Calcul algébrique

Essaidi Ali

30 septembre 2018

1 Sommes :

1.1 Sommes :

Notations : Soit E un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{C}$.

- On note $\sum_{a\in E} a$ la somme de tous les éléments de E.
- Si $E=\{a_i/i\in I\}$ avec I un ensemble non vide, $\sum_{a\in E} a$ se note aussi $\sum_{i\in I} a_i$.
- Si $E=\{a_m,a_{m+1},\dots,a_n\}$ avec $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\le n$, $\sum_{a\in E} a$ se note aussi $\sum_{i=m}^{n} a_i$ ou $\sum_{m\le i\le n} a_i$ ou $\sum_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i$ et on a $\sum_{a\in E} a=\sum_{i=m}^{n} a_i=\sum_{m\le i\le n} a_i=\sum_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i=a_m+a_{m+1}+\dots+a_n$.

Exemples :

- Si $E=\{5,7,19,23\}$ alors $\sum_{x\in E} x=5+7+19+23=54$.
- $\sum_{p=0}^{5} 2^p=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=63$.
- $\sum_{0\le k\le 6}(2k+1)=(2\times 0+1)+(2\times 1+1)+(2\times 2+1)+(2\times 3+1)+(2\times 4+1)+(2\times 5+1)+(2\times 6+1)=1+3+5+7+9+11+13=49$.

Remarques :

- On convient que $\sum_{a\in\emptyset} a=0$.
- $\sum_{a\in E} a=\sum_{x\in E} x$, $\sum_{i\in I} a_i=\sum_{j\in I} a_j$ et $\sum_{k=m}^{n} a_k=\sum_{p=m}^{n} a_p$. Autrement dit, on peut remplacer la variable de sommation par n'importe quelle autre variable sans changer la valeur de la somme. On dit que la variable de sommation est muette.
- Changements de variables classiques : $\sum_{k=m}^{n} a_k=\sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}=\sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$.
- $\sum_{k=0}^{n} a_k=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$.
- $\sum_{k=m}^{n} a=(n-m+1)a$. En particulier, $\sum_{k=0}^{n} a=(n+1)a$.
- $\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I} a_i+\sum_{i\in I} b_i$ et $\sum_{i=m}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=m}^{n} a_i+\sum_{i=m}^{n} b_i$.
- $\sum_{a\in E}(\lambda a)=\lambda\sum_{a\in E} a$, $\sum_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i\in I} a_i$ et $\sum_{i=m}^{n}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i=m}^{n} a_i$.
- $\sum_{a\in E\cup F} a_i=\sum_{a\in E} a+\sum_{a\in F} a-\sum_{a\in E\cap F} a$. En particulier, si $E\cap F=\emptyset$ alors $\sum_{a\in E\cup F} a_i=\sum_{a\in E} a+\sum_{a\in F} a$. De même, $\sum_{i\in I\cup J} a_i=\sum_{i\in I} a_i+\sum_{i\in J} a_i-\sum_{i\in I\cap J} a_i$ et si $I\cap J=\emptyset$ alors $\sum_{i\in I\cup J} a_i=\sum_{i\in I} a_i+\sum_{i\in J} a_i$.

Un programme Python qui permet de calculer la somme d'une famille de nombres complexes :

```
def somme(E):
    S = 0
    for i in E:
        S +=i
    return(S)

In [1]: E = {1, 6, 12, 38, 78, 109}

In [2]: somme(E)
Out[2]: 244
```

Remarque : *Python* possède une commande *sum* qui permet de calculer la somme d'une famille de nombres complexes, lorsqu'il y a des erreurs d'arrondi, on utilise la commande *fsum* du module *math* pour avoir un résultat plus précis :

– Calcul de la somme des éléments de l'ensemble $E = \{1, 6, 12, 38, 78, 109\}$:
```
In [1]: sum({1, 6, 12, 38, 78, 109})
Out[1]: 244
```
– Calcul de la somme $\sum_{k=0}^{10} k$:
```
In [2]: sum(i for i in range(11))
Out[2]: 55
```
– Calcul de la somme $\sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k}$:
```
In [3]: from math import fsum

In [4]: fsum(1/i for i in range(1,21))
Out[5]: 3.597739657143682
```
– Erreurs d'arrondi :
```
In [6]: sum([0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1])
Out[6]: 0.9999999999999999

In [7]: fsum([0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1])
Out[7]: 1.0
```

Proposition 1.1 Somme télescopique :

Si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ est une famille de nombres complexes alors $\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m$.

Démonstration :

En effet :

$$\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n-1} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_k = a_n - a_m + \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_k = a_n - a_m$$

Remarque : Si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ est une famille de nombres complexes alors $\sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_m$.

Exemples :

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
– Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) = (n+1)^2 - 0^2 = (n+1)^2$$
– Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\sum_{k=0}^{n} kk! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1) - 1)\, k! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

– Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{0}=\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Proposition 1.2 *Factorisation $a^n - b^n$:*

$$\forall a,b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Démonstration :

On pose $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}, c_k=a^kb^{n-k}$ donc :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^kb^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^kb^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-1-k}-a^kb^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)}-a^kb^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)$$

Il s'agit alors d'une somme télescopique donc, d'après la proposition précédente, :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^kb^{n-1-k}=c_n-c_0=a^nb^{n-n}-a^0b^{n-0}=a^n-b^n$$

Exemples : Soient $a,b \in \mathbb{C}$.

– $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
– $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

Remarque : Si $a,b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ impair alors :

$$a^n+b^n=a^n-(-b)^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^ka^kb^{n-1-k}$$

Exemples : Soient $a,b \in \mathbb{C}$.

– $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
– $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

Proposition 1.3 *Somme géométrique :*

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}, \forall m,n \in \mathbb{N} \textit{ tels que } m \le n, \sum_{k=m}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-x^m}{x-1}$$

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m \le n$. On a :

$$(x-1)\sum_{k=m}^{n} x^k=\sum_{k=m}^{n}(x-1)x^k=\sum_{k=m}^{n}\left(x^{k+1}-x^k\right)=x^{n+1}-x^m$$

car il s'agit d'une somme télescopique d'où :

$$\sum_{k=m}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-x^m}{x-1}$$

Remarques : Soit $x \in \mathbb{C}$ et $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m \le n$.

– Si $x=1$ alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k=n-m+1$.
– Si $x \ne 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$.

Exemples :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}.$

Proposition 1.4 $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$
- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- – Méthode 01 : On a :

  $$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k$$

  donc :

  $$2\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$$

  d'où :

  $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

  – Méthode 02 : On va précéder par récurrence sur n.

  On a $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \times (0+1)}{2}$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.

  Supposons que la relation est vraie pour n donc :

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= n+1+\sum_{k=0}^{n} k \\ &= n+1+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\frac{2+n}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

  d'où la relation est vraie pour $n+1$. On déduit que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  – Méthode 03 : On remarque que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$:

  $$\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k}{2}(k+1-k+1) = 2\frac{k}{2} = k$$

  donc :

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(0-1)0}{2} \qquad \text{car c'est une somme télescopique} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

- – Méthode 01 : On va précéder par récurrence sur n.

  On a $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6}$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\frac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\frac{6n+6+2n^2+n}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n^2+4n+3n+6}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n(n+2)+3(n+2)}{6} \\
&= (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$. On déduit que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– Méthode 02 : On remarque que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} = \frac{k}{6}\left((k+1)(2k+1)-(k-1)(2k-1)\right) = \frac{k}{6}(2k^2+3k+1-2k^2+3k-1) = \frac{k}{6}6k = k^2$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(0-1)0(2\times 0-1)}{6} \qquad \text{car c'est une somme télescopique} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

- – Méthode 01 : On va précéder par récurrence sur n.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \left(\frac{0\times(0+1)}{2}\right)$ donc la relation est vraie pour $n=0$.

Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3 \\
&= (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= (n+1)^2\left(n+1+\frac{n^2}{4}\right) \\
&= (n+1)^2\frac{4n+4+n^2}{4} \\
&= (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$. On déduit que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– Méthode 02 : On remarque que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}\left((k+1)^2-(k-1)^2\right) = \frac{k^2}{4}(k^2+2k+1-k^2+2k-1) = \frac{k^2}{4}4k = k^3$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(0-1)0}{2}\right)^2 \qquad \text{car c'est une somme télescopique} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

1.2 Sommes doubles :

Proposition 1.5 *Si $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille fini de nombres complexes alors :*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}$$

On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}$.

Démonstration :

On va procéder par récurrence sur le nombre d'éléments de I.
Soit n le nombre d'éléments de I.
Si $n = 0$ alors $I = \emptyset$ donc $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{i\in\emptyset}\sum_{j\in J} a_{ij} = 0 = \sum_{j\in J} 0 = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\emptyset} a_{ij}$ d'où la relation est vraie pour $n = 0$.
Supposons que $n \geq 1$ et que la relation est vraie pour tout ensemble à $n-1$ éléments. On a $n \geq 1$ donc $I \neq \emptyset$ d'où $\exists p \in I$. On pose $K = I \setminus \{p\}$ donc $I = K \cup \{p\}$ et K possède n éléments.
On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} &= \sum_{i\in K\cup\{p\}}\sum_{j\in J} a_{ij} \\ &= \sum_{i\in K}\sum_{j\in J} a_{ij} + \sum_{i\in\{p\}}\sum_{j\in J} a_{ij} \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in K} a_{ij} + \sum_{j\in J} a_{pj} \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in K} a_{ij} + \sum_{j\in J}\sum_{i\in\{p\}} a_{pj} \\ &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in K} a_{ij} + \sum_{i\in\{p\}} a_{pj}\right) \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in K\cup\{p\}} a_{ij} \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}\end{aligned}$$

On déduit que la relation est vraie pour n donc la relation est vraie pour tout ensemble fini I.

Corollaire 1.6
– *Si $(a_{ij})_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q}$ est une famille de nombres complexes alors* $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$.
– *Si $(a_i)_{m\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{p\leq j\leq q}$ sont deux familles de nombres complexes alors* $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_i b_j = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=p}^{q} b_j\right)$.

Notations :

– Si $(a_{ij})_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q}$ est une famille de nombres complexes alors $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ se note $\displaystyle\sum_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}} a_{ij}$.

- Si $(a_{ij})_{m\leq i,j\leq n}$ est une famille de nombres complexes. $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} a_{ij}$ se note $\sum_{m\leq i,j\leq n} a_{ij}$.

Exemples : Soit $m,n\in\mathbb{N}$.
- On a :
$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} ij=\left(\sum_{i=0}^{m} i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} j\right)=\frac{m(m+1)}{2}\frac{m(m+1)}{2}=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$$
- On a :
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+j) &= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} i+\sum_{j=0}^{n} j\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\left((n+1)i+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}(n+1)i+\sum_{i=0}^{m}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= (n+1)\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(m+1)(m+n)}{2}\end{aligned}$$

Proposition 1.7 *Somme triangulaire :*

Si $(a_{ij})_{0\leq i\leq j\leq n}$ est une famille de nombres complexes alors $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$.

Démonstration :

On pose :
$$\forall i,j\in\{0,\dots,n\}, b_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & \text{si } i\leq j\\ 0 & \text{si } i>j\end{cases}$$
donc $\forall j\in\{0,\dots,n\},\sum_{i=0}^{n} b_{ij}=\sum_{i=0}^{j} a_{ij}$ et $\forall j\in\{0,\dots,n\},\sum_{j=0}^{n} b_{ij}=\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ d'où :
$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} b_{ij}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$$

Notation : Si $(a_{ij})_{0\leq i\leq j\leq n}$ est une famille de nombres complexes alors $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij}$ se note $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$.

Exemples :
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calcul de $\sum_{1\leq i<j\leq n} 1$: On a :
$$\sum_{1\leq i<j\leq n} 1=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1=\sum_{j=2}^{n}(j-1)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2}$$
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calcul de $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{j}$: On a :
$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j}=\sum_{j=1}^{n} 1=n$$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} ij$: On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij\\
&= \sum_{j=2}^{n} j\sum_{i=1}^{j-1} i\\
&= \sum_{j=2}^{n} j\frac{j(j-1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n+1}{3}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{48}(3n^2+3n-4n-2)\\
&= \frac{n(n+1)}{48}(3n+2)(n-1)\\
&= \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{48}
\end{aligned}$$

2 Produits :

Notations : Soit E un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{C}$.

– On note $\displaystyle\prod_{a\in E} a$ la produit de tous les éléments de E.

– Si $E=\{a_i/i\in I\}$ avec I un ensemble non vide, $\displaystyle\prod_{a\in E} a$ se note aussi $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$.

– Si $E=\{a_m,a_{m+1},\dots,a_n\}$ avec $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\le n$, $\displaystyle\prod_{a\in E} a$ se note aussi $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{m\le i\le n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i$ et on a $\displaystyle\prod_{a\in E} a=\prod_{i=m}^{n} a_i=\prod_{m\le i\le n} a_i=\prod_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i=a_m a_{m+1}\cdots a_n$.

Exemples :

– Si $E=\{5,7,19,23\}$ alors $\prod_{x\in E} x=5\times 7\times 19\times 23=15295$.

– $\displaystyle\prod_{p=0}^{5} 2^p=2^0\times 2^1\times 2^2\times 2^3\times 2^4\times 2^5=2^{0+1+2+3+4+5}=2^{15}=32768$.

– $\displaystyle\prod_{p=0}^{7}(2p+1)=(2\times0+1)\times(2\times1+1)\times(2\times2+1)\times(2\times3+1)\times(2\times4+1)\times(2\times5+1)\times(2\times6+1)\times(2\times7+1)=2027025$.

Remarques :

– On convient que $\displaystyle\prod_{a\in\emptyset} a=1$.

– $\displaystyle\prod_{a\in E} a=\prod_{x\in E} x$, $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i=\prod_{j\in I} a_j$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k=\prod_{p=m}^{n} a_p$. Autrement dit, on peut remplacer la variable de multiplication par n'importe quelle autre variable sans changer la valeur du produit. On dit que la variable de multiplication est muette.

– Changements d'indices classiques : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k=\prod_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}=\prod_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$.

– $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k=\prod_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

- $\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$. En particulier, $\prod_{k=0}^{n} a = a^{n+1}$.
- $\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \prod_{i\in I} b_i$ et $\prod_{i=m}^{n}(a_i b_i) = \prod_{i=m}^{n} a_i \prod_{i=m}^{n} b_i$.
- $\prod_{a\in E}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{a\in E} a$ avec n le nombre des éléments de E, $\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i\in I} a_i$ avec n le nombre des éléments de I et $\prod_{i=m}^{n}(\lambda a_i) = \lambda^{n-m+1}\prod_{i\in I} a_i$.
- $\prod_{a\in E\cup F} a_i = \dfrac{\prod_{a\in E} a \prod_{a\in F} a}{\prod_{a\in E\cap F} a}$. En particulier, si $E\cap F=\emptyset$ alors $\prod_{a\in E\cup F} a_i = \prod_{a\in E} a \prod_{a\in F} a$. De même, $\prod_{i\in I\cup J} a_i = \dfrac{\prod_{i\in I} a_i \prod_{i\in J} a_i}{\prod_{i\in I\cap J} a_i}$ et si $I\cap J=\emptyset$ alors $\prod_{i\in I\cup J} a_i = \prod_{i\in I} a_i \prod_{i\in J} a_i$.

Un programme Python qui permet de calculer le produit d'une famille de nombres complexes :

```
def produit(E):
    P = 1
    for i in E:
        P *=i
    return(P)
```

- Produit des éléments de l'ensemble $E = 1, 6, 12, 38, 78, 109$:
```
In [1]: E = {1, 6, 12, 38, 78, 109}

In [2]: produit(E)
Out[2]: 23261472
```
- Produit du produit $\prod_{k=0}^{6} 2^k$:
```
In [3]: produit({2**k for k in range(7)})
Out[3]: 2097152
```
- Produit du produit $\prod_{k=0}^{7}(2k+1)$:
```
In [4]: produit({2*k + 1 for k in range(8)})
Out[4]: 2027025
```

Remarque : *Python* possède une commande *prod* du module *numpy* qui permet de calculer le produit d'une famille de nombres complexes :

```
In [1]: from numpy import prod
```

Calcul du produit $2\times 6\times 7\times 9$:

```
In [2]: prod([2, 6, 7, 9])
Out[2]: 756
```

Proposition 2.1 *Produit télescopique :*

Si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ est une famille de nombres complexes non nuls alors $\prod_{k=m}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a_n}{a_m}$.

Démonstration :

On a :

$$\prod_{k=m}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n-1} a_{k+1}}{\prod_{k=m}^{n-1} a_k} = \frac{\prod_{k=m+1}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n-1} a_k} = \frac{a_n \prod_{k=m+1}^{n-1} a_k}{a_m \prod_{k=m+1}^{n-1} a_k} = \frac{a_n}{a_m}$$

Remarque : Si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ est une famille de nombres complexes non nuls alors $\prod_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_m}$.

Exemples :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$. Calcul du produit $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$. On a :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$$

  car le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ est télescopique.

- Si $n \geq 2$. Calcul du produit $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. On a :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

  car les deux produits $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}$ et $\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}$ sont télescopiques.

- Si $n \in \mathbb{N}$. Calcul du produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k+1}$. On a :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2(k+1)+1}{2k+1} = \frac{2(n+1)+1}{2\times 1+1} = \frac{2n+3}{3}$$

  car le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2(k+1)+1}{2k+1}$ est télescopique.

3 Factorielle, coefficients binomiaux :

3.1 Factorielle :

Notation : On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

n! se lit "n factorielle" ou "factorielle de n".

Exemples :

- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
- $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

Remarques :

- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1)n!$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)! = (n+2)(n+1)n!$.
- Généralement, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, (n+k)! = (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)n!$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n(n-1)!$.
- $\forall n \geq 2, n! = n(n-1)(n-2)!$.
- Généralement, $\forall n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k$, on a $n! = n(n-1)\cdots(k+1)k!$.

Factorielle sous Python :

- Programme itératif :

```
def factorielle_iterative(n):
    S = 1
    for i in range(1, n + 1):
        S *= i
    return(S)

In [1]: factorielle_iterative(10)
Out[1]: 3628800
```

– Programme récursif :
```
def factorielle_recursive(n):
    if n == 0:
        return(1)
    return(n * factorielle_recursive(n - 1))

In [1]: factorielle_recursive(10)
Out[1]: 3628800
```
Remarque : *Python* possède une commande *factorial* du module *math* qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel :

```
In [1]: from math import factorial
```

– Calcul de 7! :
```
In [2]: factorial(7)
Out[2]: 5040
```

3.2 Coefficients binomiaux, formule du binôme :

Notation : On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\binom{n}{p}$ se lit "p parmi n".

Remarques :

– Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Si $n < p$, on convient que $\binom{n}{p} = 0$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{1} = n$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$.
– Généralement, $\forall n, k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exemples :

– $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 3 \times 5 = 35$.
– $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70$.
– $\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$.
– $\binom{12}{10} = \binom{12}{12-10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 6 \times 11 = 66$.

Coefficients binomiaux : *Python* possède une commande *binomial* du module *sympy* qui permet de calculer le coefficient binomial de deux entiers naturels :

```
In [1]: from sympy import binomial
```

– Calcul de $\binom{38}{14}$:
```
In [1]: binomial(23, 14)
Out[1]: 817190
```
– Calcul de $\binom{26}{15}$:
```
In [2]: binomial(26, 15)
Out[2]: 7726160
```

Propriété 3.1

$$\forall n,p\in\mathbb{N}^*,\ \binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :
On a :

$$\forall n,p\in\mathbb{N}^*,\ \binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}=\frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}=\frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Un programme Python qui calcule le coefficient binomial de deux entiers à l'aide de la formule $\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$:

```
def binomial(n, p):
    if p > n:
        return(0)
    if 2*p > n:
        n, p = n, n - p
    if p == 0:
        return(1)
    return(binomial(n - 1, p - 1) * n // p)
```

- Calcul de $\binom{23}{14}$:
  ```
  In [1]: binomial(23, 14)
  Out[1]: 817190
  ```
- Calcul de $\binom{26}{15}$:
  ```
  In [2]: binomial(26, 15)
  Out[2]: 7726160
  ```

Proposition 3.1 *Triangle de Pascal :*

$$\forall n,p\in\mathbb{N},\ \binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration :
Soit $n,p\in\mathbb{N}$.

- Si $n<p$ alors $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=0+0=0=\binom{n+1}{p+1}$.
- Si $n=p$ alors $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n}{n}+\binom{n}{n+1}=1+0=1=\binom{n+1}{n+1}=\binom{n+1}{p+1}$.
- Si $n>p$ alors :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} &&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p+1}\right)\\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right) &&= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)}\\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} &&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!}\\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Un programme Python qui calcule le coefficient binomial de deux entiers à l'aide de la formule du triangle du Pascal :

```
def binomial(n, p):
    if p > n:
        return(0)
    if 2*p > n:
        p = n - p
    if p == 0:
        return(1)
    return(binomial(n - 1, p) + binomial(n - 1, p - 1))
```

- Calcul de $\binom{23}{14}$:
```
In [1]: binomiale(23, 14)
Out[1]: 817190
```
- Calcul de $\binom{26}{15}$:
```
In [2]: binomiale(26, 15)
Out[2]: 7726160
```

Proposition 3.2 *Formule du binôme :*

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On convient que $\forall z \in \mathbb{C}, z^0 = 1$.

Démonstration :
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On va procéder par récurrence sur n.
On a $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1 = a^0 b^{0-0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{0-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.
Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b) a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n-k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Or, d'après *la formule du triangle de Pascal*, $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ donc :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}
\end{aligned}$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$. On déduit, d'après *le principe de récurrence*, que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Exemples : $\forall a, b \in \mathbb{C}$:

- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^0b^{2-0} + \binom{2}{1}a^1b^{2-1} + \binom{2}{2}a^2b^{2-2} = b^2 + 2ab + a^2$.
- $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^0b^{3-0} + \binom{3}{1}a^1b^{3-1} + \binom{3}{2}a^2b^{3-2} + \binom{3}{3}a^3b^{3-3} = b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$.
- $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^0b^{4-0} + \binom{4}{1}a^1b^{4-1} + \binom{4}{2}a^2b^{4-2} + \binom{4}{3}a^3b^{4-3} + \binom{4}{4}a^4b^{4-4} = b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + a^4$.
- $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^0b^{5-0} + \binom{5}{1}a^1b^{5-1} + \binom{5}{2}a^2b^{5-2} + \binom{5}{3}a^3b^{5-3} + \binom{5}{4}a^4b^{5-4} + \binom{5}{5}a^5b^{5-5} = b^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + a^5$.

Corollaire 3.3

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après *la formule du binôme*, $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.