Matematik A

25. maj 2020

Matematikhfsvar.page.tl

Minimale løsningsskitser til STX A-niveau eksamen d. 25/05/20. Af CAS kræves: Maple 2019 og evt. GeoGebra.
NB: Dette er ikke en elevbesvarelse!

<u>Delprøve 1:</u>
Denne del besvares ved hjælp af formelsamlingen.

Opgave 1:

a) En vektorfunktion er givet.
Man skal beregne $\vec{s}(1)$. Dvs. man indsætter $t = 1$ ind i funktionsforskriften.

$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 1^2 \\ 2 \cdot 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 1 \\ 2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b) Hvis parameterkurven skal gennemløbe P, så kræver det, at ligningen nedenfor har samme t-værdier.

$$\begin{pmatrix} 0.5 \cdot t^2 \\ 2 \cdot t + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Det giver ligningerne $0.5 \cdot t^2 = 2$ og $2 \cdot t + 6 = 10$. Begge ligninger løses.

$$0.5 \cdot t^2 = 2 \Longleftrightarrow t^2 = \frac{2}{0.5} \Longleftrightarrow t^2 = 4 \Longleftrightarrow t = \pm 2.$$

Dernæst,

$$2 \cdot t + 6 = 10 \Longleftrightarrow 2 \cdot t = 4 \Longleftrightarrow t = 2.$$

Så da $t = 2$ i begge ligninger, så følger det at parameterkurven gennemløber P.

Opgave 2:

a) Da $f(x)$ er givet som et andengradspolynomium, så benyttes den generelle teori om andengradspolynomier til at slutte, at funktionen C er grafen for $f(x)$.

Differentieres $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fås $f'(x) = 2x - 4$, hvilket er en lineær funktion. Denne er en ret linje, hvorfor det er grafen for B. Dvs. B er grafen for $f'(x)$.

Endelig ses det, at A er grafen for $F(x)$, da det nævnes at $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$. Dette kan også ses, da A viser et tredjegradspolynomium.

Opgave 3:

a) Udtrykket reduceres.

$$\frac{a(4a+6)}{2a} = \frac{4a+6}{2} = \frac{4a}{2} + \frac{6}{2} = 2a + 3.$$

Opgave 4:

a) Det aflæses på grafen, at $\mu = E(X) = 12$. Se formelsamling s. 43. Se evt. bilaget på sidste side i denne besvarelse.

Opgave 5:

a) Differensligningen er $y_{n+1} = 1.10 \cdot y_n + 2000,\ \ n = 0{,}1{,}2, \ldots$
Det ses, at renten er $r = (1.10 - 1) \cdot 100\% = 10\%$. Det beløb, der hvert år indsættes, er 2000kr.

b) Beløbet på kontoen efter 1 år er,

$$y_1 = 1.10 \cdot 5000 + 2000 = 7500.$$
$$y_2 = 1.10 \cdot 7500 + 2000 = 10250.$$

Dvs. efter 2 år er beløbet på 10250kr.

Opgave 6:

a) Andengradsligningen $f(x) = 0$ løses.

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 0 = -3x^2 + 12x - 9.$$

Da 3 går op i alle led, kan man dele med -3 på begge sider. Det gør man for at gøre ligningen nemmere, men man må også lade være.

$$\frac{0}{-3} = -\frac{3x^2}{-3} + \frac{12x}{-3} - \frac{9}{-3} \Longleftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 3.$$

Her er $a = 1$, $b = -4$ og $c = 3$. Diskriminanten,

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \qquad d > 0.$$

Løsningerne er,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}.$$

Dvs. $x = 1 \vee x = 3$.

b) Arealet M bestemmes ved hjælp af integralregning, her benyttes grænserne $x = 1$ og $x = 3$ fra opgave a).

$$A_M = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9)\,dx = [-x^3 + 6x^2 - 9x]_1^3,$$
$$= -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - (-1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1),$$
$$= 0 - (-4) = 4.$$

Dvs. det blå areal M er beregnet til at være 4.

Opgave 7:

a) Først differentieres funktionen $f(x)$ og det skyldes, at man fra generel teori ved, at $f'(x)$ angiver hældningen for tangenten.

$$f'(x) = 3 - \frac{6}{x}, \qquad x > 0.$$

Da tangenten t er parallel med l, så følger det at begge linjer har samme hældningstal, dvs. 2. Man kan finde røringspunktet til det sted, hvor hældningen for tangenten er 2, ved at løse ligningen $f'(x) = 2$. Dvs.

$$3 - \frac{6}{x} = 2 \Longleftrightarrow -\frac{6}{x} = -1 \Longleftrightarrow \frac{6}{x} = 1 \Longleftrightarrow 6 = x \Longleftrightarrow x = 6.$$

Dvs. førstekoordinaten til røringspunktet mellem $f(x)$ og t er ved $x = 6$.

Opgave 8:

a) Tangentligningen er givet ved $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Her oplyses punktet $P(0{,}2)$ dvs. $x_0 = 2$ og $y_0 = f(x_0) = 2$. Med disse oplysninger er tangentligningen,
$$y = f'(x_0)(x - 0) + 2.$$
$f'(x_0)$ bestemmes vha. differentialligningen. Man indsætter $y_0 = 2$ i y,
$$y' = 2 \cdot 2(8 - 2) = 24.$$
Altså er ligningen for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet P,
$$y = 24(x - 0) + 2 = 24x + 2.$$

b) En forskrift for $f(x)$ bestemmes ved at løse differentialligningen.
Da differentialligningen er en logistisk differentialligning, så kan man anvende formelsamlingen og finde den fuldstændige løsning. Man finder (179) s. 29.
$$y' = a \cdot y \cdot (M - y), \qquad y = f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}.$$
Her er $M = 8$ og $a = 2$. Derfor er den fuldstændige løsning,
$$f(x) = \frac{8}{1 + c \cdot e^{-16 \cdot x}}.$$
Konstanten c bestemmes ved udnyttelse af punktet P,
$$2 = \frac{8}{1 + c \cdot e^{-16 \cdot 0}} \Longleftrightarrow 2 = \frac{8}{1 + c} \Longleftrightarrow 2(1 + c) = 8 \Longleftrightarrow 1 + c = 4 \Longleftrightarrow c = 3.$$
Forskriften er,
$$f(x) = \frac{8}{1 + 3 \cdot e^{-16 \cdot x}}.$$

Delprøve 2:

Denne del besvares ved hjælp af formelsamlingen og CAS. Vi snyder og bruger CAS til at tegne visse ting.

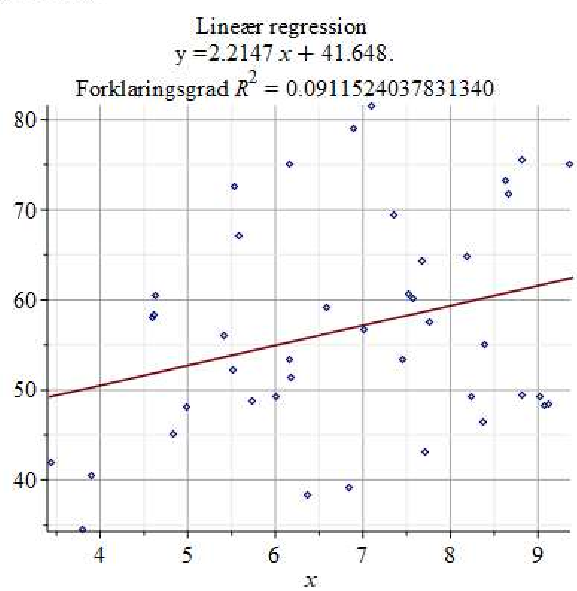
Opgave 9:

a) Benyt teorien om, at $\sin(x)$ har værdimængde $[-1{,}1]$. Derfor er,
$$f_{min} = 7 \cdot (-1) + 3 = -7 + 3 = -4.$$
b) En periode bestemmes ved,
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$
Her er $\omega = 2$ fra den harmoniske svingning.

Opgave 10:

a) Tabellens data indlæses i Maple. I Maple foretages der lineær regression på tabellens data.

```
restart; with(Gym) :
DATA := [[7.1, 6.9, 6.16, 5.54, 5.59, 4.63, 4.61, 4.59, 5.41, 5.51,
    4.83, 3.9, 3.8, 3.43, 6.01, 7.46, 7.57, 7.52, 7.01, 6.59, 6.17,
    6.18, 5.74, 4.98, 9.12, 9.08, 9.02, 8.82, 8.38, 7.71, 6.85, 6.36,
    8.24, 8.39, 7.77, 7.68, 8.19, 8.66, 9.37, 8.81, 8.63, 7.36],
    [81.6, 79.1, 75.1, 72.6, 67.1, 60.5, 58.3, 58.1, 56.1, 52.3,
    45.1, 40.5, 34.6, 41.9, 49.3, 53.4, 60.1, 60.6, 56.7, 59.1, 53.4,
    51.4, 48.8, 48.1, 48.4, 48.2, 49.2, 49.4, 46.5, 43.1, 39.1, 38.3,
    49.2, 55.1, 57.5, 64.3, 64.8, 71.7, 75.1, 75.5, 73.2, 69.5]] :
LinReg(DATA)
```



Det fremgår ovenfor, at forskriften er $f(x) = 2.2147x + 41.648$, hvilket er en ringe model.

b) Her fortsættes arbejdet i Maple.

$testLin(DATA)$

	a	b
Koefficient	2.214679	41.648398
Standardfejl	1.105712	7.732141
t-stat	2.002943	5.386400
p-værdi	0.051993	0.000003
Nedre 95.00%	-0.020050	26.021159
Øvre 95.00%	4.449407	57.275637
Frihedsgrader	40	

Konfidensintervallet er $[-0.02; 4.44]$. Det ses umiddelbart at forskerens formodning ikke holder stik, da modellen både indeholder positive og negative værdier i intervallet. Endelig kan man bemærke forklaringsgraden er relativ lav.

Opgave 11:

a) Funktionen er givet $f(x) = e^{2x-4}$. Differentieres ved hjælp af CAS eller i hånden.

$$f'(x) = (e^{2x-4})' = 2e^{2x-4}.$$

b) Her benyttes formelsamlingen s. 28.

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (2e^{2x-4})^2} = 7.8632.$$

I Maple:

$f(x) := \exp(2\,x - 4)$:

$evalf[5]\left(\int_1^3 \mathrm{sqrt}\left(1 + f'(x)^2\right) \mathrm{d}x\right)$

$$7.8632$$

Dvs. kurvelængden af funktionen $f(x)$ i intervallet $[1; 3]$ er ca. 7.8632.

Opgave 12:

a) Her vises det, at $\tilde{y} = 2$ er et fikspunkt for differensligningen. Betragt,

$$\tilde{y} = 2\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}^2. \tag{1}$$

$\tilde{y} = 2$ indsættes i (1).

$$2 = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \iff 2 = 4 - \frac{4}{2} \iff 2 = 2.$$

Det ses umiddelbart, at $\tilde{y} = 2$ er et fikspunkt for differensligningen.

b) Først bestemmes den afledede funktion,

$$g'(\tilde{y}) = 2 - \tilde{y}.$$

Dernæst indsættes $\tilde{y} = 2$.

$$|g'(2)| = |2 - 2| = 0 < 1.$$

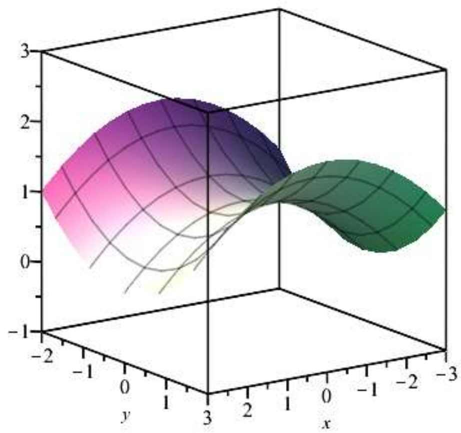
Da $|g'(2)| = 0$, så følger det, at $\tilde{y} = 2$ er et stabilt fikspunkt.

Opgave 13:

a) Funktionen defineres og tegnes i Maple, som man kan se nedenfor.

$$f(x,y) := 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}:$$

```
plot3d(f(x, y), view = [-3..3, -2..2, -1..3])
```



b) Koordinatsættet til saddelpunktet P bestemmes. Funktionen differentieres.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -\frac{2x}{9}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{y}{2}.$$

Sættes ovenstående lig 0 fås ligningerne,

$$-\frac{2x}{9} = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \qquad \frac{y}{2} = 0 \Longleftrightarrow y = 0.$$

Dvs. $x_0 = 0 = y_0$. Disse indsættes i $f(x,y)$.

$$f(0,0) = 1 - \frac{0^2}{9} + \frac{0^2}{4} = 1.$$

Dermed er $P(0,0,1)$.

Opgave 14:

a) Vektorfunktionen er,

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 + t^2 - 4t \end{pmatrix}.$$

Da P ligger på andenaksen er $x(t) = 0$. Dvs.

$$t^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow t = \pm 2.$$

Dvs. parameterværdierne hørende til P er $t = \pm 2$.

b) Vandret tangent til en parameterkurve kræver $y'(t) = 0$. Dvs.

$$3t^2 + 2t - 4 = 0.$$

Ligningen løses vha. Maple.

$$solve(3t^2 + 2t - 4 = 0)$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$evalf[5](\%)$$

$$0.86857, -1.5352$$

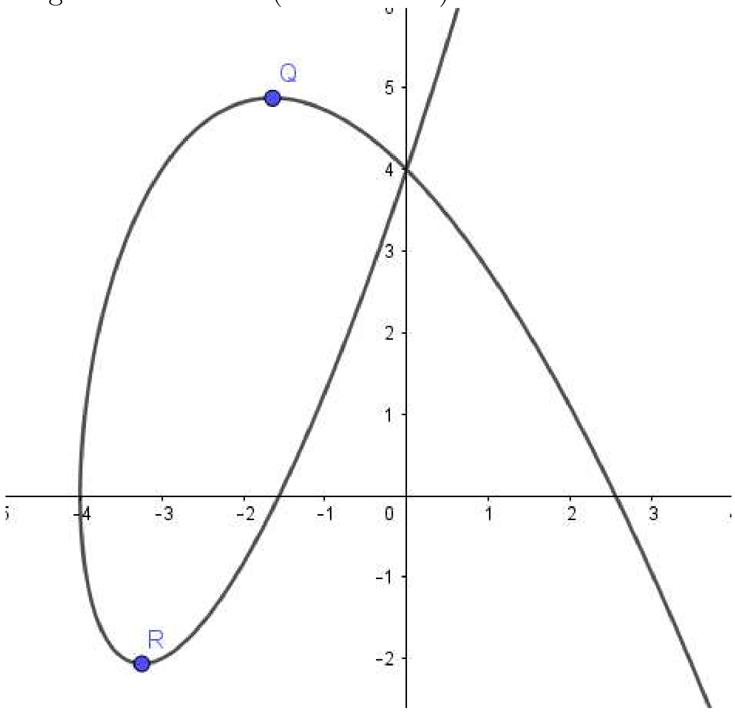
Dvs. $t = -1.5352$ og $t = 0.86857$ er parameterværdierne til de punkter hvor der findes vandrette tangenter til parameterkurven.

$$\vec{s}(-1.5352) = \begin{pmatrix} (-1.5352)^2 - 4 \\ (-1.5352)^3 + (-1.5352)^2 - 4 \cdot (-1.5352) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.643 \\ 4.879 \end{pmatrix},$$
$$\vec{s}(0.86857) = \begin{pmatrix} 0.86857^2 - 4 \\ 0.86857^3 + 0.86857^2 - 4 \cdot 0.86857 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.246 \\ -2.065 \end{pmatrix}.$$

Koordinatsættene er,

$$Q(-1.643, 4.879), \qquad R(-3.246, -2.065).$$

Dette kan afbildes grafisk nedenfor. (Ikke et krav).



Opgave 15:

a) Man indsætter $V = 10$ i differentialligningen.

$$\frac{dV}{dt} = 0.1 - 0.016 \cdot 10^{\frac{2}{3}} \approx 0.025734.$$

Dvs. karrets væskemængde ændres med 0.0257L pr. time.

b) Da karret var tomt var ved tidspunktet $t = 0$ inden påfyldning. Derfor er $V(0) = 0$. Differentialligningen kan ikke løses algebraisk, så der anvendes numerisk løsning vha. Maple.

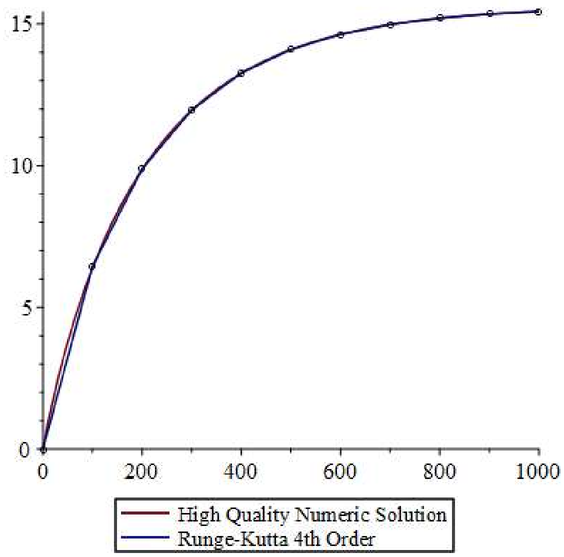
restart

with(*Student*[*NumericalAnalysis*]) :

$$V'(t) = 0.1 - 0.016 \cdot (V(t))^{\frac{2}{3}}$$

$$\mathrm{D}(V)(t) = 0.1 - 0.016\, V(t)^{2/3}$$

$$\mathit{RungeKutta}\left(\mathit{diff}(V(t), t) = 0.1 - 0.016 \cdot V(t)^{\frac{2}{3}}, V(0) = 0, t = 1000, \mathit{submethod} = \mathit{rk4}, \mathit{numsteps} = 10, \mathit{output} = \mathit{plot}\right)$$



$$\mathit{RungeKutta}\left(\mathit{diff}(V(t), t) = 0.1 - 0.016 \cdot V(t)^{\frac{2}{3}}, V(0) = 0, t = 3125, \mathit{submethod} = \mathit{rk4}, \mathit{numsteps} = 10\right)$$

$$15.62$$

Det ses umiddelbart, at den øvre grænse for differentialligningen er 15.62. Så der kan omtrent være 15.62 liter i karret ifølge den numeriske løsning ovenfor.

Bilag til opgave 4: