USTHB- Faculté de Mathématiques		**Année 2016/2017**
Lic1 ST- Sections 10 et 11	**Examen final**	**Module : MATH1**

Exercice 1 : 1. Montrer que : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$

2. En déduire la somme de :

   a. $2+4+6+\dots+2n$, $n \geq 1$

   b. $1+3+5+\dots+(2n-1)$, $n \geq 1$

Exercice 2 : Soit : $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1+q+q^2+\dots+q^n$, $n \geq 0$, $q \in \mathbb{R}$

1. Montrer, pour $q \neq 1$, que : $u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. Donner, pour $|q| < 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n$.
3. Déduire de ce qui précède, la nature de la suite $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k3^k}$, $n \geq 1$

Exercice 3 : 1. $\text{sh}\, x = ?$ $\text{ch}\, x = ?$

2. Soit : $f(x) = \frac{\text{sh}^2 x}{\text{Log}(\text{ch}\, x)}$. Donner le **domaine de définition de f**
3. Donner la fonction $\tilde{f}$ **qui prolonge par continuité la fonction f en 0**

Exercice 4 : Soit : $f(x) = x\,e^x$

1) Ecrire au v(1) la formule de **Taylor- Lagrange** à l'ordre **2** de la fonction **f**.
2) En déduire l'équation de la tangente en **x = 1** et donner la position de la courbe de f par rapport à cette tangente au v(1).
3) **f** admet-elle un **extrémum** en **x = 1** ?
4) Déduire de 1) ou par le calcul, le **DL à l'ordre 2** de **f** au **v(1)**

Exercice 5 : Sachant que ($\mathbb{R}^*$, .) est un **groupe** où " **.** " est la multiplication usuelle.

1. Donner le symétrique de **−1** et le symétrique de **1**
2. le couple ({−1, 1} , .) est-il un **sous-groupe** de ($\mathbb{R}^*$, .) ? Justifiez votre réponse.

Réception le : 18-01 **à :** 14H **salle :** D118

9=0

Ex 1 1°/ $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2},\ n \geq 1$ $\boxed{\text{Corrigé : Examen final}}$

(1,5) Dém : Par récurrence (Vue en cours et en TD)

(1) 2°/ a. $2+4+6+\cdots+2n = 2(1+2+3+\cdots+n) = \cancel{2}\,\dfrac{n(n+1)}{\cancel{2}} = n(n+1),\ \forall n \geq 1$

(1,5) b. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = \boxed{1+2+3+4+5+\cdots+(2n-1)+2n} - \boxed{2+4+6+\cdots+2n}$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = n(2n+1) - n(n+1) = n^2$$

Ex 2 $U_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n,\ n \geq 0,\ q \in \mathbb{R}$ (Exercice vu en TD avec 2^k au lieu de 3^k)

(1,5) 1°/ $qU_n = q+q^2+q^3+\cdots+q^n+q^{n+1}$

$\Rightarrow U_n - qU_n = 1-q^{n+1} \Rightarrow U_n(1-q) = 1-q^{n+1} \Rightarrow U_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1$

(0,5) 2°/ Pour $|q|<1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q},\ |q|<1$

(2) 3°/ $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{(n+1)3^{n+1}} > 0$, donc (V_n) est croissante (strictement)

on a : $\dfrac{1}{k3^k} \leq \dfrac{1}{3^k},\ \forall k \geq 1$

D'où $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k3^k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k = \dfrac{1}{1-1/3} = 3/2$

Conclusion : la suite (V_n) est croissante, majorée, donc convergente

Ex 3 (1) 1°/ $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(1) 2°/ $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\log \operatorname{ch} x}$, $D = \{x \in \mathbb{R} / \log \operatorname{ch} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \operatorname{ch} x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

(2) 3°/ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ (F.I), on applique la règle de L'HOSPITAL

on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sh}^2 x)'}{(\log \operatorname{ch} x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\frac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\operatorname{ch}^2 x = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

Ex 4 1°/ $f(x) = xe^x$, $f(1) = e$ ‖ $f'(x) = (1+x)e^x$, $f'(1) = 2e$ ‖ $f''(x) = (2+x)e^x$, $f''(1) = 3e$

(2) $f'''(x) = (3+x)e^x$, $f'''(c) = (3+c)e^c$ ‖ La formule de (T.L) à l'ordre 2 au V(1) est donc :

$f(x) = f(1) + \dfrac{(x-1)}{1!} f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \dfrac{(x-1)^3}{3!} f'''(c) = \underline{e + 2e(x-1)} + \dfrac{3}{2} e(x-1)^2 + \dfrac{(x-1)^3}{3!}(3+c)e^c$

(1) 2°/ L'équation de la tangente en $x=1$ est : $y = e + 2e(x-1) = 2ex - e = f(1) + (x-1)f'(1)$

D'où $f(x) - y \simeq \frac{3}{2} e(x-1)^2 \geq 0$, donc la courbe est au-dessus de la tangente au V(1)

(0,5) 3°/ Comme $f'(1)$ ∃ et $f'(1) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum en $x=1$

(1,5) 4°) Le DL se déduit de 1°/ . $f(x) = e + 2e(x-1) + \frac{3}{2} e(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Ex 5 Dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, l'élément neutre est $e = 1$

(1,5) 1°/ Le symétrique de -1 est -1 car $(-1)\cdot(-1) = 1$. Celui de 1 est 1, car $1 \cdot 1 = 1$

(1,5) 2°/ $(\{-1,1\}, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ car :

$\forall x, y \in \underbrace{\{-1,1\}}_{E}$ on a : $x \cdot y^{-1} \in \{-1,1\}$, $\begin{cases} x=y=1 \Rightarrow x\cdot y^{-1} = 1\cdot 1 = 1 \in E \\ x=y=-1 \Rightarrow x\cdot y^{-1} = (-1)\cdot(-1) = 1 \in E \\ x=1,\ y=-1 \Rightarrow x\cdot y^{-1} = 1\cdot(-1) = -1 \in E \\ x=-1,\ y=1 \Rightarrow x\cdot y^{-1} = (-1)\cdot(1) = -1 \in E \end{cases}$

Rmq Le DL par le calcul de l'ex 4

$f(x) = xe^x$, on pose $t = x-1 \Rightarrow f(x) = f(t+1) = (t+1)e^{t+1} = e(t+1)e^t$, $t \in V(0)$

D'où $f(x) = f(t+1) = F(t) = e(t+1)e^t = e(t+1)\left(1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + o(t^2)\right) = e + 2et + \frac{3}{2} e t^2 + o(t^2)$

$= e + 2e(x-1) + \frac{3}{2} e(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ (on ne prend que les termes de degré ≤ 2)

USTHB - Faculté de Mathématiques
MATH1 - SM - Section 3

le 06/01/2016

EXAMEN FINAL

(*Les calculatrices et téléphones portables sont interdits*)

Exercice 1 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par :*

$$u_0 \leq v_0 \;;\; u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4},$$

où $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.*
2. *Etudier la monotonie des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.*
3. *On considère la suite $(\omega_n)_n$ définie par $\omega_n = v_n - u_n$. Montrer que $(\omega_n)_n$ est une suite géométrique et calculer sa limite.*
4. *En déduire que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.*

Exercice 2 *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & si \;\; x \leq 0, \\ \cos x + \sin x & si \;\; x > 0. \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.*
2. *Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.*
3. *La fonction f est-elle de classe C^1 au point $x = 0$?*
4. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une solution unique.*

Exercice 3 *On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.*

1. *Calculer $g(2)$, $g(1/2)$ et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 2$.*
2. *L'application g est-elle injective? Surjective? Bijective?*
3. *Soit h la restriction de g sur $]-1, 1[$. Calculer $J := h(]-1, 1[)$.*
4. *Montrer que $h :]-1, 1[\to J$ est bijective et déterminer h^{-1}.*

Exercice 4 *Linéariser l'expression* $\cos(2x) \cdot \sin^2 x$.

Barème :

Exercice 1 = 3,5 points, Exercice 2 = 7,5 points, Exercice 3 = 6 points, Exercice 4 = 3 points.

Corrigé de l'examen final

Exercice 1 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par :

$$u_0 \leq v_0 \;;\; u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4},$$

où $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

1) Démontrons la proposition suivante $\mathcal{P}(n) : \forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq v_n$.

i) Pour $n = 0$, nous avons, d'après les données, $u_0 \leq v_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

ii) L'hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} - \frac{3v_n + u_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

0,5

2)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{v_n - u_n}{4} \geq 0.$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n + u_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} \leq 0.$$

Donc $(v_n)_n$ est décroissante.

01

3a) On a $\omega_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}\omega_n$. Donc $(\omega_n)_n$ est une suite géométrique de raison 1/2 et de premier terme $\omega_0 = v_0 - u_0$.

3b) On a $\omega_n = \omega_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = 0$.

4) Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ et puisque $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 2 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & \text{si } x \leq 0, \\ \cos x + \sin x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1) Continuité :

1a) Sur $]-\infty, 0[$:

$$f(x) = e^{-x^2} + x,$$

est continue car c'est la somme et la composée de fonctions continues sur $]-\infty, 0[$.

1b) sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) = \cos x + \sin x,$$

est continue car c'est la somme de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

1c) Au point $x = 0$: On a

$$f(0) = 1,\ \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} e^{-x^2} + x = 1,$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \cos x + \sin x = 1,$$

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0)$. Par conséquent, f est continue au point $x = 0$ et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Dérivabilité :

2a) Sur $]-\infty, 0[$:

$$f(x) = e^{-x^2} + x,$$

est dérivable car c'est la somme et la composée de fonctions dérivables sur $]-\infty, 0[$. 0,5

2b) sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) = \cos x + \sin x,$$

est dérivable car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

2c) Au point $x = 0$: On a

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^{-x^2} + x - 1}{x}.$$

En appliquant la règle de L'hôpital, on obtient

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{\left(e^{-x^2} + x - 1\right)'}{1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-2xe^{-x^2} + 1}{1} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1,$$

et

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\cos x + \sin x}{x}.$$

En appliquant toujours la règle de L'hôpital, on trouve

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{(\cos x + \sin x)'}{1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-\sin x + \cos x}{1} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

D'où

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Ainsi f est dérivable au point $x = 0$. Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$. 2

On a d'après 2a), 2b) et 2c)

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} + 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ -\sin x + \cos x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1

3) On a

$$f'(0) = 1, \ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f'(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} -2xe^{-x^2} + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -\sin x + \cos x = 1.$$

1

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f'(x) = f'(0)$. Par conséquent, f' est continue au point $x = 0$ et donc f est de classe C^1 au point $x = 0$.

1,5

4) Nous avons d'après 1) et 2) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\left(\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)\right)(f(0)) = -\infty < 0.$$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $f'(x) = -2xe^{-x^2} + 1 > 0$ puisque $x < 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe dans $]-\infty, 0]$ une solution unique de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3 :

1

On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1a) $g(2) = g(1/2) = 2/5$.

1b) $g(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$, mais comme $\Delta = -15$. Donc, il n'existe pas de solutions réelles.

1,5

2a) L'application g n'est pas injective puisque nous avons $2 \neq 1/2$ mais $g(2) = g(1/2)$.

2b) L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective car pour $y = 2$, il n'existe pas un élément x dans $\mathbb{R}$ tel que $g(x) = 2$.

De 2a) ou de 2b) on en déduit que g n'est pas bijective.

1

3) Soit h l'application définie de $]-1,1[\to \mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Puisque h est une fraction rationnelle, donc h est continue et dérivable sur $]-1,1[$. De plus, $\forall x \in]-1,1[$, $h'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0$. h est donc strictement croissante. Par conséquent

$$J := h(]-1,1[) = \left]\lim_{x\overset{>}{\to}-1} h(x), \lim_{x\overset{<}{\to}1} h(x)\right[= \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

0,5

4) Nous avons h est strictement croissante et continue sur $]-1,1[$, donc h est bijective de $]-1,1[$ dans $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$. Il existe alors une fonction réciproque notée $h^{-1} :]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\to]-1,1[$ définie par $h(x) = y \Leftrightarrow h^{-1}(y) = x$, pour $x \in]-1,1[$ et $y \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$.

2

On a $h(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0$.

Pour $y = 0$ on aura $x = 0$. Sinon, $\Delta = 1 - 4y^2 > 0$ puisque $y \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$. On obtient $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ ou $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$.

Par ailleurs, puisque $h(1/2) = 2/5 \Leftrightarrow h^{-1}(2/5) = 1/2$ et en remplaçant par $y = 2/5$ dans x_1 et x_2, on trouve $x_1 = 2$ et $x_2 = 1/2$. Il en découle que

$$h^{-1}(y) = x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Exercice 4 :

3

Soit $A = \cos(2x).\sin^2(x)$. On a $\cos(2x) = \frac{e^{i2x}+e^{-2ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, donc

$$\sin^2(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2}{-4} = \frac{-1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{8}\left(e^{i2x} + e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2\right) \\ &= \frac{-1}{8}\left[e^{4ix} + e^{-4ix} - 2\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 2\right] \\ &= \frac{-1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

U.S.T.H.B
FACULTE DE MATHEMATIQUES

1ère ANNEE SM Section 3
7 JANVIER 2015

EPREUVE FINALE

EXERCICE 1:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation: $z^5 = 1$.

2. Linéariser l'expression : $\cos^3 x$.

EXERCICE 2:

Soit la suite numérique $(u_n)_n$ définie par:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 + \frac{5}{36}, \forall\, n \geq 0$$

1. Montrer que $\forall\, n \geq 0$: $\frac{1}{6} < u_n < \frac{5}{6}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone.

3. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente. Calculer sa limite.

4. Soit $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer $\sup A, \max A, \inf A$ et $\min A$ s'ils existent.

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

1. Peut-on prolonger f par continuité en 0? Si oui donner le prolongement $\tilde{f}$.

2. La fonction $\tilde{f}$ ainsi obtenue est-elle dérivable en 0?

3. Peut-on appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $\tilde{f}$ sur $[\frac{2}{3\pi}, \frac{3}{\pi}]$? Justifier.

4. Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à $\tilde{f}$ sur $[-1, 2]$? Justifier.

EXERCICE 4:

Soit

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\tan x - \sin x}$$

1. Donner le D.L de f à l'ordre 3 et au voisinage de 0.

2. En déduire: $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$.
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.
$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^9)$.
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

S013
MathI

Corrigé succint de L'epreuve finale.

Exo 1:

① $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ et $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.

$$z^5 = 1 \Rightarrow \begin{cases} r^5 = 1 \\ \text{et} \\ 5\theta = 0 + 2k\pi \quad 0 \le k \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \frac{2k\pi}{5} \quad 0 \le k \le 4. \end{cases}$$

$k=0$: $z_0 = 1.e^{\frac{2i0\pi}{5}} = 1$

$k=1$: $z_1 = 1.e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $S = \{z_0, z_1, z_2, z_3 \text{ et } z_4\}$. (4 pts)

$k=2$: $z_2 = 1.e^{\frac{4i\pi}{5}}$

$k=3$: $z_3 = 1.e^{\frac{6i\pi}{5}}$

$k=4$: $z_4 = 1.e^{\frac{8i\pi}{5}}$

② $$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3$$ (3 pts)
$$= \frac{1}{8}\left[e^{-3ix} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} + e^{3ix}\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[2\cos 3x + 6\cos x\right] = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

Exo 2: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{5}{36}$.

1) Par récurrence. (1 pt)

2) $f(x) = x^2 + \frac{5}{36}$; $f'(x) = 2x > 0$ car $\frac{1}{6} < u_n < \frac{5}{6}$. (1 pt)

$f \nearrow$ alors $(u_n)_n$ monotone.

$u_1 - u_0 = -\frac{1}{9} < 0$. Enfin $(u_n)_n \searrow$.

alors $(u_n)_n$ Convergente. (1 pt)

3) $\begin{cases} (u_n)_n \searrow \\ (u_n)_n \text{ minorée par } \frac{1}{6} \end{cases}$ (0,5)

Soit l sa limite, alors $l^2 + \frac{5}{36} = l \Rightarrow l^2 - l + \frac{5}{36} = 0$.

$l_1 = \frac{1}{6}$ et $l_2 = \frac{5}{6}$. (0,5)

$(u_n)_n$ étant décroissante alors $l = l_1 = \frac{1}{6}$.

4/ $A = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\operatorname{Sup} A = U_0 = \frac{1}{2} \in A$ alors $\operatorname{Max} A = \frac{1}{2}$. $(0{,}5 \times 2)$

$\operatorname{Inf} A = l = \frac{1}{6} \notin A$ alors $\operatorname{Min} A$ n'existe pas. (05×2)

Exo3:

1) $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ $\begin{cases} \text{car } \lim_{x\to 0} x = 0 \\ \text{et } -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \text{ (bornée)} \end{cases}$ (1pt)

Alors f admet un prolongement par continuité en 0.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ qui n'existe pas. (1pt)

Alors $\tilde{f}$ non dérivable en 0.

3) toutes les hypothèses du T. V. I ~~sont~~ vérifiées donc on peut l'appliquer à $\tilde{f}$ sur $[\frac{2}{3\pi}, \frac{3}{\pi}]$ (1pt)

4) Par contre, vue que $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0 alors on ne peut pas appliquer le théorème des A.F à $\tilde{f}$ sur $[-1, 2]$. (1pt)

Exo4:

$\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$. (3pts)

et $\tan x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$.

d'où $f(x) = 1 + o(x^3)$.

et $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Universite des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de mathématiques — Année: 2013 – 2014

1ère Année Lic ST — Section: 25 — Module: Math1

Epreuve finale 1

Durée: 1h30min

Exercice 1 (7 points).

Soient f et g deux applications définies par:

$$f : [0,1] \to [0,2], \quad x \longmapsto f(x) = 2 - x \qquad \text{et} \qquad g : [0,2] \to [0,1], \quad x \longmapsto g(x) = (x-1)^2.$$

1. *Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Conclure.* (1 pt)
2. *Déterminer $f^{-1}(\{0\})$. f est elle surjective?* (2 pts)
3. *Déterminer $g^{-1}\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$.* (1 pt)
4. *A-t-on $g \circ f = g$?* (1 pt)
5. *Montrer que l'application $g \circ f$ est bijective et déterminer l'application réciproque $(g \circ f)^{-1}$.* (2 pts)

Exercice 2 (7 points).

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. *Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite (u_n) est constante et déterminer cette valeur.* (1 pt)
2. *On suppose que la suite (u_n) vérifie la propriété: $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$. Montrer que (u_n) est une suite positive croissante qui tend vers $+\infty$.* (2 pts)
3. *On suppose que $u_1 = \frac{1}{2}$.*
   i) *Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{n}$.* (1 pt)
   ii) *Montrer que la suite (u_n) est décroissante.* (1 pt)
   iii) *En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.* (2 pts)

Exercice 3 (3 points).

Soit $m \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie par: $$f(x) = \left(\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^{m}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.* (1 pt)
2. *Etudier suivant les valeurs du paramètre m, la limite de f quand x tend vers 0.* (1.5 pts)
3. *Pour quelle valeur de m peut-on définir $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-\pi; \pi[$.* (0.5 pt)

Exercice 4 (3 points).

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x}; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1 - \sqrt{x}}; \qquad \lim_{x \to 1} \left(x - 2 + \sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

2013/2014

U.S.T.H.B
Institut de MATHS

Correction de l'epreuve finale 1

Excercice 1:

$f : [0,1] \longrightarrow [0,2]$ $\qquad$ $g : [0,2] \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto f(x) = 2-x$ $\qquad$ $x \longmapsto g(x) = (x-1)^2$

① Determiner les applications $f\circ g$ et $g\circ f$. Conclure

$$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = 2 - g(x) = 2-(x-1)^2 = -x^2-2x+1$$

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = (f(x)-1)^2 = [(2-x)-1]^2 = (1-x)^2 = x^2-2x+1$$

on remarque que $f\circ g \neq g\circ f$.

② Determiner $f^{-1}(\{0\})$ - f est-elle surjective?

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x\in[0,1] / f(x)\in\{0\}\} = \{x\in[0,1] / f(x) = 2-x = 0\}$$

$$= \{x\in[0,1] / x = 2\} = \emptyset$$

f est-elle surjective?

Non car $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $[0,1]$

c'est à dire $y=0\in[0,2]$ n'a pas d'antecedant dans $[0,1]$.

③ Determiner $g^{-1}(]0,\frac{1}{2}[)$.

$$g^{-1}(]0,\tfrac{1}{2}[) = \{x\in[0,2] / g(x)\in]0,\tfrac{1}{2}[\} = \{x\in[0,2] / 0<(x-1)^2<\tfrac{1}{2}\}$$

$$= \left]\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right[.$$

④ A-t-on $g\circ f = g$?

$g\circ f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ $\qquad$ et $\qquad$ $g : [0,2] \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto (x-1)^2$ $\qquad\qquad$ $x \longmapsto g(x) = (x-1)^2$

D'où $g\circ f \neq g$ car l'ensemble de depart de $g\circ f$ est $[0,1]$ Mais celui de g est $[0,2]$. $g\circ f = g$ sur $[0,1]$.

5) Montrer que $g \circ f$ est bijective et déterminer $(g \circ f)^{-1}$.

$$g \circ f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto (x-1)^2$$

Soit $y \in [0,1]$.

$$(g \circ f)(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y}$$
$$\overset{x \in [0,1]}{\Longleftrightarrow} 1 - x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

D'où pour tout $y \in [0,1]$, $\exists$ un seul $x = 1 - \sqrt{y} \in [0,1]$ tq $f(x) = y$. Donc $g \circ f$ est bijective.

$g \circ f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto (x-1)^2$ est bijective donc admet une fonction réciproque $(g \circ f)^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto 1 - \sqrt{x}$.

Exercice 2 : $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{\sqrt{n}} & n \in \mathbb{N}^* \\ U_1 = a \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

$\forall n \geq 1$. $U_{n+1} = U_n = U_1 \Leftrightarrow \forall n \geq 1 \ U_1 = \dfrac{U_1^2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \forall n \geq 1 \ a = \dfrac{a^2}{\sqrt{n}}$

D'où : $a^2 = a\sqrt{n} \ \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a(a - \sqrt{n}) = 0 \ \forall n \geq 1$

Si $a = 0$ U_n est constante.

$\sqrt{n} = a \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ce qui est impossible.

2) Montrer que U_n est une suite positive croissante qui tend vers $+\infty$.

on a : $\forall n \geq 1$. $U_n \geq \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \forall n \geq 1 \ U_n > 0$.

Donc la suite U_n est positive.

Montrons que la suite U_n tend vers $+\infty$

On a : $\forall n \geqslant 1 \quad U_n \geqslant \sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Montrons que la suite U_n est croissante.

puisque $\forall n \geqslant 1 \quad U_n > 0$ Montrons que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$

$\forall n \geqslant 1 : \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{U_n^2}{\sqrt{n}}}{U_n} = \frac{U_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1$ car $\forall n \geqslant 1 \quad U_n \geqslant \sqrt{n}$

D'où la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

3°. On suppose que $U_1 = \frac{1}{2}$. Montrer que $\forall n \geqslant 1 \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{n}$

Recurence :

i) La popriété est vrai pour $n = 1$ car $0 \leqslant U_1 = \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{1}$.

ii) Supposons que $0 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{n}$ pour n fixé $(n \in \mathbb{N}^*)$

et montrons que $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1}$.

On a : $0 \leqslant U_{n+1} = \frac{U_n^2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$

D'où la popriété est vraie pour $(n+1)$

iii) Conclusion : $\forall n \geqslant 1. \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{n}$.

4°) Montrer que la suite (U_n) est decroissante

On a : $\forall n \geqslant 1 : U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^2}{\sqrt{n}} - U_n = \frac{U_n^2 - U_n\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{U_n(U_n - \sqrt{n})}{\sqrt{n}}$

Comme $U_n \geqslant 0$ et $U_n \leqslant \sqrt{n} \quad \forall n \geqslant 1$

Donc $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$. D'où la suite (U_n) est decroissante

5) En deduire que la suite U_n est convergente et calculer sa limite.

U_n est decroissante et minorée par 0 donc U_n est convergente et sa limite verifie $\ell = \frac{\ell^2}{\sqrt{n}} \; \forall n \geqslant 1$

D'ou $\ell = 0$. ($\ell = \sqrt{n}$ refusé).

Excercice3:

$$f(x)=\left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^m \cdot \quad (m\in \mathbb{N}^*)$$

① Determiner le domaine de définition de f.

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-\cos x>0\}=\{x\in\mathbb{R}/\cos x<1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}/\cos x\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}.$$

② Etudier suivant les valeurs du parametre m, la limite de f quand x tend vers 0

On a: $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. D'où:

$$f(x)=\left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)^m=\left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\right)^m$$

Donc pour x au voisinage de 0 (par exemple $x\in]-\pi,\pi[$) et $x\neq 0$

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m & \text{si } x>0\\[2ex] \left(-\dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m & \text{si } x<0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m\\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(-1)^m\left(\dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m\end{cases}$$

Or on a:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m=\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^m$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{2\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2x}}\right)^m=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^m}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^m}\right\}=\left(\sqrt{2}\right)^m.$$

D'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^m \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=(-1)^m\left(\sqrt{2}\right)^m.$$

3) pour quelle valeur de m peut-on definir $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-\pi, \pi[$.

- f est continue sur $]-\pi,\pi[$ ssi f est continue en 0 or f est continue en $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$.

pour que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, il faut que m soit pair. Ainsi si m pair, on peut definir $f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = (\sqrt{2})^m$.

et f sera continue sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 4:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\right\} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{\cos(2x)}{1-\sqrt{x}}\right\}$ (voir cours).

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\left(x-2+\sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right\} = \lim\limits_{x\to 1}\left\{e^{h(x)[g(x)-1]}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left\{e^{h(x)[g(x)-1]}\right\} = \lim\limits_{x\to 1}\left\{e^{\frac{1}{x-1}\left(x-3+\sqrt{x^2+3}\right)}\right\}$

Mais $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{(x-3)+\sqrt{x^2+3}}{x-1}\right\} = \lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{(x-3)^2-(x^2+3)}{(x-1)\left[(x-3)+\sqrt{x^2+3}\right]}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{-6x+6}{(x-1)\left[(x-3)+\sqrt{x^2+3}\right]}\right\} = \lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{-6}{(x-3)+\sqrt{x^2+3}}\right\}$

$= \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

D'où $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\left(x-2+\sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right\} = e^{\frac{3}{2}}$.

U.S.T.H.B **Math 1, 1 Lic ST**

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES **Section 15, 2013-2014**

Rattrapage:

Exercice 1 [2,5 pts]:

Pour tout x, y dans $\mathbb{R}-\{0\}$, on pose $x * y = \left|\frac{x}{y}\right|$. Dans $\mathbb{R}-\{0\}$, $*$ est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? admet-elle un élément neutre ?

Exercice 2 [3 pts]:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < |x-1|$.

Exercice 3 [6 pts]:

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x + \operatorname{Log} 2x}{e^x + x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\operatorname{Log}(1+2x)}, \quad \lim_{x\to 0^+} |\operatorname{Log} 2x|^{-x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\sin x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x, \quad \lim_{x\to-\infty} (x+1)^2 \exp(-x^2-x-1).$$

Exercice 4 [8,5 pts]:

Soit $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

1) Montrer que si $x \notin [-1, 1]$, alors on a $f'(x) = \dfrac{x\,P(x)}{(x+1)^2 f(x)}$, où

$$P(x) = x^2 + x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta) \text{ et } \alpha < -1, \ 0 < \beta < 1.$$

2) **Étudier la fonction f et donner son tableau de variation et son graphe.**

(On pourra utiliser que $\alpha \approx -\dfrac{16}{10}$ et que $f(\alpha) \approx -\dfrac{33}{10}$.)

U.S.T.H.B Math 1, 1 Lic ST

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES Section 15, 2013 2014

Correction du rattrapage:

Exercice 1 [2,5 pts]:

Pour tout x, y dans $\mathbb{R}-\{0\}$, on pose $x * y = \left|\frac{x}{y}\right|$. Dans $\mathbb{R}-\{0\}$, $*$ est une loi interne (le vérifier !) 0,5. Comme $1*2 = 1/2 \neq 2 = 2*1$, donc $*$ n'est pas commutative 0,5. Comme $(1*1)*2 = 1/2 \neq 2 = 1*(1*2)$, donc $*$ n'est pas associative 0,5. Si e est un élément neutre de la loi $*$, alors $|e| = e*1 = 1$ ie $e = \pm 1$. Or $(-1)*(-1) = 1 \neq -1$, donc $e \neq -1$. D'autre part, $1*2 = 1/2 \neq 2$ entaîne que $e \neq 1$. Donc la loi $*$ n'admet pas d'élément neutre 1.

Exercice 2 [3 pts]:

L'inéquation (I) : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} < |x-1|$ est définie si $x \in \mathcal{D} =]-1, +\infty[$. Si $x \in \mathcal{D}$, alors $(I) \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) > 1 \Leftrightarrow x(x^2-x-1) > 0$ 1. Remarquons que les racines de x^2-x-1 sont $x_1 = (1-\sqrt{5})/2$ et $x_2 = (1+\sqrt{5})/2$ et que $-1 < x_1 < 0 < x_2$ 1. Comme 0 n'est pas racine de (I), donc :

Si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, alors

$(I) \Leftrightarrow x^2-x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in (]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[) \cap \mathbb{R}^{+*} =]x_2, +\infty[$;

Si $x \in]-1, 0[$, alors $(I) \Leftrightarrow x^2-x-1 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[\cap]-1, 0[=]x_1, 0[$

Finalement, l'ensemble des solutions de (I) est $\mathcal{S} =]x_1, 0[\cup]x_2, +\infty[$ 1

Exercice 3 [6 pts](1×6):

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x + \operatorname{Log} 2x}{e^x + x^3} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1 + (\cos x)/(\operatorname{Log} 2x)}{1 + (x^3/e^x)}\right)\left(\frac{(\operatorname{Log} 2x)}{e^x}\right).$$

Donc $l_1 = \lim_{x\to+\infty} (\operatorname{Log} 2x)/e^x = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur le Log)

$$l_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\operatorname{Log}(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{2x} \frac{2x}{\operatorname{Log}(1+2x)}$$ et

$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{Log}(1+2x)} = 1 \Rightarrow l_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{2x((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2)} = 1/3$.

$$l_3 = \lim_{x\to 0^+} |\operatorname{Log} 2x|^{-x} = \lim_{x\to 0^+} \exp(-x \operatorname{Log}|\operatorname{Log} 2x|)$$ ie

$$l_3 = \lim_{t\to+\infty} \exp\left(-\frac{\operatorname{Log}(\operatorname{Log} 2t)}{t}\right) = \exp(0) = 1.$$

$$l_4 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\exp(x \operatorname{Log} x) - 1}{x \operatorname{Log} x}\right)\left(\frac{x}{\sin x} \operatorname{Log} x\right) = 1.(-\infty) =$$

$-\infty$. En effet $\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{Log} x = \lim_{t\to+\infty} (-\operatorname{Log} t)/t = 0$, et comme $\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, donc en posant $u = x \operatorname{Log} x$, on voit que $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\exp(x \operatorname{Log} x) - 1}{x \operatorname{Log} x}\right) = 1$

$$l_5 = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$$
donc $l_5 = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\exp[y\mathrm{Log}\,(1+1/y)]$
ie $l_5 = \lim_{t\to0^+}\exp[\mathrm{Log}\,(1+t)/t] = \exp 1 = e$.

$l_6 = \lim_{x\to-\infty}(x+1)^2\exp(-x^2-x-1) = e^{-1}\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^2x^2\exp(-x^2-x)$,
donc $l_6 = e^{-1}\lim_{x\to-\infty}x^2\exp(-x^2-x) = \lim_{x\to-\infty}\exp[2\,\mathrm{Log}\,|x|-x^2-x]$
ie $l_6 = \lim_{x\to-\infty}\exp[-x^2(+1-((2\,\mathrm{Log}\,|x|)/(x^2))+1/x)] = \exp[-\infty] = 0$.
On peut aussi utiliser la règle de l'hôpital pour calculer les limites l_1, l_2, l_4, l_6.

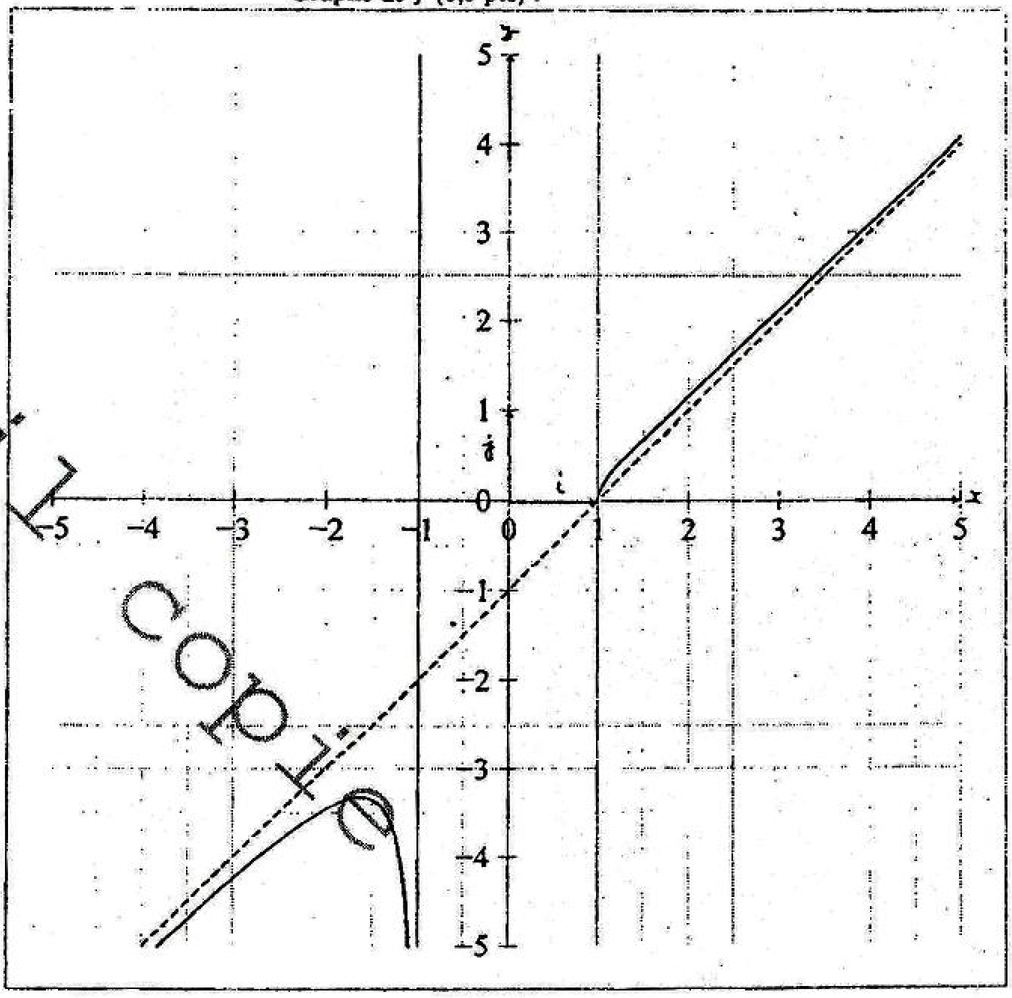
Exercice 4 [8,5 pts]:

1) la fonction $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est définie dans $\mathcal{D} = \mathbb{R}-[-1,1[$ 0,5.
Posons $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{u(x)}$, alors pour $x\notin[-1,1]$, on a $f'(x) = (xg(x))' = \frac{2\,u(x)+x\,u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\left[\frac{2(x^2-1)}{(x+1)^2}+\frac{2\,x}{(x+1)^2}\right] = \frac{P(x)}{(x+1)^2g(x)}$,
où $P(x) = x^2+x-1 = (x-\alpha)(x-\beta)$ et
$\alpha = (-1-\sqrt{5}/2) < -1$, $0<\beta = (-1+\sqrt{5}/2) < 1$ (le vérifier !) 1.
2) On a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 0,5.
Comme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x+1}} = 1$ 0,5 et que
$f(x)-x = x(g(x)-1) = \frac{x}{\sqrt{u(x)}+1}(u(x)-1) = \left(\frac{-2\,x}{1+x}\right)\left(\frac{1}{g(x)+1}\right)$,
donc $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = -1$ 1 ie la droite d'équation $Y = X-1$ est une asymptote oblique à la courbe 0,5. De plus, si $x\geq1$, on a $f(x)-(x-1) = g(x)\,(x-\sqrt{x^2-1})\geq0$ (courbe au dessus de l'asymptote), si $x<-1$ on a $f(x)-(x-1) = g(x)\,(x+\sqrt{x^2-1})\leq0$ (courbe en dessous de l'asymptote) 0,5.
On a aussi que $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = (-1)(+\infty) = -\infty$ 0,5 ie $Y = -1$ est une asymptote verticale à la courbe 0,5.
D'autre part le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$ ie $P(x)\leq0 \Leftrightarrow x\in[\alpha,\beta]$ 0,5. De plus $f'_d(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} x\sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+1)}} = +\infty$ 0,5.
Enfin, on vérifie que (le faire !) si $x\notin[-1,1]$, on a $f''(x) = \frac{(x-2)}{g(x)\,(x^2-1)(x+1)^2}$.
Cela montre que $x=2$ est un point d'inflexion (voir le cours) 1.
De plus, comme $\alpha^2 = 1-\alpha$, donc $\alpha^3 = \alpha-\alpha^2$, $\alpha^3-\alpha^2 = 3\alpha-2$,
$(f(\alpha))^2 = \frac{\alpha^3-\alpha^2}{\alpha+1} = \frac{(3\alpha-2)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = 5\beta+8$ (vu que $\alpha.\beta = \alpha+\beta = -1$).
Posons $M = f(\alpha)$.

Tableau de variation de f (0,5 pts) :

x	$-\infty$		α		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$ $-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe de f (0,5 pts) :



Remarque :

La correction de certaines questions n'est pas détaillée; dans ce cas il faut faire comme on a vu en TD.