TD - Espaces vectoriels normés

Exercice 1 : Norme $\|\|_p$: Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $1 \leq p$ et tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on pose $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
1 : Construire une fonction *Python* de paramètre $(x, q) \in A \in \mathbb{K}^n \times [1, +\infty[$ qui retourne $\|x\|_p$.
2 : On suppose que $n \geq 2$. Montrer que si $0 < p < 1$ alors $\|\|_p$ n'est une norme sur E.
3 : Montrer que $\forall a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
4 : Montrer l'inégalité de Hölder : $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E, \forall p, q \in \mathbb{R}^+$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ on a $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.
5 : Montrer l'inégalité de Minkowski : $\forall p > 1, \forall x, y \in E, \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. En déduire que $\|\|_p$ est une norme sur E.
6 : Montrer que $\forall x \in E, \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 2 : Opérations sur les boules : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $r, r' > 0$.
1 : Montrer que $\mathscr{B}(x, r) \subset \mathscr{B}(y, r + \|x - y\|)$.
2 : Montrer que $\lambda\mathscr{B}(x, r) = \mathscr{B}(\lambda x, |\lambda|r)$, $\mathscr{B}(x, r) = x + r\mathscr{B}(0, 1)$ et $\mathscr{B}(x + y, r + r') = \mathscr{B}(x, r) + \mathscr{B}(y, r')$.

Exercice 3 : Montrer que $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ sont deux normes équivalentes sur $\mathscr{C}^1([0, 1])$.

Exercice 4 : Normes matricielles : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
1 : Construire une fonction *Python* de paramètre $(A, q) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \{1, 2, \infty\}$ qui retourne $\|A\|_p$.
2 : Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall r \in \{1, 2, \infty\}, \|AB\|_r \leq \|A\|_r \|B\|_r$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\exists \alpha > 0, \forall P \in \mathbb{K}_n[X]$ unitaire, $\int_0^1 |P(t)|dt \geq \alpha$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ non bornée.
Montrer qu'il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) telle que $\|x_{\varphi(n)}\| \to +\infty$.

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$.
Montrer que (u_n) ne converge pas vers l si, et seulement si, $\exists \varepsilon > 0, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{\varphi(n)} - l\| \geq \varepsilon$.

Exercice 8 : Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On considère $E \times F$ muni de la norme produit.
1 : Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in F, \forall r > 0, \mathscr{B}(x, r) \times \mathscr{B}(y, r) = \mathscr{B}((x, y), r)$.
2 : En déduire que si A est un ouvert de E et B un ouvert de F alors $A \times B$ est un ouvert de $E \times F$.
3 : Montrer que si A est un fermé de E et B un fermé de F alors $A \times B$ est un fermé de $E \times F$.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset E$. Montrer que $\forall x \in E, d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$.

Exercice 10 : Déterminer l'adhérence de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 1\}$.

Exercice 11 : Déterminer l'adhérence de l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 12 : Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathscr{A} = \{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = f(1) = 0\}$ dans $(\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\|_\infty)$.

Exercice 13 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, O un ouvert de E et $A \subset E$. Montrer que si $O \cap \bar{A} \neq \emptyset$ alors $O \cap A \neq \emptyset$.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $A, B \subset E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
1 : Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ et λA sont ouverts. Que dire de la somme de deux ouverts ?
2 : Montrer que $\mathring{A} + B \subset \overbrace{A + B}^{\circ}$ et $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$. Donner des exemples où les inclusions sont strictes.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A, B \subset E$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ et $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Donner des exemples où les inclusions sont strictes.

Exercice 16 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
1 : Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2 : En déduire qu'un hyperplan de E est soit fermé soit dense dans E.
3 : Montrer que soit $\mathring{F} = \emptyset$ soit $F = E$. Quels sont les sous-espaces ouverts de E ? Que dire de $\complement F$?

Exercice 17 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset E$ convexe. Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

Exercice 18 : Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :
1) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 2) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ 3) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ 4) $f(x, y) = x\ln(x^2 + y^2)$ 5) $f(x, y) = \frac{x^2y^3}{x^4-2xy+3y^2}$
6) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 7) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ 8) $f(x, y) = \frac{2xy-y^2}{x^2+y^2}$ 9) $f(x, y) = x\ln(x^2 + y^2)$ 10) $f(x, y) = \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 19 : Étudier, suivant les valeurs de $p, q \in \mathbb{R}$, la continuité de la fonction $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
1 : Montrer que tout fermé de E est intersection dénombrable d'ouverts de E.

2 : Montrer que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés de E.
Exercice 21 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et périodiques de périodes 1 et $\sqrt{2}$.
Exercice 22 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : E \to F$ continue.
1 : Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.
2 : Application : Montrer que $\{\cos n / n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
Exercice 23 : Soit $z \in \mathbb{K}$. Étudier la continuité de l'application $f(P) = P(z)$ sur les espaces $(\mathbb{K}[X], \|\|_\infty)$ et $(\mathbb{K}[X], \|\|_1)$.
Exercice 24 : Étudier la continuité de l'application $f(P) = (X + 1)P$ sur $(\mathbb{K}[X], \|\|_\infty)$.
Exercice 25 : Montrer que l'application $u(f) = f(0)$ n'est pas continues sur $(\mathscr{C}([0, 1]), \|\|_1)$.
Exercice 26 : Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Montrer que l'application $f(x, y) = \|x\|y$ est continue sur $E \times F$ muni de la norme produit.
Exercice 27 : Une caractérisation des formes linéaires continues par le noyau : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle sur E. On veut montrer que f est continue sur E ssi $\ker f$ est fermé dans E.
1 : Montrer que si f est continue sur E alors $\ker f$ est fermé dans E.
2 : Réciproquement, on suppose que $\ker f$ est fermé dans E. Montrer que $\exists a \in E$ tel que $f(a) = 1$ et $\ker f + \mathbb{K}x = E$.
3 : Montrer que $\exists r > 0$ tel que $\mathscr{B}(0, r) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.
4 : Montrer que $\forall x \in \mathscr{B}(0, r), |f(x)| < 1$. En déduire que f est continue sur E.
5 : Montrer que si f n'est pas continue sur E alors $\ker f$ est dense dans E.
Exercice 28 : Soit $\|\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exists k > 0, \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|MN\| \leq k\|M\|\,\|N\|$.
Exercice 29 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Exercice 30 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, les ensembles des matrices nilpotentes, des matrices de projection et des matrices symétriques sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Exercice 31 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $A, B \subset E$ compacts et $F \subset E$ fermé.
1 : Montrer que $A + B$ est compact.
2 : Montrer que $A + F$ est fermé. Donner un contre-exemple lorsque A est supposé seulement fermé.
Exercice 32 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et (A_n) une suite décroissante de compacts non vides de E.
Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un compacts non vide.
Exercice 33 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F \subset E$ fermé et $a \in E$.
Montrer que $\exists b \in E, d(a, A) = \|b - a\|$.
Exercice 34 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $A, F \subset E$ avec A compact et F fermé.
Montrer que $\exists a \in A, \exists b \in F, d(A, F) = \|a - b\|$.
Exercice 35 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés avec E de dimension finie et $f : E \to F$ continue. Montrer que si $\|f\|$ admet une limite infinie à l'infini alors f atteint la borne inférieur de sa norme.
Exercice 36 : Soient $A, B \subset E$ compacts. Montrer que l'ensemble des segments joignant A et B est compact.
Exercice 37 : Montrer que si F est un fermé de $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ alors $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.
Exercice 38 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés avec E de dimension finie et $f : E \to F$ une fonction continue sur E qui admet une limite finie à l'infini et on veut montrer que f est uniformément continue sur E.
Supposons, par l'absurde, que f n'est pas uniformément continue sur E.
1 : Montrer que $\exists \varepsilon > 0, \exists (x_n), (y_n) \in E$ tels que $x_n - y_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$.
2 : Montrer que (x_n) et (y_n) sont bornées et conclure.
Exercice 39 : En considérant la suite $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, montrer que $(\mathbb{K}[X], \|\|_1)$ n'est pas Banach.
Exercice 40 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace de Banach et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides telle que $\delta F_n \to 0$.
Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
Exercice 41 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace de Banach. Montrer que l'espace $\mathscr{B}(E)$ des suites bornées sur E muni de la norme $\|\|_\infty$ est un Banach.
Exercice 42 : Montrer que $\mathscr{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\|_\infty$ est un Banach.
Exercice 43 : Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. En déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes.
Exercice 44 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f, g : E \to \mathbb{R}$ continues telles que $e^{2i\pi f} = e^{2i\pi g}$.
Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{Z}, g = f + \lambda$.
Exercice 45 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
1 : Soit $A \subset E$ à la fois ouverte et fermée. Montrer que la fonction caractéristique χ_A de A est continue.
2 : En déduire que E et $\emptyset$ sont les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées.
3 : Montrer que E et $\emptyset$ sont les seules parties de E de frontières vides.
Exercice 46 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que le complémentaire d'un hyperplan de E n'est pas connexe par arcs.
Exercice 47 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \leq n-2$.
Montrer que $\complement F$ est connexe par arcs.