BTS Laayoune : DSI 1	Série 7 : Calcul intégral	Prof : El hassan BOUKACHE

Exercice 1

Calculer les primitives suivantes :

$\int x(1-x^2)^3dx \qquad \int \frac{x}{x^2+1}dx \qquad \int x\sqrt{1+4x^2}dx \qquad \int \frac{\ln x}{x}dx \qquad \int \frac{1}{x\ln x}dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

$\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+6}dx \qquad \int (\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})^2dx \qquad \int \frac{(\cos x)^3}{(\sin x)^4}dx \qquad \int \sin x\cos x\sqrt{2+\sin x}dx$

$\int x^n \ln x dx, n\in\mathbb{N} \qquad \int xe^{-3x+7}dx \qquad \int \frac{x^3+7x}{x^4+1}dx \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_{-3}^{1}|x+1|dx \qquad J=\int_0^3|x^2-3x+2|dx \qquad K=\int_2^0\sqrt{|1-x|}dx$

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions continues sur $[-3,7]$ tel que :

$$\int_{-3}^{7}(2f(x)-g(x))dx=8 \quad \text{et} \quad \int_{-3}^{7}(f(x)+2g(x))dx=-1$$

Calculer : $\int_{-3}^{7}f(x)dx$ et $\int_{-3}^{7}g(x)dx$

Exercice 4

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

Calculer $I+J$ et $I-J$, puis déduire I et J.

Exercice 5

À l'aide des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_0^{\ln 2}xe^{-2x}dx \qquad J=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx \qquad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\cos xdx$

Exercice 6

À l'aide de changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^4 e^{-\sqrt{x}} dx \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \qquad K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

Exercice 7

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

1. Montrer que $\alpha = 1$ est une racine dy polynôme $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
2. En déduire ses deux autres racines, que l'on note β et γ avec $\beta < \gamma$.
3. Déterminer les réels A, B et C tels que :

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

4. En déduire la valeur de $\int_4^5 f(x)dx$.

Exercice 8

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx \qquad \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx \qquad \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx \qquad \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} dx \qquad \int \frac{x^4}{x^3-1} dx$$

Exercice 9

On considère la fonction ϕ définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$$

1. Justifier l'existence de ϕ.
2. Montrer que : $\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t+1)^2}$, où a, b et c sont trois réels que l'on précisera.
3. Soit $x \geq 1$.
   (a) Exprimer en fonction de x la valeur de $\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)^2} dt$.
   (b) On pose $\Phi(t) = -\frac{\ln t}{2(t+1)^2}$
   Calculer $\Phi'(t)$ et en déduire une expression de $\phi(x)$ en fonction de x.

(c) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$.
En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2})$$

Exercice 10

O considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$$

1. (a) Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0.
   (b) Exprimer $I_n + I_{n+1}$ pour tout entier naturel non nul n.
2. (a) Montrer que (I_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :
   $$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$
   En déduire un encadrement de I_n
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{e^n}$.

Exercice 11

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}dt$$

1. Calculer I_0 et $I_0 + I_1$. En déduire I_1.
2. Montrer que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : I_n \geq 0$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 12

En utilisant le formule de Mac-Laurin, montrer que :

$$\forall x > 0 : \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

$$\forall x \in [0; 2\pi] : \sin(x) > x - \frac{x^3}{6}$$