Fonctions usuelles

1. Logarithme et exponentielle

1.1. Logarithme

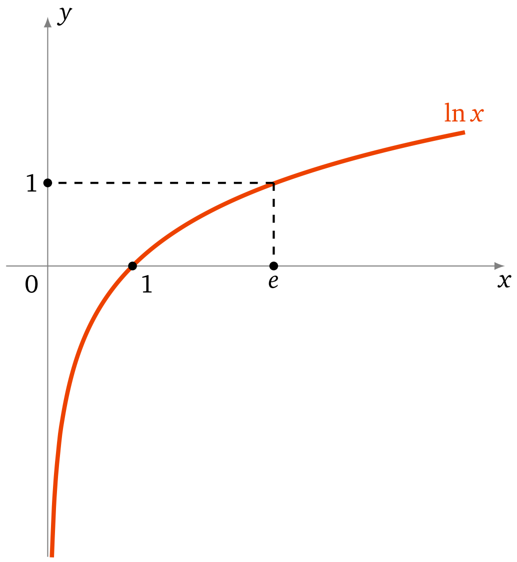
Proposition 1.
Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{(pour tout } x > 0\textit{)} \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$*) :*

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*)*
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

6. *la fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln x \leqslant x-1$ *(pour tout* $x>0$*).*



Remarque.
$\ln x$ s'appelle le ***logarithme naturel*** ou aussi ***logarithme néperien***. Il est caractérisé par $\ln(e)=1$. On définit le ***logarithme en base*** a par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

De sorte que $\log_a(a)=1$.
Pour $a=10$ on obtient le ***logarithme décimal*** $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10)=1$ (et donc $\log_{10}(10^n)=n$). Dans la pratique on utilise l'équivalence :

$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

En informatique intervient aussi le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n)=n$.

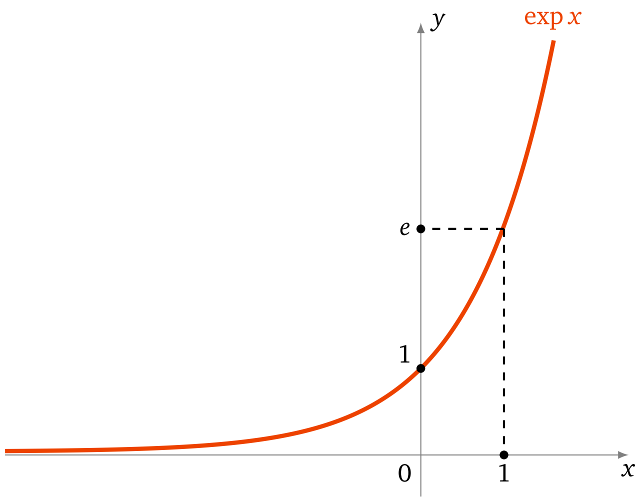
Démonstration. L'existence et l'unicité viennent de la théorie de l'intégrale : $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Passons aux propriétés.

1. Posons $f(x)=\ln(xy)-\ln(x)$ où $y>0$ est fixé. Alors $f'(x)=y\ln'(xy)-\ln'(x)=\frac{y}{xy}-\frac{1}{x}=0$. Donc $x\mapsto f(x)$ a une dérivée nulle, donc est constante et vaut $f(1)=\ln(y)-\ln(1)=\ln(y)$. Donc $\ln(xy)-\ln(x)=\ln(y)$.
2. D'une part $\ln(a\times\frac{1}{a})=\ln a+\ln\frac{1}{a}$, mais d'autre part $\ln(a\times\frac{1}{a})=\ln(1)=0$. Donc $\ln a+\ln\frac{1}{a}=0$.
3. Similaire ou récurrence.
4. $\ln$ est dérivable donc continue, $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$ donc la fonction est strictement croissante. Comme $\ln(2)>\ln(1)=0$ alors $\ln(2^n)=n\ln(2)\to+\infty$ (lorsque $n\to+\infty$). Donc $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. De $\ln x=-\ln\frac{1}{x}$ on déduit $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$. Par le théorème sur les fonctions continues et strictement croissantes, $\ln :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est une bijection.
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ est la dérivée de $\ln$ au point $x_0=1$, donc cette limite existe et vaut $\ln'(1)=1$.
6. $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ est décroissante, donc la fonction $\ln$ est concave. Posons $f(x)=x-1-\ln x$; $f'(x)=1-\frac{1}{x}$. Par une étude de fonction f atteint son minimum en $x_0=1$. Donc $f(x)\geqslant f(1)=0$. Donc $\ln x\leqslant x-1$.

$\square$

1.2. Exponentielle

Définition 1.
La bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction ***exponentielle***, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 2.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :
- $\boxed{\exp(\ln x) = x \textit{ pour tout } x > 0}$ *et* $\boxed{\ln(\exp x) = x \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty$.
- *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Elle est convexe et* $\exp x \geqslant 1 + x$.

Remarque.
La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\exp(1) = e$. Où $e \simeq 2,718\ldots$ est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$.

Démonstration. Ce sont les propriétés du logarithme retranscrites pour sa bijection réciproque.
Par exemple pour la dérivée : on part de l'égalité $\ln(\exp x) = x$ que l'on dérive. Cela donne $\exp'(x) \times \ln'(\exp x) = 1$ donc $\exp'(x) \times \frac{1}{\exp x} = 1$ et ainsi $\exp'(x) = \exp x$. □

1.3. Puissance et comparaison

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a^b = \exp\big(b \ln a\big)}$$

Remarque.
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\big(\frac{1}{2} \ln a\big)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\big(\frac{1}{n} \ln a\big)$ (la ***racine n-ème*** de a)
- On note aussi $\exp x$ par e^x ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp\big(x \ln e\big) = \exp(x)$.
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

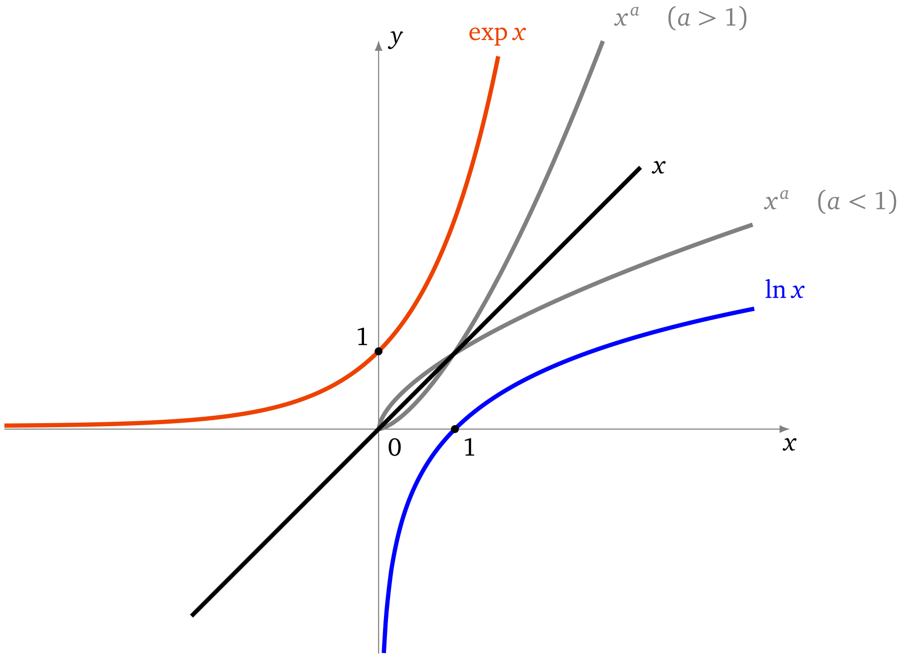
Proposition 3.
Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{x^{a+b} = x^a x^b}$
- $\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}}$
- $\boxed{(xy)^a = x^a y^a}$
- $\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$
- $\boxed{\ln(x^a) = a \ln x}$

Comparons les fonctions $\ln x$, $\exp x$ avec x :

Proposition 4.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$



Démonstration.

1. On a vu $\ln x \leqslant x - 1$ (pour tout $x > 0$). Donc $\ln x \leqslant x$ donc $\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leqslant 1$. Cela donne

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{x} = 2\frac{\ln \sqrt{x}}{x} = 2\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Cette double inégalité entraîne $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. On a vu $\exp x \geqslant 1 + x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc $\exp x \to +\infty$ (lorsque $x \to +\infty$).

$$\frac{x}{\exp x} = \frac{\ln(\exp x)}{\exp x} = \frac{\ln u}{u}$$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $u = \exp x \to +\infty$ et donc par le premier point $\frac{\ln u}{u} \to 0$. Donc $\frac{x}{\exp x} \to 0$ et reste positive, ainsi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$.

□

2. Fonctions circulaires inverses

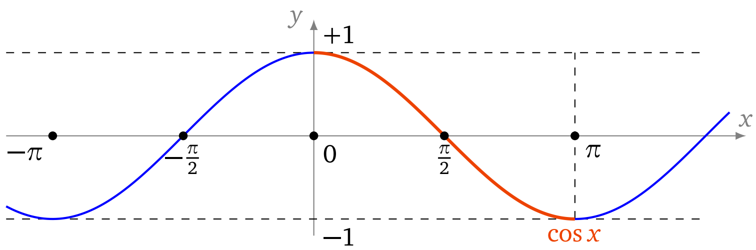
2.1. Arccosinus

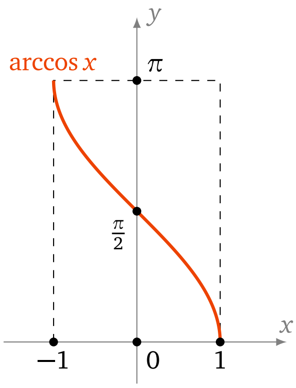
Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arccosinus*** :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\big(\arccos(x)\big) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0, \pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

Démonstration. On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned}
& \cos(\arccos x) = x \\
\implies & -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\
\implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\
\implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \qquad (*) \\
\implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Le point crucial $(*)$ se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe + car $\arccos x \in [0, \pi]$, et donc on a $\sin(\arccos x) \geqslant 0$). $\square$

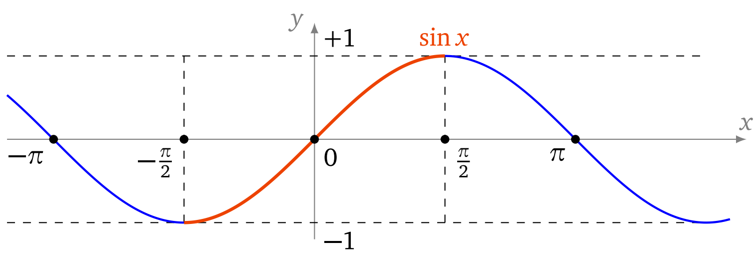
2.2. Arcsinus

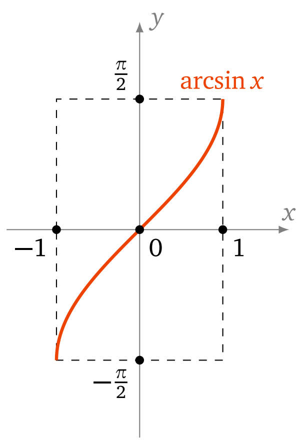
La restriction

$$\sin_| : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$





$$\boxed{\begin{aligned} \sin\big(\arcsin(x)\big) = x & \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big) = x & \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \end{aligned}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

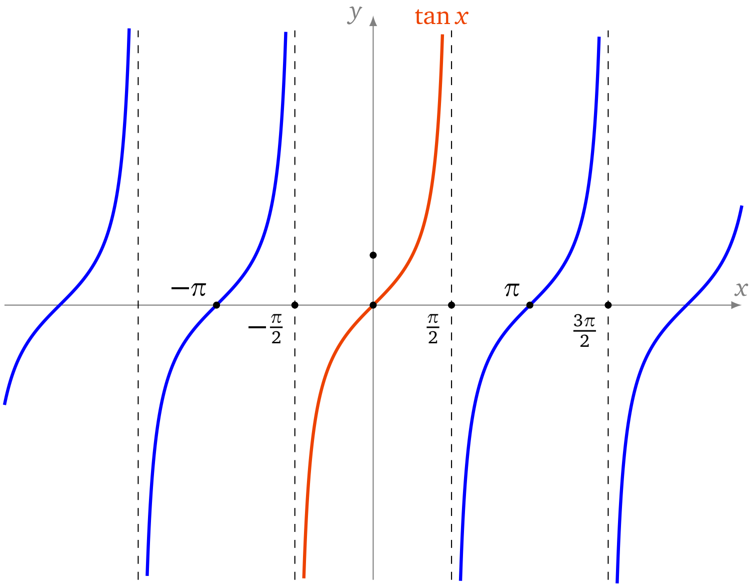
2.3. Arctangente

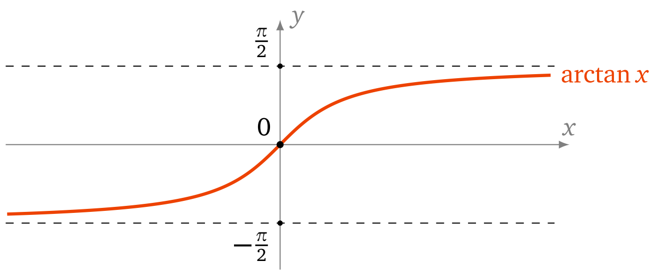
La restriction

$$\tan_| : \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arctangente*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y}$$

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

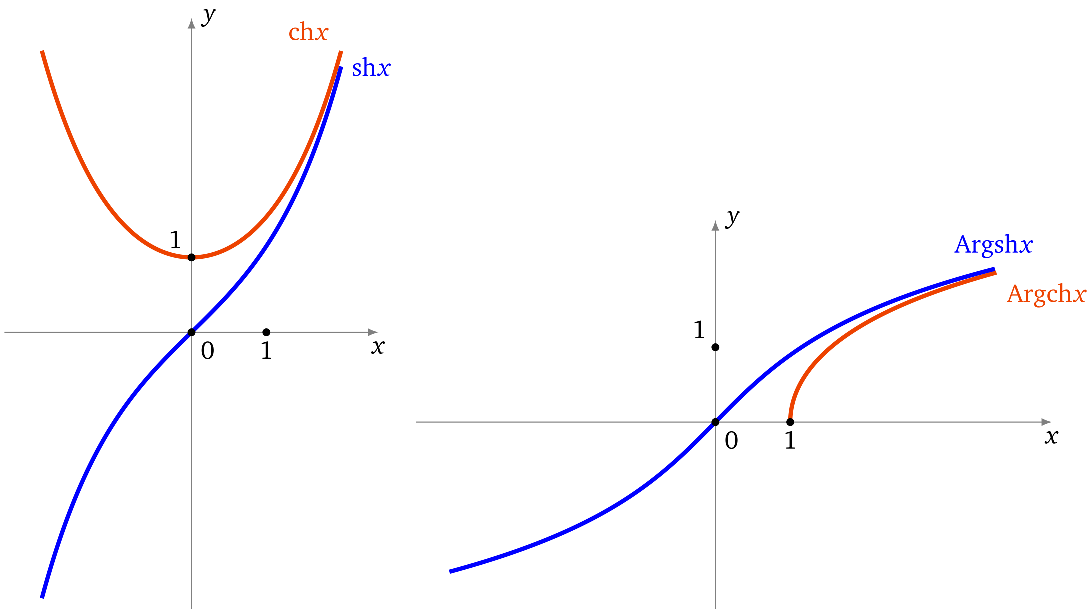
3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

3.1. Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***cosinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\operatorname{ch}_| : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$.



3.2. Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***sinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

> **Proposition 5.**
> - $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
> - $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, \ \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
> - $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
> - Argsh *est dérivable et* $\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
> - $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration.

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1.$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Idem pour la dérivée de $\operatorname{sh} x$.
- Car c'est la réciproque de sh.

- Comme la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}' x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x$:
$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
- Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Argsh}' x$$
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\operatorname{Argsh} 0 = 0$ (car $\operatorname{sh} 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Argsh} x$.

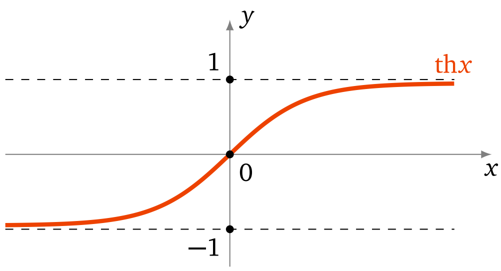
□

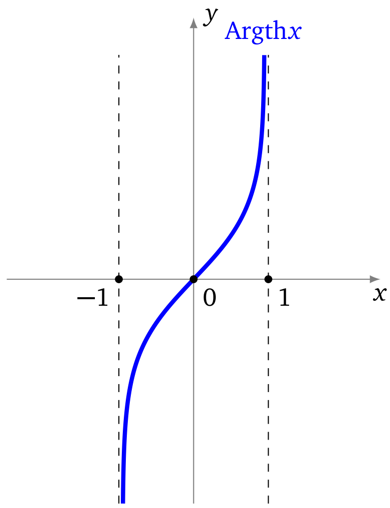
3.3. Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la *tangente hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$$

La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection, on note $\operatorname{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.





3.4. Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x \\
\operatorname{th}' x &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\
\operatorname{Argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\operatorname{Argth}' x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1) \\
\operatorname{Argsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\operatorname{Argth} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$