{8}{4^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Dvs. $f(x) = b \cdot a^x$ med punkterne P og Q fås $f(x) = 0.5 \cdot 4^x$

Opgave 1.018

Der er tale om en eksponentiel udvikling. Begyndelsesåret var 1790. Omskrivning fra tekst til matematisk udtryk:

$$a = 1 + r, \qquad a = 1 + \left(\frac{4.4}{100}\right) \Leftrightarrow a = 1 + 0.044 \Leftrightarrow 1.044$$

Så modellen med $b = 36300$ er

$$f(x) = 36300 \cdot 1.044^x$$

Opgave 1.019

Funktionen differentieres.

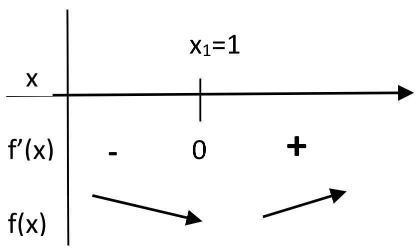
$$f(x) = 2x^2 - 4x - 4, \qquad f'(x) = 4x - 4, \qquad f'(x) = 0$$

$$4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Der gøres prøve. Tallene 2 og -2 indsættes i f'.

$$f'(-2) = 4 \cdot (-2) - 4 = -12$$
$$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

Så funktionen er aftagende i intervallet $]-\infty; 1]$ og voksende i intervallet $[1; \infty[$



Opgave 1.020

Det aflæses for $f'(2)$ og heraf ses det, at $f'(2) = 3$, dvs. en voksende ret linje der tangerer $f(x)$. Grafen kan ses på side 7 i matematik B eksamensopgaverbog.

Opgave 1.021

Funktionen differentieres.

$$f(x) = 5\mathrm{e}^x + x^4, \qquad f'(x) = 5\mathrm{e}^x + 4x^3$$

Opgave 1.022

Funktionen differentieres.

$$f(x) = 3x^2 + 2\ln(x), \qquad f'(x) = 6x + \frac{2}{x}, \qquad f'(2) = 6 \cdot 2 + \frac{2}{2} = 13$$

Opgave 1.023

Funktionen differentieres.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{e}^x, \qquad f'(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$$

Opgave 1.024

Tangentlinjen skal findes. Funktionen $f(x) = x^3 + x^2$ er givet. Punktet $P\big(1, f(1)\big)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

Punktet P indsættes i $f(x)$, $f'(x)$ og x_0 i tangentligningen.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Det hele indsættes.

$$y = 5(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 5x - 5 + 2 \Leftrightarrow y = 5x - 3$$

Således blev hældningen til tangenten fundet.

Opgave 1.025

Det aflæses for $f'(x) = 0$ og heraf ses det, at linjen tangerer $f(x)$ i $x = 1$, idet der er tale om en vandret linje, så snart den afledede er sat lig 0. Grafen kan ses på side 7 i matematik B eksamensopgaverbog.

Opgave 1.026

Tangentlinjen skal findes. Funktionen $f(x) = \ln(x) + x$ er givet. Punktet $P\big(1, f(1)\big)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Punktet P indsættes i $f(x)$, $f'(x)$ og x_0 i tangentligningen.

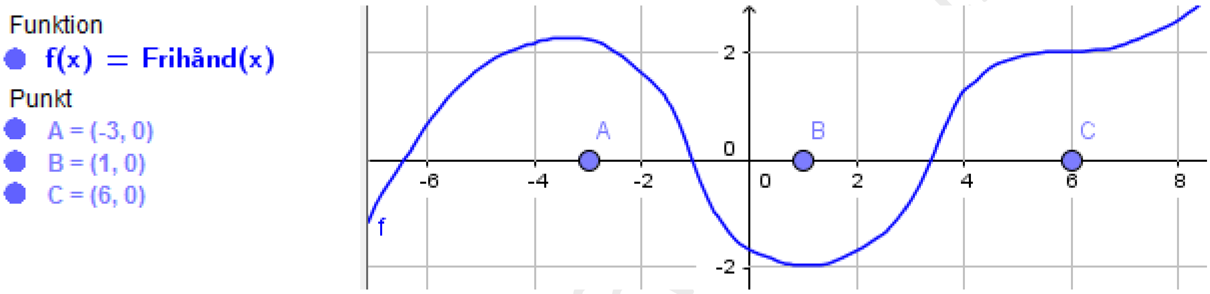
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Det hele indsættes.

$$y = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Således blev hældningen til tangenten fundet.

Opgave 1.027



Opgave 1.028

Stamfunktionen ønskes.

$$f(x) = 8x^3 + 2x^2 - 3x + 10$$

Der anvendes integrale.

$$\int 8x^3 + 2x^2 - 3x + 10\,dx = 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x + k$$

Så

$$F(x) = 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x + k$$

Er stamfunktionen til f.

Opgave 1.029

Stamfunktionen ønskes.

$$f(x) = 6x^2 + 2x - 5$$

Der anvendes integrale.

$$\int 6x^2 + 2x - 5\,dx = 2x^3 + x^2 - 5x + k$$

Punktet $F(0) = 1$ er givet.

$$1 = 2 \cdot 0^3 + 0^2 - 5 \cdot 0 + k \Leftrightarrow k = 1$$

Er stamfunktionen til f. Derfor $F(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$

Opgave 1.030

Der ønskes bestemt et areal, afgrænset af $origo$ og $x = 2$. Funktionen er givet.

$$f(x) = 1.5x^2 - 4x + 3$$

Der anvendes integraler.

$$A = \int_0^2 1.5x^2 - 4x + 3\,dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^2 = \left[\frac{1}{2}2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2\right] - \left[\frac{1}{2}0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0\right]$$
$$= 4 - 8 + 6 - 0 = 2$$

Opgave 1.031

Der ønskes bestemt et areal, afgrænset af $x = 0$ og $x = 1$. Funktionen er givet.

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x$$

Der anvendes integraler.

$$\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{3}1^3\right] - \left[\frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{3}0^3\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0$$
$$= \frac{1}{6}$$

Som er arealet, afgrænset mellem f og g.

Opgave 1.032

Der ønskes bestemt et areal, afgrænset af $origo$ og $x = 3$. Funktionen er givet.

$$f(x) = 9 - 3x^2 + 6x \Leftrightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

Der anvendes integraler.

$$A = \int_0^3 -3x^2 + 6x + 9\,dx = [-x^3 + 3x^2 + 9x]_0^3 = [-3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3] - [-0^3 + 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0]$$
$$= 27$$

Som er arealet.

Opgave 1.033

Integralet bestemmes.

$$\int \left(\frac{1}{x} + 4x\right) dx = \ln(x) + 2x^2 + k, \qquad x > 0$$

Da $x > 0$ kan man give $\ln(x)$ bløde parenteser.

Opgave 1.034

Opgaven aflæses og forstørrelsesfaktoren k findes.

$$k = \frac{A'C'}{AC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Nu kan man regne $B'C'$.

$$B'C' = BC \cdot k = 3 \cdot 1.5 = 4.5$$

Som er længden af $B'C'$.

Slut på kapitel 1 - opgaver uden hjælpemidler

Kapitel 2 handler om opgaver der må benyttes med hjælpemidler fra eksamensopgaver bogen:

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010

Disse opgaver løses pr. håndkraft, Maple 2016, GeoGebra og www.cossincalc.com

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010

*HF matematik B – niveau, kapitel 2 – opgaver **med** hjælpemidler.*

Opgave 2.001

Det ses, at der kun er to støttepunkter, så lineær regression er ej nødvendigt. Derfor regnes det pr. håndkraft.

Da antager man, at 2010 er et punkt P samt 2020 er et punkt Q. Da 2000 er begyndelsesåret, antager man, at 2000 er $x = 0$

$$P = (10{,}11.9), \qquad Q = (20{,}15.8)$$

a) Værdien regnes.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15.8 - 11.9}{20 - 10} = 0.39$$
$$b = y_1 - ax_1 = 11.9 - 0.39 \cdot 10 = 8$$

Dette giver forskriften

$$f(x) = 0.39x + 8$$

b) Tallet a fortæller, at for hvert år der går, stiger udviklingen af flytrafikken med 0.39 mio. Tallet b fortæller, at i år 2000 var flytrafikken på 8 mio.

c) Da x er år, er y flytrafikken målt i mio. Derfor skal man løse en ligning for x

$$0.39x + 8 = 14$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 15.38462$$

Så $2000 + 15.38 = 2015$ vil antallet af flyvninger overstige 14 mio.

Opgave 2.002

Det oplyses, at en familie har en udgift og vandforbrug. Modellen er givet.

$$f(x) = 30.66x + 306.25$$

a) Tallet a fortæller, at for hver år der går, stiger vandforbruget med $30.66m^3$ og ved begyndelsestidspunktet for modellen var vandforbruget $306.25m^3$.

Opgave 2.003

Opgaven giver to funktioner. $f(x) = -2x^2 - 0.5x - 3$ og $g(x) = 4.2x - 5$

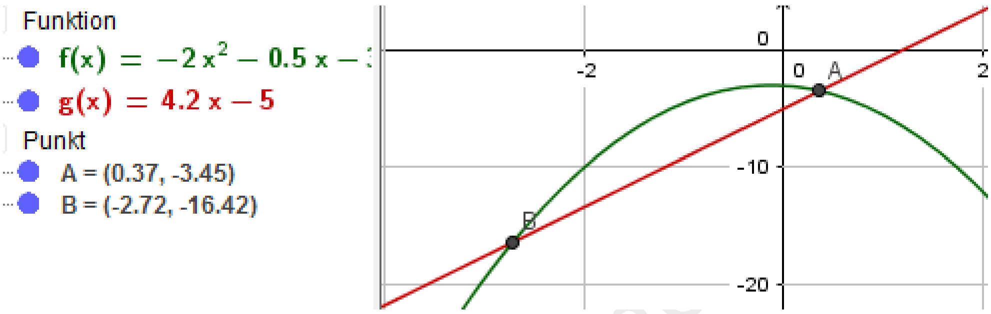
a) Skæringspunktet kan findes ved at sætte ligningerne lig med hinanden.

$$-2x^2 - 0.5x - 3 = 4.2x - 5$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -2.717927 \quad \vee \quad x = 0.3679274$$

Grafisk ser det sådan ud:



Opgave 2.004

Der gives en parabel.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Og en linje

$$y = 1.5x + b$$

a) Man skal finde det sted, der gør at linjen og parablen har et røringspunkt. Med andre ord, linjen skal tangere parablen. Parablen og linjen sættes lig med hinanden.

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 1.5x + b \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 - 1.5x + b = 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - (3 + b) = 0$$

Desuden ved man, at det skulle have eet punkt. Derfor anvendes diskriminantmetoden for $d = 0$.

$$b^2 - 4ac =>$$
$$(-2)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (3 + b) = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for b vha. CAS-værktøjet WordMat.*

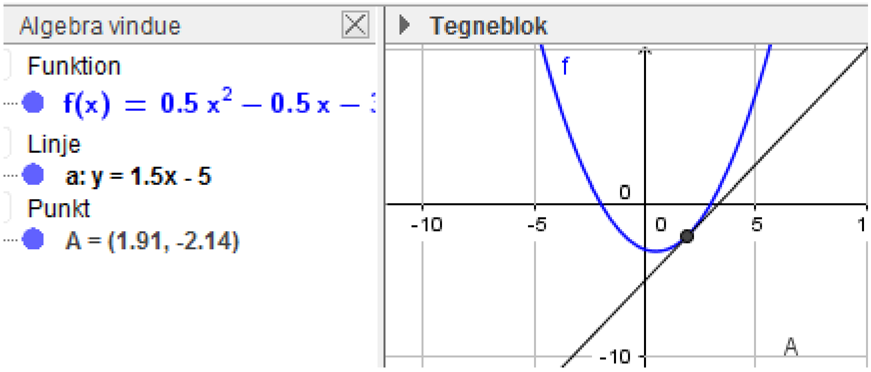
$$b = -5$$

Heraf fås værdien -5. Dette indsættes på b's plads i linjen.

$$y = 1.5x - 5$$

I GeoGebra tjekkes det efter.

Fortsættes næste side



Det passer med udregningerne.

Opgave 2.005

Dette er en regressions opgave, så dette laves i CAS programmet Maple 2016.

$with(Gym)$:

Oplysningerne defineres. Der laves lineære regression.

$L1 := [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100]$

$[10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100]$

$L2 := [13, 16.5, 19.5, 22.5, 25.5, 28.5, 31.5, 34.5, 38, 40.5]$

$[13, 16.5, 19.5, 22.5, 25.5, 28.5, 31.5, 34.5, 38, 40.5]$

$LinReg(L1, L2)$

Lineær regression
$y = 0.30485\, x + 10.233.$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.999600964007744$

Forklaringsgraden er tæt på 1, dvs. den accepteres.

a)
Tallene a og b blev bestemt v.h.a. regressionen. Tallet a fortæller, at for hver gang man øger loddet, så øges positionen med 0.304cm. Tallet b fortæller, at fjederens position er 13cm, når vægten er 10gram.

b)
$f(x_1) = 10.23\, x_1 + 0.304$:
$f(x_2 + x_1) = 10.23(x_2 + x_1) + 0.304$:

Det ses, at tilvæksten er $\Delta f = f(x_2 + x_1) - (x_1)$: altså
$10.23(x_2 + x_1) + 0.304 - (10.23\, x_1 + 0.304) = 10.23 x_2$

Dvs. at Δf og x_2 er ligefrem proportionale med proportionsfaktoren 10.23 kraften er proportional med fjederens forlængelse, indtil fjederen deformeres, så gælder det ikke længere.

Opgave 2.006

Det oplyses, at det skal være omvendt proportionalitet $V = b \cdot p^{-1}$, heraf aflæses skemaet.

a) Først findes proportionalitetskonstanten b.

$$17 = b \cdot 4^{-1}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for b vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$b = 68$$

Så tallet b er 68. Dette anvendes for at udfylde resten af skemaet.

p	2	4	6.1818
V	34	17	11

$$V = 68 \cdot 2^{-1} = 34$$
$$11 = 68 \cdot p^{-1}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for p vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$p = 6.181818$$

Opgave 2.007

Det oplyses at der er udvikling af skovarealet i Danmark. Modellen er givet ved:

$$y = 417000 \cdot 1.007^x$$

a) Tallet a $(1.007 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.007 \cdot 100\% = 0.7\%)$ så for hvert år der går, stiger skovarealet langsomt med 0.7%. I 1990 målte man det samlede skovareal til 417000 hektar.

Opgave 2.008

Rentesregning. Her anvendes formlen $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$, som man også kender fra eksponentielle funktioner.

a) Det oplyses, at $K_0 = 15000kr, K_n = 30000,\ r = 2.56\%$. Disse oplysninger indsættes i formlen fra ovenstående.

$$30000 = 15000 \cdot (1.0256)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{30000}{15000} = \frac{15000 \cdot (1.0256)^n}{15000} \Leftrightarrow$$
$$2 = 1.0256^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln(2)}{\ln(1.0256)} = \frac{n \cdot \ln(1.0256)}{\ln(1.0256)} \Leftrightarrow$$
$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0256)} = 27.42$$

Så efter 27.5 år er beløbet fordoblet.

Opgave 2.009

Man får oplyst halveringstiden. Dette benyttes i formlen for halveringskonstanten for at beregne tallet a. Tallet b oplyses til at være 3. Derfor anvendes formlen til at finde a

$$\sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{\frac{1}{2}}$$

Oplysningen indsættes

$$\sqrt[15]{\frac{1}{2}} = 0.954$$

Så modellen

$$f(x) = 3 \cdot 0.954^x$$

Så nu kan man regne opgaven.

a) Her indsættes 12 på x's plads.

$$f(12) = 3 \cdot 0.954^{12} = 1.70491115$$

Så efter 12 timer vil der være 1.70 natrium-24.

b) Her gøres det omvendte af ovenstående. Der indsættes 0.5 på $f(x)$.

$$0.5 = 3 \cdot 0.954^x$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 38.04838$$

Så efter 38 timer vil der være 0.5 natrium-24 tilbage.

Opgave 2.010

a) Det oplyses, at der er tale om en eksponentiel udvikling af træernes højde. Heraf fås $b = 1.7$ og $a = 17.3\%$. Tallet a omregnes til decimaltal.

$$a = 1 + r$$

Hvor $r = 17.3$

$$a = 1 + \left(\frac{17.3}{100}\right) = 1.173$$

Så modellen kan opstilles.

$$f(x) = 1.7 \cdot 1.173^x$$

Som beskriver udviklingen af træernes højde for hvert år.

b) Tallet 7 indsættes på x's plads.

$$f(7) = 1.7 \cdot 1.173^7 = 5.194$$

Så efter 7 år, er træets højde 5.194m.

c) Tallet a indsættes i følgende formel:

$$r_y = (1.173^3 - 1) \cdot 100\% = 61.396\%$$

Så træerne har vokset ca. 61.396% efter 3 år.

Opgave 2.011

Modellen beskriver udviklingen af zink fra perioden 1900-1990. Det ses, at det er em eksponentiel funktion.

$$y = b \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

a) Man kan bestemme b og k ved følgende formler og oplysninger. Bemærk, at 1900 er $t_1 = 0$ og 1990 er $t_2 = 90$

$$e^k = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[90-0]{\frac{7}{0.4}} = 1.032$$

$$b = \frac{y_1}{a^{t_1}} = \frac{7}{1.032^{0.4}} = 6.911$$

Deraf kan modellen skrives:

$$y = 6.911 \cdot \mathrm{e}^{1.032 \cdot t}$$

Man skal ikke blive forvirret over modellen. Der er tale om en eksponentiel udvikling.

b) Fordoblingskonstanten anvendes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(\mathrm{e}^{1.032})} = 0.67$$

Eller $\log_{10}$ om man vil...

Så i løbet af år 1900 - 1901 vil man have fordoblet produktionen af zink.

c) Man gør prøve ved at indsætte $t = 100$ fordi der er tale om år 2000.

$$y = 6.911 \cdot \mathrm{e}^{1.032 \cdot 100} = 4.557 \cdot 10^{45}$$

Derved holder modellen ikke stik med påstanden.

Opgave 2.012

Når lys trænger ned gennem vandet i en sø, aftager lysintensiteten med dybden. Lysintensiteten $f(x)$ er bestemt ved

$$f(x) = 100 \cdot a^x$$

Hvor x er dybden, målt i meter under søens overflade. For en bestemt ren og klar sø er lysintensiteten 16 i 5,0 meters dybde.

a) Tallet *a* kan bestemmes da det oplyses, at dybden er af søen er *x*.
f(x) er lysintensiteten som er *16* ved *5.0* meters dybde.
Det vil sige at man kan indsætte *16* som *f(x)* og *5.0* som *x* og så er kun *a* ukendt.
Derved er fremgangsmåden at isolere *a*.

$$16 = 100 \cdot a^{5.0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{100} = \frac{100 \cdot a^{5.0}}{100} \Leftrightarrow$$

Fortsættes næste side

$$\frac{16}{100} = a^{5,0} \Leftrightarrow$$
$$a^{5,0} = \frac{16}{100} \Leftrightarrow$$
$$a = \sqrt[5,0]{\frac{16}{100}} = 0.693$$

Dvs. at regneforskriften ser således ud: $f(x) = 100 \cdot 0.693^x$

b) For at bestemme den dybde hvor lysintensiteten er på *2.1*, så indsættes *2.1* som *f(x),* da det er lysintensiteten. Derved skal man løse en ligning hvor fremgangsmåden er at isolere *x* for at finde den dybde hvor lysintensiteten er på *2,1*.

$$2.1 = 100 \cdot 0.693^x \Leftrightarrow$$
$$\frac{2.1}{100} = \frac{100 \cdot 0.693^x}{100} \Leftrightarrow$$
$$\frac{2.1}{100} = 0.693^x \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{2.1}{100}\right) = \log(0.693^x) \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{2.1}{100}\right) = x \cdot \log(0.693) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\log\left(\frac{2.1}{100}\right)}{\log(0.693)} = \frac{x \cdot \log(0.693)}{\log(0.693)} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\log\left(\frac{2.1}{100}\right)}{\log(0.693)} = 10{,}534\ meter$$

Det vil sige at når man i søen når ned på en dybde af 10.534 meter, så vil lysintensiteten være på *2.1*.

c) Bestem halveringskonstanten for f.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)} \Leftrightarrow$$
$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0.693)} = 1.890$$

Tallet 1.890 fortæller at lysintensiteten er højere end før.

d) For hver meter der bliver dybere, så aftagere lysintensiteten med -30.7% fordi $0.693 = 1 + r\% \Leftrightarrow r\% = -30.7\%$

Opgave 2.013

a) Dette er en opgave, der løses i CAS, så dette laves i programmet Maple 2016.

with(*Gym*) :

Modellen beskriver svampeangreb på hørplanter. Modellen er givet ved:

$f(x) := 100 - 182.2 \cdot e^{-0.0756\,x}$

$$x \to 100 + (-1) \cdot 182.2\, e^{(-1) \cdot 0.0756\,x}$$

Ved indsættelse af 50 i x fås

$f(50)$

$$95.84170562$$

Så efter 50 dage vil der allerede være visnet 96% af hørplanterne.

Alternativt kunne man regne den i hånden, da kravet for opgaven ikke er så stort.

Opgave 2.014

Dette er en opgave, der løses i CAS, så dette laves i programmet Maple 2016.

with(*Gym*) :

Funktionen f er givet ved

$f(x) := 200 \cdot e^{0.04\,x}$

$$x \to 200\, e^{0.04\,x}$$

a)

Der indsættes 12 i funktionen.

$f(12)$

$$323.2148804$$

Dvs. at funktionsværdien med variablen 12 fås 323.21

b)

$r_y = (a^x - 1) \cdot 100\,\%$:

Tallene indsættes.

$r_y = \left(\left(e^{0.04}\right)^1 - 1\right) \cdot 100$

$$r_y = 4.0810774$$

Så for hver x-enhed, stiger f med 4.081%.

Alternativt kunne man regne den i hånden, da kravet for opgaven ikke er så stort.

Opgave 2.015

Denne opgave omhandler BMI.

$$BMI = m \cdot h^{-2}$$

Opgaven skriver godt nok x som højde, men dette fremtræder ikke i modellen.

a) Man benytter formlen:

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Det ses, at 6% indsættes på r_x omregnet først. Man indsætter desuden -2 på a's plads. Altså

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{6}{100}\right)\right)^{-2} - 1\right) \cdot 100\% = -11\%$$

Dvs. at person A har en BMI, der er 11% mindre end person B.

Opgave 2.016

Opgaven viser, at der er tale om en potensfunktion. Der er angivet et skema, der giver to støttepunkter.

a) Man skal bestemme tallene a og b.

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \frac{\ln(9000) - \ln(15000)}{\ln(625) - \ln(225)} = -\frac{1}{2}$$

Tallet b bestemmes.

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{15000}{225^{-0.5}} = 2.2500 \cdot 10^5$$

Så derfra kan man opstille en model.

$$f(x) = 2.2500 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

b) Man ønsker at finde ud af, hvor meget frugt man indtager når man har 10000 dødsfald.

$$10000 = 2.2500 \cdot 10^5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{10000}{2.2500 \cdot 10^5} = \frac{2.2500 \cdot 10^5 \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2.2500 \cdot 10^5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{10000}{2.2500 \cdot 10^5} = x^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[-\frac{1}{2}]{\frac{10000}{2.2500 \cdot 10^5}} = 506.25$$

Så ved 10000 dødsfald, har personerne formentligt spist 506.25 gram frugt.

Fortsættes næste side

c) Der anvendes formlen:

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Værdierne indsættes.

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{-5}{100} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot 100\% = 2.597\%$$

Så ved 5% mindre kræftdødsfald, vil man skulle spise 2.597% mere frugt og grønt.

Opgave 2.017

Dette er en regressionsopgave, som udføres i CAS programmet Maple 2016.

$with(Gym)$:

Tabellens oplysninger defineres som følgende. Efter bliver der udført potensregression.

$ATJ := [28.4, 56.7, 99.2, 226.8, 255.2]$

$$[28.4, 56.7, 99.2, 226.8, 255.2]$$

$MKP := [67, 109, 167, 301, 327]$

$$[67, 109, 167, 301, 327]$$

$PowReg(ATJ, MKP)$

Potens Regression

$$y = 5.9105 \cdot x^{0.72459}$$

$$\text{Forklaringsgrad } R^2 = 0.99987$$

a)

Heraf blev tallene a og b bestemt.

$a = 0.72459$

$b = 5.9105$

$f(x) := 5.9105 \cdot x^{0.72459}$

$$x \rightarrow 5.9105\, x^{0.72459}$$

Som er modellen af fuglene.

b)

Dette udregnes sådan:

$$r_y = \left((1 + r_x)^a - 1 \right) \cdot 100\,\%$$

Tallene indsættes. $r_x\% = 84\,\%$

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{84}{100} \right) \right)^{0.72459} - 1 \right) \cdot 100$$

$$r_y = 55.55513300$$

Så energibehovet er 55.5% større for fuglen; islandsk ryle.

Opgave 2.018

Dette er en regressionsopgave, som udføres i CAS programmet Maple 2016.

$with(Gym)$:

Tabellens oplysninger defineres som følgende. Efter bliver der udført potensregression.

$ZLYN := [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$

$$[6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$$

$BALD := [4500, 3350, 2500, 2000, 1600, 1350, 1150, 950, 800]$

$$[4500, 3350, 2500, 2000, 1600, 1350, 1150, 950, 800]$$

$PowReg(ZLYN, BALD)$

Potens Regression

$$y = 1.6795\ 10^5 \cdot \frac{1}{x^{2.0170}}$$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99928$

a)

Heraf blev tallene a og b bestemt.
$a = -2.0170$
$b = 1.6795\ 10^5$

Samt forskriften

$f(x) := 1.6795 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{x^{2.0170}}\right)$

$$x \rightarrow \frac{1.6795 \cdot 100000}{x^{2.0170}} \quad (3)$$

b)

Her indsætter man 15 på x's plads.

$f(15)$

$$712.8594951 \quad (4)$$

Her vil man få 712.85 rødgraner pr. hektar.

Fortsættes næste side

c)

$f(x) = 3000$

$$\frac{1.679500000\,10^5}{x^{2.0170}} = 3000$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$[[x = 7.356356090], [x = -7.353777436 + 0.1947622980\,\mathrm{I}], [x = -7.353777435 - 0.1947622980\,\mathrm{I}]]$

Her forkastes de komplekse tal, for dem arbejder man ikke med på B-niveau!

Derfor er træhøjden, som giver 3000rødgraner pr. hektar ca. 7.35 meter højt.

Opgave 2.019

Det ses, at der er tale om logistisk vækst, og funktionen er givet ved;

$$N(t) = \frac{195}{1 + 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.04 \cdot t}}$$

a) Der indsættes 10 på t's plads.

$$N(10) = \frac{195}{1 + 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.04 \cdot 10}} = 52.97 \approx 53$$

Der vil være 53 fugle af den bestemte art.

b) Der løses en ligning for variablen t.

$$100 = \frac{195}{1 + 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.04 \cdot t}}$$

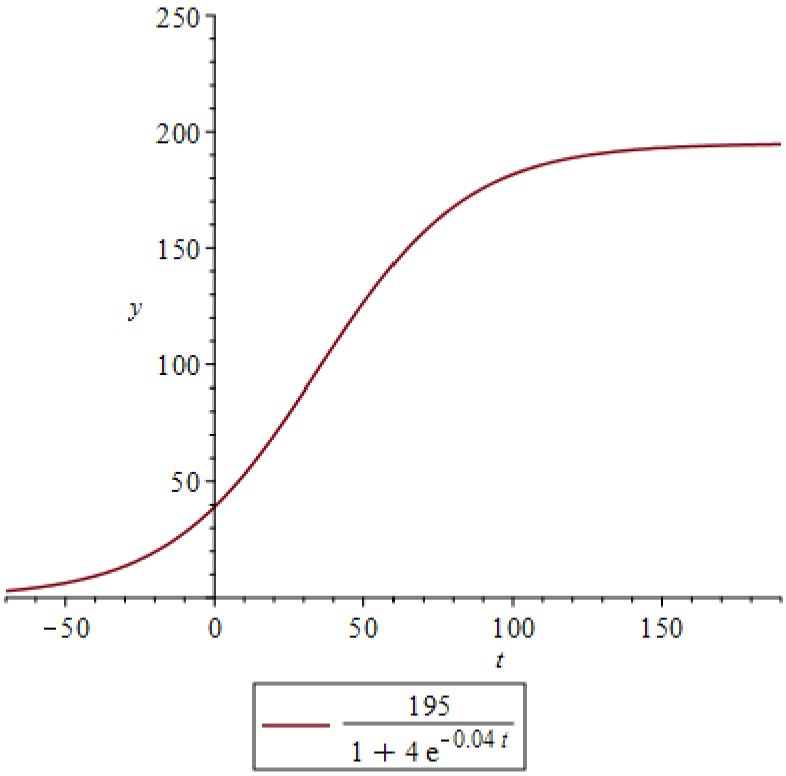
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$t = 35.93969$$

Dvs. der vil gå omtrent 36 år fra start år til der er 100 fugle af den bestemte art.

Fortsættes næste side

c) Grafen plottes v.h.a. Maple 2016.



Det ses, at der er tale om en logistisk vækst, sætning 5A i matematik B til A bogen. (A-niveau kursister) Hvor $m = 195$, dvs. den maksimale værdi grafen kan tage. Grafen er asymptoter med m.

d) Da man kan se, at grafen har en maksimal højde på 195, vil der kun kunne være 195 fugle. Dette kan man prøve at efterregne ved indsættelse af f.eks. 200år eller 400år. Man ser, at væksten langsom reduceres, derved er konklusionen at der maksimal kun kan være 195 fugle. Teori henvises til MAT B til A s. 149

Opgave 2.020

En model er givet ved

$$pH = -\log(c)$$

a) Der bestemmes for koncentrationen ved en pH værdi på 2.2

$$2.2 = -\log(c)$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$c = 0.006309573$$

Det ses, at ved en pH værdi, vil der en koncentration på 0.006309573 mol/L.

b) Dette kan opstilles således:

$$pH = -\log(c \cdot 100) = -(\log(c) + \log(100)) = -(\log(c) - 2) = pH - 2$$

Logaritme regnereglerne på mat B.

Opgave 2.021

Løses via Maple 2016

Modellen
$f(t) := 2.4 \cdot \sqrt{t}$

$$t \rightarrow 2.4\sqrt{t}$$

er givet.

a)
$f'(t)$

$$\frac{1.200000000}{\sqrt{t}}$$

Dette er den afledede af $f(t)$.

b)
$f'(4)$

$$0.3000000000\sqrt{4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.60000$$

Vandets trænger igennem jorden med 0.6cm pr. minut.

Opgave 2.022

Løses via Maple 2016
Modellen
$f(t) := 5 + 15.1 \cdot e^{-0.046 \cdot t}$

$$t \rightarrow 5 + 15.1\, e^{(-1) \cdot 0.046\, t}$$

er givet.

a)
Der indsættes 8 i t.
$f(8)$

$$15.45096944$$

Der vil være 15.45 grader efter 8 timer.

b)
Der løses en ligning.
$f(t) = 10$

$$5 + 15.1\, e^{-0.046\, t} = 10$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 24.02732242]]$$

Efter et døgn vil der være under 10 grader celsius.

c)

$f'(12)$

$$-0.3999486406$$

Dvs. at temperaturen aftager med 0.40 grader for hver time der går efter time nr. 12.

Opgave 2.023

Der ses en model der beskriver saltkoncentrationen i rogn.

Modellen er givet ved

$$f(t) = 2.7 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0.021 \cdot t})$$

a) Der indsættes 24 i funktionen.

$$f(24) = 2.7 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0.021 \cdot 24}) = 1.068904666$$

Dvs. efter 24 timer, saltkoncentrationen 1.068904666gram

b) Der løses en ligning.

$$2 = 2.7 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0.021 \cdot t})$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$t = 64.28222$$

Dvs. at der skal gå ca. 64 timer før koncentrationen er på 2 gram.

c) Denne funktion differentieres v.h.a. Maple 2016.

$$f'(t) = 0.0567 \cdot \mathrm{e}^{-0.021 \cdot t}$$

Endelig indsættes 24 på t.

$$f'(24) = 0.0567 \cdot \mathrm{e}^{-0.021 \cdot 24} = 0.342$$

Dvs. væksthastigheden er 0.342

d) Tallet 2.7 bestemmer det maksimale punkt på grafen for f. Dvs. saltkoncentrationen når aldrig over 2.7 fordi det er det maksimale rognen kan tage.

Opgave 2.024

USA's befolkningstal kan beskrives v.h.a. modellen nedenfor:

$$f(x) = \frac{198}{1 + 36.2 \cdot \mathrm{e}^{-0.0313 \cdot x}}$$

Hvor 198 er det maksimale punkt på grafen.

a) Der løses en ligning for x.

$$\frac{198}{1 + 36.2 \cdot \mathrm{e}^{-0.0313 \cdot x}} = 50$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 79.99584$$

Dvs. at der var ca. 50 mio. indbyggere i USA i år 1880.

b) Funktionen differentieres og tallet 125 indsættes på x's plads.

$$f'(125) = \frac{224.34588 \cdot \mathrm{e}^{-0.0313 \cdot 125}}{(1 + 36.2 \cdot \mathrm{e}^{-0.0313 \cdot 125})^2} = 1.509525253$$

Dvs. efter år 1925 voksede antal indbyggere med 1.5 mio.

Opgave 2.025

Modellen for det årlige antal tilfælde af Kogalskab i Storbritannien er givet ved

$$f(x) = 34800 \cdot \mathrm{e}^{-0.4492 \cdot x}$$

a) Da modellen passer fra år 1993 til år 2000, skal der nu undersøges om den også passer i år 2004. Dvs. differencen fra begyndelsesåret til 2004 er 11.

$$f(11) = 34800 \cdot \mathrm{e}^{-0.4492 \cdot 11} = 248.681$$

Og opgavekommissionen påstår at det er 343 i år 2004, så modellen har en høj difference og konklusionen er således, at den ikke passer efter år 2000.

Opgave 2.026

Opgaven løses i Maple 2016.

Modellen er givet ved:

$$f(x) := 3 \cdot \ln\left(\frac{x^2 + 7.8}{x^2 + 1.5}\right) - 3.5$$

$$x \rightarrow 3 \ln\left(\frac{x^2 + 7.8}{x^2 + 1.5}\right) - 3.5$$

a)
Der indsættes 4 i modellen.
$f(4)$

$$-2.577545901$$

Dvs. at der er en temperaturændring på -2.5 grader.

b)
Funktionen sættes lig med 0

$f(x) = 0$

$$3 \ln\left(\frac{x^2 + 7.8}{x^2 + 1.5}\right) - 3.5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 1.161482157], [x = -1.161482157]]$$

Der ses to værdier, men da der er tale om afstand så forkastes den negative værdi.
Så indenfor 1.16 meter er overfladetemperaturen 0 grader eller derover.

c)
$f'(1)$

$$-1.718181818$$

For hver meter man går, falder temperaturen med 1.71 grader celsius.

Opgave 2.027

Funktionen er givet. $f(x) = \frac{-x^2}{4} + 2x - 1$

Der skal bestemmes en linje for tangenten t til parablen ρ. Punktet er givet $R\left(5, f(5)\right)$

a) Heri indsætter man tallet 5 i f og f'.

$$f(5) = \frac{-5^2}{4} + 2 \cdot 5 - 1 = \frac{11}{4}$$

Nu for den afledede

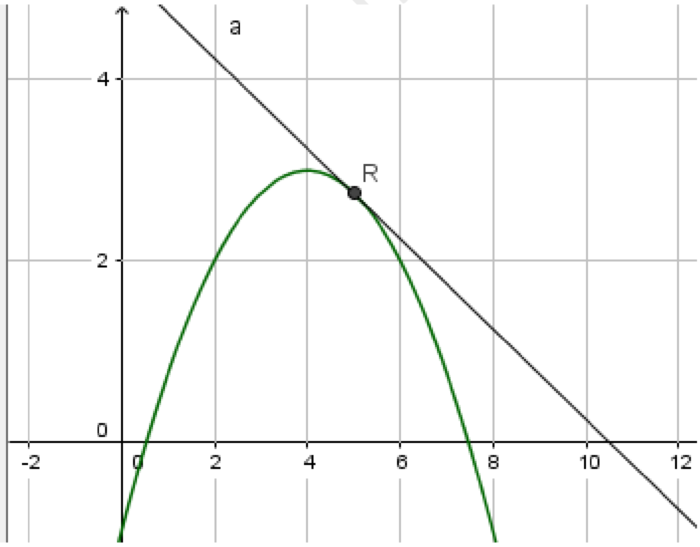
$$f'(5) = -\frac{5}{2} + 2 = -\frac{1}{2}$$

Dette indsættes i tangentlinjen for t.

$$t = -\frac{1}{2}(x-5) + \frac{11}{4} => t = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{4}$$

Som er hældningen til grafen ρ. Grafisk ses det sådan:

Funktion
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$
Linje
a: 0.5x + y = 5.25
Punkt
R = (5, 2.75)



Opgave 2.028

Modellen viser temperaturændringen i en speciel ovn.

$$f(t) = 20 + 150 \cdot \ln(8t + 1)$$

a) Det ses at modellen er en kraftig voksende naturlig logaritmefunktion, hvorefter den vokser knap så hurtigt når man går ud af x-aksen. Dette beskriver temperaturudviklingen af ovnen.
Modellen differentieres og tallene 2 og 20 indsættes på t.

$$f'(t) = \frac{1200}{8t + 1}$$

Heri indsættes hhv. 2 og 20.

$$f'(2) = \frac{1200}{8 \cdot 2 + 1} = 70.58$$

$$f'(20) = \frac{1200}{8 \cdot 20 + 1} = 7.45$$

Det ses, at efter 2 minutter, opnås en temperaturstigning på 70.58 grader hvor efter 20 minutter øges temperaturen med 7.45 grader.

Opgave 2.029

Opgaven løses v.h.a. Maple 2016.

Her ses en persons brug af medicin imod allergi. Medicinkoncentrationen kan beskrives ved modellen
$f(t) := 12 - 4 \cdot \ln(t^2 - 4 \cdot t + 6)$

$$t \rightarrow 12 - 4\ln(t^2 - 4t + 6)$$

Begrænsningen er på $1 \leq t \leq 6$

a)
Der indsættes 8 på $f(t)$.
$f(t) = 8$

$$12 - 4\ln(t^2 - 4t + 6) = 8$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 2 - \sqrt{-2 + e}], [t = 2 + \sqrt{-2 + e}]]$$

$2 + \sqrt{-2 + e}$

$$2 + \sqrt{-2 + e}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$2.8475$$

Dvs. efter 2-3 minutter er koncentrationen på 8mg.

b)
Funktionen differentieres.

$f'(t) = 0$

$$-\frac{4(2t - 4)}{t^2 - 4t + 6} = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 2]]$$

Herved kan man tage tal og gøre prøve. F.eks. tallet 1 og 3

$f'(1)$

$$\frac{8}{3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$2.6667$$

$f'(3)$

$$-\frac{8}{3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-2.6667$$

Det ses nu, hvordan koncentrationen for f er voksende i intervallet [1;2] og aftagende i intervallet [2;6]

Opgave 2.030

Modellen beskriver udviklingen af bakterier i et laboratoriums forsøg. Modellen er hermed givet

$$N = \frac{9560}{1 + 4.6 \cdot \mathrm{e}^{-0.090 \cdot t}}$$

a) Man skal bestemme væksthastigheden efter 40 timer.

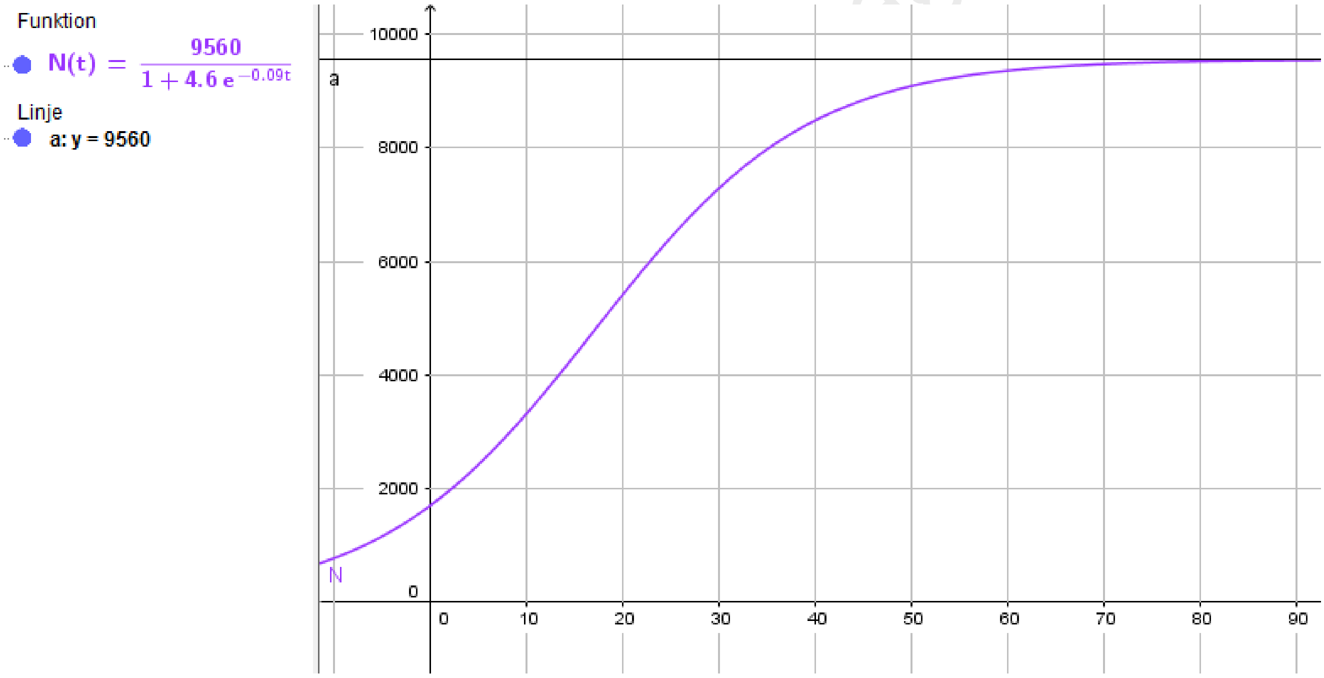
$$\frac{dN}{dt} = \frac{3957.8400 \cdot \mathrm{e}^{-0.090 \cdot t}}{(1 + 4.6 \cdot \mathrm{e}^{-0.090 \cdot t})^2}$$

Der indsættes 40.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3957.8400 \cdot \mathrm{e}^{-0.090 \cdot 40}}{(1 + 4.6 \cdot \mathrm{e}^{-0.090 \cdot 40})^2} = 85.34167434$$

Væksthastigheden for bakterieudviklingen er 85.3

b) Tallet 9560 fortæller - eller viser den maksimale bestand / udvikling af bakterier i det bestemte laboratoriums forsøg. Tallet 9560 er m i differentialligningen og grafen er asymptote til m.



Opgave 2.031

Opgaven løses i Maple 2016.

Der er givet en funktion

$f(x) := -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$

$$x \rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$$

Samt linjen

$y = 2x - 1$

$$y = 2x - 1$$

Det undersøges nu, om linjen er tangent til f. Dette kan løses på to måder.

1) Algebraisk løsning.

Sæt linjen lig med f.

$f(x) = 2x - 1$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 = 2x - 1$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

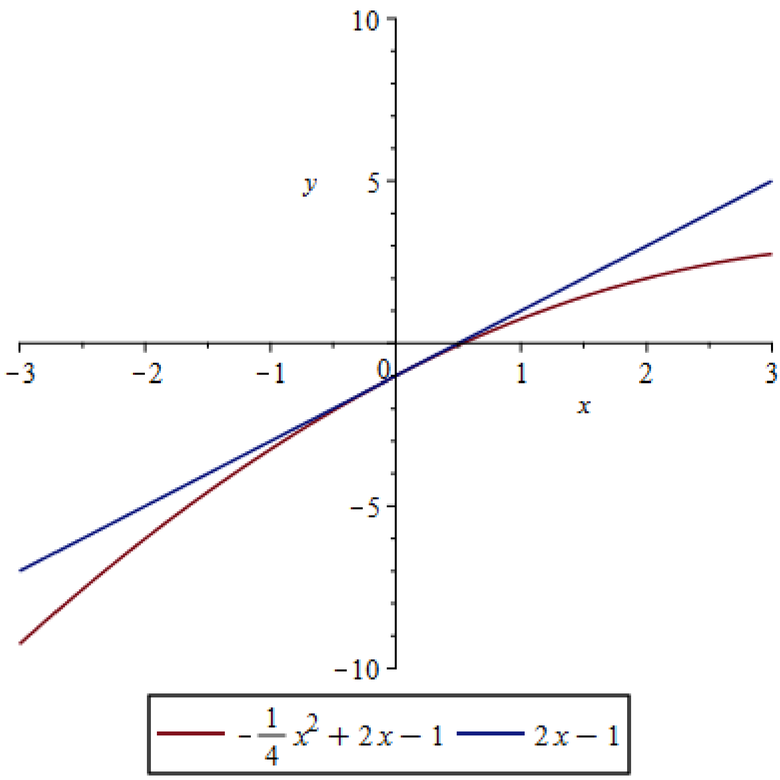
$$[[x = 0], [x = 0]]$$

Der ses at - i følge beregningerne - at linjen tangerer grafen for f i $x = 0$.

2) Grafisk løsning.

Linjen defineres som $g(x)$. $g(x) := 2x - 1$:

$plot([f(x), g(x)], x = -3..3, y = -10..10, legend = [f(x), g(x)])$



Det passer, at linjen y tangerer f.

Opgave 2.032

Opgaven løses i Maple 2016.

Der er givet en funktion

$f(x) := -x^3 + 1.5x^2 + 6x - 1$

$$x \rightarrow -x^3 + 1.5x^2 + 6x - 1$$

a)

Der bestemmes en ligning for tangenten der går gennem punktet $P = (3, f(3))$. Derfra anvendes tangentligningen.

$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

$$y = -12.0\,x + 39.5$$

Dette er tangentligningen for funktionen f.

b)

Hvis funktionen skal have en ens tangentlinje med et andet punkt, skal man sætte funktionen lig med hældningskoefficienten fra forrige tangenthældning.

$f'(x) = -12$

$$-3x^2 + 3.0\,x + 6 = -12$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = -2.], [x = 3.]]$$

Her ses der to værdier. Det ene bør være et kendt punkt, nemlig 3. Så derfra må tangentlinjen også passe, når $x = -2$. Nu findes y-koordinaten.

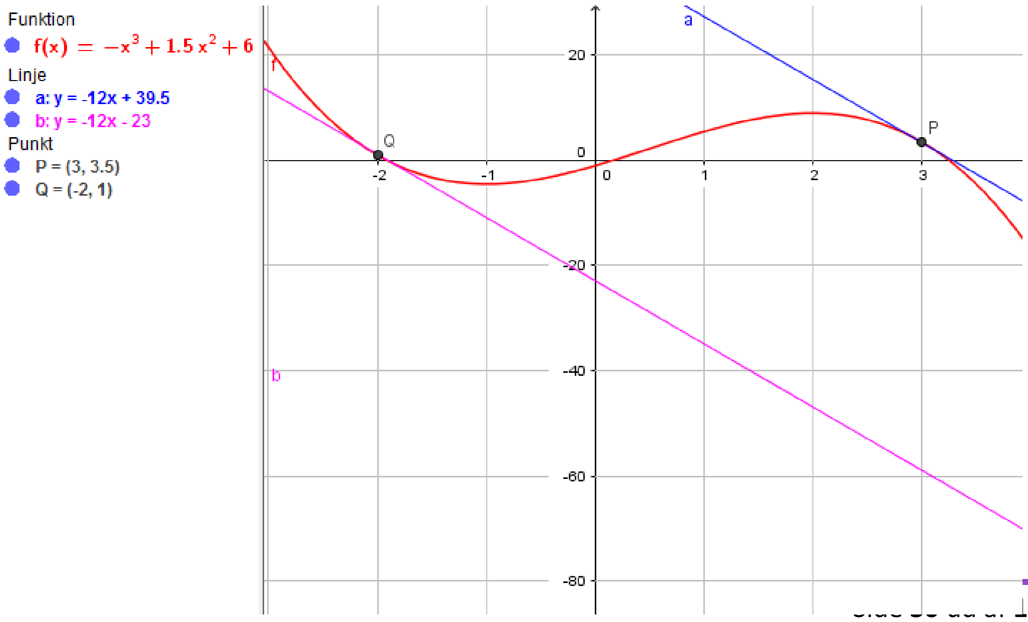
$f(-2)$

$$1.0$$

Så koordinatsættet til det andet tangentpunkt er
$(x = -2, y = 1)$

x = -2, y = 1

Grafisk kan det se sådan ud:

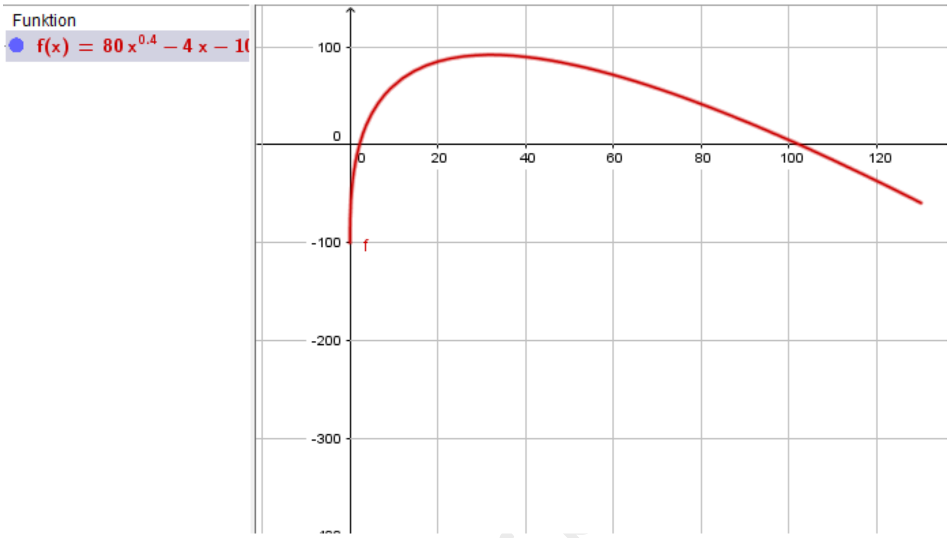


Opgave 2.033

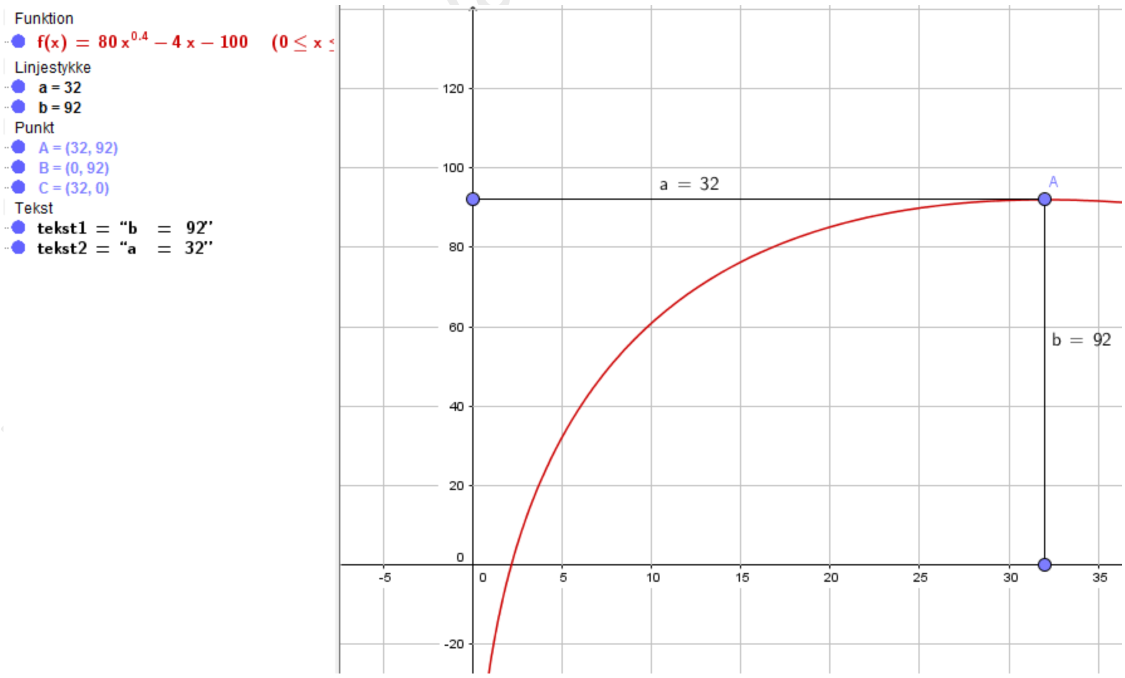
Modellen beskriver overskuet for en virksomhed. Lad den være givet ved:

$$f(x) = 80 \cdot x^{0.4} - 4x - 100, \qquad 0 \leq x \leq 130$$

a) Grafen kan tegnes let i GeoGebra.



b) Den løses grafisk for x, men den kan også løses v.h.a. differentialregning!



Så man kan se, at overskuet er størst på 92 tusinde kr. Nu løses den i Maple 2016.

Fortsættes næste side

Funktionen defineres.

$f(x) := 80 \cdot x^{0.4} - 4x - 100$

$$x \rightarrow 80\, x^{0.4} - 4x - 100$$

Afledede og sættes lig 0.

$f'(x) = 0$

$$\frac{32.0}{x^{0.6}} - 4 = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for } x}$

$$[[x = 32.00000000]]$$

Det ses, at $x = 32$ (den grafiske ovenfor hedder $a = 32$) men det er lige gyldigt. Nu gøres der prøve for at se, om det passer med at $x = 32$ giver det største overskud.

$f'(31)$

$$0.076927251$$

$f'(33)$

$$-0.073174394$$

Man kan hermed se, at det passer. Indsættes 32 fås 0.

$f'(32)$

$$0.$$

Nu indsættes 32 i den oprindelige funktion.

$f(32)$

$$92.0000000$$

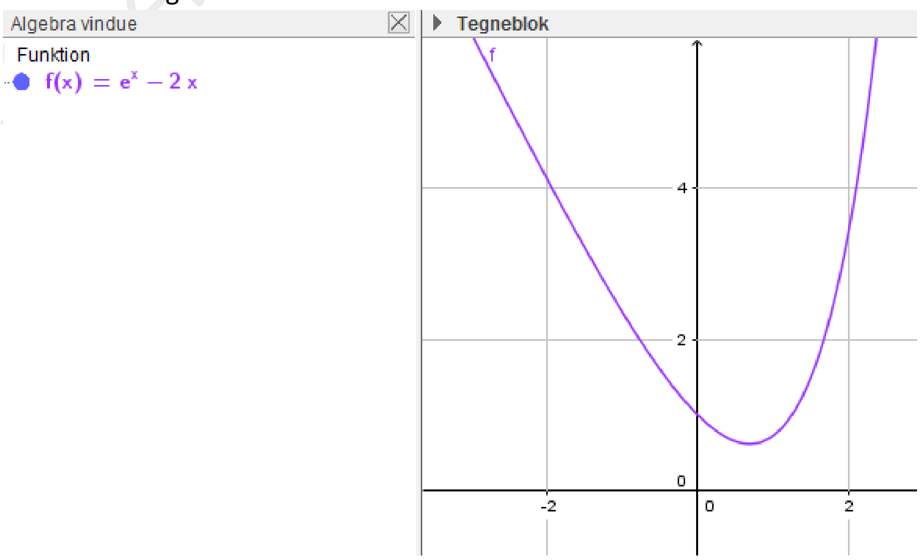
Så overskuet er faktisk 92 tusinde kroner.

Opgave 2.034

Der er givet en funktion

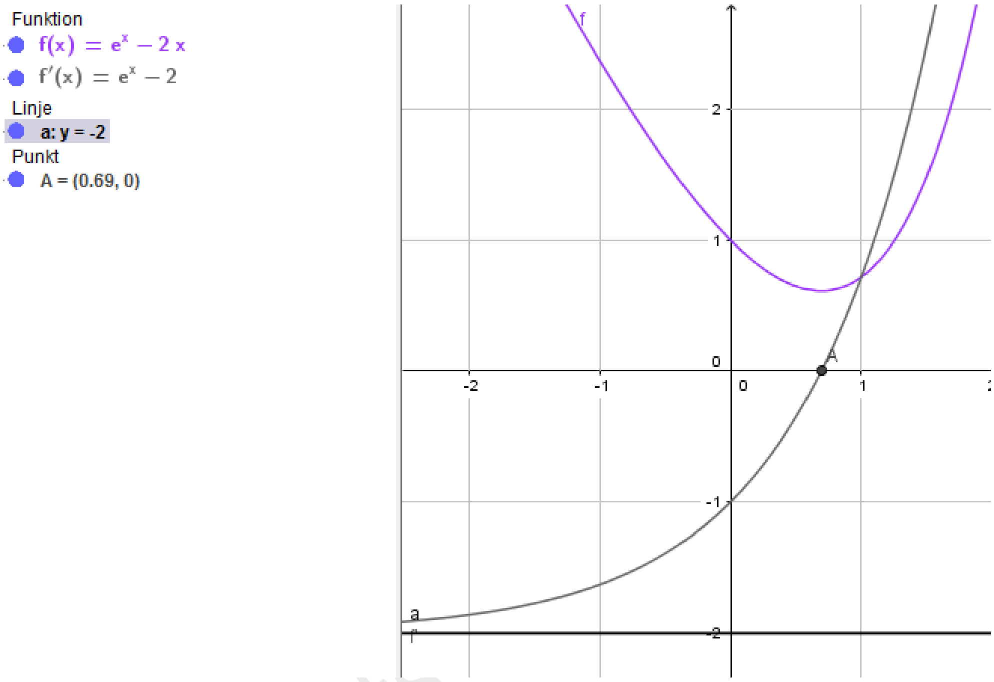
$$f(x) = e^x - 2x$$

a) Grafen kan tegnes let i GeoGebra.



Fortsættes næste side

Funktionen differentieres. $f'(x) = e^x - 2$.
Her ses det, at den laveste y-værdi funktionen kan få, er -2. Efterfølgende vil den vokse op og ramme x −aksen. Dvs. $f'(x) = 0$ som så giver $x = 0.69$, heraf ses det, at funktionen efterfølgende vil være voksende, hvilket grafen tidligere viser.
Nedenstående viser forklaringen:



Opgave 2.035

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 2.5x^2 - 2x + 7$$

a) Der løses en ligning for den afledede af f.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Anvendelse af diskriminanten.

$$d = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49 => 49^{0.5} = 7$$

Nu løses der for x.

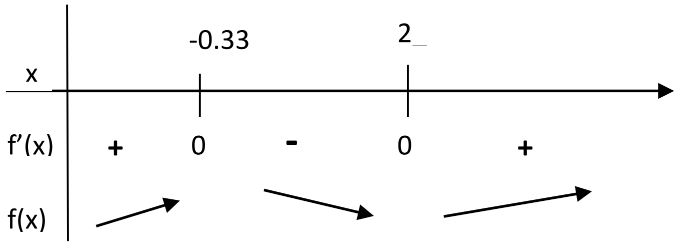
$$x = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{array}{c} 2 \\ -0.33 \end{array}$$

b) Nu gøres der prøve for at bestemme, om f er voksende og/eller aftagende.

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 2 = 10$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 2 = -4$$
$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 5(-1) - 2 = 6$$

Fortsættes næste side

Således kan man nu tegne monotoniforholdet for f.



Konklusionen for det er så:
f er voksende i intervallet $]-\infty;-0.33]$, aftagende i intervallet $[-0.33;2]$ samt voksende i intervallet $[2;\infty[$

Endelig kan de lokale ekstrema findes. Punkterne angives nedenfor:

$$f(-0.33) = (-0.33)^3 - 2.5\cdot(-0.33)^2 - 2\cdot(-0.33) + 7 = 7.351813$$
$$f(2) = 2^3 - 2.5\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 7 = 1$$

Så f har lokal maks. i punktet:

$$(-0.33;7.351813)$$

Og f har lokal min. i punket:

$$(2;1)$$

Opgave 2.036

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

a) Der skal bestemmes en ligning for tangenten til f.
Derfor differentieres f.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

Endelig indsættes punktet $(3, f(3))$ i f og f'.

$$f(3) = 3^3 + 3^2 - 5\cdot 3 + 3 = 24$$
$$f'(3) = 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 - 5 = 28$$

Disse samt punktet indsættes i tangentligningen.

$$y = 28(x-3) + 24 \Leftrightarrow y = 28x - 60$$

Derved blev tangenthældningen fundet.

b) Der løses en ligning for den afledede af f.

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

Anvendelse af diskriminanten.

$$d = 2^2 - 4\cdot 3\cdot(-5) = 4 + 60 = 64^{0.5} = 8$$

Nu løses der for x.

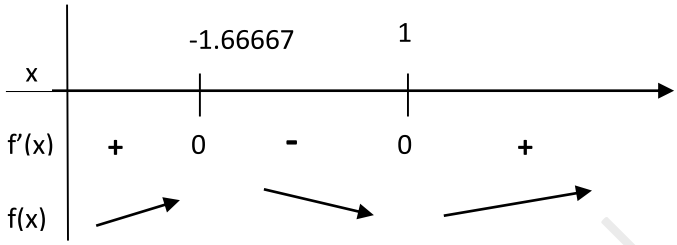
$$x = \frac{-2 \pm 8}{6} = \begin{matrix} 1 \\ -1.66666667 \end{matrix}$$

Fortsættes næste side

Nu gøres der prøve for at bestemme, om f er voksende og/eller aftagende.

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 11$$
$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = -1.25$$
$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 5 = 3$$

Således kan man nu tegne monotoniforholdet for f.



Konklusionen for det er så:

f er voksende i intervallet $]-\infty; -\frac{5}{3}]$, aftagende i intervallet $[-\frac{5}{3}; 1]$ samt voksende i intervallet $[1; \infty[$

Endelig kan de lokale ekstrema findes. Punkterne angives nedenfor:

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$$
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 = 9.481$$

Så f har lokal maks. i punktet:

$$\left(-\frac{5}{3}; 9.481\right)$$

Og f har lokal min. i punket:

$$(1; 0)$$

Opgave 2.037

Man skal i denne opgave bestemme tangenthældningens punkt til f. Funktionen f er givet ved (Der er intet krav om at regne hele tangentligningen)..

a) Funktionen skrives og differentieres.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Da man kender tangenthældningen kan man sætte den lig med den afledede af f.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

Derved sætter man $f'(x) = -3$

$$2x - \frac{1}{x^2} = -3$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

Fortsættes næste side

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 0.5$$

Men man antager, at $x > 0$, derved forkastes den negative værdi og den positive værdi accepteres.

Da man kender punktet $x = 0.5$ indsættes den i den oprindelige funktion, hvor man vil få y −koordinaten til det punkt, hvor tangenten rammer f.

$$f(x) = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 0.25 + 2 = 2.25$$

Herved blev y −koordinaten fundet. Derfor er koordinatsættet til punktet hvor tangenten rammer f med en hældning på -3 således:

$$(0.5; 2.25)$$

Opgave 2.038

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

a) Der løses en ligning for den afledede af f.

$$6x^2 + 6x - 36 = 0$$

Anvendelse af diskriminanten.

$$d = 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-36) = 900^{0.5} = 30$$

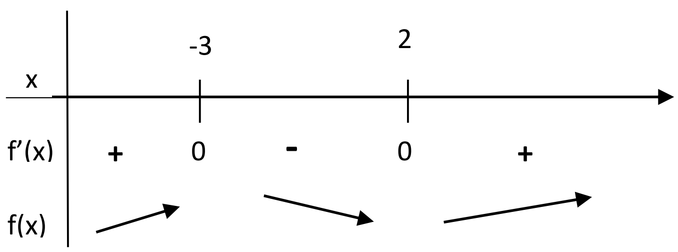
Nu løses der for x.

$$x = \frac{-6 \pm 30}{12} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Nu gøres der prøve for at bestemme, om f er voksende og/eller aftagende.

$$f'(3) = 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 36 = 36$$
$$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 36 = -24$$
$$f'(-4) = 6(-4)^2 + 6(-4) - 36 = 36$$

Således kan man nu tegne monotoniforholdet for f.



Konklusionen for det er så:
f er voksende i intervallet $]-\infty; -3]$, aftagende i intervallet $[-3; 2]$ samt voksende i intervallet $[2; \infty[$

Fortsættes næste side

b) Der skal bestemmes en ligning for tangenten til f.
Endelig indsættes punktet $P\big(1, f(1)\big)$ i f og f'.

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 = -31$$
$$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 36 = -24$$

Disse samt punktet indsættes i tangentligningen.

$$y = -24(x-1) - 31 \Leftrightarrow y = -24x - 7$$

Derved blev tangenthældningen fundet.

Opgave 2.039

En model er defineret ved

$$f(t) = 139.2 - 19.6 \cdot t - 39.2 \cdot 0.607^t$$

Hvor den betegner en genstand i frit fald med en højde på 100m over jordoverfladen

a) Da genstanden rammer jorden, betyder det, at man sætter $f(t)$ lig med 0.

$$139.2 - 19.6 \cdot t - 39.2 \cdot 0.607^t = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$t = -3.303491 \quad \vee \quad t = 7.042596$$

Man regner ikke i negative tider. Derfor tager det genstanden ca. 7 sekunder for at den rammer jorden.

b) Modellen differentieres og der bestemmes for $f'(2)$.

$$f'(2) = \frac{196 \cdot \ln(1000) \cdot 607^2}{5 \cdot 1000^2} - \frac{196 \cdot \ln(607) \cdot 607^2}{5 \cdot 1000^2} - \frac{98}{5} = -12.38957159$$

Genstanden falder 12.38 meter pr. sekund efter 2 sekunder.

Opgave 2.040

Overfladearealet af en cylinder har funktionsforskriften:

$$O(x) = \frac{1600}{x} + 2 \cdot \pi \cdot x^2$$

a) Man skal bestemme radius x, således den har en overflade areal der er mindst mulig.

$$O'(x) = -\frac{1600}{x^2} + 4 \cdot \pi \cdot x$$

Den afledede funktion sættes lig med 0.

$$0 = -\frac{1600}{x^2} + 4 \cdot \pi \cdot x$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 5.030796$$

Dvs. man har den afledede's x-værdi. Man ønsker at finde ud af hvornår funktionen er størst. Der gøres prøve ved indsættelse af tal i den afledede funktion.

$$O'(4) = -\frac{1600}{4^2} + 4 \cdot \pi \cdot 4 = -49.734$$
$$O'(6) = -\frac{1600}{6^2} + 4 \cdot \pi \cdot 6 = 30.954$$

Dvs. at overfladearealet er mindst mulig ved x-værdien på 5.030796
Man kan tjekke efter ved at indsætte det i den oprindelige funktion.

$$O(5.030796) = \frac{1600}{5.030796} + 2 \cdot \pi \cdot 5.030796^2 = 477.061$$

Så deraf kan man få den mindste overfladeareal på 477mL.

Opgave 2.041

a) Ved aflæsning af figuren ses det, at man skal benytte sig af formlen:

$$V = L \cdot B \cdot H$$

Hvor længden er L, bredden er B og højden er H. Det ses på figuren, at længden er

$$\frac{1.2 - 2x}{2}$$

Fordi figuren viser længden for siderne, toppen og bunden, men det skal kun være for enten bunden eller toppen. Derfor divideres med 2.

Bredden kan bestemmes ved følgende

$$1.2 - x$$

Da der kun er en sidelængde. Endelig kan højden regnes. Højden er bare x. Disse oplysninger indsættes i formlen og dette laves der en funktion ud fra.

Fortsættes næste side

$$V(x) = \left(\frac{1.2 - 2x}{2}\right) \cdot (1.2 - x) \cdot x$$

Som beskriver kassen. Derved gælder $R(x)$ som også er $V(x)$. Dvs. det er det samme.

b) Modellen differentieres og derfra finder man ud af, hvornår kassens rumfang kan blive størst muligt.

$$R(x) = x^3 - 1.8x^2 + 0.72x$$
$$R'(x) = 3x^2 - 3.6x + 0.72$$

Som er den afledede af R. Den afledede sættes lig med 0.

$$R'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3.6x + 0.72 = 0$$

Da kan man løse en alm. andengradsligning.

$$d = (-3.6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0.72 = 4.32$$

Endelig kan man regne x.

$$x = \frac{-(-3.6) \pm \sqrt{4.32}}{2 \cdot 3} = \begin{matrix} 0.946 \\ 0.253 \end{matrix}$$

Men da begrænsningen er på $0 < x < 0.6$ må den største værdi forkastes. Her ses det så, at $x = 0.253$.

Nu gøres der prøve for at se, om funktionen er voksende og/eller aftagende i det ovenstående interval.

$$R'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3.6 \cdot 0 + 0.72 = 0.72$$
$$R'(0.4) = 3 \cdot 0.4^2 - 3.6 \cdot 0.4 + 0.72 = -0.24$$

Det ses at $x = 0.253$ må have den maksimale værdi.

Opgave 2.042

Der er givet en model

$$f(x) = \frac{2}{x} + 3, \qquad x > 0$$

a) Der skal findes en stamfunktion til f der går gennem punktet $P = (1,1)$

$$\int \frac{1}{2}x + 3\,dx = \frac{\frac{1}{2}}{1+1}x^{1+1} + 3x + k = \frac{1}{4}x^2 + 3x + k$$

Altså indsætter man nu punktet i nedenstående udtryk:

$$1 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + k \Leftrightarrow$$
$$1 = \frac{1}{4} + 3 + k \Leftrightarrow$$

Fortsættes næste side

$$-2-\frac{1}{4}=k \Leftrightarrow$$
$$k=-\frac{9}{4}$$

Så udtrykket

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2+3x-\frac{9}{4}$$

Er stamfunktion til f.

Opgave 2.043

Opgaven udregnes i Maple 2016.

Modellen over pendulet er givet ved

$$T(x) := 0.58\cdot\sqrt{\frac{1+12x^2}{x}}$$

$$x \rightarrow 0.58\sqrt{\frac{1+12x^2}{x}}$$

a)

Der indsættes 0.060 i x.
$T(0.060)$

$$2.418444679$$

Svingningstiden vil derfor være 2.418 sekunder.

b)

Der løses en ligning for x.
$T(x)=2$

$$0.58\sqrt{\frac{12x^2+1}{x}}=2$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x=0.8980948577], [x=0.09278901066]]$$

Ved en svingningstid på 2 sekunder, skal midtpunktet være 0.0927 meter fra stangen.

c)

Modellen differentieres og sættes lig 0.
$T'(x)=0$

$$\frac{0.2900000000\left(24-\frac{12x^2+1}{x^2}\right)}{\sqrt{\frac{12x^2+1}{x}}}=0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x=0.2886751346], [x=-0.2886751346]]$$

Heraf fås to værdier, den negative værdi forkastes, så der hvor der er mindst svingningstid, skal man placere den 0.28 meter fra stangen.

Opgave 2.044

Der oplyses en funktion.

$$f(x) = 2x - 3$$

a) Stamfunktionen F med punktet $P(0,1)$ bestemmes.

$$\int 2x - 3\,dx = x^2 - 3x + k$$

Her indsættes punktet.

$$1 = 0^2 - 3 \cdot 0 + k \Leftrightarrow k = 1$$

Så stamfunktionen til f er

$$F(x) = x^2 - 3x + 1$$

Opgave 2.045

Der oplyses en funktion.

$$f(x) = 2x - 3$$

a) Stamfunktionen F bestemmes.

$$\int 2x - 3\,dx = x^2 - 3x + k$$

Så stamfunktionen til f er

$$F(x) = x^2 - 3x + k$$

Da førsteaksen er tangent, anvendes toppunktet til F, idet der er tale om et andengradspolynomium.

$$T_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = 1.5$$

Dette indsættes i F, og da førsteaksen er tangent, er andenaksen 0.

$$0 = 1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + k$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for k vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$k = 2.25$$

Det ses, at stamfunktionen har konstanten $k = 2.25$ dette indsættes i $F(x)$.

$$F(x) = x^2 - 3x + 2.25$$

En anden metode er diskriminaten. Da førsteaksen er tangent, skal andenaksen være 0 og da tangenten giver et punkt, kan man sætte $d = 0$.

$$0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for k vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$k = 2.25$$

Derved passer det.

Opgave 2.046

Der oplyses en funktion.

$$f(x) = 2x - 3$$

a) Stamfunktionen F bestemmes.

$$\int 2x - 3\,dx = x^2 - 3x + k$$

Så stamfunktionen til f er

$$F(x) = x^2 - 3x + k$$

Man skal nu finde k og linjen $y = x + 5$ er tangent. Derfra tages den afledede af F, eller blot f og sættes lig med hældningskoefficienten fra linjen.

$$2x - 3 = 1$$

$\Updownarrow$ Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 2$$

Heraf fås $x = 2$. Dette indsættes i x på F hvorefter $x = 2$ indsættes i linjen for y og dette sættes lig med $F(x)$

$$2 + 5 = 2^2 - 3 \cdot 2 + k$$

$\Updownarrow$ Ligningen løses for k vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$k = 9$$

Så her fik man konstanten k til $F(x)$. Stamfunktionen er så

$$F(x) = x^2 - 3x + 9$$

Opgave 2.047

Funktionen f er givet $f(x) = x^3 + 6x^2$

a) Nulpunkterne bestemmes. Dvs. der løses en ligning for f. Men der er dog ingen grund til panik pga. det er en tredjegradspolynomium, for her kan nulreglen anvendes.

$$x(x^2 + 6x) = 0$$

Her er $x = 0$

Hvor resten af ligningen $x^2 + 6x = 0$ løses som en andengradsligning.

Anvendelse af diskriminanten.

$$d = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 36^{0.5} = 6$$

Nu løses der for x.

$$x = \frac{-6 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 0 \\ -6 \end{matrix}$$

Så løsningerne til tredjegradspolynomiet er $x = -6 \ \vee x = 0 \ \vee x = 0$

Fortsættes næste side

b) Her kan man bestemme arealet v.h.a. at integrere funktionen. Her tages nulpunkterne fra **a)** og anvendes.

$$\int_{-6}^{0} x^3 + 6x^2\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3\right]_{-6}^{0} = \left[\frac{1}{4}0^4 + 2\cdot 0^3\right] - \left[\frac{1}{4}(-6)^4 + 2(-6)^3\right]$$
$$= 108$$

Så arealet blev bestemt til 108 som ligger i andet kvadrant (pga. -6 og 0)

Opgave 2.048

Funktionen f er givet $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

a) Nulpunkterne bestemmes. Dvs. der løses en ligning for f.
Anvendelse af diskriminanten.

$$d = 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 5 = 36^{0.5} = 6$$

Nu løses der for x.

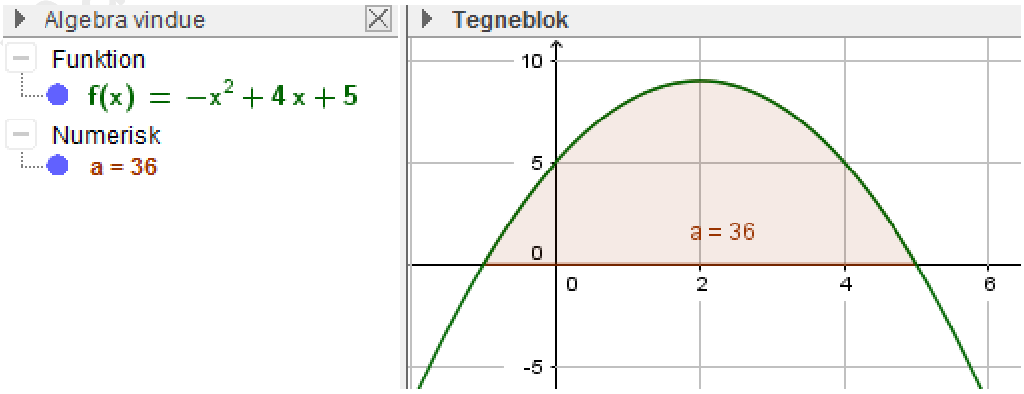
$$x = \frac{-4 \pm 6}{-2} = \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix}$$

Så løsningerne til andengradspolynomiet er $x = -1 \;\vee\; x = 5$

b) Her kan man bestemme arealet v.h.a. at integrere funktionen. Her tages nulpunkterne fra **a)** og anvendes.

$$\int_{-1}^{5} -x^2 + 4x + 5\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5}$$
$$= \left[-\frac{1}{3}\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 5\cdot 5\right] - \left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + 2(-1)^2 + 5(-1)\right]$$
$$= \frac{100}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = 36$$

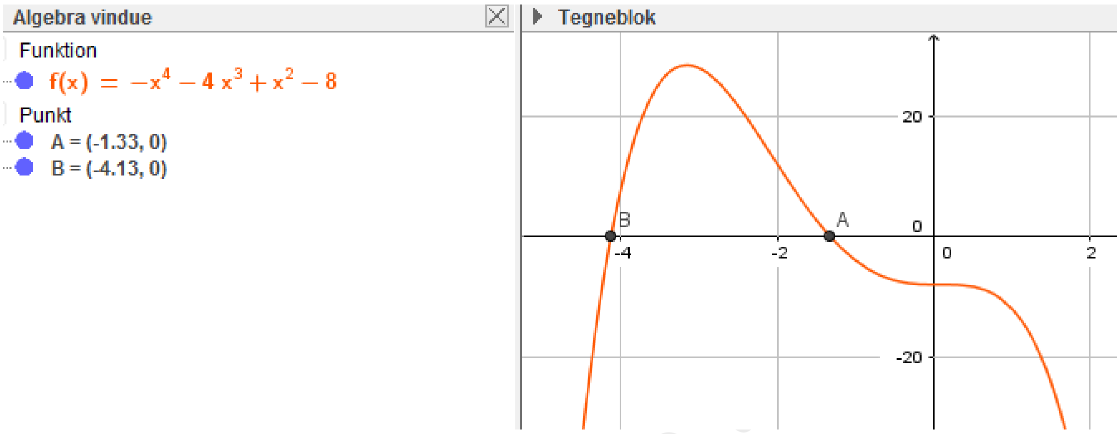
Så arealet blev bestemt til 36. Grafisk ser det sådan ud, med anvendelse af kommandoen: **Integral[<Funktion>, <Tal>, <Tal>]**



Opgave 2.049

Funktionen f er givet $f(x) = -x^4 - 4x^3 + x^2 - 8$

a) Nulpunkterne bestemmes, men først en tegning af grafen:



Da det er en fjerdegradsligning, løses den via CAS, da man ikke arbejder med dem på B-niveau.

$$-x^4 - 4x^3 + x^2 - 8 = 0$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = -4.128532 \quad \vee \quad x = -1.32651$$

Her ses to løsninger, de andre er i den komplekse verden.

Disse nulpunkter anvendes til at bestemme det areal, som funktionen afgrænser.

b) Her kan man bestemme arealet v.h.a. at integrere funktionen. Her tages nulpunkterne fra **a)** og anvendes.

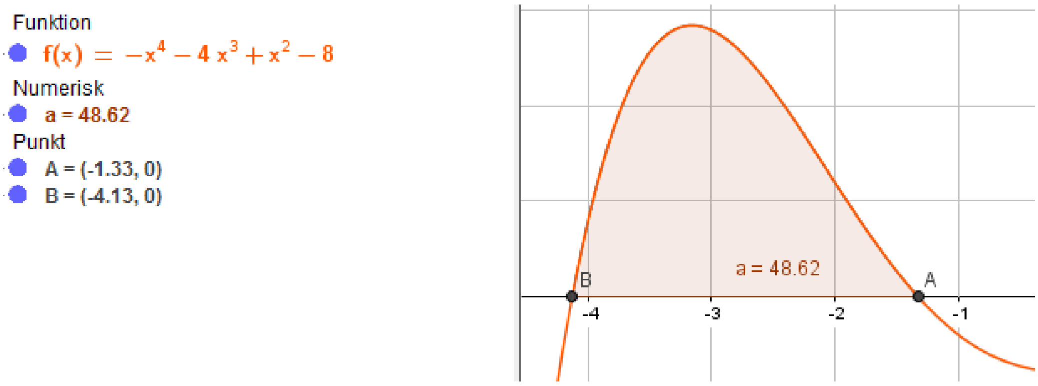
$$\int_{-4,13}^{-1,33} -x^4 - 4x^3 + x^2 - 8\,dx = \left[-\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - 8x\right]_{-4.13}^{-1.33}$$

$$= \left[-\frac{(-1.33)^5}{5} - (-1.33)^4 + \frac{(-1.33)^3}{3} - 8(-1.33)\right]$$

$$- \left[-\frac{(-4.13)^5}{5} - (-4.13)^4 + \frac{(-4.13)^3}{3} - 8(-4.13)\right]$$

$$= 7.559 - (-41.064) = 48.623$$

Så arealet blev bestemt til 48.623. Grafisk ser det sådan ud, med anvendelse af kommandoen: **Integral[<Funktion>, <Tal>, <Tal>]**



Opgave 2.050

Opgaven løses via Maple 2016.

Funktionen defineres.

$$f(x) := -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$$

a)

Der bestemmes integralet:

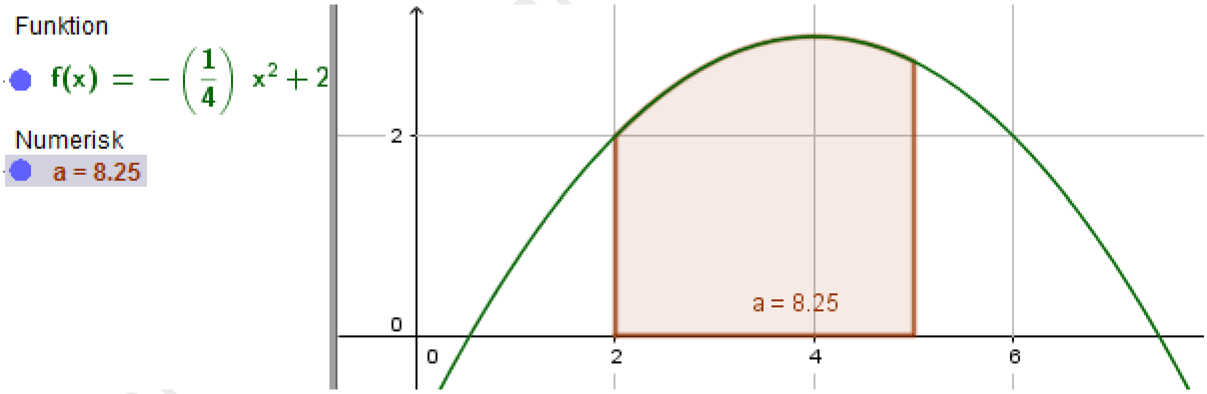
$$\int_2^5 f(x)\,dx$$

$$\frac{33}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$8.2500$$

Integralet giver dette tal. Det ses desuden, at det er et andengradspolynomium. Løses den for $f(x) = 0$ fås ikke de grænseværdier fra integralet. Integralet er blot et udsnit af et areal for funktionen f med grænseværdierne $x = 2 \vee x = 5$



Opgave 2.051

Opgaven løses via Maple 2016.

Funktionerne defineres.

$f(x) := -x^3 + 1.5x^2 + 6x - 1$

$$x \to -x^3 + 1.5x^2 + 6x - 1$$

$g(x) := 6.5 - x$

$$x \to 6.5 - x$$

a)
Der løses en ligning for f og g
$f(x) = g(x)$

$$-x^3 + 1.5x^2 + 6x - 1 = 6.5 - x$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

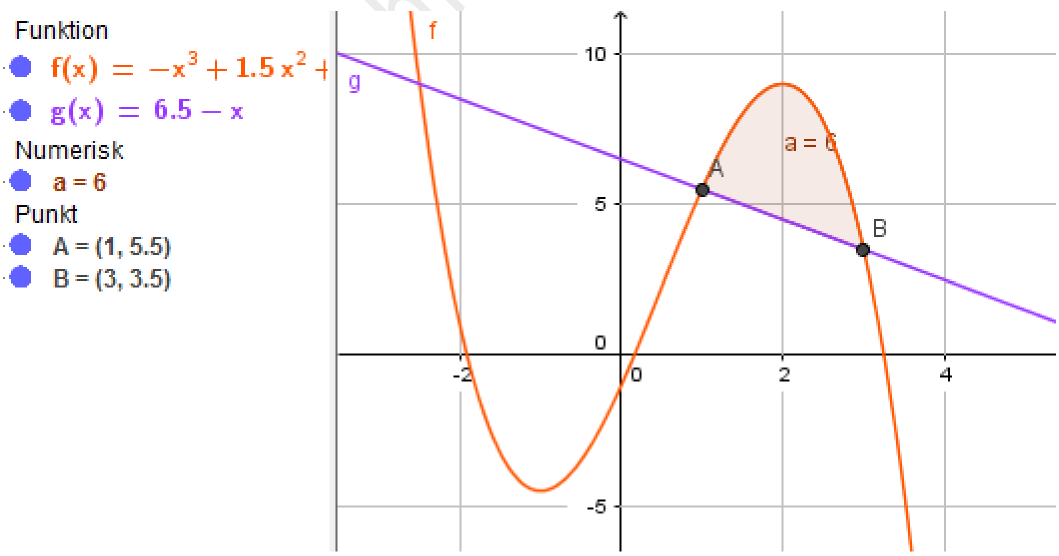
$$[[x = -2.500000000], [x = 1.], [x = 3.]]$$

Heraf fås tre x-værdier.

b)
Her skal man finde arealet mellem f og g. Der tages grænseværdierne $x = 1$ og $x = 3$ fordi det ligger i første kvadrant.

$A = \int_1^3 f(x) - g(x)\,dx$

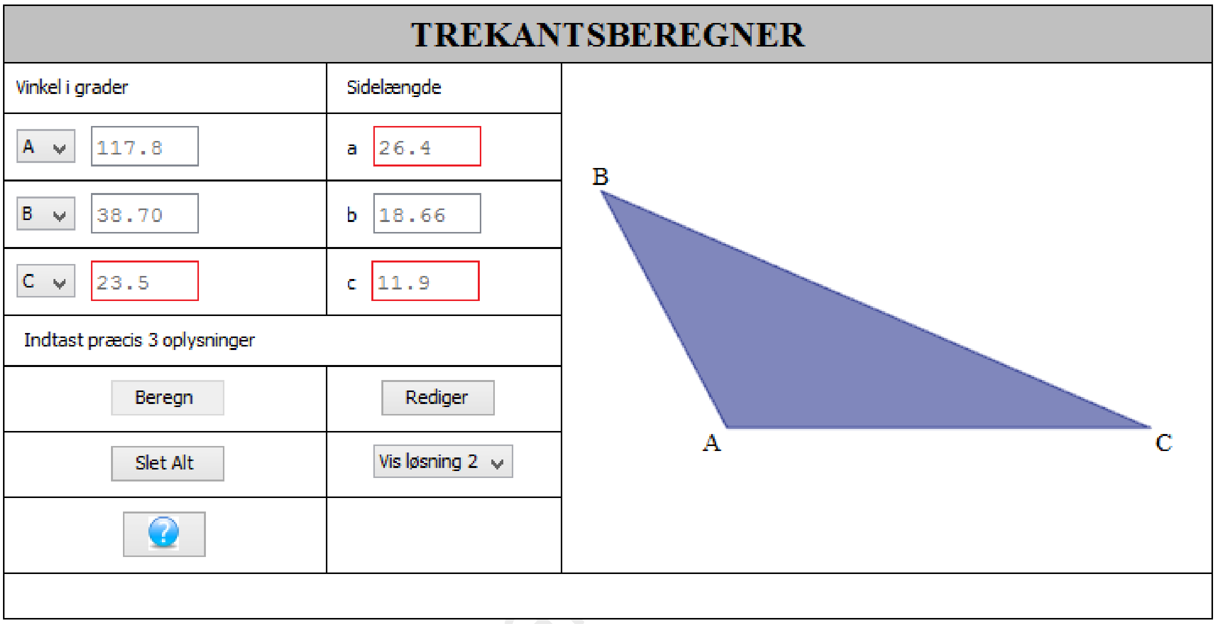
$$A = 6.$$



Opgave 2.052

Trekantsopgaven løses i Maple 2016's trekantsberegning

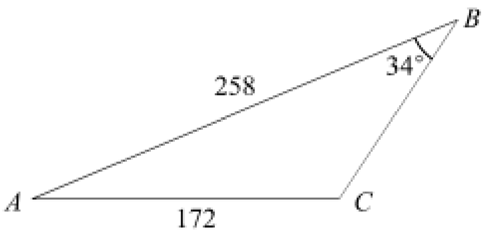
(Start -> apps -> trekantsberegning) så kan man regne sin trekant.



Således blev trekanten med vinkel A som stump beregnet. Man kan vælge løsningerne i ovenstående kasse. Alternativt kan man benytte sig af www.cossincalc.com eller WordMat for udregning af trigonometriske opgaver.

Opgave 2.053

Trekanten er givet.



a) For at bestemme vinkel C, kan man benytte sig af sinusrelationerne fordi i dette tilfælde kendes $b, \angle B$ og c. Den ubekendte er $\angle C$.

$$\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Endelig løses for den ukendte

Fortsættes næste side

$$\frac{\sin(34^o)}{172} = \frac{\sin(C)}{258} \Leftrightarrow$$
$$\sin(34^o) \cdot 258 = 172 \cdot \sin(C) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sin(34^o) \cdot 258}{172} = \frac{172 \cdot \sin(C)}{172} \Leftrightarrow$$
$$\sin(C) = \frac{\sin(34^o) \cdot 258}{172} = 0.8387893552065$$

Dette tages i sinus inverse.

$$\angle C_{spids} = \sin^{-1}(0.8387893552065) = 57.012^o$$

Så blev den spidse vinkel C bestemt, men det er den stumpe vinkel der skal findes, da dette ses på figuren.

$$\angle C_{stump} = 180^o - 57.012^o = 122.988^o$$

b) Arealet af trekanten kan bestemmes. Men først forudsættes det, at man kender $\angle A$, men da man allerede kender $\angle B, \angle C$ så kan man regne det.

$$\angle A = 180^o - 34^o - 122.988^o = 23.012^o$$

Nu anvendes formlen for arealet af en vilkårlig trekant.

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$

Værdierne indsættes.

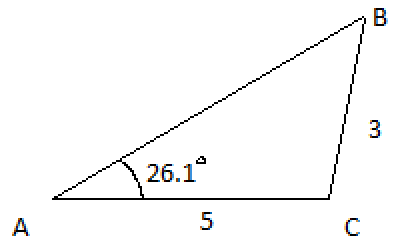
$$T = \frac{1}{2} \cdot 172 \cdot 258 \cdot \sin(23.012) = 8673.819$$

Som er arealet af trekanten.

Det hele kunne også løses lyn hurtigt i Maple 2016.

Opgave 2.054

Det ses, at trekanten er givet.



a) For at bestemme vinkel C, kan man benytte sig af sinusrelationerne fordi i dette tilfælde kendes $a, \angle A$ og b. Den ubekendte er $\angle B$. Som skal bruges for at finde $\angle C$

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

Endelig løses for den ukendte

Fortsættes næste side

$$\frac{\sin(26.1^o)}{3} = \frac{\sin(B)}{5} \Leftrightarrow$$
$$\sin(26.1^o) \cdot 5 = 3 \cdot \sin(B) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sin(26.1^o) \cdot 5}{3} = \frac{3 \cdot \sin(B)}{3} \Leftrightarrow$$
$$\sin(B) = \frac{\sin(26.1^o) \cdot 5}{3} = 0.73323194976$$

Dette tages i sinus inverse.

$$\angle B = \sin^{-1}(0.73323194976) = 47.158^o$$

Så blev vinkel B bestemt. Nu trækkes vinkel A og B fra 180^o, således man kan finde vinkel C.

$$\angle C = 180^o - 26.1^o - 47.158^o = 106.742^o$$

Således fandt man vinkel C.

b) Arealet af trekanten kan bestemmes. Formlen anvendes:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

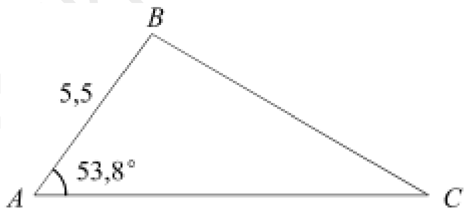
Værdierne indsættes.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin(106.742) = 7.182$$

Hermed blev arealet bestemt.

Opgave 2.055

Det ses, at trekanten



Samt arealet $A = 24.4$

a) Længde $|AC|$ og $|BC|$ kan bestemmes v.h.a. arealformlen først for $|AC|$

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin(A)$$

Her indsættes oplysningerne.

$$24.4 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot 5.5 \cdot \sin(53.8^o)$$

$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for |AC| vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$|AC| = 10.99525$$

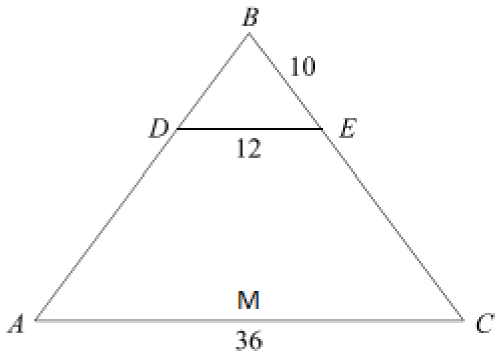
Således fandt man længden $|AC|$. Man kan nu finde $|BC|$ v.h.a. cosinusrelationerne.

$$|BC| = \sqrt{10.99525^2 + 5.5^2 - 2 \cdot 10.99525 \cdot 5.5 \cdot \cos(53.8^o)} = 8.928$$

Således fandt man $|BC|$.

Opgave 2.056

Trekanten



Er givet. Det handler om at finde forstørrelsesfaktoren k, således man kan regne de ukendte længder der kræves.

a)

$$k = \frac{|AC|}{|DE|} = \frac{36}{12} = 3$$

Da man kender forstørrelsesfaktoren k, kan man finde længden $|BC|$.

$$|BC| = k \cdot BE = 10 \cdot 3 = 30$$

Da den er ens med den modsatte side, er $|AB| = |BC|$. Arealet kan bestemmes meget enkelt, fordi der er tale om en ligebenet trekant, altså må højden kunne findes. I dette tilfælde kendes grundlinjen og hypotenusen, men for en enkelt trekant, divideres grundlinjen med 2. Matematisk sådan:

$$grundlinje_{\frac{1}{2}} = \frac{36}{2} = 17$$

Således kan man nu bestemme højden v.h.a. Pythagoras's sætning.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Der indsættes værdierne fra figuren.

$$|BM|^2 + 17^2 = 30^2 \Leftrightarrow |BM|^2 = 30^2 - 17^2 \Leftrightarrow |BM| = \sqrt{30^2 - 17^2} = \sqrt{611}$$
$$= 24.718$$

Som er højden fra B til M. Endelig skal arealet bestemmes.

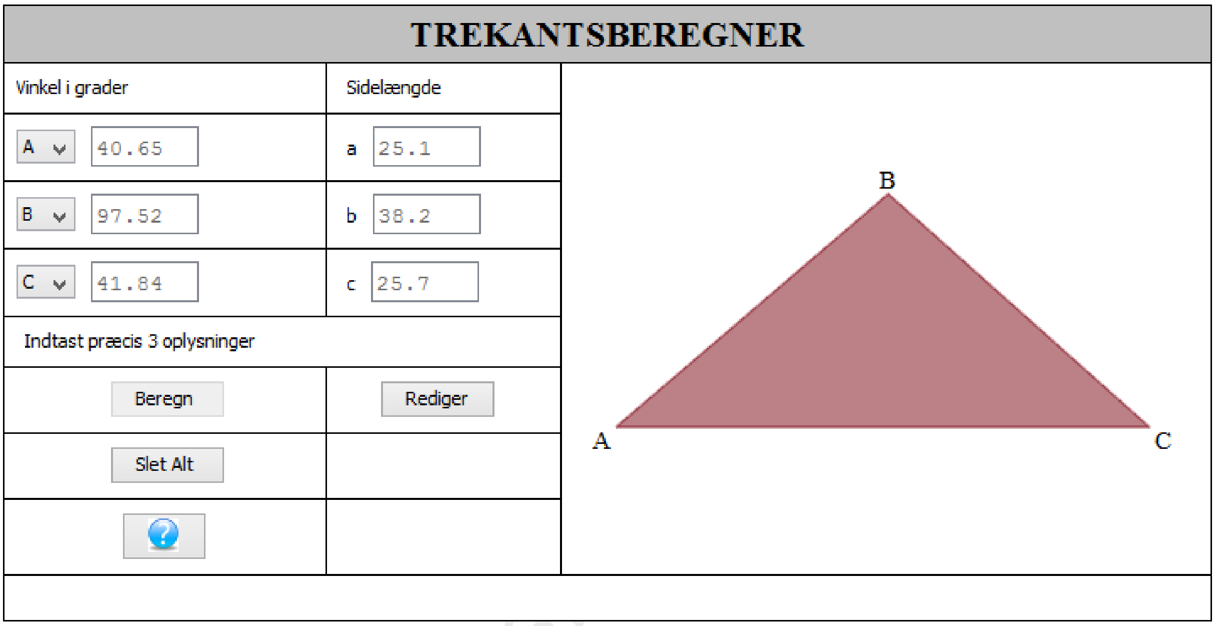
$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 24.718 \cdot 17 = 210.103$$

Dette ganges med to. $210.103 \cdot 2 = 420.206$. Om ikke andet kunne man undlade $\frac{1}{2}$, da det er en halv trekant ud af en hel trekant. Med andre ord, man kunne sammensætte en firkant.

Opgave 2.057

Opgaven laves via Maple 2016's trekantsberegner.

a)



Her ses det, at vinkel B ud fra Maple's beregninger blev bestemt til 97.52^o Man kunne også anvende cosinusrelationerne for vinkel B. Dette gøres nedenfor:

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{25.1^2 + 25.7^2 - 38.2^2}{2 \cdot 25.1 \cdot 25.7}\right) = 97.52^o$$

b)

Man kan bestemme arealet af byggegrunden ved at benytte sig af arealformlen.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)$$

Værdierne indsættes.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25.1 \cdot 25.7 \cdot \sin(97.52^o) = 319.76$$

Her blev arealet af trekant ABC bestemt til $319.76m^2$. For at bestemme den anden byggegrunds areal (trekant ACD) skal man benytte sig af sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(D)}{d}$$

Heri indsættes værdierne.

Fortsættes næste side

$$\frac{\sin(A)}{23.8} = \frac{\sin(94^o)}{38.2}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for A vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$\angle A = 38.42714^o$$

Således kan man finde vinkelsummet, inden man beregner arealet.

$$\angle C = 180^o - \angle A - \angle D = 180^o - 38.42714^o - 94^o = 47.57286^o$$

Endelig kan arealet bestemmes

$$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 23.8 \cdot 38.2 \cdot \sin(47.57286^o) = 335.541$$

Nu kan det samlede byggeareal lægges sammen.

$$T_{byggeareal} = T_{ABC} + T_{ACD} = 319.76 + 335.541 = 655.301$$

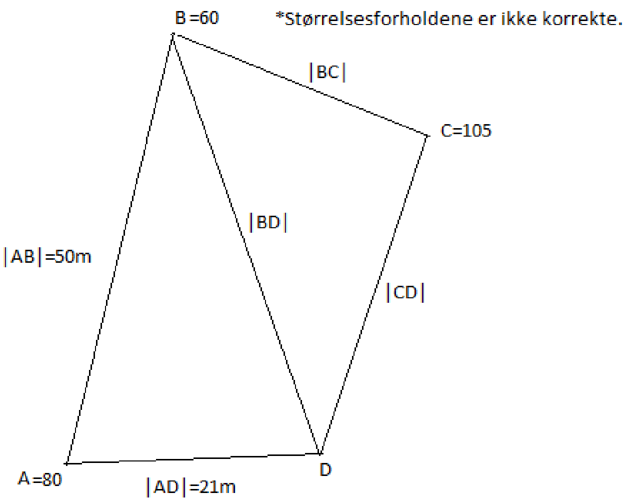
Så det totale areal blev bestemt til $655.301m^2$

Opgave 2.058

Trekanten har givet oplysningerne:

En byggegrund har form som en firkant $ABCD$, hvor vinkel $A = 80°$, vinkel $B = 60°$, vinkel $C = 105°$, $|AD| = 21$ m og $|AB| = 50$ m.

a) Der tegnes en skitse i Paint.



Diagonalen $|BD|$ bestemmes v.h.a. cosinusrelationerne.

$$|BD| = \sqrt{50^2 + 21^2 - 2 \cdot 50 \cdot 21 \cdot \cos(80^o)} = 50.757$$

b) Da man kender diagonalen kan man bestemme arealet af den første del af byggegrunden. Det gøres i slutningen af denne opgave, fordi der findes først for den anden den af byggegrunden.

Fortsættes næste side

Da man kender vinkel B og C, er det muligt at finde vinkel D. Dette gøres v.h.a. vinkelsummen.

$$\angle D = 180^o - 60^o - 105^o = 15^o$$

Da man kender vinkel D kan man nu benytte sig af sinusrelationerne til at finde en længde, der skal bruges i forbindelse med at finde arealet.

$$\frac{\sin(B)}{c} = \frac{\sin(C)}{c} => \frac{\sin(B)}{|CD|} = \frac{\sin(C)}{|BD|}$$

Værdierne indsættes i ovenstående.

$$\frac{\sin(60^o)}{|CD|} = \frac{\sin(105^o)}{50.757}$$

$$\Updownarrow \quad \text{Ligningen løses for } |CD| \text{ vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$|CD| = 45.50748$$

Dvs. længden $|CD|$ er 45.50748m

Endelig kan arealet af trekant ABD og trekant BDC bestemmes.

$$T = T_{ABD} + T_{BDC}$$

Værdierne indsættes.

$$T_{byggegrund} = \left(\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 21 \cdot \sin(80^o)\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 45.50748 \cdot 50.757 \cdot \sin(15^o)\right) \\ = 815.937$$

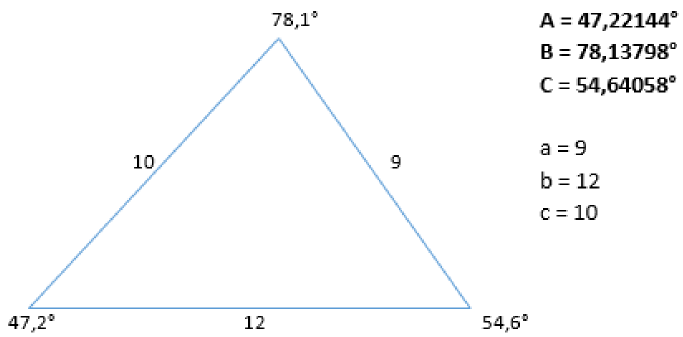
Så arealet af byggegrunden er 816m^2.

Opgave 2.059

Man kan også anvende WordMat til denne type trigonometriske opgaver.

a) Man skal bestemme vinkel A. Her anvendes WordMat's trekantsberegner.

WordMat's trekantsløser anvendes med input: a = 9 , b = 12 , c = 10



Vinkel A og B findes vha. cosinusrelationer

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 12 \cdot 10}\right) = 47{,}22144°$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10^2 + 9^2 - 12^2}{2 \cdot 9 \cdot 10}\right) = 78{,}13798°$$

Vinkel C findes vha. vinkelsum = 180° i en trekant

$$C = 180° - A - B = 180° - 47{,}22144° - 78{,}13798° = 54{,}64058°$$

Så WordMat giver også de andre længder og vinkler.

b) Ved hjælp af trekantsberegneren er det nu muligt at finde arealet af trekanten uden de store problemer.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot \sin(54{,}64058^o) = 44.039$$

Som er det ønskede areal.

Slut på kapitel 2 - opgaver med hjælpemidler.

Kapitel 3 handler om opgaver der har været brugt til matematik B eksamen fra maj 2007 til december 2010. Disse findes i bogen:

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010

Opgaverne i delprøve 1 løses pr. håndkraft hvor opgaver fra delprøve 2 løses via CAS.

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010

HF matematik B – niveau, kapitel 3 – eksamensopgaver

Delprøve 1: Uden hjælpemidler - Delprøve 2: Med hjælpemidler

[Maj 2007, delprøve 1]

Opgave 3.001

En funktion f er givet.

$$f(x) = \ln(x) + 5x^2$$

Funktionen ønskes differentieret.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 10x$$

Som er den afledede af f.

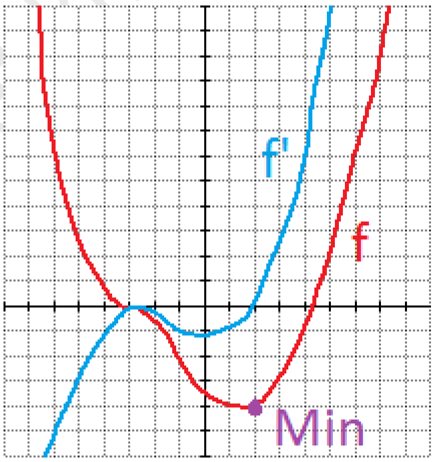
Opgave 3.002

Udtrykket

$$(a+b)^2 - a(a+2b) = a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - 2ab = b^2$$

Opgave 3.003

Der tegnes en graf ud fra oplysningerne.



Opgave 3.004

Integralet bestemmes.

$$\int e^x + 6x^5 - 1\,dx = e^x + x^6 - x + k$$

Som er det ønskede.

Opgave 3.005

Der er givet en 14-dags model.

$$f(x) = 20x + 33760$$

Man kan se, at modellen viser den voksende stigning i elforbruget. Da vedkommende aflæste den 'første gang' var måleren på 33760kWh, hvor dette forventes stigende pr. dag i 14 dage med ca. 20kWh.

Der løses en ligning.

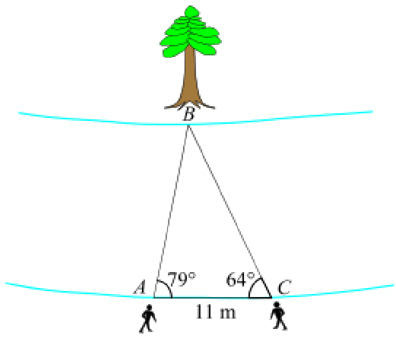
$$\begin{aligned}
&33900 = 20x + 33760 \Leftrightarrow \\
&33900 - 33760 = 20x \Leftrightarrow \\
&140 = 20x \Leftrightarrow \\
&x = \frac{140}{20} = \frac{14}{2} = 7
\end{aligned}$$

Så efter en uge er måleren på 33900kWh.

[Maj 2007, delprøve 2]

Opgave 3.006

Der er givet en geometri figur over en flod.



a) Længden $|BC|$ bestemmes. Først findes vinkelsummen inden sinusrelationerne anvendes.

$$\angle B = 180^o - \angle A - \angle C = 180^o - 79^o - 64^o = 37^o$$

Så kan sinusrelationerne anvendes. Længden $|BC|$ svarer til a.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

Værdierne indsættes

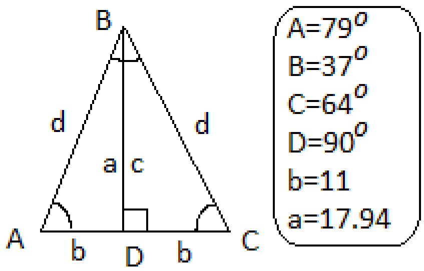
$$\frac{\sin(79)}{a} = \frac{\sin(37)}{11}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$a = 17.94222$$

Så længden $|BC|$ er faktisk 17.94 meter.

b) Der tegnes en ret linje fra vinkel B.



Så højden bestemmes. Da der er en retvinklede trekant, anvendes formlen:

$$c = d \cdot \sin(C)$$

Oplysningerne indsættes

$$c = 17.94 \cdot \sin(64^o) = 16.124$$

Så flodens bredde er ca. 16.124 meter.

Opgave 3.007

Opgaven løses via Maple 2016.

a) Oplysningerne er givet og de defineres, hvorefter der anvendes potensregression.

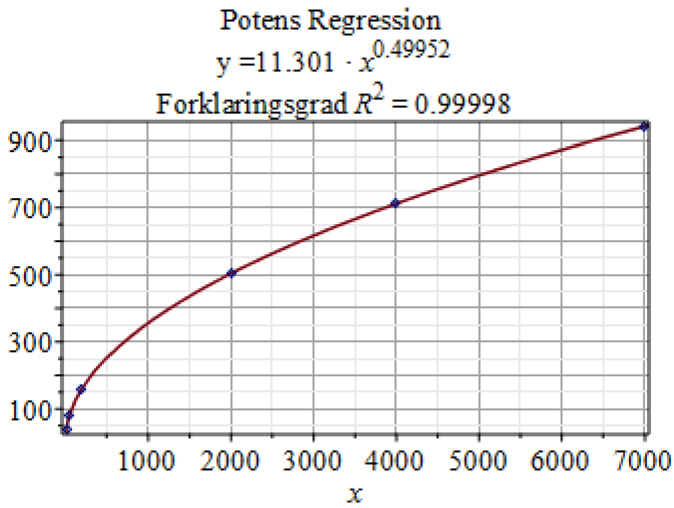
$L1 := [10, 50, 200, 2000, 4000, 7000]$

$$[10, 50, 200, 2000, 4000, 7000]$$

$L2 := [36, 79, 159, 504, 713, 943]$

$$[36, 79, 159, 504, 713, 943]$$

$PowReg(L1, L2)$



Så hermed blev tallene a og b bestemt - der er ligeledes givet forskriften

$f(x) := 11.301 \cdot x^{0.49952}$:

Tallet $a = 0.49952$ og tallet $b = 11.301$.

b) Tallet 120 indsættes på x's plads. Hastigheden bestemmes:

$f(120)$

$$123.5120958$$

Så hastigheden ved en tsunamibølge er $123.512 km/t$.

c) Da positionen P har en vanddybte der er dobbelt så stor som position Q, så kan man bestemme hastigheden i procent for P som er større end Q. Her anvendes formlen

$$r_y = \left((1 + r_x)^a - 1 \right) \cdot 100\,\%$$

Så informationen indsættes.

$$r_y = \left((1 + 1)^{0.49952} - 1 \right) \cdot 100$$

$$r_y = 41.37431170$$

Så hastigheden er altså 41.374% større ved P end Q.

Opgave 3.008

Der er givet en andengradspolynomium. $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

a) Toppunktet bestemmes vha. differentialregning.

$$f'(x) = -2x + 4$$

Der løses en ligning for x.

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

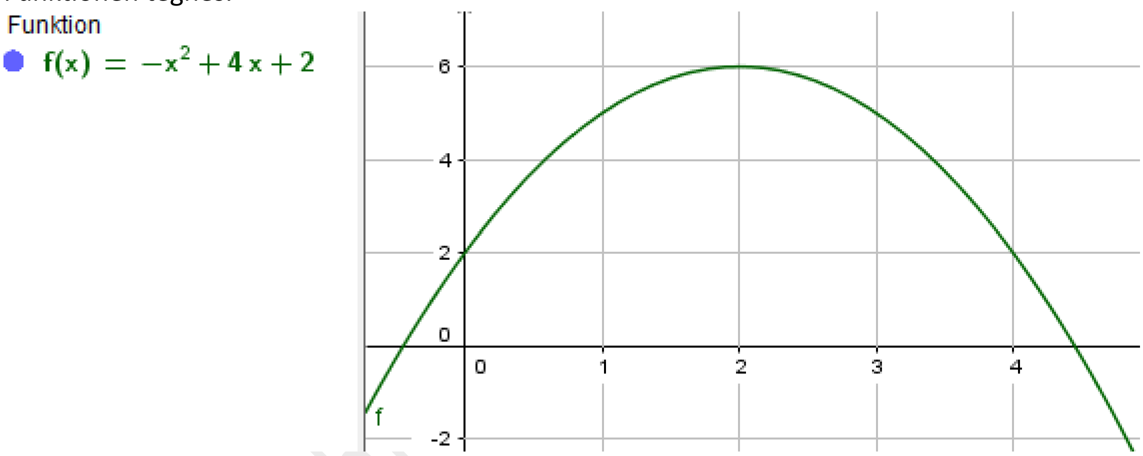
Toppunktet for y findes ved

$$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 6$$

Så koordinatsættet til toppunktet er

$$T = (2{,}6)$$

Funktionen tegnes.



b) Tangenten til f i punktet $P(6, -10)$ bestemmes. Punktet indsættes i f og f'

$$f(6) = -6^2 + 4 \cdot 6 + 2 = -10$$
$$f'(6) = -2 \cdot 6 + 4 = -8$$

Så indsættes tallene i ligningen for tangenten.

$$y = -8(x - 6) - 10 \Leftrightarrow y = -8x + 38$$

Som er tangentligningen for f.

Opgave 3.009

a) Der opstilles en formel ud fra oplysningerne. Da bakterierne fordobles ved 22 minutter, isoleres a i T_2 formlen. Man kender allerede b som er 15.

$$22 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(a) = \frac{\ln(2)}{22} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(a)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{22}} \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{22}} = 1.032$$

Så modellen der beskriver udviklingen af bakterier er

$$y = 15 \cdot 1.032^x$$

Opgave 3.010

Der er givet en funktion

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$$

Som er et tredjegradspolynomium.

a) Først differentieres funktionen hvorefter der løses en ligning for den afledede.

$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 38$$

Der løses en ligning.

$$3x^2 - 22x + 38 = 0$$

$$\Updownarrow \quad \text{\textit{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}}$$

$$x = 2.78475 \quad \vee \quad x = 4.548584$$

Fortolkning: De fundende x-værdier er nulpunkter for den afledede, men for den oprindelige funktion er det her den skifter fra voksende til aftagende eller omvendt. Det er derfor, at man kan anvende en afledede funktion, som kan beskrive en oprindelig funktions bane.

b) Der løses en ligning for den oprindelige funktion f.

$$x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$$

$$\Updownarrow \quad \text{\textit{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 4 \quad \vee \quad x = 5$$

Så her er der tre reelle rødder. Arealet bestemmes for grafen og førsteaksen.

$$A = \int_2^4 x^3 - 11x^2 + 38x - 40\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{11x^3}{3} + 19x^2 - 40x\right]_2^4 =$$

$$\frac{4^4}{4} - \frac{11 \cdot 4^3}{3} + 19 \cdot 4^2 - 40 \cdot 4 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{11 \cdot 2^3}{3} + 19 \cdot 2^2 - 40 \cdot 2\right) =$$

$$A = \frac{8}{3} \approx 2.666$$

Som er arealet.

Opgave 3.011

Modellen er givet.

$$v = 100 - 0.00046 \cdot h^4$$

a) Isens fart bestemmes.

$$v = 100 - 0.00046 \cdot 16^4 = 69.853 cm/år$$

Så den rykker sig ca. 70 cm om året.

b) Der løses en ligning.

$$0 = 100 - 0.00046 \cdot h^4 \Leftrightarrow h = 21.59m$$

Så højden er ca. 22 meter. De komplekse rødder forkastes!

Opgave 3.012

Der er givet en papæske. Volumen bestemmes. Formlen for volumen er

$$V = l \cdot b \cdot h$$

a) Så der ses på æsken, at l svarer til $(28 - 2x)$, b svarer til $(20 - 2x)$ og h svarer til x, derved er udtrykket

$$V = (28 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$$

Så funktionsforskriften passer med påstanden.

Da kassen har kravet $0 < x < 10$ kan man se, at

1) Hvis $0 > x$ kan man se, at det ikke er en æske.
2) Hvis $x > 10$ hvis x er over 10 er det lig med 0.

b) Funktionen differentieres.

$$R(x) = x \cdot (20 - 2x) \cdot (28 - 2x) = (20x - 2x^2) \cdot (28 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 96x^2 + 560x$$

Den differentieres.

$$R'(x) = 12x^2 - 192x + 560$$

Så sættes den lig med 0.

$$12x^2 - 192x + 560 = 0$$

$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 3.836668 \quad \vee \quad x = 12.16333$$

Så den værdi som er større end 10 forkastes. Derfra gøres der prøve, så man kan se, hvornår rumfanget er mindst muligt.

$$R'(3) = 12 \cdot 3^2 - 192 \cdot 3 + 560 = 92$$
$$R'(4) = 12 \cdot 4^2 - 192 \cdot 4 + 560 = -16$$

En monotonilinje tegnes.

x		3.836668		10
$R'(x)$	$+$	0	$-$	
$R(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	

Så R er voksende i intervallet $]0; 3.836668]$ og aftagende i intervallet $[3.836668; 10[$

Så derfor må det største mulige areal være ved

$$R(3.836668) = 4 \cdot 3.836668^3 - 96 \cdot 3.836668^2 + 560 \cdot 3.836668 = 961.315$$

Således fandt man det største mulige rumfang for kassen.

Opgave 3.013

Opgaven løses i Maple 2016.

a) Funktionen defineres.

$$f(t) := 331 \cdot \sqrt{\frac{t+273}{273}}$$

$$t \rightarrow 331 \sqrt{\frac{1}{273}\, t + 1}$$

Luftens temperatur bestemmes.

$$f(t) = 340$$

$$\frac{331}{273}\sqrt{273\, t + 74529} = 340$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$\left[\left[t = \frac{1648647}{109561}\right]\right]$$

$$\frac{1648647}{109561}$$

$$\frac{1648647}{109561}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$15.048$$

Så ved en lydhastighed på $340 m/s$ er temperaturen 15 grader.

b)

Funktionen differentieres og tallet 25 indsættes

$$f'(25)$$

$$\frac{331}{162708}\sqrt{81354}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$0.58024$$

Så efter en temperatur på 25 grader, øges lydhastigheden med $0.58 m/s$.

[August 2007, delprøve 1]

Opgave 3.014

En funktion f er givet.

$$f(x) = 2x^3 + x - 5$$

Så differentieres den

$$f'(x) = 6x^2 + 1$$

Opgave 3.015

Formlen for fahrenheit til celsius er givet:

$$C = \frac{F - 32}{1.8}$$

Her isoleres F.

$$C = \frac{F - 32}{1.8} => 1.8 \cdot C = F - 32 => F = 1.8 \cdot C + 32$$

Som man kan bruge til omregning af fahrenheit til celsius.

Opgave 3.016

Andengradsligningen

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Løses mht. d.

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

Nu findes rødderne.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \left[\begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right.$$

Opgave 3.017

Ved aflæsningen af grafen ses det, at

$$a < 0$$
$$c > 0$$
$$d > 0$$

Da a er negativ, vender benene nedad. Da c rammer y-aksen mellem første og anden kvadrant, er den positiv. Da d skærer førsteaksen to steder, er d større end 0 og derved to reelle løsninger.

Opgave 3.018

Der er givet en funktion.

$$f(x) = 3 \cdot e^x + 4$$

Der er givet punktet $P(0,2)$ Så funktionen integreres først.

$$\int 3 \cdot e^x + 4\,dx = \frac{3 \cdot e^x}{\ln(e)} + 4x + k = 3 \cdot e^x + 4x + k$$

Nu har man stamfunktionen. $F(x) = 3 \cdot e^x + 4x + k$ Men man har punktet givet, så man kan finde k.

$$2 = 3 \cdot e^0 + 4 \cdot 0 + k \Leftrightarrow 2 = 3 \cdot 1 + k \Leftrightarrow -1 = k \Leftrightarrow k = -1$$

Så indsættes det i forskriften for F, så har man $F(x) = 3 \cdot e^x + 4x - 1$

[August 2007, delprøve 2]

Opgave 3.019

Vedvarende energi kan beskrives med en funktion. Der er oplysninger nok til ikke at lave lineær regression.

a) Tallene a og b bestemmes.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9311 - 6681}{3 - 0} = \frac{2630}{3} = 876.66$$
$$b = y_1 - ax_1 = 6681 - 876.66 \cdot 0 = 6681$$

Så man har forskriften

$$f(x) = 876.66x + 6681$$

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, stiger produktionen af vedvarende energi med 876.66TJ

b) Der indsættes for $x = 6$ fordi $x = 0$ svarer til år 1999.

$$f(6) = 876.66 \cdot 6 + 6681 = 11940.96$$

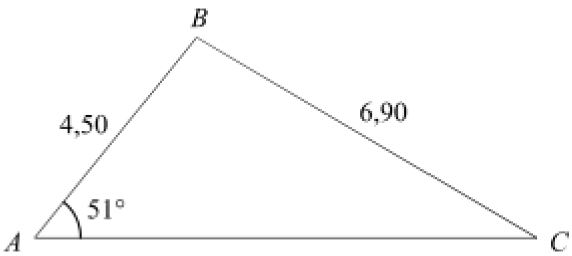
Differencen mellem påstanden og modellen tages

$$11940.96 - 10417 = 1523.96$$

Så modellen begynder at afvige meget i dette år, så modellen forkastes efter 2004.

Opgave 3.020

Der er givet en geometrifigur.



a) Man vil gerne kende de ukendte vinkler. Der anvendes sinusrelationer.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Oplysningerne indsættes

$$\frac{\sin(51^o)}{6.90} = \frac{\sin(C)}{4.50}$$

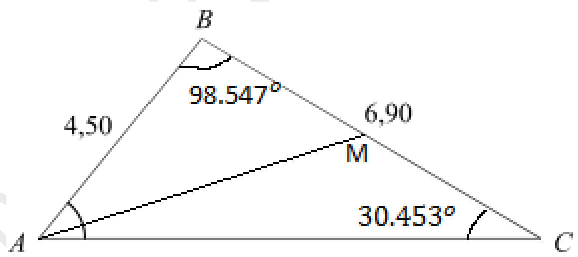
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for C vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$C = 30.453^o$$

Som er vinkel C. Vinkel B bestemmes vha. vinkelsummen.

$$\angle B = 180 - \angle A - \angle C = 180^o - 51^o - 30.453^o = 98.547^o$$

b) Figuren tegnes på ny.



Da medianen går fra m_a, kan man dele a op i to halve. Så anvendes cosinusrelationerne.

$$b = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot m \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos(\mathrm{B})}$$

Oplysningerne indsættes

$$b = \sqrt{4.50^2 + \left(\frac{6.90}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4.50 \cdot \left(\frac{6.90}{2}\right) \cdot \cos(98.547^o)} = 6.0635$$

Så længden af medianen er 6.0635.

Opgave 3.021

Der er givet en model (logistisk vækst MAT B til A) over antallet af elever på de gymnasiale uddannelser.

$$f(x) = \frac{89000}{1 + 0.263\mathrm{e}^{-0.211x}}$$

a) Man er nysgerrig efter antal elever i år 2010, så $x = 5$. Dette indsættes.

$$f(5) = \frac{89000}{1 + 0.263\mathrm{e}^{-0.211 \cdot 5}} = 81533.593$$

Så i år 2010 var antallet af elever på de gymnasiale uddanneler 81553 tusinde.

Modellen differentieres.

$$f'(x) = \frac{4938.9 \cdot \mathrm{e}^{-0.211x}}{(1 + 0.263 \cdot \mathrm{e}^{-0.211x})^2}$$

Da det er væksthastigheden i år 2010 man ønsker, indsættes 5 ligesom før.

$$f'(5) = \frac{4938.9 \cdot \mathrm{e}^{-0.211 \cdot 5}}{(1 + 0.263 \cdot \mathrm{e}^{-0.211 \cdot 5})^2} = 1443.247064$$

Så fra år 2010 og frem vokser antallet af gymnasiale elever med 1443.247 personer.

Opgave 3.022

Det ses, at der er anvendt dobbeltlogaritmisk papir som tyder på en lille potensfunktion. Der aflæses

a) Det ses, at ved en vindhastighed på $4m/s$ er effekten $56kW$.
Det ses, at ved en effekt på $1400kW$ er vindhastigheden $15.2m/s$.

Opgave 3.023

Opgaven løses i Maple 2016.

a) *Oplysningerne defineres.*

$L1 := [0, 8, 15, 25]$

$$[0, 8, 15, 25]$$

$L2 := [300, 80, 28, 6]$

$$[300, 80, 28, 6]$$

$ExpReg(L1, L2)$

Eksponentiel Regression
$y = 290.87 \cdot 0.85567^x$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.99962$

Så tallene a og b blev bestemt til hhv. $a = 0.85567$ og $b = 290.87$ samt funktionsforskriften
$h(t) = 290.87 \cdot 0.85567^t$:

Fortsættes næste side

b) Halveringskonstanten bestemmes.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$$

Oplysningerne indsættes

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.85567)}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 6.415582528 \ln(2)$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 4.4470$$

Så når temperaturen halveres, falder holdbarheden med 4 døgn.

c) Man ønsker at vide, hvor meget holdbarheden falder, når temperaturen falder med 2%.

$$r_y = \left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot 100\,\% :$$

Oplysningerne indsættes.

$$r_y = \left(0.85567^2 - 1\right) \cdot 100$$

$$r_y = -26.78288511$$

Så holdbarheden falder med 26.78% når temperaturen falder med 2%.

Opgave 3.024

Der er givet oplysninger. De afkodes.

a) Forskriften er

$$b = k \cdot h^2$$

Her er h for vindhastigheden og b er bølgehøjden. k er proportionalitetskonstanten.

Opgave 3.025

Opgaven løses i Maple 2016. Så kan man også se hvordan det fungerer.

a) Der er givet en funktion.

$f(x) := x^2 - 5x + 4 + 2 \cdot \ln(x)$

$$x \rightarrow x^2 - 5x + 4 + 2\ln(x)$$

Her er $x > 0$.

Der bestemmes en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(3, f(3))$.

Tangentligningen anvendes.

$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

$$y = \frac{5}{3}x - 7 + 2\ln(3)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

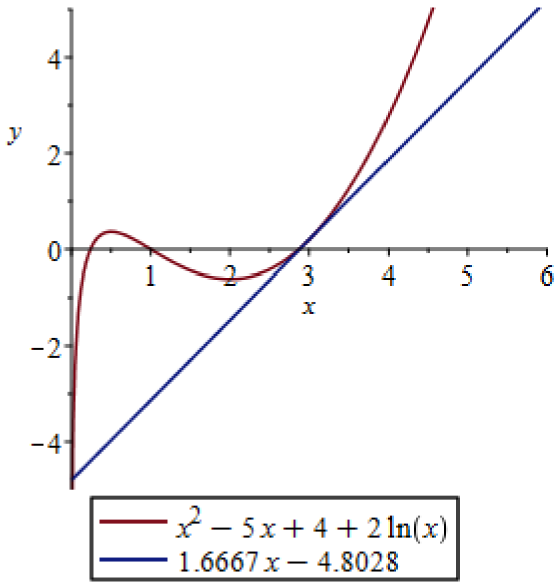
$$y = 1.6667\,x - 4.8028$$

Så dette er tangenthældningen for f. Den defineres og plottes.

$y(x) := 1.6667\,x - 4.8028$

$$x \rightarrow 1.6667\,x - 4.8028$$

$plot([f(x), y(x)], x = 0..6, y = -5..5, legend = [f(x), y(x)])$



Fortsættes næste side

b) Nu ønsker man at vide, hvordan grafen for f forløber sig vha. differentialregning. Derfor differentieres funktionen og sættes lig 0. (Og dette kan også gøres pr. håndkraft).

$f'(x) = 0, x > 0$

$$2x - 5 + \frac{2}{x} = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x = 2], \left[x = \frac{1}{2}\right]\right]$$

Så kan man gøre prøve.

$f'(0.2)$

$$5.40000000$$

$f'(1)$

$$-1$$

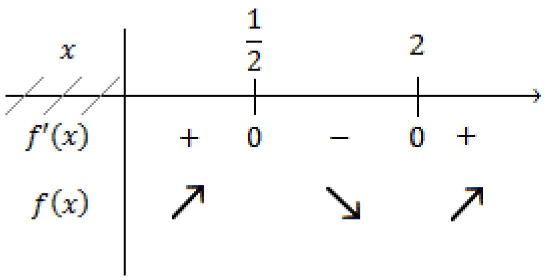
$f'(3)$

$$\frac{5}{3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

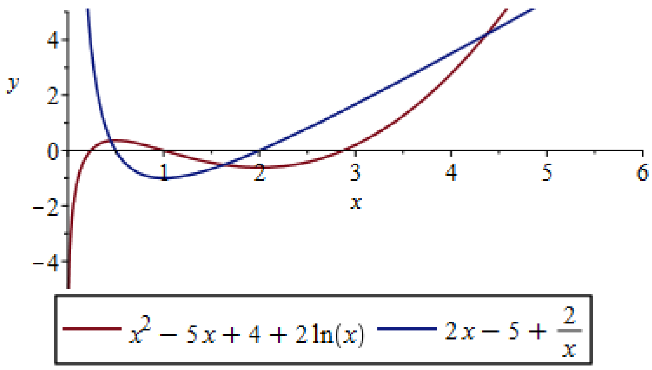
$$1.6667$$

Monotonilinjen tegnes.



Så deraf er konklusionen, at f er voksende i intervallet $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ og $\left[2; \infty\right[$ og f er aftagende i intervallet $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

$plot([f(x), Q(x)], x = 0..6, y = -5..5, legend = [f(x), Q(x)])$



Bemærk, at $Q(x)$ er $f'(x)$, men Maple tillader ikke at definere et mærke.

Opgave 3.026

Der er givet en parabel der bestemmer buen af et fodbold mål.

Inden funktionen tegnes, så bestemmes højden og bredden først.

a) Man kan se, at der er tale om et andengradspolynomium der bestemmer og angiver højden og bredden af målet.

$$f(x) = -0.030x^2 + 3.6x$$

Der anvendes nulreglen.

$$x(-0.030x + 3.6) = 0$$

Hvor den første rod er 0.

$$-0.030x + 3.6 = 0 \Leftrightarrow 0.030x = 3.6 \Leftrightarrow x = \frac{3.6}{0.030} = 120$$

Så det er bredden, målt i cm. Man kan finde højden ved at halvere x −værdien pga. $c = 0$.

Så $\frac{120}{2} = 60$ som indsættes i funktionen $f(x)$.

$$f(60) = -0.030 \cdot 60^2 + 3.6 \cdot 60 = 108$$

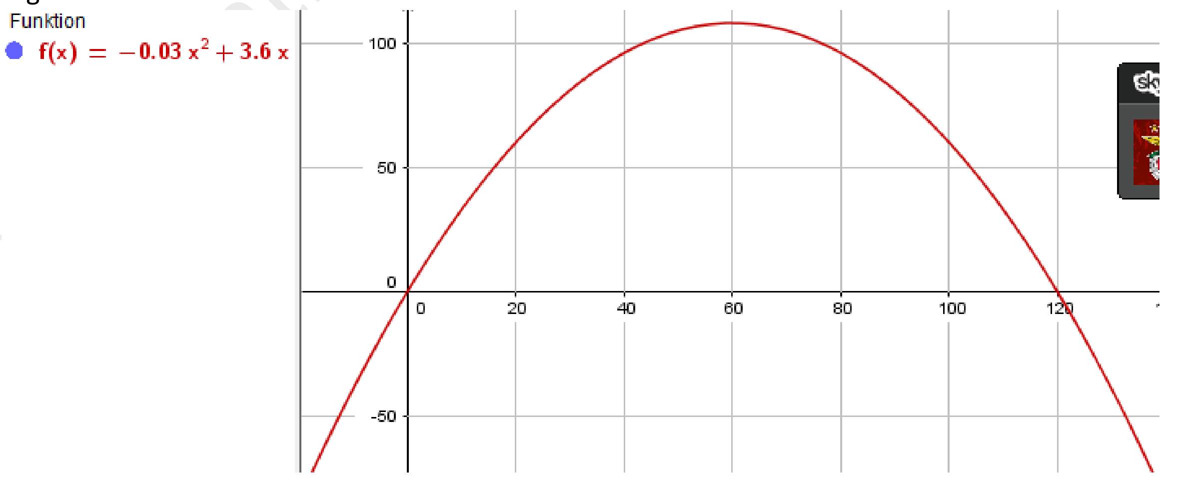
Som er højden, målt i cm. Man kunne også anvende differentialregning for at finde ud af det eller diskriminant metoden. I dette tilfælde prøve differentialregning

$$f'(x) = -0.060x + 3.6$$

Hvor $f'(x) = 0$

$$-0.060x + 3.6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3.6}{0.060} = 60$$

Så hvis man indsætter den i f fås 108 hvilket er højden, målt i cm. Funktionen tegnes.



b) Der anvendes integralregning. Den regnes hurtigt i Maple 2016.

$$A = \int_0^{120} f(x)\, dx$$

$$A = 8640.$$

Således fandt man arealet, målt i cm^2.

[December 2007, delprøve 1]

Opgave 3.027

Der er givet to udtryk

$$x^{1.5} \cdot x^3$$

Potensregneregel: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ så

$$x^{1.5} \cdot x^3 = x^{1.5+3} = x^{4.5}$$

Udtrykket

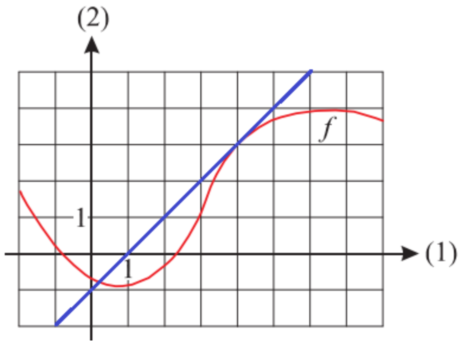
$$(x^4)^2$$

Potensregneregel: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ så

$$(x^4)^2 = x^{4 \cdot 2} = x^8$$

Opgave 3.028

Det ses, at grafen forløber sig således:



Det ses, at når $f'(4)$, så er tangenthældningen (eller stigningen) 1. Man kan også regne det. Det ses, at den har en hældning to steder. $x_1 = 4, y_1 = 3\ og\ x_2 = 5, y_2 = 4$ Man regner på det.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{5-4} = \frac{1}{1} = 1$$

Så det passer med, at hældningskoefficienten er voksende med 1

Opgave 3.029

Der er givet en funktion

$$f(x) = 4 \cdot a^x$$

Samt punktet $P = (2{,}100)$.

Tallet a bestemmes.

$$100 = 4 \cdot a^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{100}{4} = \frac{4 \cdot a^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$25 = a^2 \Leftrightarrow$$
$$a = \sqrt{25} = 5$$

Så tallet a er bestemt til 5, så funktionen er

$$f(x) = 4 \cdot 5^x$$

Opgave 3.030

Der er givet en andengradsligning med a som ubekendt. Man skal bestemme diskriminanten således der er een løsning.

$$d = b^2 - 4ac$$

Hvor ligningen $0 = ax^2 + 4x + 2$ har værdierne som indsættes i $d = 0$.

$$0 = 4^2 - 4 \cdot a \cdot 2 \Leftrightarrow 0 = 16 - 8a \Leftrightarrow 16 = 8a \Leftrightarrow a = 2$$

Så andengradsligningen giver een løsning med $a = 2$, så

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

Opgave 3.031

Det undersøges, om $g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, når

$$g(x) = 4 + 2x + x^5, \qquad f(x) = 3 + 5x^4$$

Funktionen $g(x)$ differentieres.

$$g'(x) = 2 + 5x^4$$

Det ses, at $g'(x) \neq f(x)$, så $g(x)$ er ikke en stamfunktion til $f(x)$.

[December 2007, delprøve 2]

Opgave 3.032

Der er givet en række oplysninger og her anvendes lineære regression. Dette udføres i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres og der anvendes lineære regression.

$L1 := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]$

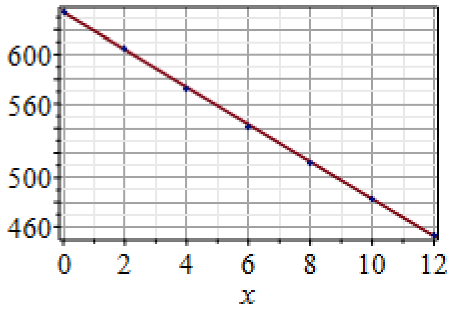
$$[0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]$$

$L2 := [635, 605, 573, 541, 512, 483, 454]$

$$[635, 605, 573, 541, 512, 483, 454]$$

$LinReg(L1, L2)$

Lineær regression
$y = -15.143\,x + 634.14.$
Forklaringsgrad R^2 =
0.999566314899863



Tallene a og b blev bestemt til hhv.
$a = -15.143$ og $b = 634.14$ og forskriften $f(x) := -15.143\,x + 634.14$:

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, aftager elforbruget med 15.143kWh. Tallet b er begyndelsestidspunktet og her ses det, at i år 1988 var elforbruget på 634.14kWh

b) Hvis udviklingen fortsætter, således elforbruget er 300kWh, løses ligningen
$f(x) = 300$

$$-15.143\,x + 634.14 = 300$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 22.06564089]]$$

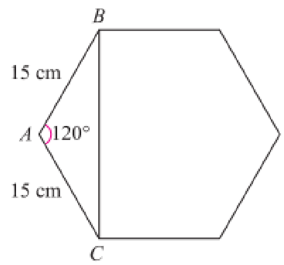
Så år 2010 vil elforbruget være 300kWh for en fryser.

$1988 + 22$

$$2010$$

Opgave 3.033

Der er givet en geometriopgave. Figuren vises:



a) Man ønsker at kende længden af $|BC|$
Dette gøres vha. cosinusrelationerne.

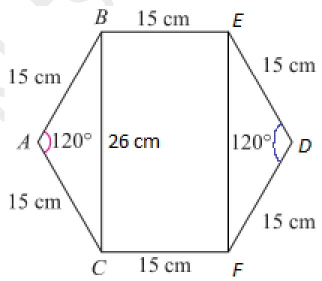
$$|BC| = a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)}$$

Oplysningerne indsættes.

$$|BC| = a = \sqrt{15^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \cos(120^o)} = 25.98 \approx 26$$

Alternativt kunne man dele trekanten op i to retvinklede trekanter og regne derfra.

b) Ved bestemmelsen af flisens areal. Det regnes sådan:
Da trekanten ABC er ens med trekanten DEF (se figur) kan disse oplysninger anvendes der. Ligeledes vil arealet af firkanten kunne bestemmes pga. $|BC|$ og $|EF|$.



Arealet bestemmes.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$

Oplysningerne indsættes.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \sin(120) = 97.427cm^2$$

Da $ABC = DEF$ må arealet være den samme. $T_{DEF} = 97.427cm^2$
Arealet for firkanten regnes.

$$T_{BCEF} = h \cdot g$$

Værdierne indsættes

$$T_{BCEF} = 26 \cdot 15 = 390$$

Det hele lægges sammen.

$$T_{total} = T_{BCEF} + T_{ABC} + T_{DEF}$$

Værdierne indsættes

$$T_{total} = 390 + 97.427 + 97.427 = 584.854cm^2$$

Så dette er flisens areal.

Opgave 3.034

Der er givet to funktioner

$$f(x) = -x^2 + 6x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2x + 7$$

a) Toppunktet bestemmes for f vha. differentialregning.

$$f'(x) = 0, \qquad -2x + 6 = 0$$

Løses mht. x.

$$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

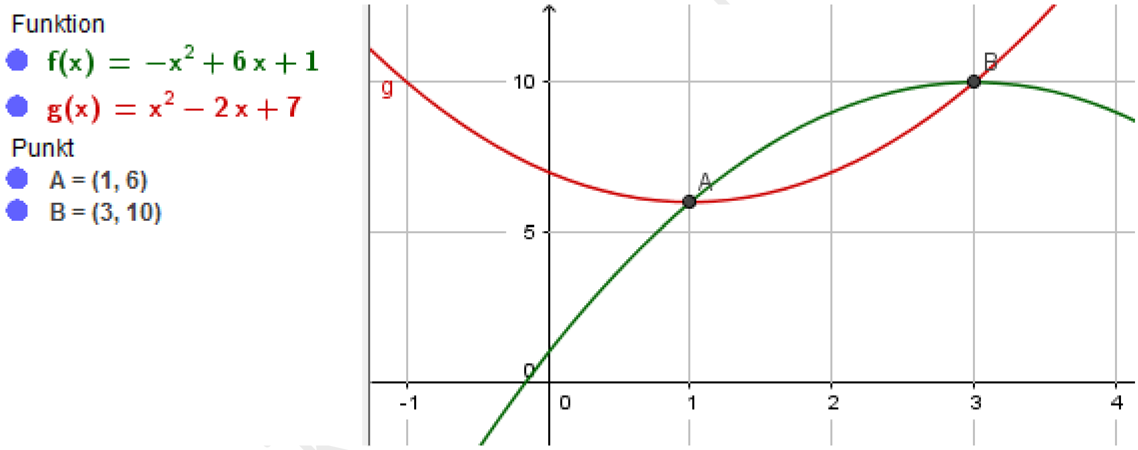
Dette er toppunktet for x, nu regnes toppunktet for y.

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 10$$

Så toppunktet for f er

$$T = (3{,}10)$$

Man kunne også bare bruge den klassiske formel. Der indsættes en tegning.



b) Der løses en ligning, dvs. $f(x) = g(x)$, så dette udføres vha. WordMat.

$$-x^2 + 6x + 1 = x^2 - 2x + 7$$

$$\Updownarrow \qquad \textit{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

Man kunne også bare kigge på det grafisk, men således blev x-værdierne fundet. Nu skal der findes for y-værdierne. Her indsætter man x-værdierne i enten f eller g.

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 7 = 6$$
$$g(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 7 = 10$$

Så koordinatsættet er

$$A = (1{,}6), \qquad B = (3{,}10)$$

Som man også kan se på tegningen.

Opgave 3.035

Der opstilles en matematisk model over befolkningstallet i Rusland.

a) Der er tale om en eksponentiel udvikling.
b-værdien er 142.2 og a-værdien omregnes.

$$a = 1 + r, \qquad r = -0.6\%$$

Så dette omregnes.

$$a = 1 - 0.006 = 0.994$$

Så modellen

$$f(x) = 142.2 \cdot 0.994^x$$

Modellen gælder fra år 2004.

b) Da man ved, at den falder med 10% omregnes tallet vha. fremskrivningsfaktoren

$$F = 1 + r$$

Hvor $r = -10\%$

$$F = 1 - 0.1 = 0.9$$

Så har man en ligning.

$$0.994^x = 0.9$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 17{,}50735$$

Så i år 2021 vil befolkningstallet være faldt med 10%.

Opgave 3.036

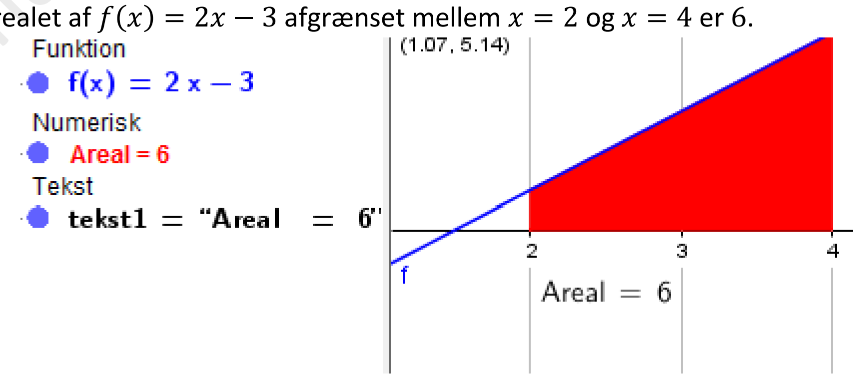
Der er givet et bestemt integrale. (Dvs. arealet skal findes).

$$A = \int_2^4 (2x - 3)\, dx$$

a) Den løses.

$$A = \int_2^4 (2x - 3)\, dx = [x^2 - 3x]_2^4 = 4^2 - 3 \cdot 4 - (2^2 - 3 \cdot 2) = 4 - (-2) = 6$$

Så arealet af $f(x) = 2x - 3$ afgrænset mellem $x = 2$ og $x = 4$ er 6.



Opgave 3.037

Der er givet en funktion.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

a) Der anvendes differentialregning således man kan se grafens forløb.

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

Den sættes lig med 0.

$$x^2 - 2x = 0$$

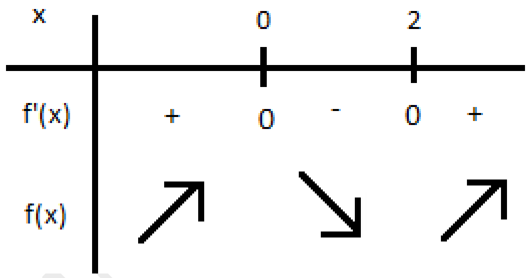
Nulreglen anvendes.

$$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

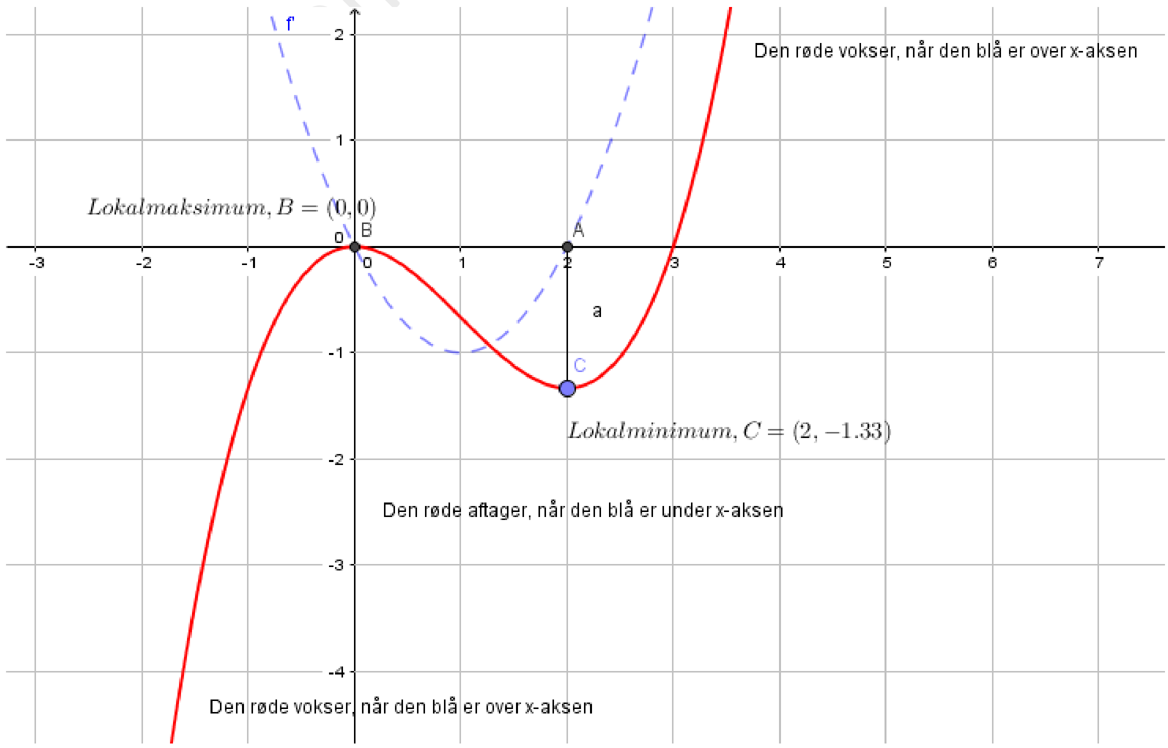
Der gøres prøve.

$$f'(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$
$$f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$
$$f'(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$$

Så kan man tegne monotonilinjen. Der bliver der også konkluderet for dens forløb mv.



Så endelig er f voksende i intervallet $]-\infty; 0]$ og $[2; \infty[$ hvor f er aftagende i intervallet $[0; 2]$ Der laves en tegning over grafen.



Opgave 3.038

Opgaven løses vha. Maple 2016.

a) Funktionen er givet.

$$f(x) := 5000 + 40\,x + \frac{900000}{x}$$

$$x \rightarrow 5000 + 40\,x + \frac{900000}{x}$$

Den årlige udgift bestemmes, når 95 indsættes på x.

$$f(95)$$

$$\frac{347200}{19}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$18274.$$

Så med et tværsnitareal på 95 mm^2 er udgiften 18 274 *Euro*.

b) Det mindste tværsnitareal bestemmes ved at differentiere funktionen $f(x)$.

$$f'(x) = 0$$

$$40 - \frac{900000}{x^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 150], [x = -150]]$$

Den negative værdi forkastes.

Heri undersøges det, om det passer med $x = 150$ er det tværsnitareal, der er billigst. Der gøres prøve.

$$f(150)$$

$$17000$$

I følge udregningerne, vil den billigste pris være 17000 *Euro*. Der indsættes 140 og 160 således så man kan se, om det er den billigste pris.

$$f(140)$$

$$\frac{119200}{7}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$17029.$$

$$f(160)$$

$$17025$$

Det ses, at for begge værdier stiger prisen igen. Det passer. 150 mm^2 giver den 'billigste' udgift i *Euro*.

Opgave 3.039

Der er givet en model over et krater.

a) Der er givet oplysninger, således man kan regne k, når modellen er

$$y = k \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

Der løses en ligning.

$$1200 = k \cdot 20^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{1200}{20^{\frac{1}{3}}} = 442.083$$

Så modellen

$$y = 442.083 \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

Krateret bestemmes, når anvendelsen af TNT var på 4 megaton.

$$y = 442.083 \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 701.763$$

Så anvendelse af 4 megaton TNT giver et krater med diameter på $701.763m$

b) Der er to kratere. Den ene er 20% større end den anden. Energien bestemmes. Her indsættes $\frac{20\%}{100}$ på r_y. Formlen $F_y = F_x^a$ anvendes.

$$(1 + 0.2) = (1 + r)^{\frac{1}{3}}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for r vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$r = 0{,}728$$

Dette tal ganges med 100%

$$r_{\%} = 0.728 \cdot 100\% = 72.8\%$$

Så energinedslaget har været 72.8% større end det andet hul, hvis diameteren er 20% større.

[Maj 2008, delprøve 1]

Opgave 3.040

Der er givet en række oplysninger, der gør, at man kan opstille en model.

$$f(x) = ax + b$$

Hvor $a = -2900$ og $b = 165200$, begyndelsesåret er 2005 april.

$$f(x) = -2900x + 165200$$

Som beskriver det fald der er i lejligheden.

Opgave 3.041

Ligningen løses.

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Diskriminanten anvendes

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

Den løses mht. x

$$x = \frac{4+2}{6} = 1 \vee x = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$

Som er rødderne.

Opgave 3.042

Udtrykket

$$(x + 2y)(x - 2y)$$

Anvendelse af kvadratsætning 3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - 4y^2$$

Udtrykket

$$ab - b(a - 3b) = ab - ab + 3b^2 = 3b^2$$

Opgave 3.043

Der er givet en funktion og punkter.

$$f(x) = -3x^2 + 6x$$

Samt punkterne

$$P(0,0)\ og\ (2,0)$$

a) Stamfunktionen og arealet bestemmes.
Stamfunktionen til f er F.

$$\int -3x^2 + 6x\, dx = -x^3 + 3x^2 + k$$

Hvor k er et vilkårligt tal.
Arealet bestemmes.

$$A = \int_0^2 -3x^2 + 6x\, dx = [-x^3 + 3x^2]_0^2$$

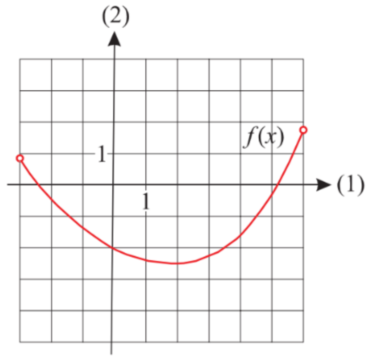
Her regner man på aritmetikken[1].

$$A = -2^3 + 3 \cdot 2^2 - (-0^3 + 3 \cdot 0^2) = 4 - 0 = 4$$

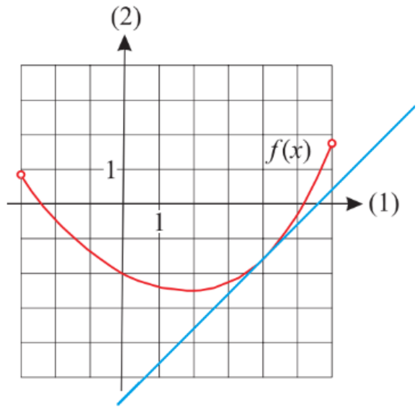
Så arealet er 4.

Opgave 3.044

Figuren fortæller det hele.



a) Det ses, at $f'(x) = 0$, dvs. toppunktet for $f(x)$. Så $f'(x) = 0$ er $x = 2$. Der hvor $f'(x) = 1$ er hvor tangenten vokser med 1. Det gør den i $x = 4$



[1] Aritmetik er en gren af matematikken der blot fokuserer på tal.

[Maj 2008, delprøve 2]

Opgave 3.045

Opgaven løses i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres. Der udføres lineære regression.

$Dist := [100, 200, 400, 800, 1500]$

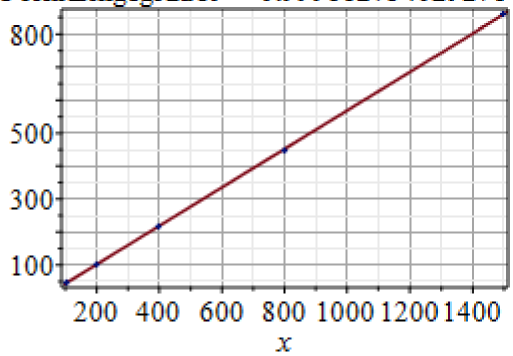
$$[100, 200, 400, 800, 1500]$$

$Tid := [47.45, 103.12, 215.36, 447.81, 863.13]$

$$[47.45, 103.12, 215.36, 447.81, 863.13]$$

$LinReg(Dist, Tid)$

Lineær regression
y $= 0.58333\,x - 14.626.$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.999882754029271$



Tallene a og b er bestemt til $a = 0.58333$ og $b = -14.626$ samt forskriften
$f(x) := 0.58333\,x - 14.626$:

b) Der indsættes 10000 på x.

$f(10000)$

$$5818.67400$$

Heraf fås tiden. Den faktiske påstået tid regnes.
1 time svarer til 60 minutter eller 3600 sekunder. 54 minutter svarer til 3240. Tallene lægges sammen og fås 6840. Differencen er
$6840 - 5818.674$

$$1021.326$$

Omregnes til minutter
$\frac{1021.326}{60}$

$$17.02210000$$

Så differencen er 17 minutter. Deraf passer modellen ikke så godt på en distance på 10000m

Opgave 3.046

Funktionen er givet.

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

a) Toppunktet findes vha. differentialregning

$$f'(x) = 2x - 6$$

Løses for $f'(x) = 0$

$$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

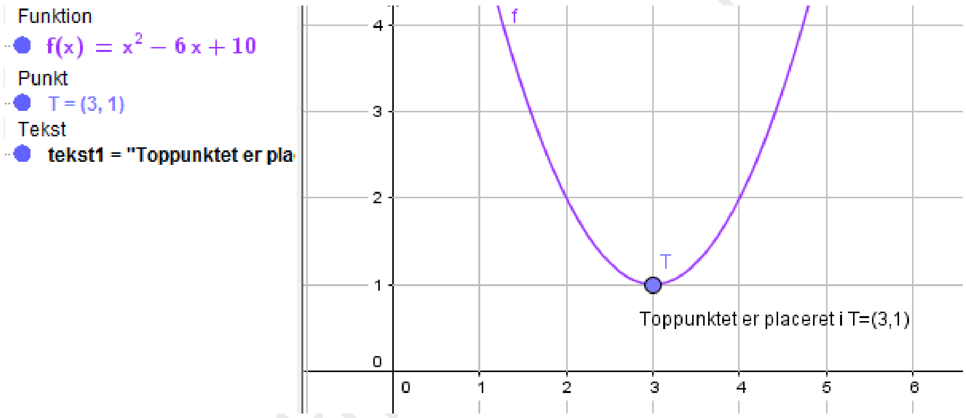
Tallet 3 indsættes i $f(x)$.

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1$$

Så koordinatsættet til toppunktet er

$$T_{xy} = (3,1)$$

Der tegnes nu.



b) En funktion er givet.

$$g(x) = -x + 6$$

Først findes skæringspunkterne inden tegningen. $f(x) = g(x)$

$$x^2 - 6x + 10 = -x + 6$$

$$\Updownarrow$$

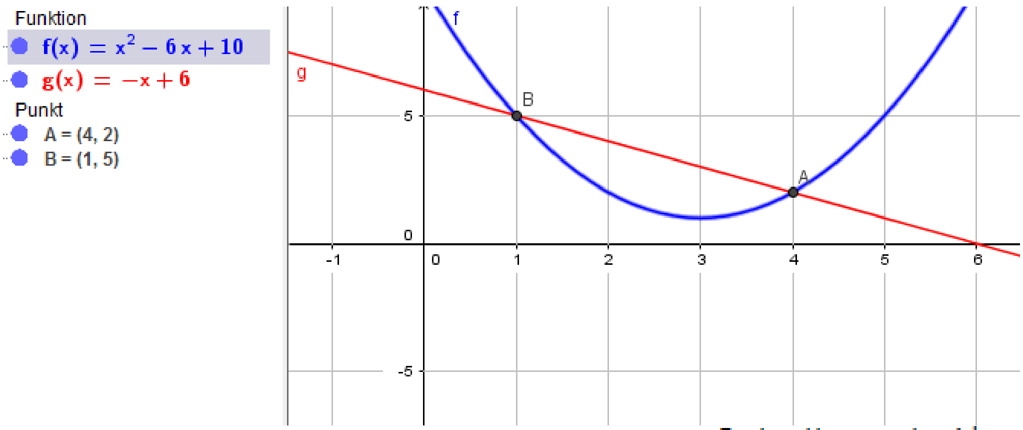
Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$$

Ved indsættelse af rødderne på $f(x)$ eller $g(x)$ fås y −koordinaterne.

$$g(1) = -1 + 6 = 5$$
$$g(4) = -4 + 6 = 2$$

Funktionen tegnes.



Fortsættes næste side

c) Arealet mellem $f(x)$ og $g(x)$ bestemmes. Da $g(x)$ er øvre, trækkes $f(x)$ fra.

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx = \left[G(x) - \left(F(x)\right)\right]_a^b$$

Værdierne indsættes

$$A = \int_1^4 \left(-x + 6 - (x^2 - 6x + 10)\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x - \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x\right)\right]_1^4$$

Arealet bestemmes.

$$A = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1\right)\right)$$

$$A = \frac{9}{2}$$

Så dette er arealet mellem $g(x)$ og $f(x)$ ved grænseværdierne for deres støttepunkter.

Opgave 3.047

Funktionen

$$f(x) = x^3 + 2 \cdot \ln(x)$$

Er givet.

a) Man ønsker at finde tangenten i punktet $P\left(1, f(1)\right)$.
Funktionen differentieres og tangentligningen anvendes.

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$$

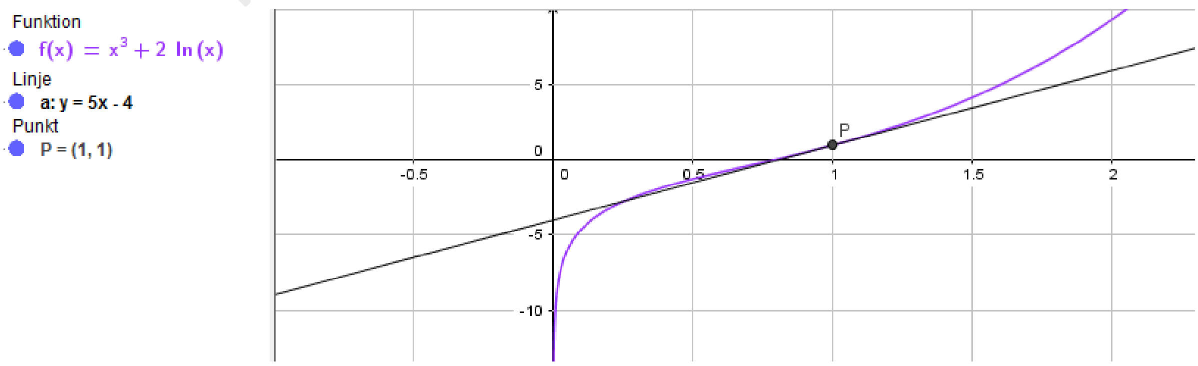
Heri indsættes (og i $f(x)$) tallet 1.

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + \frac{2}{1} = 5$$
$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot \ln(1) = 1$$

Så tangentligningen opstilles.

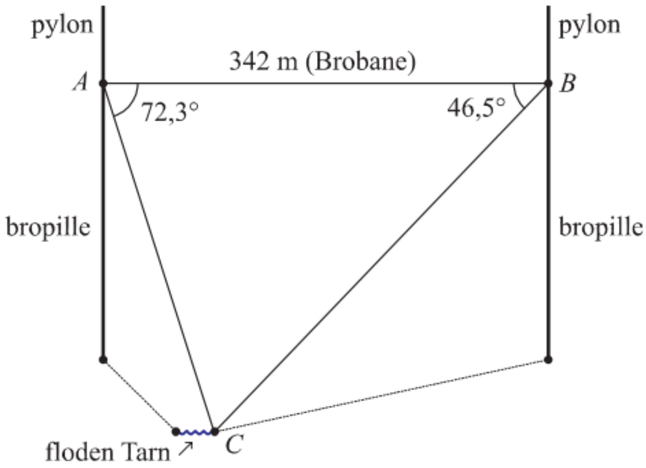
$$y = 5(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 5x - 4$$

Som tangerer f i punktet $P\left(1, f(1)\right)$.



Opgave 3.048

Figuren indsættes.



a) Man ønsker at kende $|AC|$.
Først tages vinkelsummen så man kender vinkel C.

$$\angle C = 180^o - \angle A - \angle B = 180^o - 72.3^o - 46.5^o = 61.2^o$$

Nu anvendes sinusrelationerne så man kan finde $|AC|$.

$$\frac{\sin(B)}{|AC|} = \frac{\sin(C)}{|AB|}$$

Værdierne indsættes.

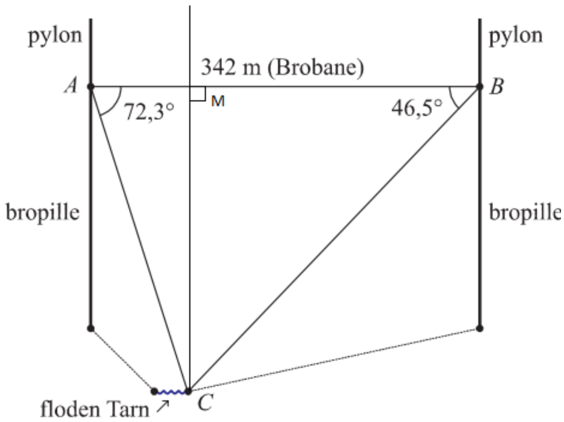
$$\frac{\sin(46.5^o)}{A} = \frac{\sin(61.2^o)}{342}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for AC vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$|AC| = 342 \cdot \frac{\sin(46.5^o)}{\sin(61.2^o)} = 283.094$$

Så den skrå hældning er 283.1m.

b) Man kan se, at Eiffeltårnet er sat ind. Man ønsker at vide hvor meget spidsen når over. Derfor laves en ny figur.



For udregning af den retvinklede trekant forudsættes det, at man kender hypotenusen. Den kan man regne vha. den oprindelige trekant. Dette udføres på næste side.
Der udregnes for $|BC|$.

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos(A)}$$

Værdierne indsættes

$$|BC| = \sqrt{283.094^2 + 342^2 - 2 \cdot 283.094 \cdot 342 \cdot \cos(72.3)} = 371.798$$

Så hypotenusen er 371.798m, som anvendes til udregning af højden (se figur). Nu ønsker man at finde højden og formlen til det er:

$$|CM| = |BC| \cdot \sin(B)$$

Værdierne indsættes

$$|CM| = 371.798 \cdot \sin(46.5^o) = 269.692$$

Dette er højden. Endelig kan man bestemme differencen - dvs. spidsen af Eiffeltårnet.

$$320m_{Eiffeltårnet} - 269.692m_{|CM|} = 50.308m$$

Så fra broplanen rækker Eiffeltårnet 50 meter op i luften.

Opgave 3.049

Der er givet en model over en persons indtagelse af amfetamin.

$$f(t) = 15 \cdot 0.84^t$$

a) Tallet b er begyndelsestidspunktet og det angiver, at mængden af amfetamin er 15mg.
Tallet a fortæller, at dette aftager med 16% for hver time der går. Det udregnes sådan:

$$a = 1 + r, \qquad 0.84 = 1 + r \Leftrightarrow -0.16 = r \Leftrightarrow r_{\%} = -16\%$$

b) Man indsætter 2 på t.

$$f(2) = 15 \cdot 0.84^2 = 10.584$$

Så det ses, at efter 2 timer er mængden af amfetamin 10.584mg

Nu bestemmes halveringskonstanten.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.84)} = 3.975$$

Så mængden af amfetamin er halveret efter 4 timer.

c) Funktionen differentieres og der indsættes for $f'(3)$.

$$f'(t) = 15 \cdot 0.84^t \cdot \ln(0.84)$$

Så

$$f'(3) = 15 \cdot 0.84^3 \cdot \ln(0.84) = -1.550$$

Så efter 3 time, aftager mængden af amfetamin med 1.5mg pr. time.

Opgave 3.050

Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3$$

a) Funktionen differentieres og sættes lig med 0.

$$0 = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Her kan man anvende nulreglen.

$$0 = x(x^2 - 6x + 8)$$

Hvor

$$x = 0$$

Så løses andengradsligningen for x.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Med diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

Så x

$$x = \frac{6+2}{2} = 4 \vee x = \frac{6-2}{2} = 2$$

Så rødderne til den afledede af f er

$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$$

b) Der gøres prøve så man kan se hvordan grafen forløber sig.

$$f'(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) = -15$$
$$f'(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 3$$
$$f'(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = -3$$
$$f'(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 = 15$$

Monotonilinje tegnes

x		0		2		4	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

Så endelig er f aftagende i intervallet $]-\infty; 0]$ og $[2; 4]$ hvor f er voksende i intervallet $[0; 2]$ og $[4; \infty[$

Opgave 3.051

Der er givet en funktion samt oplysninger.

$$f(x) = b \cdot x^a$$

a) Man kan bestemme tallene a og b ved at anvende oplysningerne. Der er givet $r_x = 20\%$ og $r_y = -32\%$. Formen $F_y = F_x^a$ anvendes.

$$\left(1 + \left(-\frac{32}{100}\right)\right) = \left(1 + \left(\frac{20}{100}\right)\right)^a \Leftrightarrow$$

$$0.68 = 1.2^a$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$a = -2.115287$$

Så kan man regne b.

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{75}{15^{-2.115287}} = 23058.5404739$$

Således fandt man tallene a og b. Modellen er

$$f(x) = 23058.5404739 \cdot x^{-2.115287}$$

[August 2008, delprøve 1]

Opgave 3.052

Ligningen

$$4x - 6 = 3x - 2(x - 3) \Leftrightarrow$$
$$4x - 6 = 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow$$
$$4x = x + 12 \Leftrightarrow$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

Som er løsningen.

Opgave 3.053

Der er givet en model over Angolas befolkningstal.

Man har den formodning om, at i år 2000 var antallet af indbyggere på 14 mio. og dette forventes voksende med 2.3% om året.

$$1.023 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.023 \Leftrightarrow r_{\cdot 100\%} = 2.3\%$$

Opgave 3.054

Funktionen f er givet

$$f(x) = 3x + 10e^{2x}$$

Den differentieres.

$$f'(x) = 3 + 20 \cdot e^{2x}$$

Heri indsættes 0 for

$$f'(0) = 3 + 20 \cdot e^{2\cdot 0} = 3 + 20 = 23$$

Opgave 3.055

Parablen

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Er givet. Den løses vha. d.

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

Hermed løses for x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

Toppunktet bestemmes.

$$T_x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2, T_y = -\frac{d}{4a} = \frac{4}{4 \cdot 1} = 4$$

Man kunne også bestemme toppunktet vha. differentialregning.

$$y' = 2x - 4$$

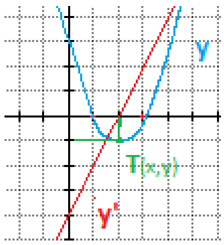
Løses for 0

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Her blev toppunktet for x fundet, så finder man for y ved at sætte nulpunktet ind fra y' i y.

$$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

Så dermed passer det. Grafisk tegnes det. (Også den differentierede version).



Opgave 3.056

Det ses, at når $f'(-2)$, så er tangenthældningen (eller stigningen) ca. 2.5. Man kan også regne det. Det ses, at den har en hældning to steder. $x_1 = -1, y_1 = 5.5\ og\ x_2 = -2, y_2 = 3$ Man regner på det.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5.5 - 3}{-1 - (-2)} = \frac{2.5}{1} = 2.5$$

Så det passer med, at hældningskoefficienten er voksende med 2.5

Når $f'(x) = 0$, betyder det at det er den afledte nulpunkter. Det ses i $x = -1$ og $x = 3$, da der kan tegnes to vandrette tangenter.

[August 2008, delprøve 2]

Opgave 3.057

Der er givet en række oplysninger, der anvendes til potensregression.

a) $Bringemål := [62, 75, 82.5, 97, 113, 148.5, 162.5]$

$[62, 75, 82.5, 97, 113, 148.5, 162.5]$

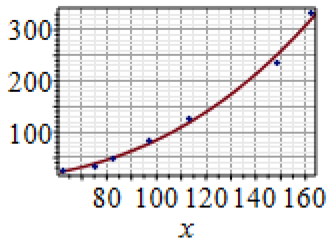
$Vægt := [25.4, 32.6, 46.3, 82.1, 126, 236, 335]$

$[25.4, 32.6, 46.3, 82.1, 126, 236, 335]$

Oplysningerne er defineret og hermed anvendes kommandoen: *PowReg*.

$PowReg(Bringemål, Vægt)$

Potens Regression
$y = 0.00025170 \cdot x^{2.7623}$
Forklaringsgrad R^2 = 0.99034



Det ses, at tallene a og b er bestemt til hhv.
$a = 2.7623$, $b = 0.00025170$ samt forskriften (som defineres)
$f(x) := 0.00025170 \cdot x^{2.7623}$:

b) En kvie har en bringemål på 130 cm. Dens vægt bestemmes.

$f(130)$

173.8717149

Så kvien vejer altså 173.871kg.

c) En kvies bringemål er steget med 10%. Man ønsker at vide dens vægt efterfølgende i procent. Formlen $r_y = \left((1 + r_x)^a - 1 \right) \cdot 100\,\%$ anvendes.

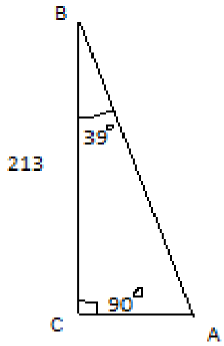
$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{10}{100} \right) \right)^{2.7623} - 1 \right) \cdot 100$$

$r_y = 30.11848980$

Så dens vægt er steget med 30%, når bringemålet er steget med 10%

Opgave 3.058

Der konstrueres en trekant ud fra oplysningerne.



a) Man ønsker at kende længden $|AB|$

$$|BC| = |AB| \cdot \cos(B)$$

Her isoleres $|AB|$

$$|BC| = |AB| \cdot \cos(B) \Leftrightarrow \frac{|BC|}{\cos(B)} = \frac{|AB| \cdot \cos(B)}{\cos(B)} \Leftrightarrow |AB| = \frac{|BC|}{\cos(B)}$$

Oplysningerne indsættes.

$$|AB| = \frac{213}{\cos(39^o)} = 274.079$$

Så dette er længden $|AB|$. Man kunne også gøre det på mange andre måder. Et eksempel:

$$|AB| = \frac{\sin(C) \cdot |BC|}{\sin(A)}$$

Så man finder vinkel A v.h.a. vinkelsummen.

$$\angle A = 180^o - \angle B - \angle C = 180^o - 39^o - 90^o = 51^o$$

Oplysningerne indsættes.

$$|AB| = \frac{\sin(90^o) \cdot 213}{\sin(51^o)} = 274.079$$

Her fås præcis det samme. Dog et mere besværligt eksempel, men kan i nogle tilfælde være nødvendig.

Opgave 3.059

a) Der aflæses på oplysningerne.

$$P = (6{,}8000), \qquad Q(9{,}35000)$$

Disse punkter er nok til at opstille en lineære model.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{35000 - 8000}{9 - 0} = 3000,$$

$$b = y_1 - ax_1 = 8000 - 3000 \cdot 0 = 8000$$

Som nu kan opstilles som en model.

$$y = 3000x + 8000$$

Hvor x er antal år efter år 2006 og y er antal manglende SOSU medarbejdere. Desuden ses det, at for hvert år der går, stiger antallet af manglende SOSU medarbejdere med 3000 personer. Modellen er i øvrigt gældende i perioden 2006 til 2015.

Opgave 3.060

Der er givet et udtryk for radioaktivt henfald.

$$A(t) = 148 \cdot 0.956^t$$

Man kan se, at dette er en eksponentiel model.

a) Man indsætter 10 i t.

$$A(10) = 148 \cdot 0.956^{10} = 94.371$$

Efter 10 sekunder vil der være henfaldet 94.371 atomkerner.

Halveringstiden bestemmes.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.956)} = 15.404$$

Så efter halveringen af tiden, vil der ske henfald med ca. 15 atomkerner pr. sekund.

b) Der løses en ligning.

$$5 = 148 \cdot 0.956^t \Leftrightarrow$$
$$\frac{5}{148} = \frac{148 \cdot 0.956^t}{148} \Leftrightarrow$$
$$0.956^t = \frac{5}{148} \Leftrightarrow$$
$$t \cdot \log_{10}(0.956) = \log_{10}\left(\frac{5}{148}\right) \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{\log_{10}\left(\frac{5}{148}\right)}{\log_{10}(0.956)} = 75.288$$

Så efter 75 sekunder henfaldes der 5 atomkerner pr. sekund.

c) Det samlede antal henfald kan beregnes vha. integralet.

$$\int_0^p A(t)dt$$

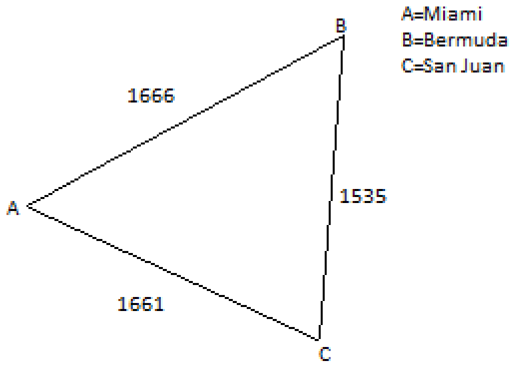
Oplysningerne indsættes.

$$\int_0^{10} (148 \cdot 0.956^t)dt \Leftrightarrow \left[\frac{148 \cdot 0.956^t}{\ln(0.956)}\right]_0^{10} \Leftrightarrow \left(\frac{148 \cdot 0.956^{10}}{\ln(0.956)}\right) - \left(\frac{148 \cdot 0.956^0}{\ln(0.956)}\right)$$
$$= 1191.81$$

Så efter 10 sekunder er det samlede henfald på 1191.81 atomkerner.

Opgave 3.061

Der tegnes en trekant.



a) Først findes en vinkel.

$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$

Nu indsættes oplysningerne.

$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{1661^2 + 1666^2 - 1535^2}{2 \cdot 1661 \cdot 1666}\right) = 54.951698^o$$

Nu bestemmes arealet.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$

Oplysningerne indsættes

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1661 \cdot 1666 \cdot \sin(54.951698^o) = 1132719.98$$

Så arealet af Bermudatrekanten er

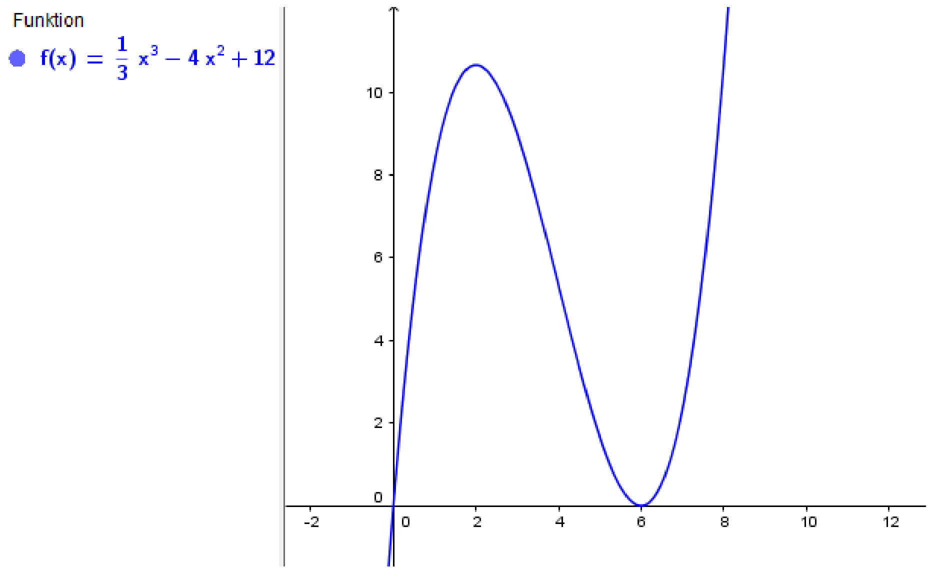
$$1132720 km^2$$

Opgave 3.062

Funktionen $f(x)$ er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x$$

a) Som det første tegnes funktionen. På næste side regnes resten af opgaven.



Nu differentieres funktionen

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

Som er den afledede af f. Nu regnes nulpunkterne så man kan se, om tegningen passer. I matematik elsker man gerne eksempler.

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

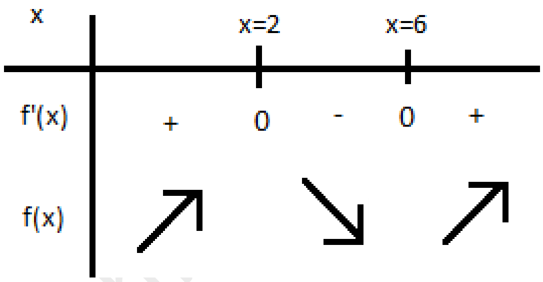
$$x = 2 \quad \vee \quad x = 6$$

Hvis man så på den blå graf's toppunkter vil man kunne se, at de rammer toppen og bunden ved hhv. $x = 2$ og $x = 6$.

Der gøres prøve så man kan se hvordan f forløber sig.

$$f'(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 + 12 = 5$$
$$f'(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = -4$$
$$f'(7) = 7^2 - 8 \cdot 7 + 12 = 5$$

Så kan monotonilinjen tegnes.



Så f er voksende i intervallet $]-\infty; 2]$ og voksende i intervallet $[6; \infty[$ hvor f så er aftagende i intervallet $[2; 6]$

b) Man tjekker om f har en tangenthældning på -5 ved at sætte den afledede lig med -5.

$$x^2 - 8x + 12 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 17 = 0$$

Den løses som en andengradsligning.

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = -4$$

Da $d < 0$ kan man se, at man ikke kan løse den indenfor alle reelle tal, så grafen for f har ikke en tangent med hældningen -5. Og så arbejder man ikke med komplekse tal på matematik B og A niveau! Opgaven fortsættes næste side.

c) Arealet bestemmes. Der tages integrale af f, men først ønskes punkterne for arealet.

$$f(x) = 0$$

Altså

$$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x = 0$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

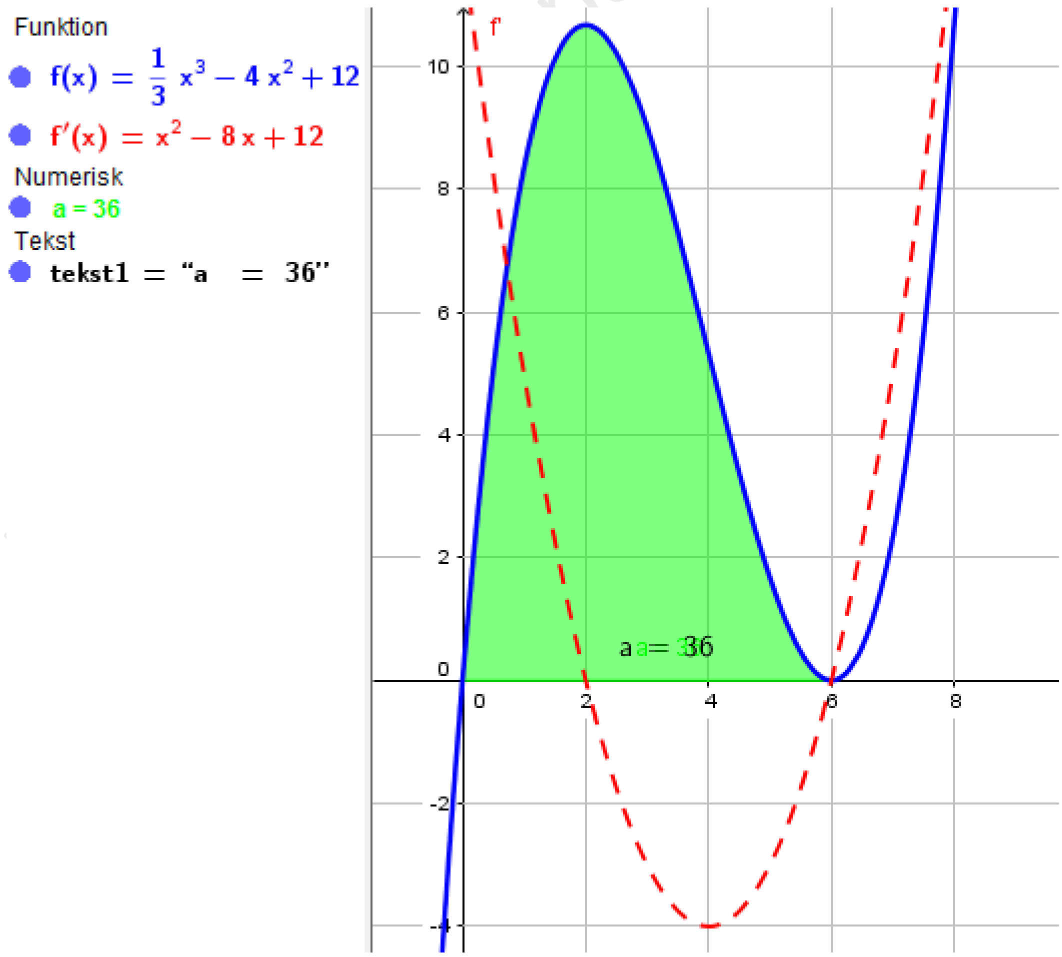
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 6$$

Derved anvendes integralet.

$$\int_0^6 \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x\,dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{12}\cdot 6^4 - \frac{4}{3}\cdot 6^3 + 6\cdot 6^2 - \left(\frac{1}{12}\cdot 0^4 - \frac{4}{3}\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2\right) = 36 - 0$$
$$= 36$$

Så arealet mellem f og $x - aksen$ er 36, pga. grænseværdierne $x = 0 \wedge x = 6$. Hvor $x \in \mathbb{R}$.



Opgave 3.063

Opgaven løses i Maple 2016.

a) Der er givet en funktion over gedder i Skjern Å og Hestholm Sø..

$$f(t) := 114.6 \cdot \left(1 - 0.927 \cdot e^{-0.14\,t}\right)$$

$$t \rightarrow 114.6\left(1 + (-1) \cdot 0.927\, e^{(-1) \cdot 0.14\,t}\right)$$

Der bestemmes for en gedde, der har alderen 4 år.

$$f(4)$$

$$53.91806208$$

Så en gedde på 4 år har længden 53.92cm.

Der løses en ligning for en gedde med længde på 35 cm. Alderen bestemmes.

$$f(t) = 35$$

$$114.6 - 106.2342\, e^{-0.14\,t} = 35$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$[[t = 2.061657129]]$$

Så gedden med længden 35cm er ca. 2 år gammel.

b) Funktionen differentieres automatisk ved indskrivelse af:

$$f'(5)$$

$$7.385607947$$

Så fra geddens femte leveår vokser den 7.38cm om året.

Opgave 3.064

Opgaven løses i Maple 2016.

a) Der aflæses på oplysningerne.

$f(0) = 20$
$f(75) = 10$

Tallene a og b udregnes.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}, \; b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Tallene indsættes

$$a = \sqrt[75-0]{\frac{10}{20}}$$

$$a = \frac{1}{2} 2^{74/75}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$a = 0.99080$$

$$b = \frac{20}{0.99080^0}$$

$$b = 20.00000000$$

Hvilken man også kunne aflæse. Forskriften er så

$f(x) := 20 \cdot 0.99080^x$

$$x \rightarrow 20\ 0.99080^x$$

b) Her svarer 4 timer til 240 fordi
$4 \cdot 60$

$$240$$

Det tal indsættes på x.

$f(240)$

$$2.176053130$$

Dette tal lægges til 5 fordi det er den minimale temperatur i køleskabet.

$2.176 + 5$

$$7.176$$

Så efter 4 timer er øllens temperatur ca. 7 grader, hvilket er to grader fra påstanden.

[December 2008, delprøve 1]

Opgave 3.065

Der er givet to funktioner

$$f(x) = x^3 + 4x^2, \qquad g(x) = e^{5x}$$

Funktionerne differentieres

$$f'(x) = 3x^2 + 8x, \qquad g'(x) = 5 \cdot e^{5x}$$

Opgave 3.066

Der løses en ligning for variablen a med $x = 4$

$$a \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 4 - 2 \Leftrightarrow a \cdot 2 = 10 \Leftrightarrow a = 5$$

Opgave 3.067

Der oplyses tre funktioner

$$\begin{aligned} f(x) &= -7.2x + 34 \\ g(x) &= 0.83 \cdot 1.24^x \\ h(x) &= 3.9 \cdot 0.58^x \end{aligned}$$

Det ses, at $f(x)$ er en lineære model som aftager pga. hældningskoefficienten $a = -7.2$

Det ses, at $g(x)$ er en voksende eksponentiel model, hvor $a > 1$, deraf voksende.

Det ses, at $h(x)$ er en aftagende eksponentiel model, hvor $0 < a < 1$, så den er aftagende.

Opgave 3.068

Andengradsligningen i faktoriseret form er givet.

$$2 \cdot (x+1) \cdot (x-3) = 0$$

Ved blot at se på den, kan man fornemme, at rødderne er

$$x = -1 \vee x = 3$$

Der prøves på alm. form.

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

Løses mht. diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64$$

Så kan man regne x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{4 \pm 8}{4} = \frac{-1}{3}$$

Så det passer med aflæsning af rødderne.

Opgave 3.069

Der er givet en funktion

$$f(x) = x - 4$$

Der tages stamfunktion, dvs. integral af $f(x)$.

$$\int x - 4\,dx = F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + k$$

Så det passer med, at $F_1(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$$

Der aflæses på grafen og her ses det, at $c = 5$. Så forskriften for $F_2(x)$ er

$$F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$$

[December 2008, delprøve 2]

Opgave 3.070

Der aflæses og ses, at man kan opstille en formel ud fra værdierne:

$$b = 7600, a = 1300$$

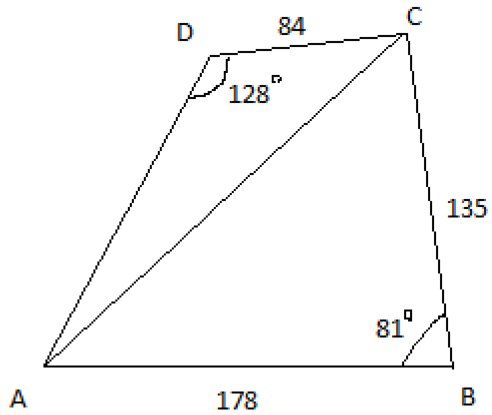
Så der er tale om en lineære model.

$$y = 1300x + 7600$$

Som beskriver den årlige øgede mængde af millionærer fra år 2000 og frem efter.

Opgave 3.071

Der er givet en geometrifigur.



a) Så man ønsker at kende længden $|AC| = b$
Her kan man anvende cosinusrelationerne.

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)}$$

Oplysningerne indsættes.

$$b = \sqrt{135^2 + 178^2 - 2 \cdot 135 \cdot 178 \cdot \cos(81^o)} = 205.890$$

Så diagonalen $b = |AC| = 205.89$ lang.

b) Man vil gerne vide vinkel A i trekanten ACD. Man kan anvende sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(D)}{d}$$

Her svarer $d = b$. Værdierne indsættes

$$\frac{\sin(A)}{84} = \frac{\sin(128^o)}{205.890}$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for A vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\angle A = 18.75345^o$$

Så vinkel A blev bestemt til 18.753^o.

Man ønsker at vide hvad arealet er i den pågældende trekant. Men først findes vinkel C v.h.a. vinkelsummen. $180 - \angle A - \angle D = 180^o - 18.75345^o - 128^o = 33.24655^o$

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(C)$$

Oplysningerne indsættes.

$$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 205.890 \cdot \sin(33.24655^o) = 4740.864$$

Således fandt man arealet.

Opgave 3.072

Der laves regression i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres og der udføres eksponentiel regression.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4]$

$$[0, 1, 2, 3, 4]$$

$L2 := [35359, 38960, 41535, 46031, 50118]$

$$[35359, 38960, 41535, 46031, 50118]$$

$ExpReg(L1, L2)$

Eksponentiel Regression
$y = 35402. \cdot 1.0903^x$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.99634$

Så tallene a og b blev bestemt til hhv
$a = 1.0903$ og $b = 35402$ samt forskriften $f(x) := 35402 \cdot 1.0903^x$

b) Ved indsættelse af 6 (fordi 2007 svarer til $x = 6$) fås:

$f(6)$

$$59470.81226$$

Så der er en okay stor difference, hvilket gør, at modellen ikke bør anvendes efter år 2006.

Opgave 3.073

Det aflæses at funktionen til figuren er

$$f(x) = -x^2 + 6x + 3$$

a) Der bestemmes en ligning for tangenten til grafen f i punktet $P(2, f(2))$.
Tangentligningen anvendes.

$$t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Man finder værdierne.

$$f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 + 3 = 11$$
$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$$

Endelig indsættes de i t.

$$t = 2(x - 2) + 11 \Leftrightarrow t = 2x + 7$$

Fortsættes næste side

b) Arealet bestemmes, men først ønskes koordinaterne.

$$2x+7=-x^2+6x+3 \Leftrightarrow -x^2+4x-4=0$$

Løses som en andengradsligning

$$d=b^2-4ac=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)=0, \qquad d=0$$

Løses for x

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot(-1)}=2$$

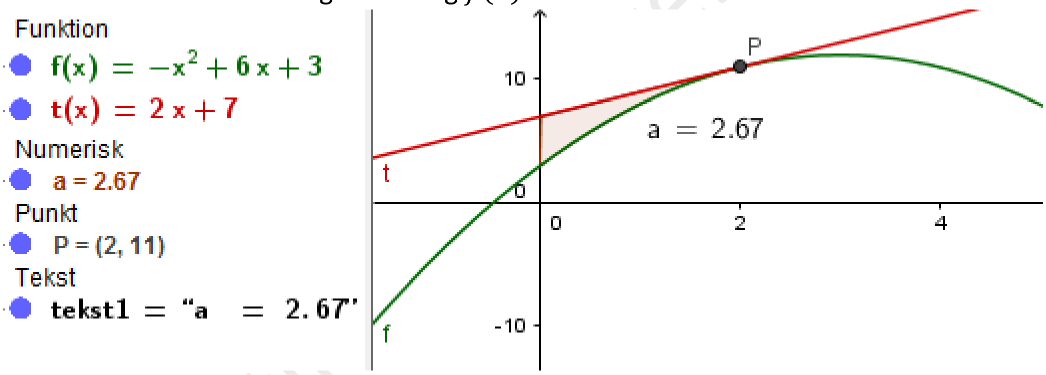
Så $x=2$. Man kunne også bare bruge punktet P for anvendelse af grænseværdien idet det er ved det sted, tangenten t tangerer.

$$A=\int_0^2 t-f(x)\,dx=\left[x^2+7x-\left(-\frac{1}{3}x^3+3x^2+3x\right)\right]_0^2=$$

$$2^2+7\cdot 2-\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2\right)$$

$$-\left(0^2+7\cdot 0-\left(-\frac{1}{3}0^3+3\cdot 0^2+3\cdot 0\right)\right)=2.67$$

Som er arealet mellem tangenten t og $f(x)$.



Opgave 3.074

Der er givet en model der beskriver influenza som rammer/har ramt elever på en bestemt skole.

$$f(x)=\frac{350}{1+8\cdot e^{-0.20x}}$$

a) Der løses en ligning for x

$$200=\frac{350}{1+8\cdot e^{-0.20x}}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x=11.83562$$

Så ca. 12 dage efter vil man have 200 elever der er/har været syge.

b) Funktionen f differentieres v.h.a. Maple 2016.

Fortsættes næste side

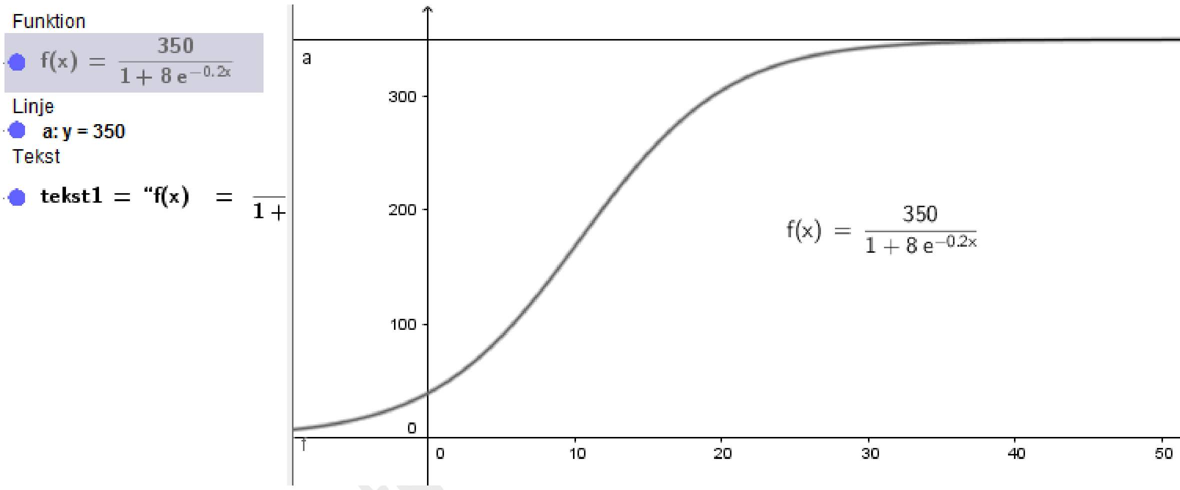
$$f'(x) = \frac{560 \cdot e^{-0.20x}}{(1 + 8 \cdot e^{-0.20x})^2}$$

Heri indsættes $f'(7)$

$$f'(7) = \frac{560 \cdot e^{-0.20 \cdot 7}}{(1 + 8 \cdot e^{-0.20 \cdot 7})^2} = 15.62613112$$

Efter 7 dage, vokser antallet af elever med influenza med ca. 16 elever.

c) Funktionen tegnes.



Der vil maksimal være 350 elever der kan blive syge (pga. logistisk vækst). Det vil aldrig komme over dette tal. Grafen f og linjen y er asymptoter.

På matematik B->A arbejder man med differentialligninger hvor dette er sætning 5A.

Opgave 3.075

Der er givet en model.

$$f(x) = 0.5x^2 - 5.5x + 6 \cdot \ln(x) + 8$$

a) Grafisk vil man kunne se, at grafen for f har to vandrette vendetangenter. De er placeret ved nulpunkterne for den afledede af f. Man kan også regne det.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 11x + 12}{2x}$$

Den sættes lig 0.

$$\frac{2x^2 - 11x + 12}{2x} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = 4$$

Hermed fandt man nulpunkterne for f', der bekræfter, at f har to vandrette vendetangenter.

Fortsættes næste side

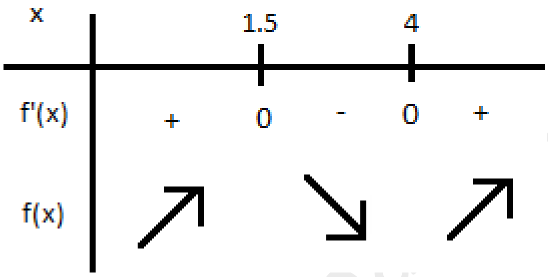
b) Da den afledede allerede er differentierede og nulpunkterne for undertegnet kendes, så kan man direkte gøre prøve.

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 12}{2 \cdot 1} = 1.5$$

$$f'(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 12}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(5) = \frac{2 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 12}{2 \cdot 5} = 0.7$$

Der tegnes en monotonilinje.



Så endelig er f voksende i intervallet $]-\infty; 1.5]$ og $[4; \infty[$ hvor f er aftagende i intervallet $[1.5; 4]$.

Opgave 3.076

Modellen for bladfjedre er givet ved

$$T = 0.28 \cdot x^{1.5}$$

a) Svingningstiden kan bestemmes ved indsættelse af 0.5 i x.

$$T = 0.28 \cdot 0.5^{1.5} = 0.0989$$

Så svingningstiden er 0.1 sekunder.

Der løses en ligning for tiden 0.040.

$$0.040 = 0.28 \cdot x^{1.5}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 0.2732759$$

Så bladfjederen har en længde på 0.273m.

b) Der anvendes formlen for procentvise ændring. r_x er givet ved 30%. man skal finde r_y

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Værdierne indsættes.

$$r_y = ((1 + 0.3)^{1.5} - 1) \cdot 100 = 48.2228\%$$

Så hvis svingningstiden skal øges med 30% så skal længden øges med 48.2228%.

[Maj 2009, delprøve 1]

Opgave 3.077

Der er givet to punkter samt funktionen $f(x) = ax + b$

Derved bestemmes tallene a og b.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$
$$b = y_1 - ax_1 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

Disse indsættes i f

$$f(x) = 2x - 2$$

Opgave 3.078

Hvis man kigger på værdien $f(x)$, når $x = 0$, så er $f(0) = 14$. For at bestemme halveringskonstanten, så ses der på den y-værdi der er halveret af 14. Dvs. at når y-værdien er 7, så aflæses værdien på x-aksen, dvs. at når $f(x) = 7$, så er $x = 3$. Altså er $T_{\frac{1}{2}} = 3$.

Opgave 3.079

To funktioner er givet. De er skrevet nedenfor:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x, \qquad g(x) = \ln(x) + 7$$

Disse differentieres

$$f'(x) = 4x^3 + 6x - 5, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Som er det ønskede.

Opgave 3.080

Funktionen f er givet. Der skal findes en stamfunktion.

$$f(x) = 4x + 3$$

Hvor punktet $P(1{,}10)$ er angivet.

$$\int 4x + 3\,dx = 2x^2 + 3x + k$$

Herved indsættes punktet.

$$10 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + k \Leftrightarrow 10 = 2 + 3 + k \Leftrightarrow k = 5$$

Som indsættes i stamfunktionens ubekendte.

$$F(x) = 2x^2 + 3x + 5$$

Opgave 3.081

Det ses på figuren, at

$$a > 0 \; gælder\; for: P_1 \;\&\; P_2$$
$$c > 0 \; gælder\; for: P_1 \;\&\; P_2$$
$$d > 0 \; gælder\; for: P_1 \;\&\; P_2$$

Parablen P_3 opfylder ingen af de kriterier, der er givet.

[Maj 2009, delprøve 2]

Opgave 3.082

Der oplyses en model over antallet af anmeldte voldsforbrydelser fra 1998 til 2006.

Modellen er givet ved:

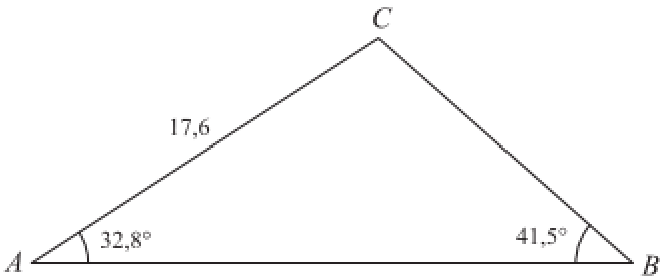
$$f(x) = 760x + 13570$$

a) Tallene a og b fortæller følgende:
a fortæller, at hvor hvert år der går efter 1998 stiger antallet af anmeldte voldsforbrydelser med 760, hvor tallet b fortæller, at i år 1998 var antallet af anmeldte voldsforbrydelser 13570 tilfælde.

b) For at finde tallet der passer til år 2007, tages differencen fra 1998. Med et hurtigt øjekast ses det, at differencen er 9. Dette indsættes i modellen.
$$f(9) = 760 \cdot 9 + 13570 = 20410$$
Ifølge opgavekommissionen vil tilfældet være 18869 i år 2007, så det passer ikke helt med modellen. Derved forkastes den fra efter år 2006.

Opgave 3.083

Der ses en vilkårlig trekant. Trekanten er tegnet nedenfor:

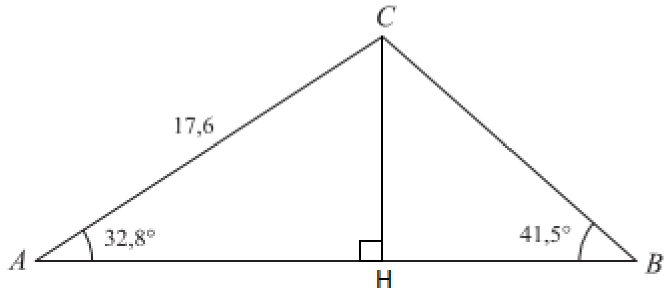


a) Længden af siden $|BC|$ findes v.h.a. sinusrelationerne.
$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$
Værdierne indsættes
$$\frac{\sin(32.8^o)}{|BC|} = \frac{\sin(41.5^o)}{17.6}$$
$$\Updownarrow$$
Ligningen løses for |BC| vha. CAS-værktøjet WordMat.
$$|BC| = 14.38843$$

Fortsættes næste side

Alternativt skulle man blot isolere længden $|BC|$ for at få tallet 14.38843

b) Der laves en linje fra C til et nyt punkt, H.



Her kender man to vinkler, vinkel A og vinkel H. Tilsvarende $h = 17.6$
Man regner højden v.h.a. følgende formel.

$$|CH| = |AC| \cdot \sin(A)$$

Her indsættes værdierne i formlen.

$$|CH| = 17.6 \cdot \sin(32.8^o) = 9.534$$

Hvilket er den ønskede højde.

Opgave 3.084

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$$

a) En ligning for tangenten bestemmes v.h.a. følgende punkt $(1, f(1))$.
Punktet indsættes i f og f'

$$f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = -2$$
$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3$$

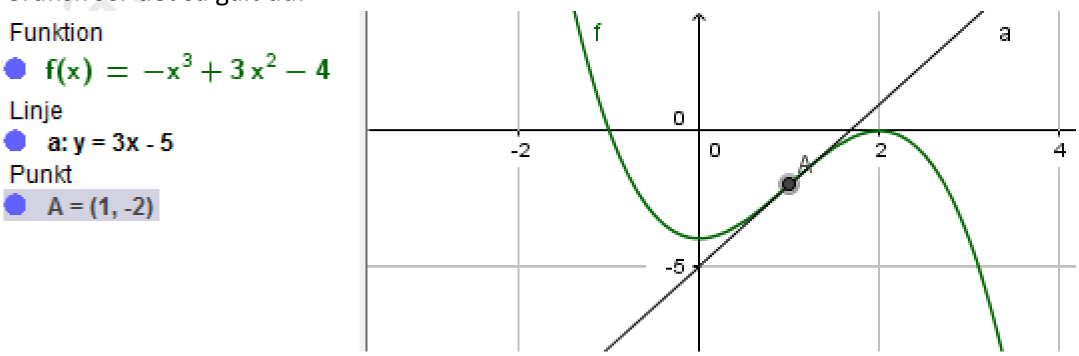
Disse og punktet indsættes i tangentligningen

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Hvor værdierne giver

$$y = 3(x - 1) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$

Grafisk ser det så galt ud:



b) Monotoniforhold og lokale ekstrema bestemmes på følgende måde
Der løses en ligning for den afledede af f.

$$-3x^2 + 6x = 0$$

Anvendelse af diskriminanten.

$$d = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0 = 36^{0.5} = 6$$

Nu løses der for x.

Fortsættes næste side

$$x = \frac{-6 \pm 6}{-6} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Nu gøres der prøve for at bestemme, om f er voksende og/eller aftagende.

$$f'(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) = -9$$
$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3$$
$$f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = -9$$

Således kan man nu tegne monotoniforholdet for f.

x		0		2	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Konklusionen for det er så:
f er aftagende i intervallet $]-\infty; 0]$, voksende i intervallet $[0; 2]$ samt aftagende i intervallet $[2; \infty[$

Endelig kan de lokale ekstrema findes. Punkterne angives nedenfor:

$$f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$
$$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 = 0$$

Så f har lokal maks. i punktet:

$$(2; 0)$$

Og f har lokal min. i punket:

$$(0; -4)$$

Opgave 3.085

Regressionsopgaven løses via Maple 2016.

Der er givet en række oplysninger omkring en diamant. Der anvendes potensregression. Først defineres oplysningerne.

$L1 := [2.5, 3.4, 4.1, 5.8, 6.9, 8.2, 9.4]$

$$[2.5, 3.4, 4.1, 5.8, 6.9, 8.2, 9.4]$$

$L2 := [0.05, 0.15, 0.25, 0.75, 1.25, 2, 3]$

$$[0.05, 0.15, 0.25, 0.75, 1.25, 2, 3]$$

a)

$PowReg(L1, L2)$

Potens Regression

$$y = 0.0032895 \cdot x^{3.0614}$$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99862$

Fortsættes næste side

Da forklaringsgraden er meget tæt på 1, accepteres regressionen. Derfra blev tallene a og b bestemt til:
$a = 3.0614$
$b = 0.0032895$
Modellen defineres.
$f(x) := 0.0032895 \cdot x^{3.0614}$

$$x \rightarrow 0.0032895\,x^{3.0614}$$

b)
Det oplyses, at verdens største diamant er 84.37 karat. Diameteren findes
$f(x) = 84.37$

$$0.0032895\,x^{3.0614} = 84.37$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$[[x = 27.55559288], [x = -12.76352335 + 24.42136710\,I], [x = -12.76352335 - 24.42136710\,I]]$

De komplekse værdier forkastes! Diamantens diameter er 27.55 mm.

c)

Her anvendes formlen $r_y = \left(\left(1 + r_x\right)^a - 1\right) \cdot 100\ \%$

Hvor $r_x = 20\ \%$ og $a = 3.0614$

Tallene indsættes

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{20}{100}\right)\right)^{3.0614} - 1\right) \cdot 100$$

$$r_y = 74.74528510$$

Så vægten fra den ene diamant er 74.745% større end den anden diamant, pga. dens difference i diameter på 20%.

Opgave 3.086

Der er givet en funktion

$$f(x) = \frac{4}{x} + x$$

a) Der ønskes bestemt arealet i et område. Dette udføres således:

$$\int \frac{4}{x} + x\,dx = 4 \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2$$

Grænseværdierne er angivet

$$\left[4 \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2\right]_1^5 = 4 \cdot \ln(5) + \frac{1}{2}5^2 - \left(4 \cdot \ln(1) + \frac{1}{2}1^2\right) = 18.4377$$

Som er arealet af $f(x)$, afgrænset af $x = 1$ og $x = 5$.

Opgave 3.087

Det ses, at i år 2006 havde man et skovareal til $6000km^2$ i Danmark. Der skal opstilles en model. En eksponentiel udvikling.

a) Man beregner tallet a v.h.a. formlen for fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r, \qquad r = 0.3\%$$

$$a = 1 + \left(\frac{0.3\%}{100}\right) = 1.003$$

Begyndelsesværdien gælder fra år 2006. Derfor har man modellen

$$f(x) = 6000 \cdot 1.003^x$$

Som beskriver udviklingen i skovarealet i Danmark.

b) Man løser en ligning for r. Her vil det være smart at vende tilbage til MAT C kapitel 3 og anvende renteformlen.

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Det oplyses, at $K_n = 8600, K_0 = 6000, n = 83$ pga. differencen mellem 2006 og 2089. Det sættes op som følgende:

$$8600 = 6000 \cdot (1+r)^{83}$$

Her løser man for renten.

$$\frac{8600}{6000} = \frac{6000 \cdot (1+r)^{83}}{6000} \Leftrightarrow$$

$$\frac{8600}{6000} = (1+r)^{83} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[83]{\frac{8600}{6000}} = 1 + r \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[83]{\frac{8600}{6000}} - 1 = r \Leftrightarrow$$

$$r\% = \left(\sqrt[83]{\frac{8600}{6000}} - 1\right) \cdot 100\% = 0.44\%$$

Så med andre ord, skovarealet skal vokse med 0.44% frem til år 2089 hvis man vil opnå det ønskede skovareal på $8600km^2$.

Opgave 3.088

Der er givet en model over Ben Johnson's fart

$$v(x) = 12.42 - 0.0944 \cdot x - 12.42 \cdot 0.4937^x$$

a) Man indsætter 3 på x's plads i medellen.

$$v(3) = 12.42 - 0.0944 \cdot 3 - 12.42 \cdot 0.4937^3 = 10.642$$

Så efter 3 sekunders spurt, løber Ben 10.62 m/s.

Man skal nu løse en ligning for tiden.

$$10.17 = 12.42 - 0.0944 \cdot x - 12.42 \cdot 0.4937^x$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 2.582896 \quad \vee \quad x = 23.83474$$

Det vil være mere realistisk at tage den første værdi, da modellen grafisk er aftagende. Så efter 2.58 sekunder, vil Ben have en hastighed på

$$10.17\ m/s$$

b) Man anvender nu integral for modellen. Dette udføres i Maple 2016.

$$> s = \int_0^2 v(x)\, dx$$

$$s = 11.34376073$$

Det ses, at Ben løb 11.34 meter på de første 2 sekunder.

$$> s = \int_2^4 v(x)\, dx$$

$$s = 21.03004888$$

Det ses, at Ben løb 21 meter på de næste 2 sekunder.

Opgave 3.089

Opgaven løses via Maple 2016.

Modellen defineres.

$f(x) := 342 \cdot (1 + 4x)^{\frac{1}{4}}$

$$x \to 342\,(1 + 4x)^{1/4}$$

a)

Heri indsætter man $\frac{1}{2}$ eller 0.5 om man vil i modellen.

$f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$342\,3^{1/4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$450.11$$

Så den tilladte strømbelastning vil være 450*Ampere*

Der løses en ligning for x.

$f(x) = 800$

$$342\,(1 + 4x)^{1/4} = 800$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 7.2351]]$$

Så ved en vindhastighed på 7.23 m/s giver en tilladt strømbelastning på 800*Ampere*.

b)

Man differentiere funktionen ved at skrive:
$f'(x)$

$$\frac{342}{(1 + 4x)^{3/4}}$$

Efterfølgende indsættes tallet 5.

$f'(5)$

$$\frac{114}{7}\,21^{1/4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$34.863$$

Dvs. hver gang vindhastigheden øges med 5, så øges den tilladte strøm med 34.863*Ampere*

[August 2009, delprøve 1]

Opgave 3.090

Der gives oplysninger, således man kan opstille en lineær model, der beskriver udviklingen af indbyggere i Københavns Kommune.

Tallet a = 3000
Tallet b = 503700

Disse opstilles i modellen

$$f(x) = 3000x + 503700$$

Hvor a beskriver den årlige vækst og b beskriver begyndelsesåret 2007.

Opgave 3.091

En funktion er givet.

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 6$$

Den differentieres.

$$f'(x) = 4x - 5$$

Man har fået givet et punkt. $P\big(2, f(2)\big)$. Man indsætter blot 2 i f og f' samt tangentligningen.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Værdierne udregnes.

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4$$
$$f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$$

Disse indsættes i tangentligningen.

$$y = 3(x - 2) + 4 \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

Som er tangenthældningen til $f(x)$.

Opgave 3.092

Der er givet en lineær funktion.

$$f(x) = 4x - 6$$

Den integreres.

$$\int 4x - 6\,dx = 2x^2 - 6x + k$$

Derfra er funktionen

$$F(x) = 2x^2 - 6x + k$$

Her kan man endelig bestemme toppunktet for at undersøge, hvilke graf der tilhører funktionen.

$$T_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Derfra ses det, at C ikke passer. Man skal også lægge mærke til følgende kriterier:

$$a > 0, b < 0, d < 0$$

Så konklusionen er, at parablen $A \in F(x)$

Opgave 3.093

Udtrykket

$$2b \cdot (a + ab) - 2ab = 2ab + 2ab^2 - 2ab = 2ab^2$$

Udtrykket

$$\frac{8 \cdot p \cdot q^3}{2 \cdot p \cdot q} = 4 \cdot q^2$$

Opgave 3.094

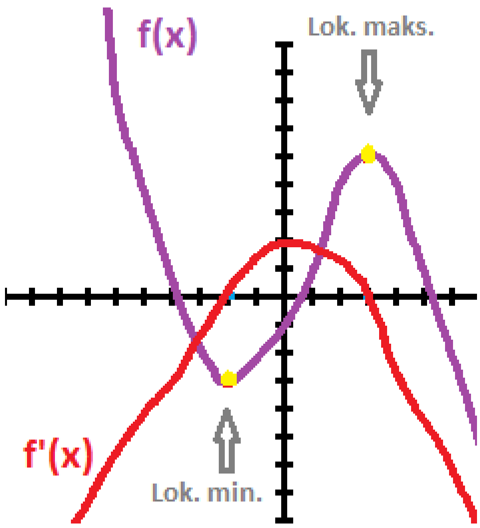
Der tegnes en model i Paint.

Så f er aftagende i intervallerne:

$]-\infty; -2]$ og $[3; \infty[$

Hvor f er voksende i intervallet

$[-2; 3]$



[August 2009, delprøve 2]

Opgave 3.095

Regressionsopgave - defineres v.h.a. Maple 2016.

a)

Oplysningerne fra tabellen defineres.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5]$$

$L2 := [145132, 155759, 168427, 182034, 195513, 206083]$

$$[145132, 155759, 168427, 182034, 195513, 206083]$$

$LinReg(L1, L2)$

Lineær regression

$$y = 12504.\,x + 1.4423\;10^5.$$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.998337016377836$

Modellen efter den lineære regression i Maple er givet:

$$f(x) = 12504 \cdot x + 144230$$

Her ses, at x er antal år og $f(x)$ er antal diabetikere, målt efter år 2000.

b) Her løses en ligning for x.

$$12504 \cdot x + 144230 = 275000$$

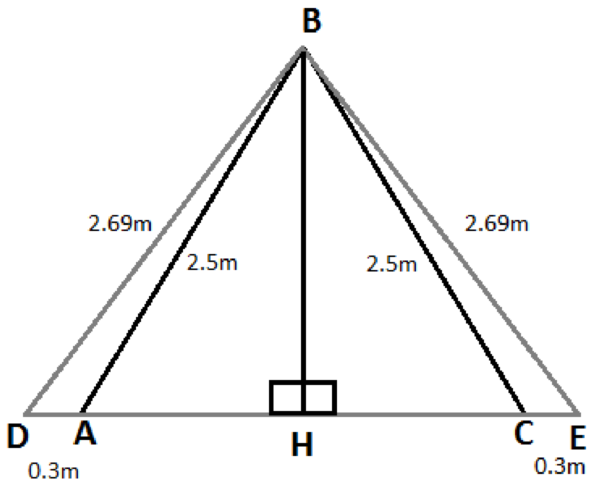
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 10.45825$$

Så år $2000 + 10.45$ ca. i løbet af år 2010 vil man passere 275000 diabetikere.

Opgave 3.096

Der er angivet en figur.



a) Vinkel D kan bestemmes ved hjælp af cosiusrelationerne.

$$\angle D = \cos^{-1}\left(\frac{2.69^2 + 0.3^2 - 2.5^2}{2 \cdot 2.69 \cdot 0.3}\right) = 48.184^o$$

Som er den passende vinkel D.

b) Teltets højde kan bestemmes v.h.a. formlen

$$|BH| = \sin(D) \cdot |BD|$$

Her indsættes tallene fra figuren + **a)**

$$|BH| = \sin(48.184^o) \cdot 2.69 = 2.00m$$

Som er teltets højde.

Opgave 3.097

Der er givet en model omkring indbyggerne i byen Lagos. Modellen er givet ved.

$$y = 10.5 \cdot 1.044^x$$

Der er tale om en eksponentiel udvikling.

a) Der skal bestemmes for antallet af indbyggere i år 2009. Differencen fra 1995 tages.

$$2009 - 1995 = 14$$

Som indsættes i x.

$$y = 10.5 \cdot 1.044^{14} = 19.18$$

Så i år 2009 vil der være 19.18 mio. indbyggere.

Fortsættes næste side

Fordoblingstiden kan bestemmes ved nedenstående formel:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Heri indsættes tallet a.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.044)} = 16.097$$

Så efter 16.1 år vil antallet af indbyggere være fordoblet.

b) Tallet 10.5 fortæller, at ved begyndelsen af perioden hvor man registrerede antallet af indbyggere (1995) var det på 10.5 mio. indbyggere, hvorefter det så voksede med 4.4% hvert år efterfølgende.

Opgave 3.098

Denne opgave er som sådan fri, så der bestemmes følgende: monotoniforhold og lokale ekstrema grafisk og pr. håndkraft. Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{4}$$

a) Da der skal argumenteres for grafens forløb v.h.a. differentialregning, differentieres funktionen f.

$$f'(x) = x^3 - 3x^2$$

Som er den afledede af $f(x)$. Her er det en god idé at anvende nulreglen.

$$x(x^2 - 3x) = 0, \qquad x = 0$$

Der løses en andengradsligning, men man kan også anvende nulreglen igen, hvis man vil.

$$x^2 - 3x = 0$$

Løses for diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$$

Rødderne findes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{3 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$$

Så løsningen til $f'(x) = 0$ er

$$x = 0 \vee x = 0 \vee x = 3$$

Således kan man nu gøre prøve og bestemme grafens forløb.

$$f'(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -4$$
$$f'(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$$
$$f'(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 16$$

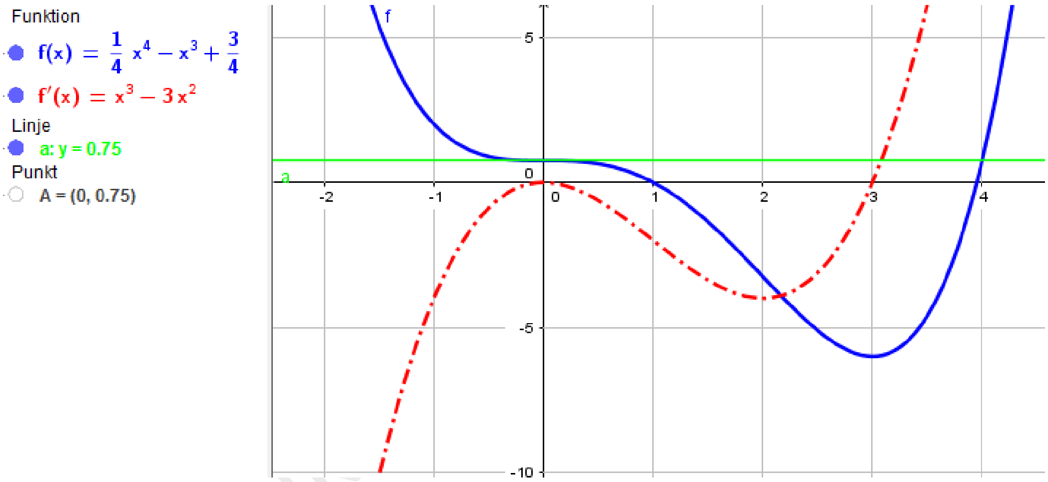
Disse indsættes i en monotonilinje.

Fortsættes næste side

x		0		3	
f'(x)	-	0	-	0	+
f(x)	↘		↘		↗

Her ses der en vandret vendetangent. Derfra kan man nu konkludere, at f er aftagende i intervallet $]-\infty;0]$ og aftagende i intervallet $[0;3]$ hvorefter den er voksende i intervallet $[3;\infty[$

Grafisk analysemetode:



Ved aflæsning af den røde graf $(f'(x))$ ses det, at den ligger under første og anden kvadrant, hvilket illustrerer, at den blå graf $(f(x))$ er aftagende. Da den røde graf rammer origo og aftager (stadig i tredje og fjerde kvadrant) kan man se, at der dannes en vandret vendetangent). Først når den røde graf rammer $x = 3$, vil man kunne se, at den blå graf begynder at vokse. Dette viser nulpunktet for $f'(x)$. Den vandrette vendetangent er illustreret med den grønne linje.

Opgave 3.099

Der er givet en model for en bestemt plantesort.

$$f(x) = 175000 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

a) Man kan bestemme den procentdel der falder, når man anvender formlen:

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Derfra kan man regne den enkelte plantes procentvise fald, så snart man øger antallet af dyrkede planter med $25\% m^2$. Tallene indsættes.

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{25}{100}\right)\right)^{-\frac{3}{2}} - 1 \right) \cdot 100 = -28.4458\%$$

Så hvis man øger antallet af dyrkede planter med 25% pr. kvadratmeter, falder plantens vægt med 28.44%

Opgave 3.100

En model er givet over en bestemt kaffekande. Lad modellen være givet

$$y = 80 \cdot 0.95^x + 20$$

a) Der undersøges nu for $E - standarden$ ved indsættelse af 6 i x.

$$y = 80 \cdot 0.95^6 + 20 = 78.80^o C$$

Det viser sig, at fabrikanten er meget heldig, for den er over $75^o C$

b) Der løses en ligning for x.

$$35 = 80 \cdot 0.95^x + 20 \Leftrightarrow$$
$$15 = 80 \cdot 0.95^x \Leftrightarrow$$
$$\frac{15}{80} = 0.95^x \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\frac{15}{80}\right) = x \cdot \ln(0.95) \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{15}{80}\right)}{\ln(0.95)} = 32.635$$

Dvs. at efter ca. 32.6 timer, vil temperaturen være $35^o C$.

Tallet 20 fortæller, at det er det minimale temperatur, termokanden kan få, derfor er linjen $p = 20$ asymptote med grafen for y.

c) Modellen differentieres og tallet 6 indsættes på x i den afledede af y, nemlig y'

$$y' = 80 \cdot 0.95^x \cdot \ln(0.95)$$

Hvor tallet 6 indsættes.

$$y' = 80 \cdot 0.95^6 \cdot \ln(0.95) = -3.016$$

Så for hver time efter 6 timer, falder temperaturen med ca. $3^o C$

Opgave 3.101

Modellen over en udestue er givet ved

$$f(x) = -0.005x^3 - 0.06x^2 + 2.5$$

a) Man bestemmer højden ved at indsætte afstanden som er 3 i dette tilfælde på $x's$ plads.

$$f(3) = -0.005 \cdot 3^3 - 0.06 \cdot 3^2 + 2.5 = 1.825$$

Derfra fås højden til at være $1.825m$

Ved bestemmelse af bredden af udestuen skal der løses en ligning for $f(x) = 0$.

$$0 = -0.005x^3 - 0.06x^2 + 2.5$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 5.365833$$

Så bredden af udestuen er ca. 5.36 meter.

b) Arealet af udestuen kan bestemmes ved at integrere $f(x)$ og anvendelse af bredden.

$$A = \int_0^{5.36} -0.005x^3 - 0.06x^2 + 2.5\, dx$$
$$= [-0.00125 \cdot x^4 - 0.02 \cdot x^3 + 2.5x]_0^{5.36}$$

Man indsætter tallene og trækker fra.

$$-0.00125 \cdot 5.36^4 - 0.02 \cdot 5.36^3 + 2.5 \cdot 5.36$$
$$- (-0.00125 \cdot 0^4 - 0.02 \cdot 0^3 + 2.5 \cdot 0) = 9.288$$

Så arealet af udestuen er

$$9.288\ m^2$$

Dette kunne også gøres nemt i Maple 2016.

$$f(x) := -0.005\,x^3 - 0.06\,x^2 + 2.5$$
$$x \rightarrow (-1) \cdot 0.005\,x^3 + (-1) \cdot 0.06\,x^2 + 2.5$$
$$f(x) = 0$$
$$-0.005\,x^3 - 0.06\,x^2 + 2.5 = 0$$
$$\xrightarrow{\text{solve}}$$
$$5.365833428$$
$$A = \int_0^{5.36} f(x)\, dx$$
$$A = 9.288449485$$

Opgave 3.102

Denne opgave er en optimeringsopgave. Opgaven udregnes i Maple 2016.

Modellen er givet:

$$O(x) := \sqrt{\frac{2.25}{x^2} + \pi^2 \cdot x^4}$$

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{2.25}{x^2} + \pi^2 x^4}$$

a)
Modellen differentieres.
$O'(x) = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{-\frac{4.50}{x^3} + 4\pi^2 x^3}{\sqrt{\frac{2.25}{x^2} + \pi^2 x^4}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

[[$x = 0.6963198827$], [$x = 0.3481599414 + 0.6030307076\,I$], [$x = -0.3481599414 + 0.6030307076\,I$], [$x = -0.6963198827$], [$x = -0.3481599414 - 0.6030307076\,I$], [$x = 0.3481599414 - 0.6030307076\,I$]]

Der kom en masse komplekse værdier ud af løsningen. Disse forkastes. Tilsvarende forkastes den negative reelle værdi, da der er tale om radius. Derfor er radius for x følgende

$x = 0.69$ som bør give det mindste overflade areal.

Herved gør man prøve med tal. Der vælges 0.5 og 1.

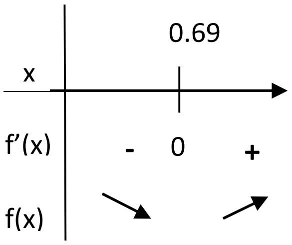
$O'(0.5)$

$$-5.008730910$$

$O'(1)$

$$5.023725960$$

Derfra kan man se, hvornår det er bedst at have det mindste overflade areal.
Montonilinje laves



Det ses, at $O(x)$ er aftagende i intervallet $[0; 0.69]$ og voksende i intervallet $[0.69; \infty[$

Så med andre ord, man får det mindste overfladeareal for en radius på $x = 0.69m$

[December 2009, delprøve 1]

Opgave 3.103

Udtrykket

$$3b - 4a - (2b + a) = 3b - 4a - 2b - a = b - 5a$$

Udtrykket

$$(2x + 3)^2 + 6(1 - 2x) = 4x^2 + 12x + 9 + 6 - 12x = 4x^2 + 15$$

Opgave 3.104

Der er givet funktionerne

$$f(x) = x^3 + 4x, \qquad g(x) = e^x$$

Funktionerne differentieres.

$$f'(x) = 3x^{3-1} + 4x^{1-1} = 3x^2 + 4$$
$$g'(x) = e^x \cdot \ln(e) = e^x$$

Som er de afledede funktioner.

Opgave 3.105

Det oplyses, at der er tale om en lineære funktion.

Punktet $P(1{,}5)$ er givet. Der er i øvrigt også givet oplysningen af, at når x vokser med 2, så øges y med 6. Altså kan dette lægges til ved punktet P. Så vi får

$$Q(1 + 2{,}5 + 6) = Q(3{,}11)$$

Fordi når vi går 2 ud af x-aksen, går vi 6 op af y –aksen

Nu kan man regne tallene a og b.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$
$$b = y_1 - ax_1 = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

Således kan man opstille den lineære model

$$y = 3x + 2$$

Opgave 3.106

Der bestemmes en stamfunktion eller integrale om man vil.

$$\int 2x + 6x^2\,dx = x^2 + 2x^3 + k$$

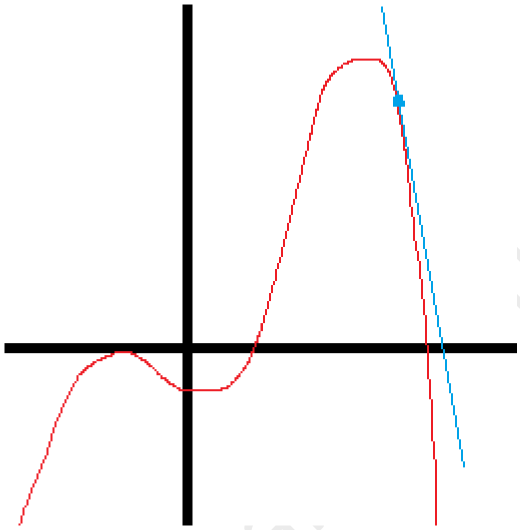
Som er det ønskede svar.

Opgave 3.107

Ved aflæsning af grafen for den afledede kan man se fra punktet, at når man går ud af x −aksen, er hældningskoefficienten -4, derfor gælder følgende udsagn, at

$$f'(6) = -4$$

Som er svaret. Tallet 6 viser hvor henne punktet er.



Den blå linje viser $tangentlinjen$ til f.

[December 2009, delprøve 2]

Opgave 3.108

Denne opgave løses i Maple v.h.a. lineær regression.

a) Oplysningerne defineres og der udføres lineær regression.

$Stab := [4, 6, 8, 10, 12, 14]$

$$[4, 6, 8, 10, 12, 14]$$

$Pris := [2275, 2788, 3300, 3813, 4325, 4838]$

$$[2275, 2788, 3300, 3813, 4325, 4838]$$

$LinReg(Stab, Pris)$

Lineær regression
y =256.27 x + 1250.1.
Forklaringsgrad $R^2 = 0.999999925421310$

Det ses, at forklaringsgraden er høj, modellen accepteres.
Heraf blev tallene a og b bestemt til hhv:

$$a = 256.27$$
$$b = 1250.1$$

Og modellen

$$f(x) = 256.27x + 1250.1$$

Som beskriver en lineære udvikling.

b) Tallet a fortæller, at for hver m^3 stabilgrus der køres ud, skal man betale $256.27kr$

c) Der undersøges nu om hvornår den første vognmand er billigst. Derfor løses en ligning for x.

$g(x) = 300x + 750$

$$f(x) = g(x)$$

Modellerne sættes lig med hinanden.

$$256.27x + 1250.1 = 300x + 750$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 11.43609$$

Så man skal købe ca. 11-12m^3 eller mere stabilgrus for, at den første vognmand er billigst.

Opgave 3.109

Der oplyses en funktion

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 1$$

a) Funktionen skal integreres, således man kan finde arealet af funktionen $f(x)$. Grænseværdierne for arealet er hhv. $x = 0$ og $x = 3$, så arealet ligger i første kvadrant.

$$A = \int_0^3 -x^3 + 4x^2 + 1\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + x\right]_0^3 =$$

$$-\frac{1}{4}3^4 + \frac{4}{3}3^3 + 3 - \left(-\frac{1}{4}0^4 + \frac{4}{3}0^3 + 0\right) = 18.75$$

Så funktionen $f(x)$ har et areal afgrænset af 0 og 3, som er 18.75.

Man kunne alternativt anvende Maple 2016. Dette gøres:

$f(x) := -x^3 + 4x^2 + 1$

$$x \rightarrow -x^3 + 4x^2 + 1$$

Benyt integralet.

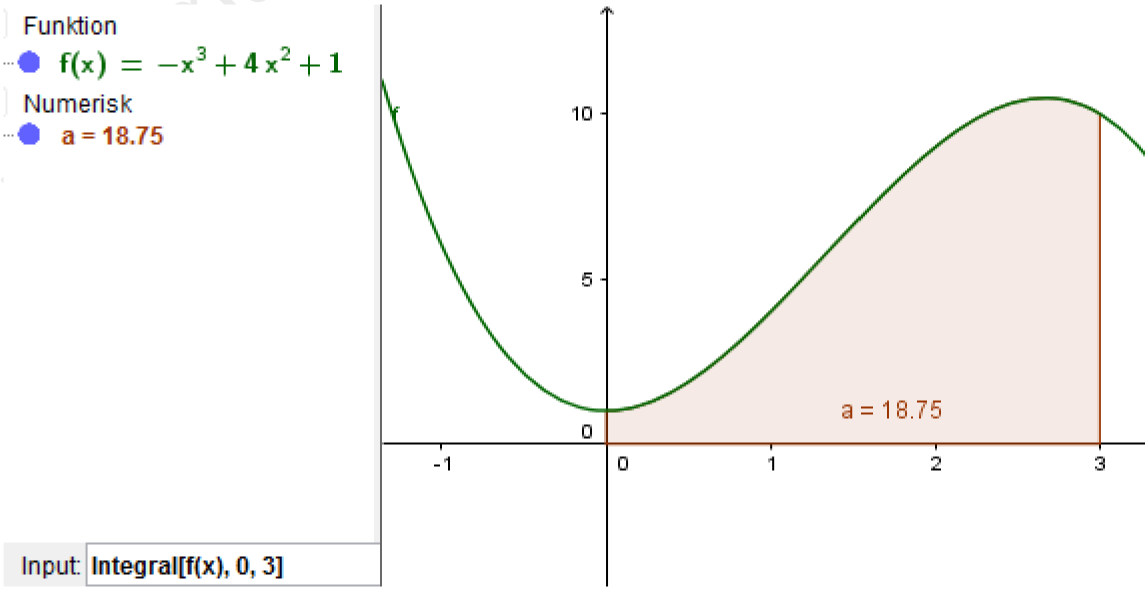
$A = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A = \frac{75}{4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$A = 18.750$$

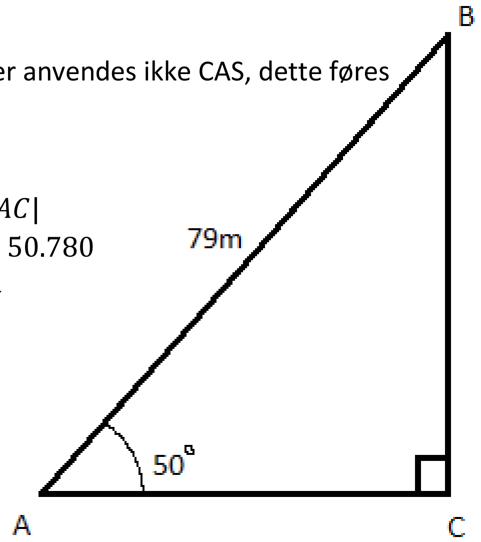
Eller GeoGebra med følgende kommando: ***Integral[<Funktion>, <Tal>, <Tal>]***



Opgave 3.110

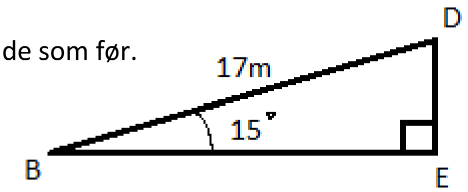
Opgaven er lidt lang, men udføres således. Der anvendes ikke CAS, dette føres udelukkende med formler.

a) Figuren:
Formlen anvendes for at finde længden $|AC|$
$|AC| = |AB| \cdot \cos(A) = 79 \cdot \cos(50^o) = 50.780$
Derfra blev grundlinjen fundet til $50.78m$



Nu skal man finde længden $|AF|$. Man kender nu $|AC|$. Hvis man finder længden $|BE|$, kan man addere disse længder og få $|AF|$. Figuren tegnes:

Udregningen foregår på præcis samme måde som før.



$|BE| = |BD| \cdot \cos(A) = 17 \cdot \cos(15^o) = 16.42$
Derfra blev resten af grundlinjen fundet til $16.42m$. Nu kan man finde $|AF|$

$$|AF| = |AC| + |BE| = 50.78 + 16.42 = 67.2$$

Således fandt man $|AF|$

b) Inden man kan regne $|AD|$ bliver man nød til at kende toppen af $|DE|$ og højden af $|BC|$. Her anvendes Pythagoras.

$$b^2 + d^2 = e^2$$

Værdierne indsættes.

$$b^2 + 16.42^2 = 17^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{17^2 - 16.42^2} = 4.402$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Værdierne indsættes.

$$a^2 + 50.78^2 = 79^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{79^2 - 50.78^2} = 60.517$$

Dette gælder for $|BC|$ og $|EF|$
Højderne lægges sammen. Grundlinjen $|AF|$ kendes, så man har nu:

$$|AF|^2 + (|EF| + |DE|)^2 = |AD|^2$$

Værdierne indsættes.

$$67.2^2 + (60.517 + 4.402)^2 = |AD|^2 \Leftrightarrow |AD| = \sqrt{67.2^2 + 64.919^2} = 93.436$$

Således fandt man længden $|AD|$ til at være $93.436m$

Opgave 3.111

Denne opgave omhandler fangsten af ål. Der laves en model.

a) Da man kender begyndelsestiden, har man b −værdien

$$b = 4000$$

Da man kender den aftagende a −værdi, kan man finde tallet v.h.a. fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r$$

Hvor oplysningerne indsættes.

$$a = 1 + \left(-\frac{5.2}{100}\right) = 0.948$$

Derfra kan man opstille en model.

$$f(x) = 4000 \cdot 0.948^x$$

b) For at finde ud af hvor meget den aftager i en 5-års periode, anvendes formlen:

$$r_y = \left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot 100\%$$

Her indsættes oplysningerne

$$r_y = (0.948^5 - 1) \cdot 100\% = -23.432\%$$

Så ved en 5-års periode vil fangsten være faldet med 23.432%

Opgave 3.112

Der er givet en funktion. Den differentieres.

$$f(x) = 6 \cdot \sqrt{x} - 2x, \qquad x > 0$$

a) Her behøves man ikke produktreglen, da der kun er ganget en konstant på.

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 2 = \frac{3}{\sqrt{x}} - 2$$

Således fandt man den afledede af f.

b) Man skulle under alle omstændigheder finde $f'(x)$. Men funktionen sættes lig med 0, fordi $f'(x) = 0$.

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 2 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

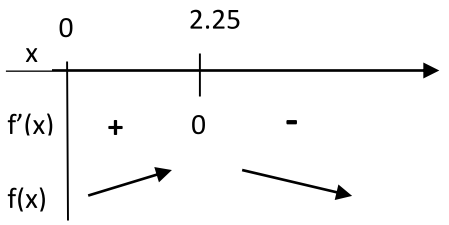
$$x = 2.25$$

Nu kan man gøre prøve, således man ved hvordan situationen udarter sig.

$$f'(2) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 = 0.121$$

$$f'(3) = \frac{3}{\sqrt{3}} - 2 = -0.267$$

Således kan man nu tegne en monotonilinje, der viser grafen fs udvikling. Dette ses på næste side.



Bemærk, at $x > 0$.

Man kan nu konkludere, at f er voksende i intervallet

$$]0; 2.25]$$

Og aftagende i intervallet

$$[2.25; \infty[$$

Opgave 3.113

Der er givet en model over en diskokugle.

$$f(x) = 0.52 \cdot x^3$$

a) Man bestemmer diameteren ved indsættelse af rumfanget som i dette tilfælde er $6000 cm^3$ på $f(x)$'s plads, således man løser en ligning.

$$0.52 \cdot x^3 = 6000$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$x = 22.59692$$

Så med en rumfang på $6000 cm^3$ er diameteren $22.59 cm$.

b) Man får oplyst, at der er en diskokugle der har en diameter, som er 23% større end en anden diskokugle. Man skal derfor finde ud af hvor mange procent større, rumfanget er for den store diskokugle, end den lille.

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Oplysningerne indsættes.

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{23}{100}\right)\right)^3 - 1\right) \cdot 100\% = 86.086\%$$

Så derfor er rumfanget af den store diskokugle 86% større end den lille diskokugle.

Opgave 3.114

Opgaven løses i Maple 2016.

Modellen defineres.

$$f(x) := \frac{2050}{1+395\cdot e^{-0.628\cdot x}}$$

$$x \to \frac{2050}{1+395\, e^{(-1)\cdot 0.628\, x}}$$

a)
Man indsætter 14 på x.

$f(14)$

$$1933.929803$$

Så effekten vil være 1933kW ved en vindhastighed på 14m/s.

b)
Først differentieres funktionen. Men da funktionen er defineret, kan man blot indsætte 10 og 14 på f'.

$f'(10)$

$$314.6633300$$

$f'(14)$

$$68.76496175$$

Disse tal fortæller, at ved en vindhastighed på 10m/s får man 314kW pr. sekundmeter, hvor hvis hastigheden er 14m/s fås effekten på 68.76kW pr. sekundmeter, så man kan godt se, at det betaler sig med den første...

Opgave 3.115

Der er givet en andengradspolynomium.

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

a) Der bestemmes en ligning for tangenten til grafen for f. Punktet $P(3, f(3))$ er givet. Man anvender nu differentialregning og tangentens ligning.

$$t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

Man indsætter punktet i x.

$$f(3) = 3^2 - 5\cdot 3 + 4 = -2$$
$$f'(3) = 2\cdot 3 - 5 = 1$$

Endelig indsættes de i tangentligningen.

$$t = 1(x-3) - 2 \Leftrightarrow t = x - 5$$

Som er tangenthældningen for $f(x)$.

Fortsættes næste side

b) Hvis tangenten t også skal gælde for $g(x)$, skal man sætte dem lig med hinanden og løse en ligning. Funktionen $g(x) = -2x^2 + 13x - 23$

$$t = g(x)$$

Altså

$$x - 5 = -2x^2 + 13x - 23 \Leftrightarrow$$
$$0 = -2x^2 + 12x - 18$$

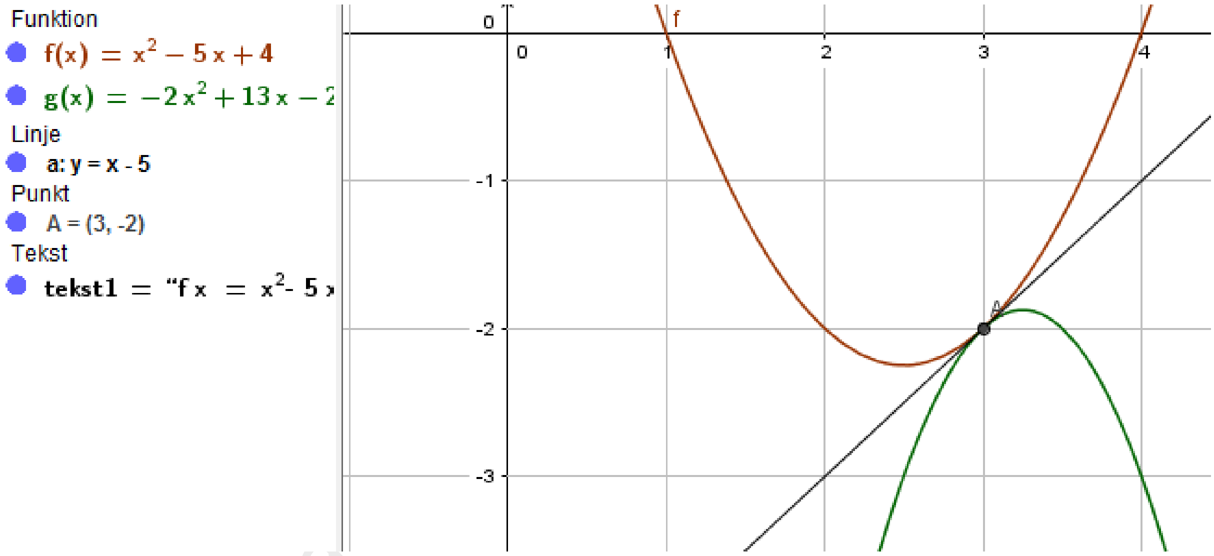
Her fås en alm. andengradsligning, hvor man løser den for diskriminanten.

$$d = b^2 - 4ac$$

Værdierne indsættes fra ligningen

$$d = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$$

Da $d = 0$, må det betyde, at tangenten t er tangent til $g(x)$ også, pga. det ene røringspunkt. Grafisk ser det så alvorligt ud:



[Juni 2010, delprøve 1]

Opgave 3.116

Udtrykket

$$5a(a-2)+3a=5a^2-10a+3a=5a^2-7a=a(5a-7)$$

Ligningen

$$\begin{aligned}&8x+18=2x-6 \Leftrightarrow\\&8x-2x=-6-18 \Leftrightarrow\\&6x=-24 \Leftrightarrow\\&x=-\frac{24}{6}=-4\end{aligned}$$

Opgave 3.117

Det aflæses at $f'(x)=0$ er hhv. $x=1 \vee x=3$

f har lokal maks i $(1,6)$ og lokal min. i $(3,2)$

Opgave 3.118

Fabrikkens model gælder for 2005 og frem. Man får oplyst begyndelsestidspunktet.

$$b=126000$$

a værdien skal man omregne v.h.a. fremskrivningsfaktoren. $a=1+r$, men da det er en aftagende eksponentiel vækst, udføres det således:

$$a=1+\left(-\frac{3}{100}\right)=0.97$$

Så man får modellen

$$f(x)=126000\cdot 0.97^x$$

Som beskriver faldet af antal enheder hos fabrikken.

Opgave 3.119

Integralet (arealet) bestemmes.

$$A=\int_0^1 (5x^4+4x)\,dx=[x^5+2x^2]_0^1=1^5+2\cdot 1^2-(0^5+2\cdot 0^2)=3$$

Opgave 3.120

Funktionen differentieres.

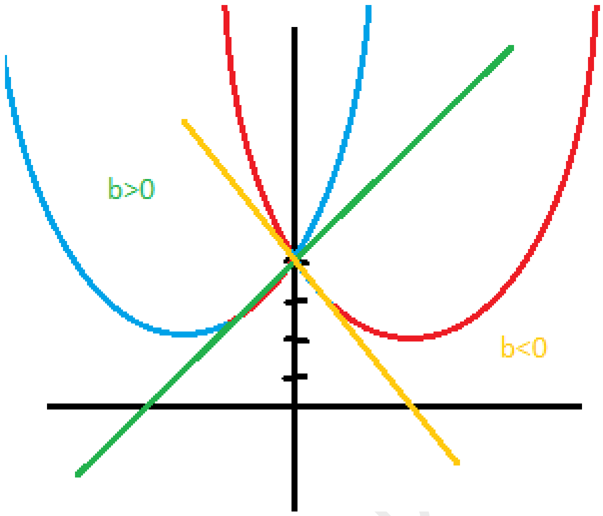
$$f(x)=x^3+x-2\ \Rightarrow f'(x)=3x^2+1$$

Det ses nu, at der er tale om et andengradspolynomium. Da c-værdien er 1, ligger den mellem første og anden kvadrant. Det ses desuden, at a er større end 0, hvilket betyder, at funktionen er voksende. Da den afledede aldrig kommer under x-aksen, må det betyde, at f altid er voksende.

Opgave 3.121

Ved aflæsning ses det, at tallet $c = 4$.

Grafen for f tilhører den blå pga. da b −værdien er positiv, er det en stigende tangent som derfor ligger i anden kvadrant. Grafisk sådan:



Da den grønne linje er voksende, betyder det, at f er den venstre parabel.

[Juni 2010, delprøve 2]

Opgave 3.122

Der er givet en række oplysninger, som anvendes til den eksponentielle regression i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres og regression udføres.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

$L2 := [30, 34, 37, 42, 46, 51, 57, 63, 69, 78]$

$$[30, 34, 37, 42, 46, 51, 57, 63, 69, 78]$$

$ExpReg(L1, L2)$

Eksponentiel Regression

$$y = 30.306 \cdot 1.1101^x$$

$$\text{Forklaringsgrad } R^2 = 0.99922$$

Således blev tallene a og b bestemt. Ligeledes for funktionen. Altså $a = 1.1101$ og $b = 30.306$ samt $f(x) = 30.306 \cdot 1.1101^x$

b) Fordoblingstiden regnes på følgende måde

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(a)}$$

Man vælger selv.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.1101)} = 6.6361$$

Så efter 6.63 år vil indbetalingen være fordoblet. Så år 2003-2004 vil det ske.

c) Man anvender fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r$$

Værdierne indsættes og der ganges med 100%.

$$1.1101 = 1 + r \Leftrightarrow r = (0.1101) \cdot 100\% = 11\%$$

Så for hvert år ifølge modellen vil det stige med 11%.

Nu tjekkes der for en 5-års periode.

$$r_y = \left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot 100\%$$

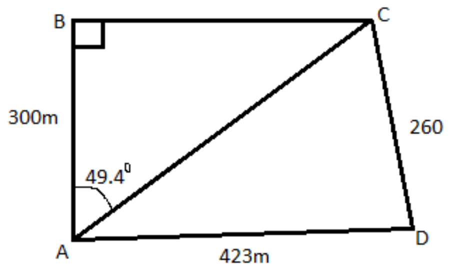
Værdierne indsættes.

$$r_y = (1.1101^5 - 1) \cdot 100\% = 68.581\%$$

Så efter 5 år er det vokset med 68.6%.

Opgave 3.123

Der er givet en figur som skal forestille sig en park.



a) Man kan bestemme længden af $|AC|$ ved følgende formel.

$$|AB| = |AC| \cdot \cos(A) \Leftrightarrow |AC| = \frac{|AB|}{\cos(A)}$$

Hvor værdierne indsættes.

$$|AC| = \frac{300}{\cos(49.4)} = 460.989$$

Stien tværs gennem A til C er $461m$

b) Man benytter sig af cosinusrelationerne.

$$\angle D = \cos^{-1}\left(\frac{|CD|^2 + |AD|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |CD| \cdot |AD|}\right)$$

Værdierne indsættes.

$$\angle D = \cos^{-1}\left(\frac{260^2 + 423^2 - 460.989^2}{2 \cdot 260 \cdot 423}\right) = 81.103^o$$

c) Man finder arealet af begge parker. Det forudsættes, at man kender grundlinjen.

$$|BC|^2 + |AB|^2 = |AC|^2$$

Værdierne indsættes.

$$|BC|^2 + 300^2 = 460.989^2 \Leftrightarrow |BC| = \sqrt{460.989^2 - 300^2} = 350.015$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Værdierne indsættes

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 350.015 = 52502.25$$

Nu for den anden del.

$$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |AD| \cdot \sin(D)$$

Værdierne indsættes.

$$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 260 \cdot 423 \cdot \sin(81.103^o) = 54328.358$$

Der er ingen tvivl om, at parken ACD har størst areal.

Opgave 3.124

Der opstilles en lineær model ud fra oplysningerne omkring vandforbruget i Holstebro kommune.

a) Man får oplyst:

$$f(x) = 34.15x + 581.25$$

Hvor a er kubikmeter og b er den faste pris for et års abonnent.

b) Man får endvidere oplyst en anden model for vandforbruget i Hillerød kommune. Man skal løse en ligning for at undersøge, om hvornår en forbruger skal betale mindre end en forbruger i Hillerød. Modellen er givet:

$$g(x) = 49.38x + 308.75$$

Der løses en ligning for x.

$$34.15x + 581.25 = 49.38x + 308.75$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 17.89232$$

Så man skal altså - hvis man har abonnement hos Holstebro - købe 18 kubikmeter vand eller mere for at det er billigst.

Opgave 3.125

En minivindmølles årlige produktion kan beskrives ved

$$E(x) = 0.14 \cdot x^2$$

a) Man bestemmer den årlige produktion ved indsættelse af 50 på x's plads.

$$E(50) = 0.14 \cdot 50^2 = 350$$

Så ved en vingefang på 50cm produceres der $350kWh$ pr. år.

Nu løses en ligning for at se, hvor stor en vingefang der giver 600kWh pr. år.

$$600 = 0.14 \cdot x^2$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = -65.46537 \quad \vee \quad x = 65.46537$$

Det giver ingen mening med en negativ variabel for et vingefang….. Den forkastes. Derfor opnår man en årlig produktion på $600kWh$ ved at anvende en mølle med vingefang på 65.5cm.

b) En person udskifter sin mølle, således den producerer 50% mere om året. Derfor kan man finde ud af, hvor mange procent vingefanget er øget.

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Værdierne indsættes

$$r_y = ((1 + 0.5)^2 - 1) \cdot 100\% = 125$$

Så man skal øge vingefanget med 125% for at opnå 50% mere produktion pr. år.

Opgave 3.126

Der er givet en funktion

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$$

a) Monotoniforholde bestemmes. Derfor differentieres funktionen og sættes $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 6x$$

Som er den afledede af f. Den sættes lig 0.

$$-4x^3 - 6x^2 + 6x = 0$$

Her skal man ikke gå i panik, den kan løses ved hjælp af nulreglen.

$$x(-4x^2 - 6x + 6) = 0$$

Så den første rod er $x = 0$. De resterende findes ved løsning af andengradsligningen.

$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 6 = 132$$

Så løses der for x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{132}}{2 \cdot (-4)} = \begin{matrix} -2.186 \\ 0.686 \end{matrix}$$

Så rødderne til den afledede er

$$x = -2.186 \vee x = 0 \ \vee x = 0.686$$

Endelig kan man gøre prøve, så man kan se hvordan grafen forløber sig.

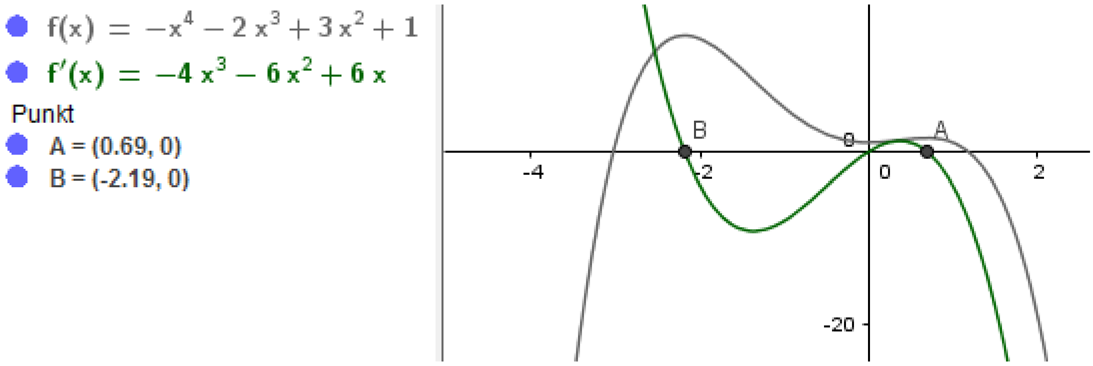
$$f'(-3) = -4(-3)^3 - 6(-3)^2 + 6(-3) = 36$$
$$f'(-1) = -4(-1)^3 - 6(-1)^2 + 6(-1) = -8$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$f'(1) = -4(1)^3 - 6(1)^2 + 6(1) = -4$$

Der tegnes en monotonilinje.

x		-2.186		0		0.686	
f'(x)	+	0	-	0	+	0	-
f(x)	↗		↘		↗		↘

Endelig kan man fortælle, at funktionen f er voksende i intervallet $]-\infty; -2.186]$ og $[0; 0.686]$
Funktionen er aftagende i intervallet
$[-2.186; 0]$ og $[0.686; \infty[$

Grafen for f og f' ses på næste side.



b) Der bestemmes en ligning for tangenten til f. Tangentligningen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ anvendes. Punktet $P\big(-2, f(-2)\big)$

Disse indsættes i f og f'

$$f(-2) = -(-2)^4 - 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 13$$
$$f'(-2) = -4(-2)^3 - 6(-2)^2 + 6(-2) = -4$$

Disse indsættes nu i y.

$$y = -4\big(x - (-2)\big) + 13 \Leftrightarrow y = -4x + 5$$

Derved blev tangentligningen bestemt.

c) Da tangenten også tangerer et andet sted, punkt Q, sættes tangentens hældningskoefficient lig med $f'(x)$.

$$-4 = -4x^3 - 6x^2 + 6x$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -2 \quad \vee \quad x = -0.5 \quad \vee \quad x = 1$$

Derved fås tre punkter. Her er det nu at gøre prøve. Bemærk, at $x = -2$ allerede eksisterer som punktet P, så det er enten $x = -0.5 \vee x = 1$. Det er om at gøre prøve nu. Man indsætter x'erne i $f(x)$.

$$f(-0.5) = -(-0.5)^4 - 2(-0.5)^3 + 3(-0.5)^2 + 1 = 1.9375$$
$$f(1) = -(1)^4 - 2(1)^3 + 3(1)^2 + 1 = 1$$

Derfor tangerer y ikke det sted, hvor $x = -0.5$ fordi hældningen af tangenten rammer aldrig dette punkt. Det gør til gengæld $x = 1$ da man kan anvende sin viden omkring lineære funktioner. Når x vokser med 1, lægges a til y. I dette tilfælde: Når x vokser med 1, falder y med 4. Man kan også tjekke v.h.a. tangentligningen om den giver koordinaterne til de punkter hvor den tangerer. Det ses, at -0.5 ikke gør.

$$y = -4 \cdot 1 + 5 = 1$$
$$y = -4 \cdot (-2) + 5 = 13$$
$$y = -4 \cdot (-0.5) + 5 = 7$$

Opgave 3.127

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x + 2 \cdot \ln(x), \qquad x > 0$$

Man ved, at F er en stamfunktion til f og at $F(1) = 5$.

a) Der bestemmes en stamfunktion for f.

$$\int 4x + 2 \cdot \ln(x)\, dx = 2x^2 + 2x \cdot \ln(x) - 2x + k$$

Således blev $F(x)$ fundet. Man isolerer k.

$$5 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) - 2 \cdot 1 + k \Leftrightarrow$$
$$5 = 2 + 0 - 2 + k \Leftrightarrow$$
$$k = 5$$

Så stamfunktionen til f er

$$F(x) = 2x^2 + 2x \cdot \ln(x) - 2x + 5$$

Opgave 3.128

Figuren viser et afgrænset areal og der er givet en funktion

$$f(x) = -x^3 + 8x^2 - 17x + 10$$

a) Der løses en ligning for at finde nulpunkterne.

$$-x^3 + 8x^2 - 17x + 10 = 0$$

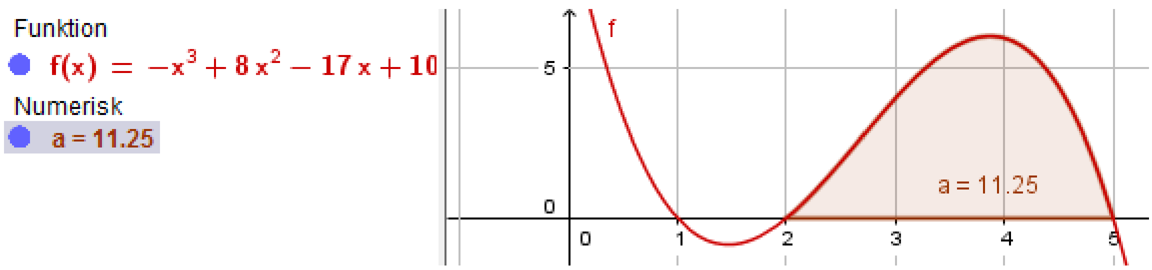
$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 5$$

Det ses, at x rammer tre forskellige steder. Det ses desuden også, at man skal bestemme det røde område. Altså må det gælde, at $x = 2 \wedge x = 5$ der afgrænser området.

$$A = \int_2^5 -x^3 + 8x^2 - 17x + 10\, dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 10x\right]_2^5 =$$
$$-\frac{1}{4} \cdot 5^4 + \frac{8}{3} \cdot 5^3 - \frac{17}{2} \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{8}{3} \cdot 2^3 - \frac{17}{2} \cdot 2^2 + 10 \cdot 2\right)$$
$$= 11.25$$

Som er arealet af det røde område.



[August 2010, delprøve 1]

Opgave 3.129

Der er givet en formel for en keglestubbe. Man ønsker at isolere a.

$$A = \pi \cdot c \cdot (a + b)$$

Der isoleres.

$$A = \pi \cdot c \cdot (a + b) \Leftrightarrow \frac{A}{\pi \cdot c} = \frac{\pi \cdot c \cdot (a + b)}{\pi \cdot c} \Leftrightarrow \frac{A}{\pi \cdot c} = a + b \Leftrightarrow \frac{A}{\pi \cdot c} - b = a$$

Således blev a isoleret. Formlen er:

$$a = \frac{A}{\pi \cdot c} - b$$

Opgave 3.130

Der er givet en andengradsligning.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Man løser den ved hjælp af diskriminanten (dette spørgsmål kunne godt undværes pga. nr. 2 spørgsmål)

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

Der løses for rødderne

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

Som er løsningen.

Opgave 3.131

Der aflæses og ses, at der kan opstilles en lineære vækst (spm. 2.).

$$P(x) = 2x + 155$$

Da man skal bestemme træningen ved 31 grader, fås pulsen til at være

$$P(10) = 2 \cdot 10 + 155 = 175$$

Fordi differencen mellem 21 og 31 er 10.

Opgave 3.132

Der er givet en boks med nogle variabler.

x	2	5	6
y	3	7.5	9

Da der er tale om ligefrem proportionalitet, anvendes: $y = ax$

Man kender begge værdier i tredje kolonne.

$$9 = a \cdot 6 \Leftrightarrow a = \frac{9}{6} = 1.5$$

Da kan man bestemme værdierne i boksen ovenfor.

$$y = 1.5x$$

Der indsættes for x

$$3 = 1.5 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{3}{1.5} = 2$$

Nu for y

$$y = 1.5 \cdot 5 = 7.5$$

Opgave 3.133

Der er givet en funktion f.

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 10x$$

Stamfunktionen til f er F.

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\ln(e)} + 10 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + k \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + 5x^2 + k$$

Således fandt man F. Man skal nu finde k.

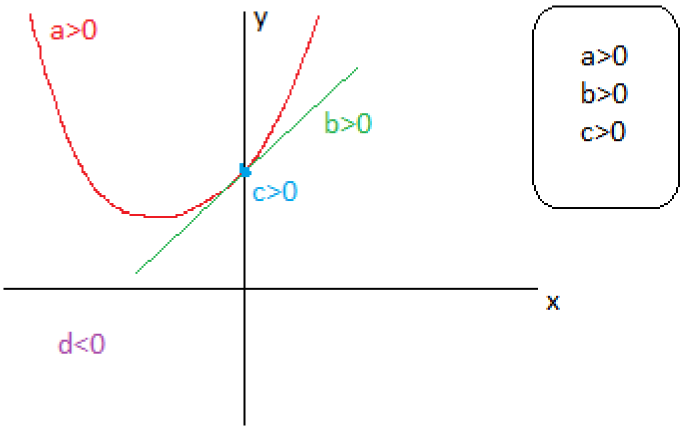
$$2 = \mathrm{e}^0 + 5 \cdot 0^2 + k \Leftrightarrow k = 1$$

Stamfunktionen er derfor

$$F(x) = \mathrm{e}^x + 5x^2 + 1$$

Opgave 3.134

Der skal tegnes en graf.



[August 2010, delprøve 2]

Opgave 3.135

Regressionsopgaven løses i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres og der laves lineære regression.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4]$

$$[0, 1, 2, 3, 4]$$

$L2 := [84, 123, 191, 259, 308]$

$$[84, 123, 191, 259, 308]$$

$LinReg(L1, L2)$

Lineær regression
y $=58.400\,x + 76.200.$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.992422743409183$

Det ses, at forklaringsgraden er høj. Tallene a og b blev bestemt til hhv.
$a = 58.4$ og $b = 76.2$
Samt funktionsforskriften

$$f(x) = 58.4x + 76.2$$

b) For hvert år der går, stiger væksten med 58.4 laks som fanges.

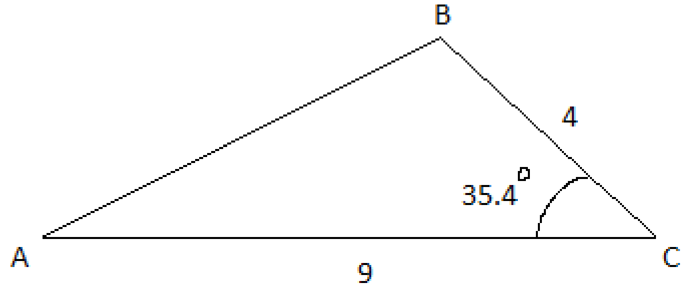
c) Der tjekkes om det passer med antallet af laks ifølge påstanden fra opgavekommissionen.
2007 svarer til $x = 5$ og 2008 svarer til $x = 6$.
Der undersøges nu.

$$f(5) = 58.4 \cdot 5 + 76.2 = 368.2$$
$$f(6) = 58.4 \cdot 6 + 76.2 = 426.6$$

Det ses, at påstanden i år 2007 og 2008 har en høj difference, så modellen vil være uanvendelig efter år 2006.

Opgave 3.136

Der er angivet en figur for en trekant.



a) Der ønskes bestemmelse af arealet af trekant ABC.
Der anvendes appelsin-formlen

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

Heri indsættes oplysningerne.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \sin(35.4^o) = 10.427$$

Som er arealet.

b) Længden $|AB| = c$ skal regnes. Her kan man anvende cosinusrelationerne.

$$|AB| = c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)}$$

Værdierne indsættes

$$|AB| = c = \sqrt{4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \cos(35.4^o)} = 6.189$$

Således fandt man længden af $|AB| = c$.

c) Til at finde vinkel A, anvendes sinusrelationerne. Man kender $c, \angle C$ og a

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Værdierne indsættes og der løses for variablen $\angle A$

$$\frac{\sin(A)}{4} = \frac{\sin(35.4^o)}{6.189} \Leftrightarrow$$

$$\sin(A) \cdot 6.189 = 4 \cdot \sin(35.4^o) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin(A) \cdot 6.189}{6.189} = \frac{4 \cdot \sin(35.4^o)}{6.189} \Leftrightarrow$$

$$\sin(A) = \frac{4 \cdot \sin(35.4^o)}{6.189} \Leftrightarrow$$

$$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{4 \cdot \sin(35.4^o)}{6.189}\right) = 21.986^o$$

Således fandt man vinkel A. Man kunne også bruge cosinusrelationerne.

$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9^2 + 6.189^2 - 4^2}{2 \cdot 9 \cdot 6.189}\right) = 21.981^o$$

Præcis det samme.

Opgave 3.137

Der er givet to funktioner.

$$f(x) = 6 \cdot x^{-0.5}, \qquad g(x) = -x + 7$$

a) Koordinatsættene kan bestemmes ved at løse en ligning for x.

$$6 \cdot x^{-0.5} = -x + 7$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$$

For at finde de tilsvarende y –værdier, indsættes x –værdierne på enten f eller g.

$$f(1) = 6 \cdot 1^{-0.5} = 6$$
$$f(4) = 6 \cdot 4^{-0.5} = 3$$

Derfor er koordinatsættet til skæringspunkterne

$$P = (1{,}6)\ og\ Q = (4{,}3)$$

b) Punkterne afgrænser et areal mellem f og g. Der anvendes integralregning.

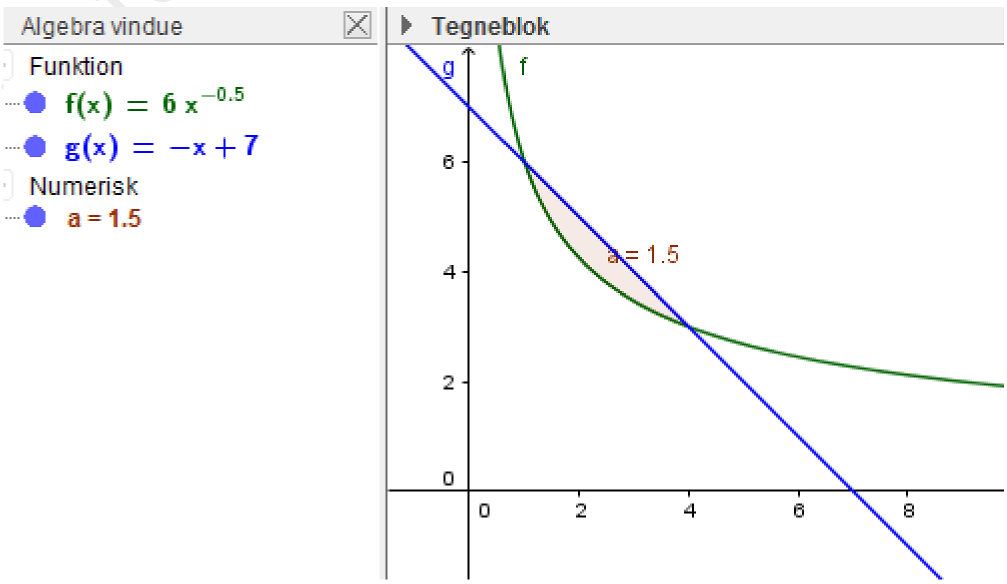
$$A = \int_1^4 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

Værdierne indsættes

$$A = \int_1^4 (-x + 7 - (6 \cdot x^{-0.5}))\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 7x - (12x^{0.5})\right]_1^4$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 - (12 \cdot 4^{0.5}) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - (12 \cdot 1^{0.5})\right)$$
$$= 1.5$$

Så arealet afgrænset mellem $g(x)$ og $f(x)$ er 1.5

Alternativt kunne man bruge CAS. Tegning ses:



Opgave 3.138

Der er givet en model og en tegning over et tagkonstruktion.

$$y = 131.8 \cdot x^{-2.5}$$

a) Afstanden kan bestemmes ved indsættelse af 8 på x

$$y = 131.8 \cdot 8^{-2.5} = 0.728$$

Afstanden vil være 0.728m eller 72.8 cm.

b) Et typehus A er 25% bredere end typehus B. Der undersøges for hvor mange procent kortere afstanden er i typehus A.

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Værdierne indsættes.

$$r_y = ((1 + 0.25)^{-2.5} - 1) \cdot 100 = -42.756\%$$

Så typehus A har en afstand der er 42.756% mindre end typehus B.

Opgave 3.139

Der er givet en funktion $f(x)$.

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{x}, \qquad x > 0$$

a) Der findes monotoniforhold for f, derfor differentieres den og sættes $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} + (-1) \cdot 4 \cdot x^{-1-1} = 4x^3 - 4 \cdot x^{-2} = 4x^3 - \frac{4}{x^2}$$

Dette sættes $f'(x) = 0$

$$4x^3 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 1$$

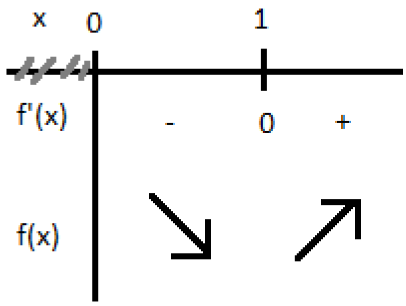
Da kan man afgøre, om f er voksende og aftagende ved at gøre prøve.

$$f'(0.5) = 4 \cdot 0.5^3 - \frac{4}{0.5^2} = -15.5$$

$$f'(1.5) = 4 \cdot 1.5^3 - \frac{4}{1.5^2} = 11.722$$

Således kan man tegne en monotonilinje over f og f'

Lokale ekstrema og monotonilinje findes på næste side.

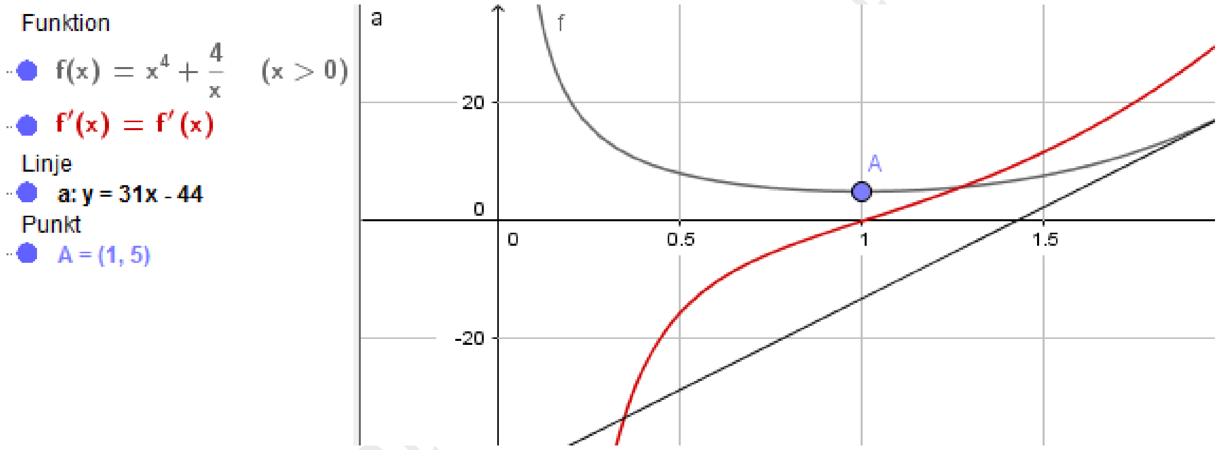


Bemærk, at $x > 0$.
Så f er aftagende i intervallet $]0;1]$ og voksende i intervallet $[1;\infty[$

Der undersøges for de lokale ekstrema. Den afledededes $x - værdi$ indsættes i f.

$$f(1) = 1^4 + \frac{4}{1} = 5$$

Da $x > 0$, må f have global minimum ved $A = (1{,}5)$.



b) Koordinatsættet kan findes ved at sætte linjen y lig med $f(x)$. Dette gøres sådan

$$31x - 44 = x^4 + \frac{4}{x}$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = -0.08573075 \quad \vee \quad x = 2$$

Da $x > 0$, skal den negative værdi forkastes. Derfra er det første punkt ved $x = 2$.
Indsættes dette i enten y eller $f(x)$ fås y-koordinaten.

$$y = 31 \cdot 2 - 44 = 18$$

Der prøves for $f(x)$

$$f(2) = 2^4 + \frac{4}{2} = 16 + 2 = 18$$

Dette passer. Koordinatsættet til røringspunktet mellem $f(x)$ og y er

$$B = (2{,}18)$$

Opgave 3.140

Opgaven omhandler optimering. Ved aflæsningen af grafen ses der et rektangel. Formlen for arealet er

$$A = l \cdot b$$

a) Det må betyde, at afstanden fra det første til det andet punkt på x −aksen må svare til b, så $2 - x$, da man kender punktet 2,0. Første led bekræftet.

Højden findes - eller det der svarer til l i formlen ovenfor. Da højden er angivet som $f(x)$, kan man anvende $x^3 + 1$ som værende højden, pga. dens røringspunkt på arealklodsen. Derfra må det betyde

$$A = l \cdot b = (x^3 + 1) \cdot (2 - x)$$

Som passer med påstanden fra opgavekommissionen

$$A(x) = (2 - x) \cdot (x^3 + 1)$$

Arealet kan bestemmes ved indsættelse af 1.5 i x.

$$A(1.5) = (2 - 1.5) \cdot (1.5^3 + 1) = 2.1875$$

b) For at bestemme det største mulige areal, differentieres funktionen $A(x)$.

$$A'(x) = (2 - x) \cdot (3x^2) + (-1) \cdot (x^3 + 1) = (2 - x) \cdot 3x^2 - x^3 - 1$$

Som er den afledede. Bemærk; anvendelse af produktreglen. Den afledede sættes lig 0.

$$(2 - x) \cdot 3x^2 - x^3 - 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

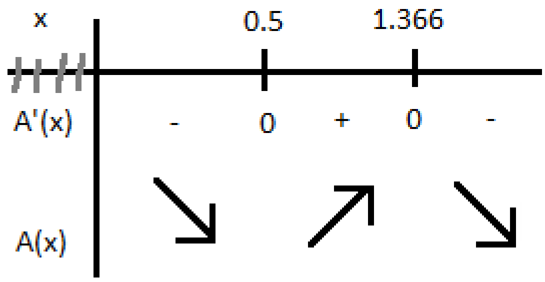
Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = -0.3660254 \quad \vee \quad x = 0.5 \quad \vee \quad x = 1.366025$$

Da arealet skal være $0 < x < 2$, forkastes den negative værdi. Der gøres prøve for at undersøge den største værdi for arealet.

$$A'(0.3) = (2 - 0.3) \cdot 3 \cdot 0.3^2 - 0.3^3 - 1 = -0.568$$
$$A'(1) = (2 - 1) \cdot 3 \cdot 1^2 - 1^3 - 1 = 1$$
$$A'(1.5) = (2 - 1.5) \cdot 3 \cdot 1.5^2 - 1.5^3 - 1 = -1$$

Efter udførslen af prøven, kan man tegne en monotonilinje.



Så nu undersøges der for det største areal ved indsættelse af de aflededes x −værdier.

$$A(0.5) = (2 - 0.5) \cdot (0.5^3 + 1) = 1.68$$
$$A(1.366) = (2 - 1.366) \cdot (1.366^3 + 1) = 2.25$$

Så det største areal fås ved $x = 1.366$

[December 2010, delprøve 1]

Opgave 3.141

Udtrykket

$$\frac{10 \cdot a \cdot b^5}{5 \cdot a \cdot b^2} = 2 \cdot b^3$$

MAT B, s. 30

Ligningen

$$\sqrt{x-2} = 3$$

Indsættelse af $x = 11$

$$\sqrt{11-2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$$

Det passer

Opgave 3.142

En andengradsligning er givet.

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Den løses mht. diskriminaten

$$d = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 + 9 = 25$$

Rødderne findes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$$

Så rødderne er

$$x = -4 \vee x = 1$$

Opgave 3.143

Integralet er givet

$$\int_1^2 (2x + 3x^2)\,dx = [x^2 + x^3] = 2^2 + 2^3 - (1^2 + 1^3) = 12 - 2 = 10$$

Opgave 3.144

Ved aflæsning af graf 1 vælges der punkterne $x_1 = 2, y_1 = 3$ og $x_2 = 4, y_2 = 2$

Derved kan man finde tallene a og b.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{4-2} = -\frac{1}{2}$$
$$b = y_1 - ax_1 = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 4$$

Man kunne også bare aflæse a og b værdien. Linjen er derfor

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Ved graf 2 aflæses tallet c til at være 2. Så den eksponentielle voksende funktion er

$$y = 2 \cdot 1.20^x$$

Opgave 3.145

Der er givet en funktion

$$f(x) = x^4 + 5x + 9$$

Den differentieres.

$$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} + 5 \cdot x^{1-1} + 0 = 4x^3 + 5$$

Som er den afledede af f.

Opgave 3.146

Der ses en figur. Man kan bestemme arealet ved hjælp af formlen.

$$A = l \cdot b$$

Men da der er et lille hul, regnes det således:

$$A = 10^2 - 2^2 = 96$$

Således fandt man arealet af det grå område. Endelig skal man bestemme en funktionsforskrift

$$A(x) = 10^2 - x^2$$

[December 2010, delprøve 2]

Opgave 3.147

En pose (dyrt) hundemad samt oplysninger er givet. Der udføres potens regression i Maple 2016. Oplysningerne defineres.

a)

$Kg := [5, 10, 15, 30, 40, 60]$

$$[5, 10, 15, 30, 40, 60]$$

$Mængde := [85, 140, 190, 320, 395, 545]$

$$[85, 140, 190, 320, 395, 545]$$

$PowReg(Kg, Mængde)$

Potens Regression

$$y = 25.260 \cdot x^{0.74723}$$

$$\text{Forklaringsgrad } R^2 = 0.99983$$

Det ses, at tallene a og b blev bestemt til
$a = 0.74723$ og $b = 25.260$ samt forskriften $f(x) = 25.260 \cdot x^{0.74723}$
Blev bestemt.

b) En hundeejer har to hunde, hvor den ene vejer 30% mere end den anden. Vedkommende ønsker at vide, hvor meget foder den tunge hund skal have.
Formlen anvendes

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

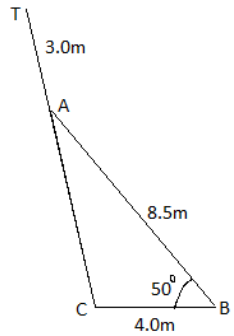
Værdierne indsættes

$$r_y = ((1 + 0.3)^{0.74723} - 1) \cdot 100 = 21.658\%$$

Den tunge hund skal have 21.658% mere end den lille hund.

Opgave 3.148

Der er en figur der viser et træ efter en hård vind. Figuren ses nedenfor i en rå udgave.



a) For at bestemme $|AC|$ anvendes cosinusrelationerne.

$$|AC| = \sqrt{|CB|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |AB| \cdot \cos(B)}$$

Værdierne indsættes

$$|AC| = \sqrt{4^2 + 8.5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8.5 \cdot \cos(50^o)} = 6.673$$

Sådan fandt man $|AC|$.

b) For at finde vinkel C, kan man anvende enten sinusrelationerne eller cosinusrelationerne. Der er frit valg på alle hylder.

$$\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AC| \cdot |BC|}\right)$$

Værdierne indsættes

$$\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{6.673^2 + 4^2 - 8.5^2}{2 \cdot 6.673 \cdot 4}\right) = 102.683^o$$

Der prøves for sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(C)}{|AB|} = \frac{\sin(B)}{|AC|}$$

Værdierne indsættes

$$\frac{\sin(C)}{8.5} = \frac{\sin(50^o)}{6.673}$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for C vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\angle C = 77.36404^o$$

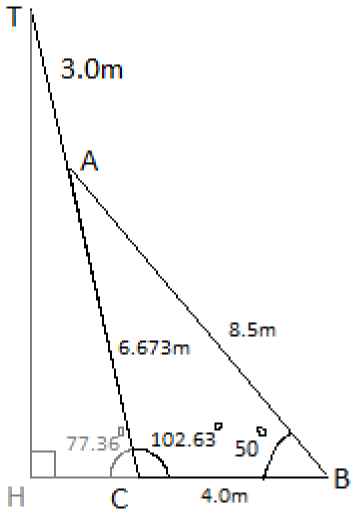
Her sker det farlige. Det ses, at vinkel C skal være stump, men i dette tilfælde fås den spidse. Derfra trækkes den spidse vinkel fra 180^o

$$180^o - 77.36404^o = 102.63596^o$$

Som passer meget godt.

Fortsættes næste side

c) Der laves en ny tegning.



Der regnes nu for den ukendte højde. Man anvender formlen

$$|TH| = \sin(C) \cdot |TC|$$

Værdierne indsættes

$$|TH| = \sin(77.36404^o) \cdot (3 + 6.673) = 9.438$$

Så højden $|TH|$ er $9.44m$

Opgave 3.149

En funktion er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \ln(x), \qquad x > 0$$

a) Der bestemmes en ligning til tangenten for grafen i punktet $P(4, f(4))$
Der anvendes $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Funktionen differentieres.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Punktet P indsættes i f og f'

$$f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \ln(4) = 5.386$$

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} = 2.25$$

Således indsættes disse værdier samt P i tangentens ligning.

$$y = 2.25(x - 4) + 5.386 \Leftrightarrow y = 2.25x - 3.614$$

Fortsættes næste side

b) For at bestemme koordinatsættet til de punkter ved en tangenthældning på 1.5 sættes den lig med den afledede funktion.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} = 1.5$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 2$$

Det sker ved disse punkter. Indsættes de i f fås y −koordinaten.

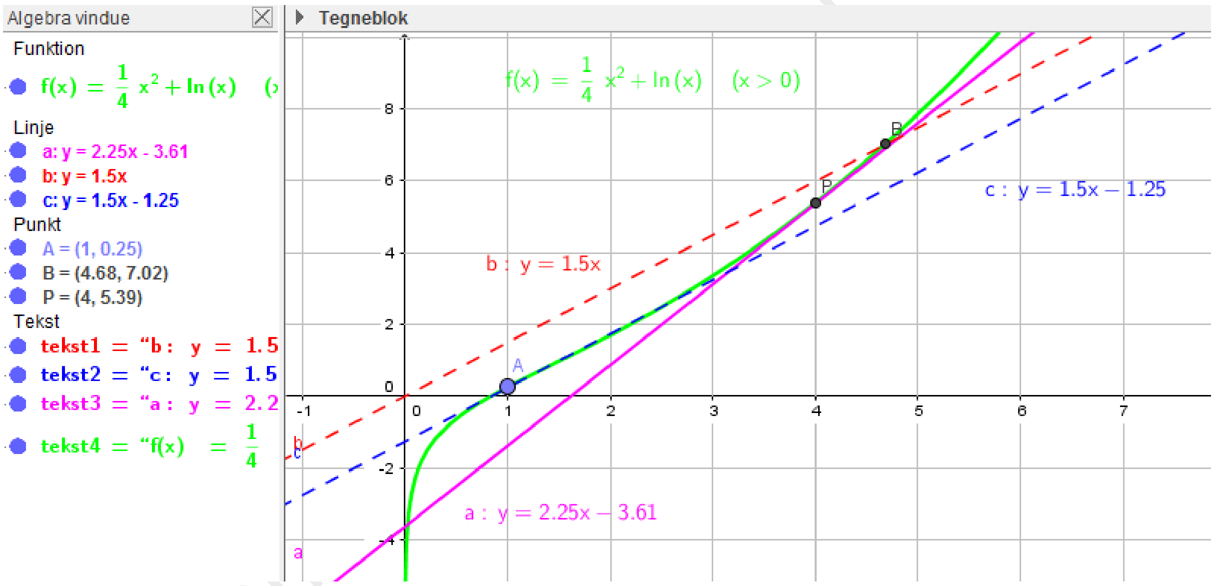
$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \ln(1) = \frac{1}{4}$$

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \ln(2) = 1.693$$

Så koordinaterne til de punkter ved en tangenthældning på 1.5 er

$$A = (1{,}0.25) \quad og \quad B = (2{,}1.693)$$

Grafisk ses det, hvor galt det kan gå.



Opgave 3.150

Der er givet en model over lobbyister i USA.

$$f(x) = 490x + 10400$$

a) Tallet a fortæller, at for hvert år der går efter 1998, stiger antallet af lobbyister med 490 personer. Tallet b fortæller, at i begyndelsen dvs. 1998 var antallet af lobbyister 10400 personer.

Lobbyisternes budget kan beskrives ved modellen

$$g(x) = b \cdot a^x$$

b) Da får man oplyst, at $g(0) = 1450$ og $g(9) = 2750$. Der regnes for tallene a og b.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[9-0]{\frac{2750}{1450}} = 1.0737$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{1450}{1.0737^0} = 1450$$

Fortsættes næste side

Så modellen over lobbyisternes budget er

$$g(x) = 1450 \cdot 1.0737^x$$

Lobbyisterne har et gennemsnitlig budget $h(x)$.

c) Modellen er givet:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1450 \cdot 1.0737^x}{490x + 10400}$$

Hvor x er antal år efter 1998.
Der skal nu løses en ligning for det år, deres budget kom over 0.175 USD.

$$0.175 = \frac{1450 \cdot 1.0737^x}{490x + 10400}$$

Ved udregning i Maple 2016 fås:

$$0.175 = \frac{(1450 \cdot 1.0737^x)}{(490\,x + 10400)}$$

$$0.175 = \frac{1450\ 1.0737^x}{490\,x + 10400}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = -15.67941865], [x = 7.404456975]]$$

Den negative værdi forkastes.

$$1998 + 7.4 = 2005.4$$

Så i løbet af år 2005 vil lobbyisterne have et budget på 0.175 mio. USD.

Opgave 3.151

Der er givet en række oplysninger. Disse nedskrives her:

	$Befolkningstal$	$Forventet\ årlige\ vækstrate$
$Sverige$	$9.348mio$	0.3%
$Ungarn$	$10.014mio$	-0.3%

a) Der opstilles to eksponentielle modeller, således opgaven kan løses.

$$a = 1 + r$$

Anvendes for begge vækstrater

$$a = 1 + \left(\frac{0.3}{100}\right) = 1.003$$
$$a = 1 + \left(\frac{-0.3}{100}\right) = 0.997$$

Begge begyndelsespunkter kendes. Modellerne opstilles for hhv. Sverige og Ungarn.

$$f(x) = 9.348 \cdot 1.003^x$$
$$g(x) = 10.014 \cdot 0.997^x$$

For at bestemme befolkningstallet i Sverige i år 2018, dvs. den fordoblede tid, kan man indsætte 9 i $f(x)$

$$f(9) = 9.348 \cdot 1.003^9 = 9.6034$$

Så i år 2018 vil antallet af svenskere være 9.60mio.

b) Der løses en ligning ved at sætte $f(x) = g(x)$.

$$9.348 \cdot 1.003^x = 10.014 \cdot 0.997^x$$

$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 11.47025$$

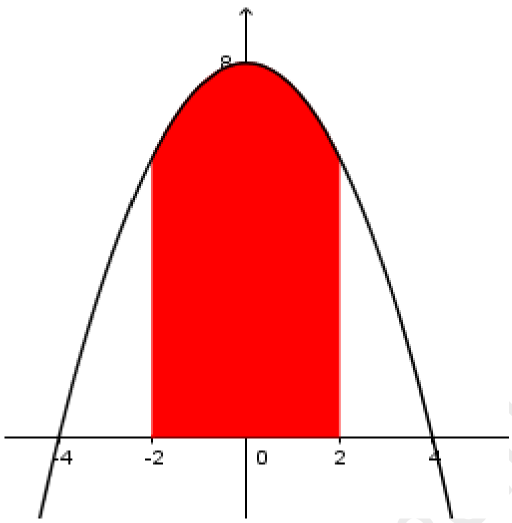
Dvs. at

$$2009 + 11.47 = 2021.47$$

Så i løbet af år 2021 vil Sverige overstige Ungarn ift. befolkningstallet.

Opgave 3.152

Der er givet en figur og en model.



$$f(x) = 8 - 0.5x^2, \qquad -4 \le x \le 4$$

a) Arealet bestemmes ved at integrere $f(x)$.

$$A = \int_{-2}^{2} 8 - 0.5x^2\,dx = \left[8x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^{2} = 8 \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \left(8(-2) - \frac{1}{6}(-2)^3\right)$$

$$= \frac{88}{3} = 29.333$$

Som er arealet afgrænset mellem -2 og 2.

b) Opgaven løses v.h.a. Maple 2016.

$$f(x) := 8 - 0.5x^2$$

$$x \to 8 + (-1) \cdot 0.5x^2$$

$$\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 40$$

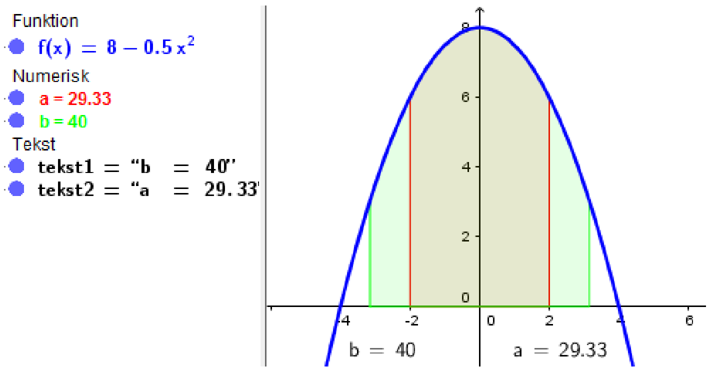
$$16.\,k - 0.3333333333\,k^3 = 40$$

$$\xrightarrow{\text{solve for k}}$$

$$[[k = 3.153069467], [k = 4.790852070], [k = -7.943921537]]$$

Da k ligger i intervallet $0 < k < 4$, accepteres den første værdi.

Det vises også grafisk:



Slut på kapitel 3 - eksamensopgaver

Kapitel 4 (appendiks 1) handler om ekstra opgaver der har været brugt til matematik B eksamen fra maj 2011 til december 2011. Disse findes ikke i bogen, men på UVM.dk

Opgaverne i delprøve 1 løses pr. håndkraft hvor opgaver fra delprøve 2 løses via CAS.

Appendiks 1, eksamensopgaver 2011

HF matematik B − niveau, kapitel 4 − eksamensopgaver

Delprøve 1: WordMat - Delprøve 2: Maple 2016/WordMat

[Maj 2011, delprøve 1]

Opgave 4.001

Der er givet en funktion f.

$$f(x) = x + 4$$

Der er ligeledes oplyst punkter og hældningskoefficienten for $g(x)$. Der opstilles en lineær model ud fra $P(3,4)$ og $a = -2$

$$y = ax + b$$

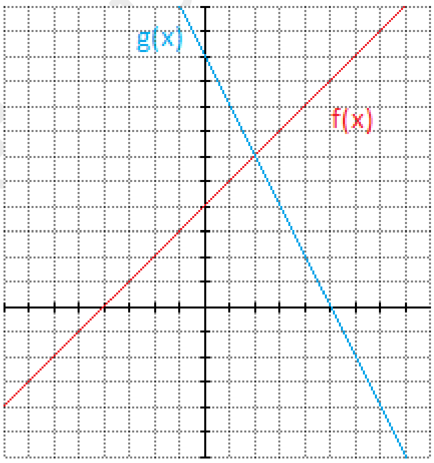
Værdierne indsættes

$$4 = -2 \cdot 3 + b \Leftrightarrow 4 = -6 + b \Leftrightarrow b = 10$$

Således kan man opstille $g(x)$

$$g(x) = -2x + 10$$

Graferne tegnes via Paint



Opgave 4.002

Der er givet en formel for strækningens gennemsnitlige stigning

$$s = \frac{h \cdot 100}{L}$$

Man skal isolere h, når man kender $s = 5$ og $L = 8km$

Fortsættes næste side

$$5 = \frac{h \cdot 100}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot 5 = 8 \cdot \left(\frac{h \cdot 100}{8}\right) \Leftrightarrow 40 = h \cdot 100 \Leftrightarrow \frac{40}{100} = \frac{h \cdot 100}{100} \Leftrightarrow h = \frac{40}{100} = 0.4$$

Så højdeforskellen er 0.4 km eller blot 400m.

Opgave 4.003

Der er givet en andengradsligning. Den kan løses på to måder. Først diskriminant metoden:

$$3x^2 + 6x + 3 = 0$$

Der anvendes diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 36 = 0, \qquad d = 0$$

Her løses ligningen for een rod.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 3} = -1$$

Nu prøves den nemme metode

$$3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{0} \Leftrightarrow x = -1$$

Opgave 4.004

Der aflæses på grafen for følgende:

$$f(x) = 0$$

Dvs. nulpunkterne for f. Der aflæses til at f har rødderne

$$x = -3 \lor x = 8$$

Der aflæses nu for f'. Det ses, at rødderne for f' er

$$x = 3$$

Som fortæller hvornår f er voksende og / eller aftagende.

Opgave 4.005

Der er givet en række oplysninger. Der er tale om en eksponentiel udvikling.

$$a = 1 + r, \qquad r = 2\%$$
$$a = 1 + \left(\frac{2}{100}\right) = 1.002$$

Således kan man opstille en forskrift.

$$f(x) = 4770 \cdot 1.002^x$$

Som beskriver familiens el-forbrug.

Opgave 4.006

Der er givet to funktioner.

$$f(x) = 3x^2 + \ln(x) + 3 \ \wedge g(x) = 6x + \frac{1}{x}$$

Der anvendes integral over $g(x)$

$$\int 6x + \frac{1}{x}dx = 3x^2 + \ln(x) + k$$

Dvs. det passer formentligt. Alternativt kunne man differentiere f.

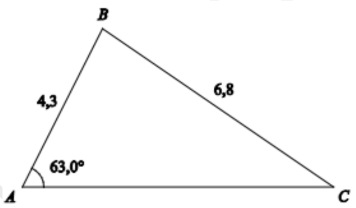
$$f'(x) = 6x + \frac{1}{x}$$

Det passer.

[Maj 2011, delprøve 2]

Opgave 4.007

Der er givet en trekant. Den ses nedenfor:



a) Vinkel C bestemmes. Der anvendes sinusrelationer.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Værdierne indsættes

$$\frac{\sin(63^o)}{6.8} = \frac{\sin(C)}{4.3}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for C vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$C = 34.29338^o$$

Her ryger man ikke i fælden. Vinkel C er spids.

b) Længden $|AC|$ bestemmes.
Først findes vinkel B.

$$\angle B = 180^o - \angle A - \angle C = 180^o - 63^o - 34.29338^o = 82.70662^o$$

Således kan man - valgfrit - anvende sinusrelationerne eller cosinusrelationerne.

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)}$$

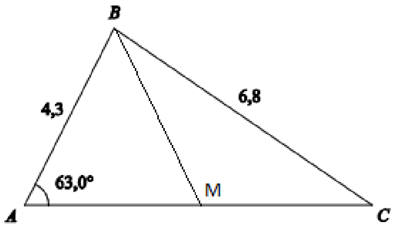
Værdierne indsættes.

$$b = \sqrt{6.8^2 + 4.3^2 - 2 \cdot 6.8 \cdot 4.3 \cdot \cos(82.70662^o)} = 7.57$$

Således blev længden $|AC| = b$ fundet. Man kunne som nævnt før, anvende sinusrelationerne hvis man havde lyst til det.

Fortsættes næste side

c) Da man nu laver et nyt linjestykke - se figur - anvendes cosinusrelationerne.



Man finder v.h.a. cosinusrelationerne. Værdierne indsættes.

$$a = \sqrt{\left(\frac{7.57}{2}\right)^2 + 4.3^2 - 2 \cdot \left(\frac{7.57}{2}\right) \cdot 4.3 \cdot \cos(63^o)} = 4.2471$$

Således fandt man linjen $|BM| = a$.

Opgave 4.008[2]

Der er givet en potensmodel ud fra dyrs vægt og vægten af hjernen.

$$y = 0.635 \cdot x^{0.822}$$

a) Man ønsker at vide vægten af hjernen af et dyr på 100g.

$$y = 0.635 \cdot 100^{0.822} = 2.797$$

Så et dyrs vægt på 100 gram har en hjerne der vejer 2.8 gram.

Der løses en ligning.

$$75 = 0.0635 \cdot x^{0.822}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 5464.823$$

Et dyr skal veje mindst 5464.8 gram eller 5.46kg for at vægten af dets hjerne kommer over 75 gram.

b) Man anvender formlen. $r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$. Der er to dyr. Det ene dyr vejer 25% mere end det andet. Man ønsker at vide differencen i mellem dyrenes hjerne i procent.

$$r_y = ((1 + 0.25)^{0.822} - 1) \cdot 100 = 20.132\%$$

Så dyret der vejer 25% mere, har en hjerne som vejer 20.1% mere end det lille dyr.

[2] Det viser sig så tilsyneladende, at modellen i denne opgave har eksisteret før som værende $y = 0.635 \cdot x^{0.822}$. I den nye version af eksamenssættet står der $y = 0.0635 \cdot x^{0.822}$

Opgave 4.009

Der er givet en figur og en parabel.

$$y = -\frac{1}{35}x^2 + 35$$

a) Højden og bredden bestemmes meget enkelt. Da b værdien er 0, er der tale om en symmetriparabel. Dvs. at den skærer $c = 35$ (aflæst af parablen) så derfor er kontorbygningens højeste punkt 35m fra jordoverfladen.

Bredden kan bestemmes ved at regne nulpunkterne og lægge dem numerisk sammen.

$$0 = -\frac{1}{35}x^2 + 35$$

Løses mht. diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{35}\right) \cdot 35 = 4$$

Endelig kan man regne x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{35}\right)} = \begin{matrix} -35 \\ 35 \end{matrix}$$

Derfra tages rødderne og lægges sammen numerisk

$$|-35| + 35 = 70$$

Så bredden af bygningen er 70 meter.

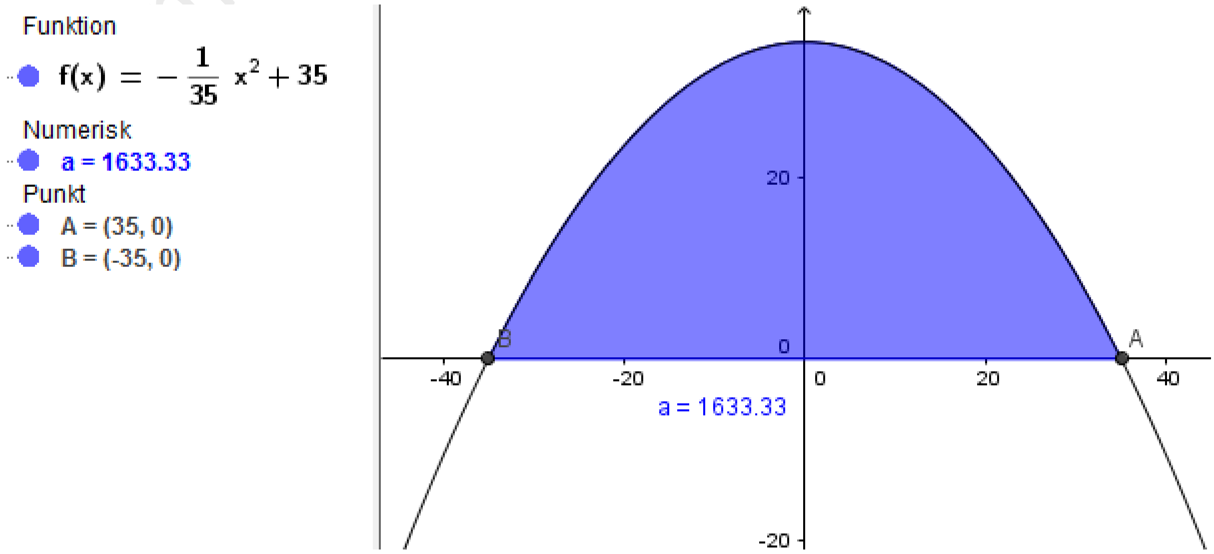
b) Arealet af tværsnittet af bygningen bestemmes ved integral og rødderne.

$$A = \int_{-35}^{35} -\frac{1}{35}x^2 + 35\,dx = \left[-\frac{1}{105}x^3 + 35x\right]_{-35}^{35}$$

$$= -\frac{1}{105} \cdot 35^3 + 35 \cdot 35 - \left(-\frac{1}{105} \cdot (-35)^3 + 35 \cdot (-35)\right)$$

$$= 1633.333$$

Så arealet af tværsnittet af bygningen er $1633.333m^2$



Opgave 4.010

Der er givet en model (logistisk vækst) over et egetræ. Modellen er

$$f(x) = \frac{2200}{1 + 200 \cdot e^{-0.10 \cdot (x-25)}}$$

a) Man ønsker at bestemme træets alder.

$$f(70) = \frac{2200}{1 + 200 \cdot e^{-0.10 \cdot (70-25)}} = 682.848$$

Så når træet er 70 år, produceres der 682.8 agern årligt.

b) Der løses en ligning for træets alder, når der produceres 1000 agern.

$$1000 = \frac{2200}{1 + 200 \cdot e^{-0.10 \cdot (x-25)}}$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$x = 76.15996$$

Så træet skal være 76.15 år gammel for, at der produceres 1000 agern.

Opgave 4.011

Der udføres lineær regression i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres fra eksamenssættet.

$Dist := [2300, 2500, 2700, 2900, 3100, 3300, 3500, 3700]$

$[2300, 2500, 2700, 2900, 3100, 3300, 3500, 3700]$

$Kondi := [40, 45, 49, 54, 58, 62, 67, 71]$

$[40, 45, 49, 54, 58, 62, 67, 71]$

$LinReg(Dist, Kondi)$

Lineær regression
y =0.022024 x − 10.321.
Forklaringsgrad $R^2 = 0.999240898075968$

Det ses, at forklaringsgraden er høj. Tallene a og b blev bestemt til hhv. $a = 0.022024 \; og \; b = -10.321$ samt forskriften blev bestemt tiæ

$$f(x) = 0.022024 \cdot x - 10.321$$

b) En mand kan løbe 450 meter længere end første gang han tog testen. Der indsætter man 450 på x og undersøger konditallet ved den lineære vækstformel.

$$\Delta K = a \cdot \Delta x$$

Det ses, at $a = 0.022024$ og $\Delta x = 450$

$$\Delta K = 0.022024 \cdot 450 = 9.9108$$

Så hans kondital er steget med 9.91.

Opgave 4.012

Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$$

Er givet.

a) Der ønsket bestemt monotoniforholdene for f.
Funktionen differentieres.

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Den sættes lig 0 og der løses v.h.a. nulreglen.

$$0 = x(x^2 - 3x + 2)$$

Hvor den første rod er $x = 0$
Resten løses som en andengradsligning.

$$d = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1, \qquad d > 0$$

Der løses for rødderne

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Så alle rødderne er

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$$

Der gøres prøve således man kan se grafen f 's forløb.

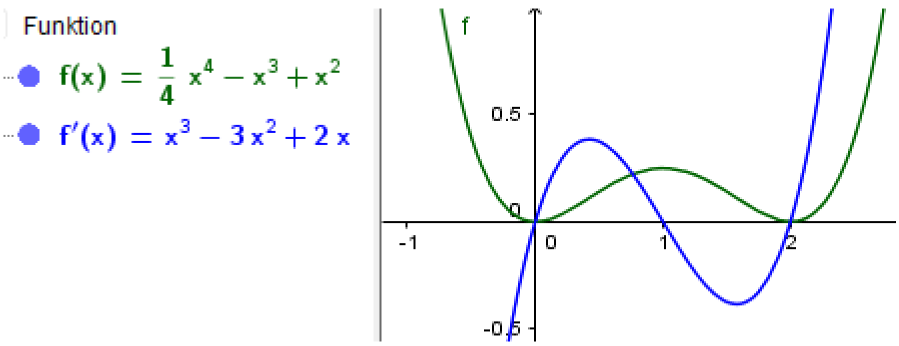
$$f'(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -6$$
$$f'(0.5) = 0.5^3 - 3 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 0.5 = 0.375$$
$$f'(1.5) = 1.5^3 - 3 \cdot 1.5^2 + 2 \cdot 1.5 = -0.375$$
$$f'(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 6$$

Så kan man tegne en monotonilinje.

x		0		1		2	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

Så funktionen f er:

$$aftagende\ i\ intervallerne\ ]-\infty; 0]\ og\ [1; 2]$$
$$voksende\ i\ intervallerne\ [0; 1]\ og\ [2; \infty[$$



Fortsættes næste side

b) Der skal bestemmes en ligning for tangenten i punktet $P\big(3, f(3)\big)$.
Desuden er $f'(3) = 6$ for det blev bestemt i forrige delopgave, så det er kun $f(3)$ der skal bestemmes.

$$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 3^3 + 3^2 = 2.25$$

Endelig kan man anvende tangentligningen samt indsætte oplysningerne.

$$y = 6(x - 3) + 2.25 \Leftrightarrow y = 6x - 15.75$$

c) En hældningskoefficient oplyses til at være $a = 0.375$. Den sættes lig med den afledede funktion.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.375$$

$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 0.3486122 \quad \vee \quad x = 0.5 \quad \vee \quad x = 2.151388$$

Så ved en hældningskoefficient på 0.375 kan man se, at funktionen tangerer tre steder.

[August 2011, delprøve 1]

Opgave 4.013

Der er givet et udtryk

$$y \cdot (2x - y) + (y - x)^2 = 2xy - y^2 + y^2 + x^2 - 2xy = x^2$$

Opgave 4.014

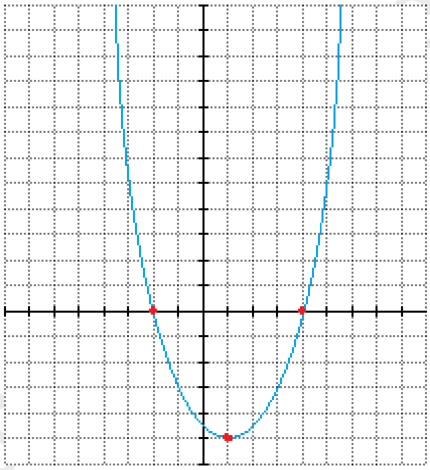
Der er givet en andengradspolynomium.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Den har rødderne

$$x = -2 \vee x = 4$$

Samt toppunktet $T_{xy} = (1, -5)$. Der tegnes i Paint.



Ved aflæsning ses det, at $a > 0 \; samt \; c < 0$.

Opgave 4.015

Der er givet et skema med oplysninger.

x	0	3	6
$f(x)$	5	10	20

Desuden ved man, at $f(0) = 5$. Da fordoblingskonstanten er 3, dvs.$T_2 = 3$, ved man, at når man går 3 ud af x −aksen, er $f(x)$ værdierne fordoblet. Dvs. fra 0 til 3 fås 10. Da 5 er fordoblet pga. x-værdien. Tilsvarende fra 3 til 6 ud af x-aksen. Der vil $f(x)$ være fordoblet fra 10 til 20.

Opgave 4.016

Der aflæses og ses, at der er tale om en lineære funktion.

$$y = ax + b$$

Tallene a og b udregnes.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{80 - 30}{25 - 0} = \frac{50}{25} = 2$$

Hermed regnes b

$$b = y_1 - ax_1 = 30 - 2 \cdot 0 = 30$$

Som man egentlig også kan se på grafen….

Det passer, der opstilles en forskrift.

$$f(x) = -2x + 30$$

Der beskriver udviklingen af internationalt gods.

Opgave 4.017

Der aflæses på figuren, at

$$f(1) = -3$$

Og differentialkvotienten til f

$$f'(1) = 0$$

Fordi den aflededes nulpunkter bestemmer hvornår grafen for f er voksende og / eller aftagende.

Opgave 4.018

To funktioner er givet.

$$f(x) = 3x + 4, \qquad g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 3$$

Der skal undersøges om $g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Dette udføres på to måder.

1) $g'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{2-1} + 4 \cdot x^{1-1} = 3x^2 + 4$
2) $F(x) = 3 \cdot \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 4 \cdot x + k = \frac{3}{2}x^2 + 4x + k$

Det passer. $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Der bestemmes arealet af $f(x)$ i $x = 0$ og $x = 2$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \left(\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 \cdot 0\right) = 14$$

Så arealet af $f(x)$ i $x = 0$ og $x = 2$ er 14 …

[August 2011, delprøve 2]

Opgave 4.019

Der er givet en tabel med oplysninger. Der er ej nødvendighed for lineær regression.

a) Der regnes for tallene a og b.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{655 - 790}{60 - 30} = -\frac{9}{2} = -4.5$$

Hermed regnes b

$$b = y_1 - ax_1 = 790 - (-4.5) \cdot 30 = 925$$

Så regneforskriften er

$$f(x) = -4.5x + 925$$

b) Pr. minut svarer til 1. Der anvendes formlen for lineær vækst.

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

Her indsættes værdierne.

$$\Delta y = -4.5 \cdot 1 = -4.5$$

Så patienten får 4.5mL saltvand pr. minut.

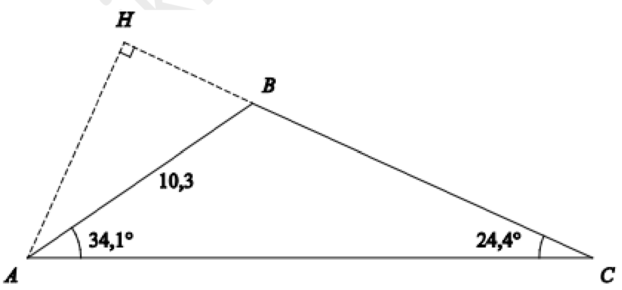
Mængden af saltvand var i begyndelsen, dvs. $x = 0$

$$f(0) = -4.5 \cdot 0 + 925$$

Så mængden må have været det samme som begyndelsespunktet, nemlig 925mL.

Opgave 4.020

Der er givet en trekant.



a) Man ønsker at vide hvad $|BC|$ er for en størrelse. Man skal derfor anvende sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{|BC|} = \frac{\sin(C)}{|AB|}$$

Værdierne indsættes

$$\frac{\sin(34.1)}{|BC|} = \frac{\sin(24.4)}{10.3}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for |BC| vha. CAS-værktøjet WordMat.*

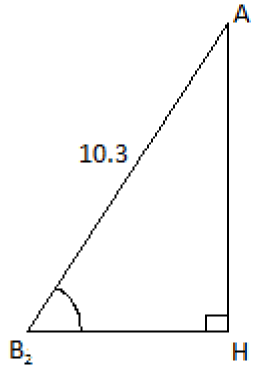
$$|BC| = 13.9785$$

Så $|BC|$ er 13.9785.

B)

Fortsættes næste side

b) Nu skal man finde højden h. Der tegnes en ny figur.



Hvis man bemærker, så mangler man vinkel B i denne, men også forrige trekant. Ved udregning af vinkel B i forrige trekant kan man finde vinkel B i denne trekant. Der startes med den store trekant:

$$\angle B_1 = 180^o - \angle A - \angle C = 180^o - 34.1^o - 24.4^o = 121.5^o$$

Nu kender man vinkel B for den store trekant. Hvis man tager vinkelsummen og trækker fra 121.5^o fås vinkel B i den lille trekant.

$$\angle B_2 = 180^o - \angle B_1 = 180^o - 121.5^o = 58.5^o$$

Så kan man endelig regne højden b eller $|AH|$ om man vil. Formlen anvendes

$$b = \sin(B_2) \cdot h = \sin(58.5^o) \cdot 10.3 = 8.782$$

Sådan fandt man højden $|AH|$

Opgave 4.021

Der er givet en model der beskriver antallet af danske brugere på Facebook.

$$y = 300841 \cdot 1.147^x$$

a) Tallene a og b fortæller, at i december 2007 var antallet af Facebook brugerne på 300841 og at dette forventes stigende med 14.7% for hver måned der går. Udregning af tallet a.

$$1.147 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.147 \cdot 100\% = 14.7\%$$

b) Der løses en ligning mht. x.

$$1000000 = 300841 \cdot 1.147^x \Leftrightarrow$$
$$\frac{1000000}{300841} = \frac{300841 \cdot 1.147^x}{300841} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1000000}{300841} = 1.147^x \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\frac{1000000}{300841}\right) = x \cdot \ln(1.147) \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{1000000}{300841}\right)}{\ln(1.147)} = 8.758$$

Så ca. 9 måneder efter december 2007 så ca. august 2008 vil antallet af Facebook brugere være 1 mio.

Fortsættes næste side

c) Der indsættes 22 på x.

$$y = 300841 \cdot 1.147^{22} = 6147976.764$$

Så der vil cirka være 6.14 mio. brugere i oktober 2009.

Ifølge opgavekommissionen vil antallet være 2.1 mio, hvilket er en kæmpe difference. Derfor kan modellen slet ikke bruges (for ikke at nævne de dansker som ikke bruger Facebook og antallet af danskere…)

Opgave 4.022

Der er givet en funktion.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 2$$

a) Der differentieres således man kan finde monotoniforhold for f.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$$

Den afledede sættes lig 0 og løses.

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

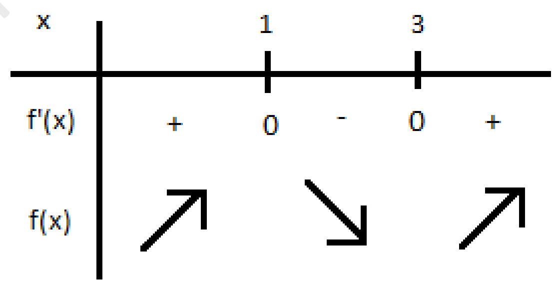
Nu kender man rødderne. Så gør man prøve.

$$f'(0) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$f'(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f'(4) = \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Så kan man tegne en monotonilinje.



Så f er voksende i intervallet

$$]-\infty; 1] \; og \; [3; \infty[$$

Hvor f er aftagende i intervallet

$$[1; 3]$$

b) Der skal bestemmes en ligning for $tangenten\ t$ i punktet $P(0,2)$

$$t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

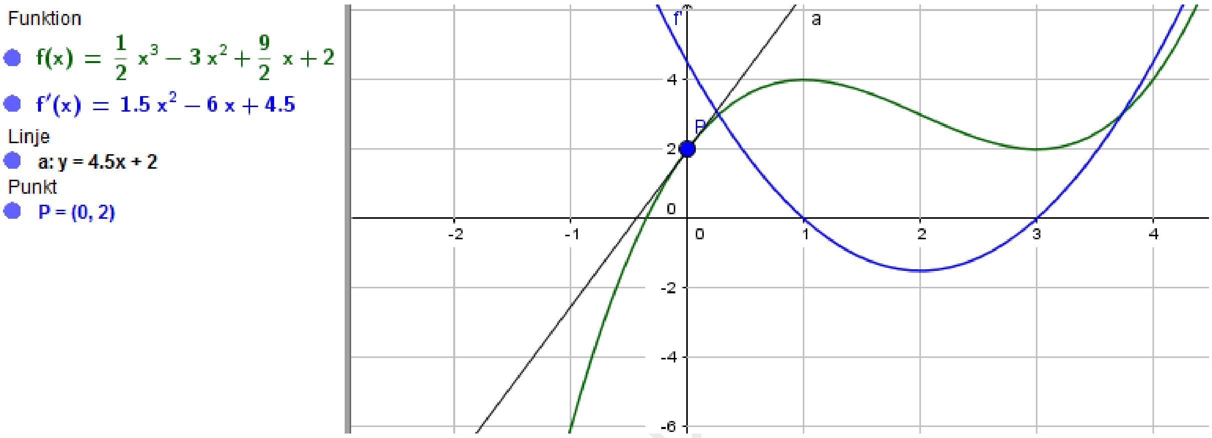
Så indsætter man punktet i den afledede af f og f. Bemærk, at $f'(0) = 4.5$.

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + \frac{9}{2} \cdot 0 + 2 = 2$$

Så har man tangentligningen t

$$t = 4.5(x - 0) + 2 \Leftrightarrow t = 4.5x + 2$$

Den tegnes.



Den rette linje repræsenterer tangenten t...

c) Da tangenten t er parallel et andet sted, må hældningskoefficienten være den samme. Derfor løses en ligning for $f'(x) = a$, hvor a stammer fra $y = ax + b$.

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Da $x = 0$ er et kendt punkt (den fra delopgave b) kan man kun konkludere, at den parallelle tangent ligger i $x = 4$. Ved indsættelse af $x = 4$ i f fås y −koordinaten således man kan opstille den parallelle tangentlinje.

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + \frac{9}{2} \cdot 4 + 2 = 4$$

Det er svaret på c, men linjen kan stadig opstilles.

$$4 = 4.5 \cdot 4 + b$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for b vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$b = -14$$

Så den anden tangentligning er

$$y = 4.5x - 14$$

Opgave 4.023

Der er givet oplysninger ifm. en lastbils fart.

b) Man kan bestemme tallene a og b ved at anvende oplysningerne. Der er givet $r_x = 20\%$ og $r_y = 44\%$. Formen $F_y = F_x^a$ anvendes.

$$\left(1 + \left(\frac{44}{100}\right)\right) = \left(1 + \left(\frac{20}{100}\right)\right)^a \Leftrightarrow$$

$$1.44 = 1.2^a$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$a = 2$$

Så kan man regne b.

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{26}{60^2} = 0.0072222222222222$$

Således fandt man tallene a og b. Modellen er

$$f(x) = 0.0072222222222222 \cdot x^2$$

Som angiver lastbilens bremselængde ud fra hastigheden.

Opgave 4.024

Der er givet to funktioner.

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = -3x^2 + 6x$$

a) Der løses en ligning.

$$e^x = -3x^2 + 6x$$

Ligningen løses numerisk for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

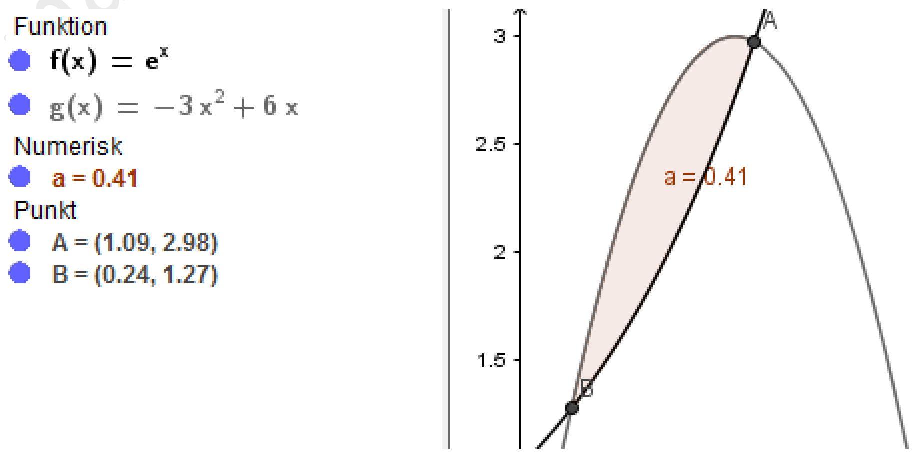
$$x \approx 0{,}2412329 \quad \vee \quad x \approx 1{,}090406$$

Så kan man bestemme arealet af området.

$$A \int_{0.24}^{1.09} g(x) - f(x)\,dx = [e^x - (-x^3 + 3x^2)]_{0.24}^{1.09} =$$

$$-1.09^3 + 3 \cdot 1.09^2 - e^{1.09} - (-0.24^3 + 3 \cdot 0.24^2 - e^{0.24}) = 0.4072$$

Som er arealet mellem $f(x)$ og $g(x)$.



Opgave 4.025

Der er givet en model over floder. (Hack's lov)

$$\log_{10}(y) = 0.59 \cdot \log_{10}(x) + 0.18$$

a) Her er x arealet og y er det længste flodløb.
Der indsættes 21.5 på $\log_{10}(y)$ og isoleres for x.

$$\log_{10}(21.5) = 0.59 \cdot \log_{10}(x) + 0.18 \Leftrightarrow$$
$$1.3324 = 0.59 \cdot \log_{10}(x) + 0.18 \Leftrightarrow$$
$$1.3324 = \log_{10}(x^{0.59}) + 0.18 \Leftrightarrow$$
$$1.3324 - 0.18 = \log_{10}(x^{0.59}) \Leftrightarrow$$
$$1.1524 = \log_{10}(x^{0.59}) \Leftrightarrow$$
$$10^{1.1524} = 10^{\log_{10}(x^{0.59})} \Leftrightarrow$$
$$10^{1.1524} = x^{0.59} \Leftrightarrow$$
$$x = \sqrt[0.59]{10^{1.1524}} = 89.788$$

Så en flod med en længde på 21.5km vil have et areal på $89.788 km^2$.

b) Ovenstående model kan omformes til formen $y = b \cdot x^a$.

$$\log_{10}(y) = 0.59 \cdot \log_{10}(x) + 0.18 \Leftrightarrow$$
$$\log_{10}(y) = \log_{10}(x^{0.59}) + 0.18 \Leftrightarrow$$
$$10^{\log_{10}(y)} = 10^{\log_{10}(x^{0.59})} \cdot 10^{0.18} \Leftrightarrow$$
$$y = x^{0.59} \cdot 1.5135 \Leftrightarrow$$
$$y = 1.5135 \cdot x^{0.59}$$

Som er en potensmodel.

[December 2011, delprøve 1]

Opgave 4.026

Udtrykket

$$a^3 \cdot a^4 \cdot a^{-1} = a^{3+4-1} = a^6$$

Udtrykket

$$\frac{x^7}{x^2} = x^{7-2} = x^5$$

Potensregneregler.

Opgave 4.027

Der er givet en funktion $f(x) = 2x - 7$.

Der bestemmes for $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} &1 = 2x - 7 \Leftrightarrow \\ &8 = 2x \Leftrightarrow \\ &x = 4 \end{aligned}$$

Der undersøges nu for punket P.

$$f(100) = 2 \cdot 100 - 7 = 200 - 7 = 193$$

Så det passer. Punktet P ligger på grafen for f.

Opgave 4.028

Der opstilles en lineær model ud fra oplysningerne.

$$b = 40, a = 35$$

Så

$$f(x) = 35x + 40$$

Som beskriver udviklingen af kyllingens vægt i gram.

Opgave 4.029

Der aflæses på grafen og der ses det, at

$$\begin{aligned} &a > 0 \\ &b < 0 \\ &c > 0 \\ &d < 0 \end{aligned}$$

Fordi a er voksende, b viser en aftagende tangenthældning, c skærer y-aksen mellem første og anden kvadrant og d fortæller, at parablen aldrig rammer x-aksen.

Opgave 4.030

Integralet bestemmes.

$$\int 4x^3 + 10x - 3\,dx$$

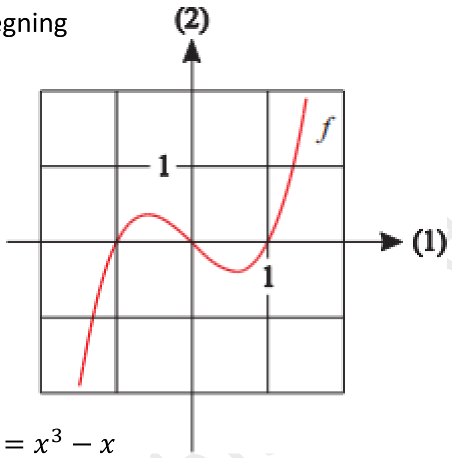
Som faktisk er $F(x)$.

$$F(x) = x^4 + 5x^2 - 3x + k$$

Hvor k er en vilkårlig konstant for $k \in \mathbb{R}$

Opgave 4.031

Der er givet en tegning



Funktionen $f(x) = x^3 - x$

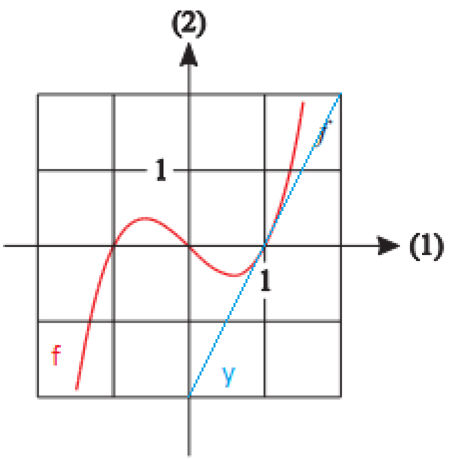
Der bestemmes en ligning for tangenten til grafen for f i $P(1{,}0)$.

$$f(1) = 1^3 - 1 = 0$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$$

Tangentligningen

$$y = 2 \cdot (x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

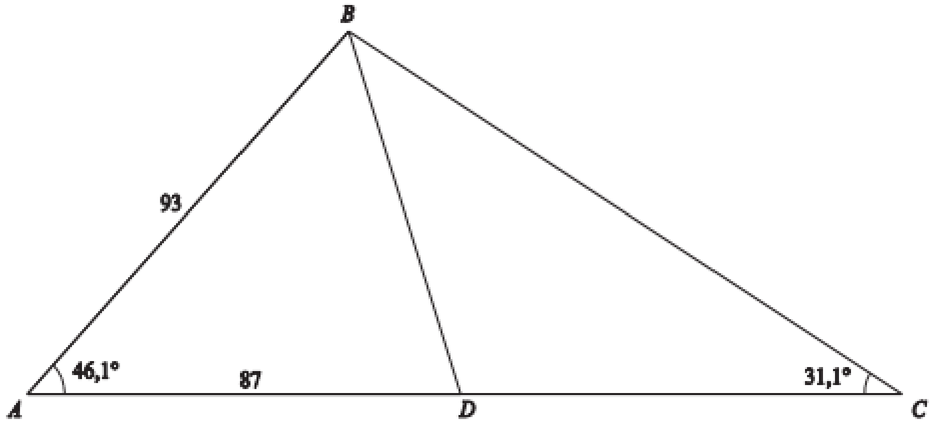
Det kan man også se på grafen med god fantasi. Der kræves en tegning. Tangenten kan også tegnes i punktet $Q(-1{,}0)$ da den er parallel med $P(1{,}0)$. Men det er ikke et krav.



[December 2011, delprøve 2]

Opgave 4.032

Der er givet en trekant.



a) Man ønsker at kende længden af $|BD|$. Der anvendes cosinusrelationer.

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \cos(A)}$$

Værdierne indsættes

$$|BD| = \sqrt{87^2 + 93^2 - 2 \cdot 87 \cdot 93 \cdot \cos(46.1^o)} = 70.692$$

Så længden er altså 70.692.

b) Da man kender alle længder kan man regne alle vinkler ved enten sinusrelationerne eller cosinusrelationerne. Begge demonstreres.

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{|BD|^2 + |AB|^2 - |AD|^2}{2 \cdot |BD| \cdot |AB|}\right)$$

Værdierne indsættes.

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{70.692^2 + 93^2 - 87^2}{2 \cdot 70.692 \cdot 93}\right) = 62.470^o$$

Således fandt man vinkel B. Der prøves med sinusrelationerne. Der tages vinkel B

$$\frac{\sin(A)}{|BD|} = \frac{\sin(B)}{|AD|}$$

Værdierne indsættes.

$$\frac{\sin(46.1^o)}{70.692} = \frac{\sin(B)}{87}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for B vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$\angle B = 62.470^o$$

Så på helt samme måde finder man vinkel B. Nu kan man finde vinkel D. På tre måder, men den nemmeste er nok vinkelsummen.

$$\angle D = 180^o - \angle A - \angle B = 180^o - 46.1^o - 62.470^o = 71.430^o$$

Sådan fandt man vinkel D

Fortsættes næste side

c) Længden $|BC|$ kan findes ved at kende vinkel D i trekant BCD.

$$\angle D_{BCD} = 180^o - \angle D_{ABD} = 180^o - 71.430^o = 108.570^o$$

Endelig kan man anvende sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(C)}{|BD|} = \frac{\sin(D)}{|BC|}$$

Værdierne indsættes.

$$\frac{\sin(31.1)}{70.692} = \frac{\sin(108.570)}{|BC|}$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for BC vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$b = 129.733$$

Så længden $|BC|$ blev bestemt til 129.733

Opgave 4.033

Der er givet en model over kogetiden for et blødkogt æg.

$$f(x) = 18.2 \cdot x^{0.67}$$

a) Kogetiden for et æg på 57 gram bestemmes.

$$f(57) = 18.2 \cdot 57^{0.67} = 273.216$$

Så ægget skal koge i 273 sekunder eller $\frac{273}{60} = 4.55$minutter.

b) Et æg vejer 15% mere, så man skal finde ud af tiden i %. Formlen

$$F_y = F_x^a$$

Anvendes.

$$(1 + r_y) = \left(1 + \frac{15}{100}\right)^{0.67}$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for r\_y vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$r_y = 0{,}09816489$$

Som ganges med 100%.

$$r_y = 0{,}09816489 \cdot 100\% = 9.816\%$$

Så ægget der vejer 15% mere end et andet æg, skal koge 9.816% mere.

Opgave 4.034

Regressionsopgaven løses i Maple 2016.

a) Oplysningerne defineres og der anvendes eksponentiel regression.

$dB := [0, 5, 11, 17, 22, 25]$

$$[0, 5, 11, 17, 22, 25]$$

$arb := [1440, 480, 120, 30, 10, 5]$

$$[1440, 480, 120, 30, 10, 5]$$

$ExpReg(dB, arb)$

Eksponentiel Regression

$$y = 1458.6 \cdot 0.79688^x$$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99994$

Det ses, at forklaringsgraden er høj. Tallene a og b er bestemt til $a = 0.79688$ og $b = 1458.6$ samt forskriften $f(x) := 1458.6 \cdot 0.79688^x$:

b) Man indsætter 32dB på x.

$f(32)$

$$1.019787950$$

Så tilsyneladende må man kun arbejde i ca. et minut.

c) Halveringskonstanten

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.79688)}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 4.404293416 \ln(2)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$T_{\frac{1}{2}} = 3.0528$$

Det betyder, at for hver gang dB niveauet stiger med 3, halveres arbejdstiden.

Opgave 4.035

Der aflæses fra tabellen, således tallet a kan findes.

a)

$$a = \sqrt[6-0]{\frac{179}{360}} = 0.89$$

Den årlige procentvise ændring i en 6-årig periode bestemmes ved

$$r_y = \left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot 100\%$$

Værdierne indsættes

$$r_y = (0.89^6 - 1) \cdot 100 = -50.301\%$$

Så i en 6-års periode er den aftaget med 50%

Opgave 4.036

Der er givet en logistisk model.

$$f(x) = \frac{3190}{1 + 29.5 \cdot e^{-0.113x}}, x \geq 10$$

a) Kyllingens vægt kan regnes ved indsættelse af 20 på x.

$$f(x) = \frac{3190}{1 + 29.5 \cdot e^{-0.113 \cdot 20}} = 782.181$$

Så kyllingens vægt vil være 782.181 gram efter 20 dage.

b) Der løses en ligning for x.

$$2500 = \frac{3190}{1 + 29.5 \cdot e^{-0.113x}}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 41{,}34287$$

Så kyllingen bliver 41 dage når den slagtes.

c) Modellen differentieres.

$$f'(x) = \frac{2126773 \cdot e^{\frac{113x}{1000}}}{50\left(2e^{\frac{113x}{1000}} + 59\right)^2}$$

Som er den afledede af f. Der indsættes 15 på x.

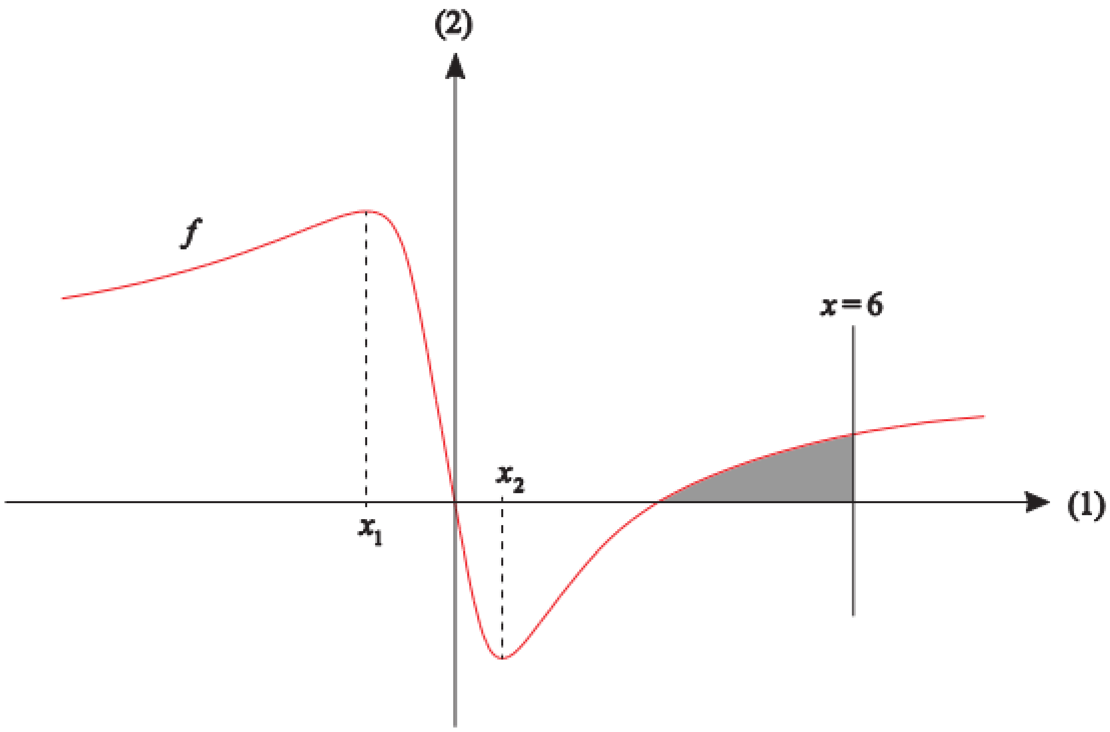
$$f'(15) = \frac{2126773 \cdot e^{\frac{113 \cdot 15}{1000}}}{50\left(2e^{\frac{113 \cdot 15}{1000}} + 59\right)^2} = 47.425$$

Så efter 15 dage, tager kyllingen 47.425 gram på om dagen.

Opgave 4.037

Der er givet en funktion og tegning.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x^2 + 1}$$



a) For at bestemme x_1 og x_2, dvs. nulpunkterne for $f'(x)$, differentieres ovenstående.

$$f'(x) = \frac{(4x-6)\cdot(x^2+1) - (2x^2-6x)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(4x^3+4x-6x^2-6) - (4x^3-12x^2)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4x^3-6x^2+4x-6-4x^3+12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2+4x-6}{(x^2+1)^2}$$

Som er den afledede af f. Den sættes lig med 0.

$$\frac{6x^2+4x-6}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^2+4x-6 = 0$$

Løses som en andengradsligning.

$$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot 6\cdot(-6) = 160$$

Løses for x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{160}}{12} = \begin{matrix} 0.72 \\ -1.38 \end{matrix}$$

Så rødderne for den afledede er

$$x = -1.38 \vee x = 0.72$$

Som også svarer til $x_1 = -1.38 \ \vee x_2 = 0.72$

Hvilket er det ønskede. Man kunne også anvende CAS lyn hurtigt.

Fortsættes næste side

b) Der bestemmes det areal der afgrænses af f, førsteaksen og $x = 6$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x^2 + 1}$$

Løses mht. x.

$$\frac{2x^2 - 6x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 6) \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 0$$

Således kunne man finde x v.h.a. nulreglen bl.a.

For at bestemme arealet af det grå område, anvendes integralet. Dette udføres i Maple 2016.

$$A = \int_3^6 \frac{2x^2 - 6x}{x^2 + 1} dx = [2x - 3 \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \cdot \arctan(x)]_3^6 =$$
$$2 \cdot 6 - 3 \cdot \ln(6^2 + 1) - 2 \cdot \arctan(6) - (2 \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3^2 + 1) - 2 \cdot \arctan(3))$$
$$= 1.7616$$

Som er arealet af det grå område.

Slut på 2011 opgavesæt.

Hent opgaverne på UVM.dk eller spørg din lærer.

- Maj 2011
- August 2011
- December 2011

Slut på kapitel 4 - Appendiks 1, eksamensopgaver 2011

Slut på dokumentet - løsningerne er hentet hos

www.matematikhfsvar.page.tl

Hent andre løsninger derinde

MAT C, MAT B og MAT A

MATEMATIK B-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

2010

I dette dokument er der anvendt en del relevante hjælpemidler for udregning af disse opgaver, primært håndkraft. Følgende er listet over hjælpemidler der er anvendt:

- Maple 2016, CAS software
- WordMat, CAS software
- GeoGebra, CAS software
- wolframalpha.com - online CAS
- web2.0calc.com - online lommeregner til avanceret matematik
- cossincalc.com - online trekantsregner
- cymath.com - ligningsløser
- matematikhfsvar.page.tl

Billedet på forsiden stammer fra:
- classroomclipart.com

Grafer, tegninger og modeller tilhører opgavekommissionen og andet udarbejdet materiale tilhører Anders Jørgensen & Mark Kddafi, matematikhfsvar.page.tl - Findes der fejl og/eller mangler, så henviser vi til, at I skriver på vores mail, som findes på vores hjemmeside.

Anders Jørgensen & Mark Kddafi
2016