Nombres complexes

Essaidi Ali

16 octobre 2017

1 Nombres complexes :

1.1 Représentation algébrique d'un nombre complexe :

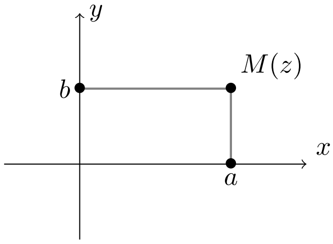
Définition 1.1 *Un nombre complexe z est un nombre qui s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Cette écriture s'appelle la représentation algébrique du nombre complexe z.*
- *a s'appelle la partie réelle de z et on la note $\Re e(z)$.*
- *b s'appelle la partie réelle de z et on la note $\Im m(z)$.*
- *L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.*

Remarques :
- Égalité de deux nombres complexes : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z = z' \iff (\Re e(z) = \Re e(z')$ et $\Im m(z) = \Im m(z'))$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, z = 0 \iff \Re e(z) = \Im m(z) = 0$.
- Addition et multiplication :
$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \text{ et } (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
- Carré d'un nombre complexe : Si $z \in \mathbb{C}$ de représentation algébrique $z = x + iy$ alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \Im m(z) = 0$.
- On dit qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si $\Re e(z) = 0$. L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$ et on a $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}/\Re e(z) = 0\} = \{ix/x \in \mathbb{R}\}$.

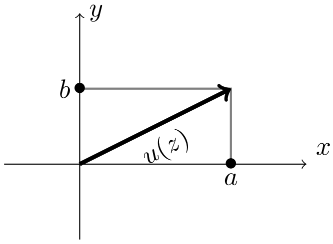
Nombres complexes sous Python : Pour construire le nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$, on tappe $z = a + bj$ ou $z = \text{complex}(a, b)$.
Sous *Python*, j désigne le nombre complexe i :
- Définir les deux nombres complexes $a = 2 + i$ et $b = 3 + 2i$:
```
In [1]: a = 2 + 1j
In [2]: b = complex(3, 2)
```
- Partie réelle de a :
```
In [3]: a.real
Out[3]: 2.0
```
- Partie imaginaire de a :
```
In [4]: a.imag
Out[4]: 1.0
```
- Calcul de $a + b$:
```
In [5]: a + b
Out[5]: (5+3j)
```
- Calcul de ab :
```
In [6]: a * b
Out[6]: (4+7j)
```
- Calcul de a/b :
```
In [7]: a / b
Out[7]: (0.6153846153846154-0.07692307692307691j)
```
- Calcul de a^5 :
```
In [8]: a**5
Out[8]: (-38+41j)

In [7]: pow(a, 5)
Out[7]: (-38+41j)
```

Définition 1.2 *On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct.*

– *Si z est un nombre complexe de représentation algébrique $z = a + ib$ alors on dit que le point $M(a, b)$ du plan $\mathscr{P}$ est associé à z.*
– *Si $M(a, b)$ est un point du plan $\mathscr{P}$ alors le nombre complexe $z = a + ib$ s'appelle l'affixe de M et on note $M(z)$.*



– *Si z est un nombre complexe de représentation algébrique $z = a + ib$ alors on dit que le vecteur $u(a, b)$ est associé à z.*
– *Si $u(a, b)$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$ alors le nombre complexe $z = a + ib$ s'appelle l'affixe de u et on note $u(z)$.*



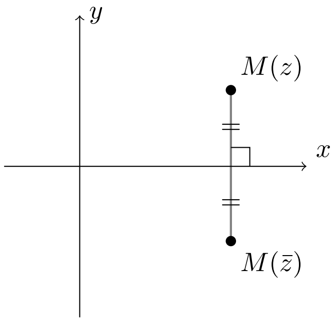
Remarques : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
– L'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathscr{P}$ qui à chaque nombre complexe z associe le point M d'affixe z est bijective ce qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ au plan $\mathscr{P}$.
– Soit M un point du plan $\mathscr{P}$. Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont même affixe.
– Si A et B sont deux point du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs a et b alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.
– Si u et v sont deux vecteurs du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs a et b alors l'affixe du vecteur $u + v$ est $a + b$.
– Si u est un vecteur du plan $\mathscr{P}$ d'affixe a et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors l'affixe du vecteur λu est λa.

1.2 Conjugué d'un nombre complexe :

Définition 1.3 *Soit z un nombre complexe de représentation algébrique $z = a + ib$.*
Le nombre complexe $a - ib$ s'appelle le conjugué de z et on le note $\bar{z}$.

Interprétation géométrique du conjugué d'un nombre complexe :

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct et soit $z \in \mathbb{C}$.
Les points M et N de $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Conjugué d'un nombre complexe sous Python :

```
In [1]: a = 2 + 3j

In [2]: a.conjugate()
Out[2]: (2-3j)
```

Propriété 1.1 *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.*
– $\bar{z} = 0 \iff z = 0$.
– $\Re e(\bar{z}) = \Re e(z)$ *et* $\Im m(\bar{z}) = -\Im m(z)$

– $\overline{\overline{z}} = z$.
– $\Re e(z) = \dfrac{z+\bar z}{2}$ *et* $\Im m(z) = \dfrac{z-\bar z}{2i}$.
– $z \in \mathbb{R} \iff \bar z = z$ *et* $z \in i\mathbb{R} \iff \bar z = -z$.
– $\overline{z+z'} = \bar z + \overline{z'}$ *et* $\overline{zz'} = \bar z\, \overline{z'}$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \bar z^n$ *avec la convention* $0^0 = 1$.

1.3 Module d'un nombre complexe :

Définition 1.4 *Soit z un nombre complexe de représentation algébrique $z = a + ib$.*
Le réel positif $\sqrt{a^2+b^2}$ s'appelle le module de z et on le note $|z|$.

Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe :

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et soient $z, z' \in \mathbb{C}$.
- Si M et le point du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z alors $|z|$ est la distance entre O et M. Autrement dit, $OM = |z|$.
- Si u et le vecteur du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z alors $|z|$ est la norme du vecteur u. Autrement dit, $\|u\| = |z|$.
- Si M et M' sont les points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs z et z' alors $|z - z'|$ est la distance entre M et M'. Autrement dit, $MM' = |z - z'|$.
- Si u et v sont les vecteurs du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs z et z' alors $|z - z'|$ est la norme du vecteur $u - v$. Autrement dit, $\|u - v\| = |z - z'|$.

Module d'un nombre complexe sous Python :

```
In [1]: a = 2 + 3j

In [2]: abs(a)
Out[2]: 3.605551275463989
```

Propriété 1.2 *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.*
– $z = 0 \iff |z| = 0$.
– $|z|^2 = z\,\bar z$.
– $|z| = |\bar z| = |-z|$.
– $|zz'| = |z|\,|z'|$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$ *avec la convention* $0^0 = 1$.
– $|\Re e(z)| \leq |z|$ *et* $|\Im m(z)| \leq |z|$.

Proposition 1.1 *Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$.*
– *z est inversible et on a* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar z}{|z|^2}$.
– $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\bar z}$.
– $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
– $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \bar z^n$.
– $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$

Application : Représentation algébrique du rapport de deux nombres complexes :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$. La représentation algébrique de $\dfrac{z'}{z}$ peut être déduite à partir de la formule $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\bar z}{|z|^2}$.

Exemples :
- Représentation algébrique du nombre $\dfrac{1}{1+i}$: On a :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

- Représentation algébrique du nombre $\dfrac{2+i}{3-2i}$: On a :

$$\frac{2+i}{3-2i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{|3-2i|^2} = \frac{(6-2)+i(3+4)}{3^2+2^2} = \frac{4+7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$$

Proposition 1.2 *Inégalité triangulaire :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z+z'| \leq |z| + |z'| \text{ avec égalité si, et seulement si, } \exists \lambda \geq 0, z' = \lambda z \text{ ou } z = \lambda z'$$

Démonstration :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (|z|+|z'|)^2-|z+z'|^2 &=& |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|-(z+z')\overline{(z+z')} \\ &=& |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|-(z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \\ &=& |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|-\left(z\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z'}+z'\overline{z}\right) \\ &=& |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|-\left(|z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+z'\overline{z}\right) \\ &=& 2|z||z'|-\left(z\overline{z'}+z'\overline{z}\right) \end{array}$$

Or :

$$z\overline{z'}+\overline{z}z'=2\Re e(z\overline{z'})\leq 2|z\overline{z'}|=2|z||\overline{z'}|=2|z||z'|$$

donc $(|z|+|z'|)^2-|z+z'|^2\geq 0$ donc $(|z|+|z'|)^2\geq |z+z'|^2$ d'où $|z|+|z'|\geq |z+z'|$.
Si on a égalité alors $2|z||z'|-\left(z\overline{z'}+z'\overline{z}\right)=(|z|+|z'|)^2-|z+z'|^2=0$ donc $2|z||z'|=z\overline{z'}+z'\overline{z}$ d'où $|z\overline{z'}|=\Re e(z\overline{z'})$ car $|zz'|=|z||\overline{z'}|=|z\overline{z'}|$ et $z\overline{z'}+z'\overline{z}=2\Re e(z\overline{z'})$.
Soit $z\overline{z'}=a+ib$ l'expression algébrique de $z\overline{z'}$. On a $|z\overline{z'}|=\Re e(z\overline{z'})$ donc $\sqrt{a^2+b^2}=a$ donc $a^2+b^2=a^2$ donc $b^2=0$ d'où $b=0$. On déduit que $z\overline{z'}=a$ donc $a=\Re e(z\overline{z'})=|z\overline{z'}|=|a|\geq 0$.

- Si $a=0$ alors $z\overline{z'}=0$ donc $z=0$ ou $z'=0$ donc $z=0z'$ ou $z'=0z$ et on a $0\geq 0$.
- Si $a\neq 0$: On a $z\overline{z'}=a$ donc $z\neq 0$ donc $zz'\overline{z'}=az'$ donc $z|z|^2=az'$ d'où $z=\frac{a}{|z|^2}z'$. On pose $\lambda=\frac{a}{|z|^2}$ donc $\lambda\geq 0$ et $z=\lambda z'$.

Réciproquement, supposons que $\exists\lambda\geq 0$ tel que $z=\lambda z'$ ou $z'=\lambda z$. Prenons, par exemple, $z=\lambda z'$ donc $|z+z'|=|\lambda z'+z'|=|(1+\lambda)z'|=|1+\lambda||z'|=(1+\lambda)|z'|=|z'|+\lambda|z'|=|z'|+|\lambda z'|=|z'|+|z|$ d'où l'égalité.
On déduit qu'on a égalité si, et seulement si, $\exists\lambda\geq 0, z'=\lambda z$ ou $z=\lambda z'$.

Corollaire 1.3

$$\forall z,z'\in\mathbb{C}, ||z|-|z'||\leq |z-z'|$$

Démonstration :
Soit $z, z'\in\mathbb{C}$. On a, d'après *l'inégalité triangulaire*, :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} |z| &=& |(z-z')+z'| &\leq& |z-z'|+|z'| \\ |z'| &=& |(z'-z)+z| &\leq& |z'-z|+|z| \end{array}\right.$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z|-|z'| &\leq& |z-z'| \\ |z'|-|z| &\leq& |z'-z| \end{array}\right.$$

Or $|z'-z|=|-(z-z')|=|z-z'|$ et $|z'|-|z|=-(|z|-|z'|)$ donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z|-|z'| &\leq& |z-z'| \\ -(|z|-|z'|) &\leq& |z-z'| \end{array}\right.$$

d'où $||z|-|z'||\leq |z-z'|$.

2 Équation du second degré :

2.1 Racines carrées d'un nombre complexe :

Proposition et définition 2.1 *Soit $a\in\mathbb{C}$.*
L'équation $z^2=a$ admet deux racines u et v dans $\mathbb{C}$.

- *u et v s'appellent les racines carrées de a.*
- *$v=-u$.*

Technique de détermination des racines carrées d'un nombre complexe :

Soit $a\in\mathbb{C}$ et z une racine carrée de a de représentation algébrique de $z=x+iy$.
On a $z^2=a$ donc $x^2-y^2+2ixy=a=\Re e(a)+i\Im m(a)$ d'où $x^2-y^2=\Re e(a)$ et $2xy=\Im m(a)$.
De même, on a $z^2=a$ donc $\left|z^2\right|=|a|$ donc $|z|^2=|a|$ d'où $x^2+y^2=|a|$. On obtient alors le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2 &=& |a| \\ x^2-y^2 &=& \Re e(a) \\ 2xy &=& \Im m(a) \end{array}\right.$$

On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= |a| \\ x^2-y^2 &= \Re e(a) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{|a|+\Re e(a)}{2} \\ y^2 &= \dfrac{|a|-\Re e(a)}{2} \end{cases}$$

L'équation $2xy = \Im m(a)$ permet de déterminer le signe du produit xy :

- Si $\Im m(a) \geq 0$ alors $xy \geq 0$ donc x et y ont même signe d'où :

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\dfrac{|a|+\Re e(a)}{2}} \\ y &= \sqrt{\dfrac{|a|-\Re e(a)}{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -\sqrt{\dfrac{|a|+\Re e(a)}{2}} \\ y &= -\sqrt{\dfrac{|a|-\Re e(a)}{2}} \end{cases}$$

- Si $\Im m(a) \leq 0$ alors $xy \leq 0$ donc x et y ont des signes opposés d'où :

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\dfrac{|a|+\Re e(a)}{2}} \\ y &= -\sqrt{\dfrac{|a|-\Re e(a)}{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -\sqrt{\dfrac{|a|+\Re e(a)}{2}} \\ y &= \sqrt{\dfrac{|a|-\Re e(a)}{2}} \end{cases}$$

Exemples :

- Détermination des racines carrées du nombre $-3+4i$: Soit z une racine carrée de $-3+4i$ de représentation algébrique de $z = x+iy$.
  On a $z^2 = -3+4i$ donc $x^2 - y^2 + 2ixy = -3+4i$ d'où $x^2-y^2 = -3$ et $xy = 2$.
  De même, on a $z^2 = -3+4i$ donc $\left|z^2\right| = |-3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ d'où $x^2+y^2 = 5$. On obtient alors le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 5 \\ x^2-y^2 &= -3 \\ xy &= 2 \end{cases}$$

  On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 5 \\ x^2-y^2 &= -3 \end{cases}$$

  donc

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{5-3}{2} &= 1 \\ y^2 &= \dfrac{5+3}{2} &= 4 \end{cases}$$

  D'autre part, on a $xy = 2 \geq 0$ donc x et y ont même signe d'où :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -2 \end{cases}$$

  On déduit que les racines carrées de $-3+4i$ sont $1+2i$ et $-1-2i$.
- Détermination des racines carrées du nombre $-24-10i$: Soit z une racine carrée de $-24-10i$ de représentation algébrique de $z = x+iy$.
  On a $z^2 = -24-10i$ donc $x^2-y^2+2ixy = -24-10i$ d'où $x^2-y^2 = -24$ et $xy = -5$.
  De même, on a $z^2 = -24-10i$ donc $\left|z^2\right| = |-24-10i| = \sqrt{24^2+10^2} = \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = 26$ d'où $x^2+y^2 = 26$. On obtient alors le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 26 \\ x^2-y^2 &= -24 \\ xy &= -5 \end{cases}$$

  On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 26 \\ x^2-y^2 &= -24 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{26-24}{2} = 1 \\ y^2 = \dfrac{26+24}{2} = 25 \end{cases}$$
D'autre part, on a $xy = -5 \leq 0$ donc x et y ont même signe d'où :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$
On déduit que les racines carrées de $-24-10i$ sont $1-5i$ et $-1+5i$.

Remarque : Soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $a \geq 0$ alors les racines carrés de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$ alors les racines carrés de a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Racines carrées d'un nombre complexe sous Python : Pour calculer une racine carrée d'un nombre complexe on appelle la commande *sqrt* du module *cmath* :

```
In [1]: from cmath import sqrt
```

- Racine carré du nombre $-3+4i$:
```
In [2]: sqrt(-3+4j)
Out[2]: (1+2j)
```
- Racine carré du nombre $-24-10i$:
```
In [3]: sqrt(-24-10j)
Out[3]: (1-5j)
```

2.2 Équation du second degré :

Proposition 2.1 *Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. L'équation :*
$$\mathscr{E} : az^2 + bz + c = 0$$
admet deux racines $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ avec δ une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation $\mathscr{E}$.

Démonstration :
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :
$$az^2+bz+c = a\left(z^2+\frac{b}{a}z\right)+c = a\left(z^2+2\frac{b}{2a}z+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a} = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$
donc :
$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\iff a\left(z+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4a}=0 \\ &\iff \left(z+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{\delta^2}{4a^2}=0 \\ &\iff \left(z+\tfrac{b}{2a}-\tfrac{\delta}{2a}\right)\left(z+\tfrac{b}{2a}+\tfrac{\delta}{2a}\right)=0 \\ &\iff z+\tfrac{b}{2a}-\tfrac{\delta}{2a}=0 \text{ ou } z+\tfrac{b}{2a}+\tfrac{\delta}{2a}=0 \\ &\iff z=-\tfrac{b}{2a}+\tfrac{\delta}{2a} \text{ ou } z=-\tfrac{b}{2a}-\tfrac{\delta}{2a} \\ &\iff z=\tfrac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z=\tfrac{-b-\delta}{2a} \end{aligned}$$

Exemples :
- Résolution de l'équation $z^2+z+1=0$: Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = 1-4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ donc les racines de l'équation $z^2+z+1=0$ sont :
$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j \text{ et } z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$
- Résolution de l'équation $z^2-(3+4i)z+5i-1=0$: Le discriminant de cette équation est $\Delta = (3+4i)^2-4(5i-1) = (3^2-4^2+2\times3\times4i)-20i+4 = 9-16+24i-20i+4 = -3+4i$, or on a déjà montrer que $1+2i$ est une racine carrée de Δ donc les racines de l'équation $z^2-(3+4i)z+5i-1=0$ sont :
$$z_1 = \frac{(3+4i)+(1+2i)}{2} = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \text{ et } z_2 = \frac{(3+4i)-(1+2i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

– Résolution de l'équation $z^2-3(1-i)z+6-2i=0$: Le discriminant de cette équation est $\Delta=9(1+i)^2-4(6-2i)=9(1^2-1^2+2\times1\times(-i))-24+8i=-18i-24+8i=-24-10i$, or on a déjà montrer que $1-5i$ est une racine carrée de Δ donc les racines de l'équation $z^2-3(1-i)z+6-2i=0$ sont :

$$z_1=\frac{3(1-i)+(1-5i)}{2}=\frac{4-8i}{2}=2-4i \text{ et } z_2=\frac{3(1-i)-(1-5i)}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

Remarque : Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq0$.
Si u est une solution de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors $au^2+bu+c=0$ donc $0=\bar{0}=\overline{au^2+bu+c}=\bar{a}\bar{u}^2+\bar{b}\bar{u}+\bar{c}=a\bar{u}^2+b\bar{u}+c$ car $\bar{a}=a,\bar{b}=b$ et $\bar{c}=c$ puisque $a,b,c\in\mathbb{R}$ d'où $\bar{u}$ est aussi une racine de l'équation $az^2+bz+c=0$.
On déduit que si $u\notin\mathbb{R}$ alors les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ sont conjuguées.

Résolution d'une équation du second degré sous Python :

Pour résoudre une équation du second degré on commence par charger la commande *roots* du module *numpy* :

```
In [1]: from numpy import roots
```

– Résolution de l'équation $z^2-(3+4i)z+5i-1=0$:
```
In [2]: roots([1, -3 - 4j, -1 + 5j])
Out[2]: array([ 2.+3.j,  1.+1.j])
```
– Résolution de l'équation $z^2-3(1-i)z+6-2i=0$:
```
In [3]: roots([1, -3 + 3j, 6 - 2j])
Out[3]: array([ 2.-4.j,  1.+1.j])
```

Corollaire 2.2 *Somme et produit des racines : Soit $a,b,c\in\mathbb{C}$ avec $a\neq0$.*
Si u et v sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u+v & = & -\dfrac{b}{a} \\ uv & = & \dfrac{c}{a}\end{array}\right.$$

Démonstration :

Soit Δ le discriminant de l'équation $az^2+bz+c=0$ et δ une racine carrée de Δ donc les racines de l'équation $az^2+bz+c=0$ sont $u=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $v=\frac{-b-\delta}{2a}$ d'où $u+v=\frac{-b}{a}$ et $uv=\frac{(b-\delta)(b+\delta)}{4a^2}=\frac{b^2-\delta^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

Remarques :
– Si on connaît déjà une solution d'une équation de second degré alors, au lieu de résoudre l'équation à l'aide du discriminant, il est plus pratique d'utiliser la formule de la somme ou du produit des racines pour déterminer l'autre racine.
– Pour résoudre le système produit-somme :

$$\mathcal{S}:\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & s \\ xy & = & p\end{array}\right.$$

on commence par résoudre l'équation associée $\mathscr{E}: z^2-sz+p=0$:
  – Si l'équation $\mathscr{E}$ admet deux solutions distinctes u et v alors les solutions du système $\mathcal{S}$ sont (u,v) et (v,u).
  – Si l'équation $\mathscr{E}$ admet une seule solution u le système $\mathcal{S}$ admet une seule solution (u,u).

Exemples :
– Résoudre l'équation $\mathscr{E}: z^2-4z+3=0$: On remarque que $x=1$ est une solution de l'équation $\mathcal{E}$, donc si y est l'autre racine alors, d'après *la formule de la somme des racines*, $4=x+y=1+y$ d'où $y=3$. On déduit que les solutions de l'équation $\mathscr{E}$ sont 1 et 3.
– Résoudre le système :

$$\mathcal{S}:\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 5 \\ xy & = & -14\end{array}\right.$$

On considère l'équation associée $z^2-5z-14=0$. On a $\Delta=(-5)^2-4\times14=25+56=81=9^2$ donc l'équation associée admet deux racines $u=\frac{5+9}{2}=7$ et $v=\frac{5-9}{2}=-2$ d'où le système $\mathcal{S}$ admet deux solutions $(7,-2)$ et $(-2,7)$.

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

3.1 Nombres complexes de module 1 :

Définition 3.1 *On dit que deux réels x et y sont congrus modulo 2π si $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que $y=x+2n\pi$. Dans ce cas, on note $y\equiv x[2\pi]$.*

Rappels : Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a^2+b^2=1$.

- $\exists t \in \mathbb{R}, a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\exists ! t \in]-\pi, \pi], a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\exists ! t \in [-\pi, \pi[, a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\exists ! t \in]0, 2\pi], a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\exists ! t \in [0, 2\pi[, a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \exists ! t \in]x, x + 2k\pi], a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \exists ! t \in [x, x + 2k\pi[, a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.
- $\forall t, s \in \mathbb{R}, (\cos s = \cos t \text{ et } \sin s = \sin t) \iff s \equiv t[2\pi]$.

Notation : On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$.

Remarques :
- $\forall z \in \mathbb{U}, \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.
- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists t \in \mathbb{R}, z = \cos t + i \sin t$. On peut prendre $t \in]-\pi, \pi]$ (resp. $t \in [0, 2\pi[$), dans ce cas t est unique.

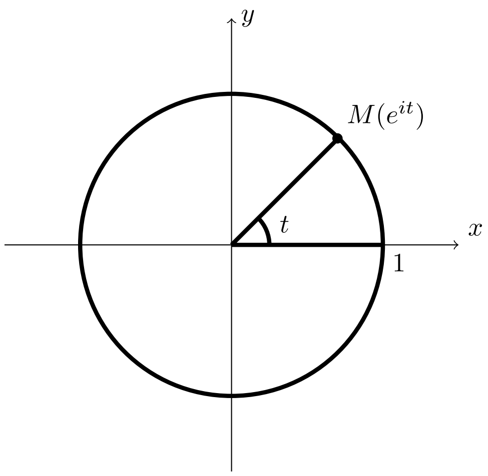
Notation : Soit $t \in \mathbb{R}$. On note e^{it} ou $\exp(it)$ le nombre complexe $\cos t + i \sin t$.

Valeurs particulières :
- $e^{0i} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$.
- $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
- $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.
- $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$.
- $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le nombre $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ se note j.

Notation : On note j le nombre $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on a $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Interprétation géométrique du nombre e^{it} avec $t \in \mathbb{R}$:

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et soit $t \in \mathbb{R}$.
Si M est le point de $\mathscr{P}$ d'affixe e^{it} alors M est de coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$. Autrement dit, M est le point qui représente l'angle t sur le cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) :



Nombres complexes de module 1 sous Python :
- **Constantes π et e sous Python :**
  - Méthode 01 : On appelle ces constantes à partir du module *math* :

```
In [1]: from math import pi, e

In [2]: pi
Out[2]: 3.141592653589793

In [3]: e
Out[3]: 2.718281828459045
```

  - Méthode 02 : On appelle ces constantes à partir du module *cmath* :

```
In [1]: from cmath import pi, e

In [2]: pi
```

```
Out[2]: 3.141592653589793

In [3]: e
Out[3]: 2.718281828459045
```

- Calcul de $e^{i\frac{\pi}{2}}$:
```
In [4]: e**(1j * pi / 2)
Out[4]: (6.123233995736766e-17+1j)
```
- Calcul de $e^{i\pi}$:
```
In [5]: pow(e, 1j * pi)
Out[5]: (-1+1.2246467991473532e-16j)
```
- Calcul de j :
```
In [6]: e**(2 * 1j * pi / 3)
Out[6]: (-0.4999999999999998+0.8660254037844387j)
```

On va voir une deuxième méthode dans la partie *"Exponentielle complexe"*.

Remarques :
- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists t \in \mathbb{R}, z = e^{it}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}, e^{it} \in \mathbb{U}$. Autrement dit, $\left|e^{it}\right| = 1$.
- $\mathbb{U} = \{e^{it}/t \in \mathbb{R}\}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}, \overline{e^{it}} = \dfrac{1}{e^{it}} = e^{-it}$.

Proposition 3.1

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, e^{is} = e^{it} \iff s \equiv t[2\pi]$$

Démonstration :

Soient $t, s \in \mathbb{R}$. On a :

$$e^{is} = e^{it} \iff \cos s + i \sin s = \cos t + i \sin t \iff (\cos s = \cos t \text{ et } \sin s = \sin t) \iff \exists n \in \mathbb{Z}, s = t + 2n\pi \iff s \equiv t[2\pi]$$

Proposition 3.2 *Formules d'Euler :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \textit{ et } \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Démonstration :

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $e^{it} = \cos t + i \sin t$ donc $\cos t = \Re e\left(e^{it}\right) = \dfrac{e^{it} + \overline{e^{it}}}{2} = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin t = \Im m\left(e^{it}\right) = \dfrac{e^{it} - \overline{e^{it}}}{2i} = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

Propriété 3.1

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$$

Démonstration :

Soient $t, s \in \mathbb{R}$ donc :

$$e^{is}e^{it} = (\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t + i(\cos s \sin t + \sin s \cos t) = \cos(s+t) + i \sin(s+t) = e^{i(s+t)}$$

Corollaire 3.3 *Soient $t, s \in \mathbb{R}$.*
- $e^{is} + e^{it} = 2e^{i\frac{s+t}{2}} \cos \frac{s-t}{2}$ *et* $e^{is} - e^{it} = 2ie^{i\frac{s+t}{2}} \sin \frac{s-t}{2}$.
- $e^{it} + 1 = 2e^{i\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$ *et* $e^{it} - 1 = 2ie^{i\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2}$.

Démonstration :
- D'après *les formules d'Euler* :

$$2e^{i\frac{s+t}{2}} \cos \frac{s-t}{2} = e^{i\frac{s+t}{2}}\left(e^{i\frac{s-t}{2}} + e^{-i\frac{s-t}{2}}\right) = e^{i\frac{s+t}{2}}e^{i\frac{s-t}{2}} + e^{i\frac{s+t}{2}}e^{-i\frac{s-t}{2}} = e^{i\frac{s+t+s-t}{2}} + e^{i\frac{s+t-s+t}{2}} = e^{is} + e^{it}$$

et

$$2ie^{i\frac{s+t}{2}} \sin \frac{s-t}{2} = e^{i\frac{s+t}{2}}\left(e^{i\frac{s-t}{2}} - e^{-i\frac{s-t}{2}}\right) = e^{i\frac{s+t}{2}}e^{i\frac{s-t}{2}} - e^{i\frac{s+t}{2}}e^{-i\frac{s-t}{2}} = e^{i\frac{s+t+s-t}{2}} - e^{i\frac{s+t-s+t}{2}} = e^{is} - e^{it}$$

- En effet, $e^{it} + 1 = e^{it} + e^{i\times 0} = 2e^{i\frac{t+0}{2}} \cos \frac{t-0}{2} = 2e^{i\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$ et $e^{it} - 1 = e^{it} - e^{i\times 0} = 2ie^{i\frac{t+0}{2}} \sin \frac{t-0}{2} = 2e^{i\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2}$.

Proposition 3.4 *Formule de Moivre :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{it}\right)^n = e^{int}$$

Démonstration :

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n = 0$ alors $\left(e^{it}\right)^n = \left(e^{it}\right)^0 = 1 = \cos(0t) + i\sin(0t) = e^{i\times 0\times t} = e^{int}$.
- Si $n \geq 1$: On a $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, e^{i(k+1)t} = e^{i(kt+t)} = e^{ikt}e^{it}$ d'où $\frac{e^{i(k+1)t}}{e^{ikt}} = e^{it}$.
  On déduit que $\left(e^{it}\right)^n = \prod_{k=0}^{n-1} e^{it} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)t}}{e^{ikt}} = \frac{e^{i((n-1)+1)t}}{e^{0it}} = e^{int}$ car il s'agit d'un produit télescopique donc $e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$.
- Si $n \leq -1$ alors $-n \geq 1$ d'où $\left(e^{it}\right)^n = \frac{1}{\left(e^{it}\right)^{-n}} = \frac{1}{e^{i(-n)t}} = \frac{1}{e^{-int}} = e^{int}$.

Remarque : La formule de Moivre s'écrit encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt$$

Applications : Soit $x \in \mathbb{R}$:

- **Calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin kx$:** On suppose que $x \not\equiv 0[2\pi]$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{2ie^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{2ie^{i\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

  donc :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + i\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

  Or :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

  donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

- **Expression de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:**
  - Écrire $\cos 3x$ en fonction de puissance de $\cos x$: D'après *la formule de Moivre*, on a :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i\sin(3x) &= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i\left(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right) \end{aligned}$$

    donc :

$$\cos(3x) = \Re e\left(\cos(3x) + i\sin(3x)\right) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

  - Écrire $\sin 4x$ en fonction de puissance de $\cos x$ et $\sin x$: D'après *la formule de Moivre*, on a :

$$\begin{aligned} \cos(4x) + i\sin(4x) &= (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) + i\left(4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)\right) \end{aligned}$$

    donc :

$$\sin(4x) = \Im m\left(\cos(4x) + i\sin(4x)\right) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$$

- **Linéarisation des fonctions trigonométriques :**

– Linéarisation de $\cos^3 x$: On a :

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{8} \\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8} \\
&= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8}+3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{8} \\
&= \frac{\cos(3x)}{4}+3\frac{\cos(x)}{4}
\end{aligned}$$

– Linéarisation de $\cos^2 x \sin x$: On a :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\
&= \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{2ix}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{8i} \\
&= \frac{\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{8i} \\
&= \frac{e^{3ix}-e^{2ix}e^{-ix}+2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-2ix}e^{ix}-e^{-2ix}e^{-ix}}{8i} \\
&= \frac{e^{3ix}-e^{ix}+2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-ix}-e^{-3ix}}{8i} \\
&= \frac{e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-3ix}}{8i} \\
&= \frac{\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{8i} \\
&= \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{8i}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{8i} \\
&= \frac{\cos(3x)}{4}+\frac{\cos(x)}{4}
\end{aligned}$$

3.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Proposition et définition 3.1

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists r > 0, \exists t \in \mathbb{R}, z = re^{it}$$

L'expression $z = re^{it}$ s'appelle la forme trigonométrique de z.

Démonstration :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{it}$ d'où $z = |z|e^{it}$.
On déduit que $z = re^{it}$ avec $r = |z| > 0$ car $z \neq 0$.

Remarques :

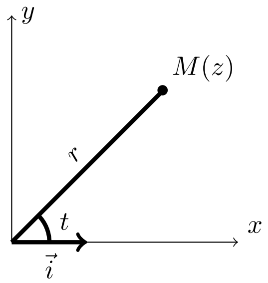
- 0 n'admet pas de forme trigonométrique mais on peut toujours écrire 0 sous la forme re^{it} avec $r = 0$ et $t \in \mathbb{R}$ quelconque.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = re^{it}$.
  - $r = |z|$. En particulier, r est unique.
  - Si $z = re^{is}$ est une forme trigonométrique de z alors $s \equiv t[2\pi]$.
  - Si $z = x + iy$ est l'expression algébrique de z alors :
    - $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$.

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos(t) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(t) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exemples :
- Soit $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ donc $z = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- Soit $z = 3 + 4i$. On a $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ donc $z = 5\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right) = 5(\cos\theta + i\sin\theta) = 5e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

Formes trigonométriques de nombres complexes particuliers : Soit $\lambda > 0$.
- Si $z = \lambda$ alors la forme trigonométrique de z est $z = \lambda e^{i0}$.
- Si $z = -\lambda$ alors la forme trigonométrique de z est $z = \lambda e^{i\pi}$.
- Si $z = i\lambda$ alors la forme trigonométrique de z est $z = \lambda e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- Si $z = -i\lambda$ alors la forme trigonométrique de z est $z = \lambda e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Interprétation géométrique de la forme trigonométrique d'un nombre complexe :
On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = re^{it}$.
Si M est le point de $\mathscr{P}$ d'affixe z alors $r = OM$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv t[2\pi]$:



Définition 3.2 *On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct et soit M un point de $\mathscr{P}$ d'affixe $z \neq 0$.*
Si $z = re^{it}$ est la forme trigonométrique de z alors le couple (r, t) s'appelle coordonnées polaires de M.

Passage, sous Python, entre coordonnées polaires d'un point et expression algébrique du nombre complexe associé :
Il faut d'abord charger les commandes *polar* et *rect* du module *cmath* :

```
In [1]: from cmath import polar, rect
```

- Coordonnées polaires du point d'affixe $z = 3 + 4i$:
```
In [2]: polar(3 + 4j)
Out[2]: (5.0, 0.9272952180016122)
```
- Expression cartésienne du nombre complexe $z = 2e^{3i}$:
```
In [3]: rect(2, 3)
Out[3]: (-1.9799849932008908+0.2822400161197344j)
```

Propriété 3.2 *Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ de formes trigonométriques $z = re^{it}$ et $z' = r'e^{it'}$.*
- $\bar{z} = re^{-it}$.
- $zz' = rr'e^{i(t+t')}$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-it}$.
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(t-t')}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, z^n = r^n e^{int}$.

Application : Transformation de l'expression $a\cos(t) + b\sin(t)$ **:** Soient $a, b, t \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
On considère le nombre complexe $z = a + ib$ donc $ze^{-it} = (a + ib)(\cos(t) - i\sin(t)) = a\cos(t) + b\sin(t) + i(-a\sin(t) + b\cos(t))$.
On a $(a, b) \neq (0, 0)$ donc $z \neq 0$ et soit $z = Ae^{i\varphi}$ sa forme trigonométrique donc $ze^{-it} = Ae^{i(\varphi - t)} = A\cos(\varphi - t) + iA\sin(\varphi - t)$ d'où $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(\varphi - t) = A\cos(t - \varphi)$.
A et φ s'appellent respectivement l'amplitude et la phase de $a\cos(t) + b\sin(t)$ et on a $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Exemples : Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Transformation de $\cos t + \sin t$: Soient A et φ l'amplitude et la phase respectives de $\cos t + \sin t$ donc $A = \sqrt{1^2 + 1^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $A = \sqrt{2}$ et $\varphi \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.
- Transformation de $3\cos t + 4\sin t$: Soient A et φ l'amplitude et la phase respectives de $3\cos t + 4\sin t$ donc $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{5}$, $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\varphi = \dfrac{4}{5}$ et on a $3\cos t + 4\sin t = 5\cos(t - \varphi)$.

3.3 Arguments d'un nombre complexe :

Définition 3.3 *Soit* $z \in \mathbb{C}^*$.
Tout réel t tel que $z = |z|e^{it}$ *est appelé un argument de* z *et on note* $\arg(z) \equiv t[2\pi]$. *Si, en plus,* $t \in]-\pi, \pi]$, *on dit que t est l'argument principal de* z.

Interprétation géométrique de l'argument d'un nombre complexe :

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Si M est le point de $\mathscr{P}$ d'affixe z alors $\arg(z) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

Remarques :
- 0 n'a pas d'argument.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ un argument de z.
  - $z = |z|e^{it}$.
  - Si s est un argument de z alors $s \equiv t[2\pi]$.
  - L'ensemble des arguments de z est $\{t + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
  - Si $z = x + iy$ est l'expression algébrique de z alors $x = |z|\cos t$ et $y = |z|\sin t$.

Exemples :
- $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$.
- $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$.
- $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- On a $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
- On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- On a $3 + 4i = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$ donc $\arg(3+4i) \equiv \theta[2\pi]$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

Argument d'un nombre complexe sous Python :

Il faut d'abord charger la commande *phase* du module *cmath* :

```
In [1]: from cmath import phase
```

- Argument du nombre complexe $z = 1$:
  ```
  In [1]: phase(1)
  Out[1]: 0.0
  ```
- Argument du nombre complexe $z = -1$:
  ```
  In [2]: phase(-1)
  Out[2]: 3.141592653589793
  ```
- Argument du nombre complexe $z = i$:
  ```
  In [3]: phase(1j)
  Out[3]: 1.5707963267948966
  ```
- Argument du nombre complexe $z = 1 + i$:
  ```
  In [4]: phase(1 + 1j)
  Out[4]: 0.7853981633974483
  ```

Propriété 3.3 *Soit* $z \in \mathbb{C}$.
- $z \in \mathbb{R}^{+*} \iff \arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
- $z \in \mathbb{R}^{-*} \iff \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}^{+*} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}^{-*} \iff \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Proposition 3.5 *Soient* $z, z' \in \mathbb{C}^*$.
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg\left(z^n\right) \equiv n\arg(z)[2\pi]$.

Démonstration :

Soit $z=|z|e^{it}$ et $z'=|z'|e^{it'}$ les formes trigonométriques de z et z'.

- On a $\bar{z}=\overline{|z|e^{it}}=|z|e^{-it}$ donc $\arg(\bar{z})\equiv -t[2\pi]$ d'où $\arg(\bar{z})\equiv -\arg(z)[2\pi]$.
- On a $zz'=|z||z'|e^{i(t+t')}$ donc $\arg(zz')\equiv t+t'[2\pi]$ d'où $\arg(zz')\equiv \arg(z)+\arg(z')[2\pi]$.
- On a $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|}e^{-it}$ donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv -t[2\pi]$ d'où $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv -\arg(z)[2\pi]$.
- On a $\frac{z}{z'}=\frac{|z|}{|z'|}e^{i(t-t')}$ donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv t-t'[2\pi]$ d'où $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv \arg(z)-\arg(z')[2\pi]$.
- Soit $n\in\mathbb{Z}$. On a $z^n=|z|^ne^{int}$ donc $\arg(z^n)\equiv nt[2\pi]$ d'où $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$.

Remarques : Soit $z,z'\in\mathbb{C}^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

- Si $\lambda>0$ alors $\arg(\lambda z)\equiv\arg(z)[2\pi]$.
- Si $\lambda<0$ alors $\arg(\lambda z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$.
- $|z+z'|=|z|+|z'| \iff \arg(z)\equiv\arg(z')[2\pi]$.

4 Exponentielle complexe :

Définition 4.1 *Soit $z\in\mathbb{C}$ d'expression algébrique $z=x+iy$.*
Le nombre e^xe^{iy} s'appelle l'exponentiel complexe de z et on le note e^z ou $\exp(z)$.

Remarque :
Si $z\in\mathbb{C}$ d'expression algébrique $z=x+iy$ alors $e^z=e^x(\cos(y)+i\sin(y))$.

Exemples :

- $e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$.
- $e^{2+3i}=e^2(\cos 3+i\sin 3)$.
- $e^{5-2i}=e^5(\cos(-2)+i\sin(-2))=e^5(\cos 2-i\sin 2)$.

Exponentiel d'un nombre complexe sous Python :

Il faut d'abord charger la commande *exp* du module *cmath* :

```
In [1]: from cmath import exp
```

- Exponentiel du nombre complexe $z=2i$:
```
In [2]: exp(2j)
Out[2]: (-0.4161468365471424+0.9092974268256817j)
```
- Exponentiel du nombre complexe $z=1+i$:
```
In [3]: exp(1 + 1j)
Out[3]: (1.4686939399158851+2.2873552871788423j)
```
- Exponentiel du nombre complexe $z=2+3i$:
```
In [4]: exp(2 + 3j)
Out[4]: (-7.315110094901103+1.0427436562359045j)
```

Propriété 4.1 *Soit $z,z'\in\mathbb{C}$.*

- $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$.
- $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$.
- $|e^z|=e^{\Re e(z)}$. *En particulier,* $e^z\neq 0$.
- e^z *est inversible et on a* $\dfrac{1}{e^z}=e^{-z}$.
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}}=e^{z-z'}$.
- $\forall n\in\mathbb{Z}, (e^z)^n=e^{nz}$.

Proposition 4.1

$$\forall z,z'\in\mathbb{C}, e^{z'}=e^z \iff \exists k\in\mathbb{Z}, z'=z+2ik\pi$$

Démonstration :

Soient $z,z'\in\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ On a $e^{z'}=e^z$ donc $\left|e^{z'}\right|=|e^z|$ donc $e^{\Re e(z')}=e^{\Re e(z')}$ d'où $\Re e(z')=\Re e(z)$.

On a $e^{z'}=e^z$ donc $e^{\Re e(z')}e^{i\Im m(z')}=e^{\Re e(z)}e^{i\Im m(z)}$, or $\Re e(z')=\Re e(z)$, donc $e^{i\Im m(z')}=e^{i\Im m(z)}$ d'où $\exists k\in\mathbb{Z}, \Im m(z')=\Im m(z)+2k\pi$.

On déduit que $z'=\Re e(z')+i\Im m(z')=\Re e(z)+i(\Im m(z)+2k\pi)=\Re e(z)+i\Im m(z)+2ik\pi=z+2ik\pi$.

$\Leftarrow$ On a $z'=z+2ik\pi$ donc $e^{z'}=e^{z+2ik\pi}=e^ze^{2ik\pi}=e^z$ car $e^{2ik\pi}=1$.

Application à la résolution de l'équation $e^z=a$:

Soit $a\in\mathbb{C}$ et on considère l'équation $\mathscr{E}: e^z=a$.

- Si $a = 0$ alors l'équation $\mathscr{E}$ n'admet pas de solutions.
- Si $a \neq 0$: soit $a = |a|e^{i\theta}$ la forme trigonométrique de a donc $a = e^{\ln(|a|)}e^{i\theta} = e^{\ln(|a|)+i\theta}$ d'où :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = a \iff e^z = e^{\ln(|a|)+i\theta} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi)$$

On déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $e^z = a$ est $\mathcal{S} = \{\ln(|a|) + i\theta + 2ik\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemples :

- On a $-1 = e^{i\pi}$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^z = -1$ est $\mathcal{S} = \{i\pi + 2ik\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- On a $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^z = 1 + i$ est $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe :

5.1 Racines n-ièmes de l'unité :

Définition 5.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.*
On dit que z est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ième de l'unité se note $\mathbb{U}_n$.

Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
Si z est une racine n-ième de l'unité alors $1 = |z^n| = |z|^n$ donc $|z| = 1$ d'où $z \in \mathbb{U}$. On déduit que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ et, en particulier, $\exists t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{it}$.

Proposition 5.1 *Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$$

$\mathbb{U}_n$ contient exactement n élément. Autrement dit, il existe exactement n racines n-ième de l'unité.

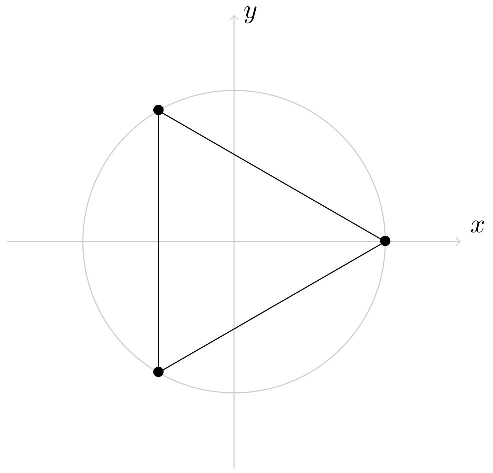
Démonstration :
Soit $z \in \mathbb{U}$ donc $\exists t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{it}$. On a :

$$z^n = 1 \iff e^{int} = 1 = e^{0i} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, nt = 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{2k\pi}{n}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = \frac{2k\pi}{n}$. On a $t \in [0, \pi[$ donc $0 \leq \dfrac{2k\pi}{n} < 2\pi$ donc $0 \leq k < n$ d'où $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
On déduit que $z^n = 1 \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, t = \dfrac{2k\pi}{n}$ donc $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$.
Soit $k, k' \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ donc $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2k'\pi}{n} + 2m\pi$ donc $\dfrac{k-k'}{n} = m$ d'où $\dfrac{k-k'}{n} \in \mathbb{Z}$.
On a $k, k' \in \{0, \dots, n-1\}$ donc $0 \leq \dfrac{k}{n} < 1$ et $0 \leq \dfrac{k'}{n} < 1$ d'où $-1 < \dfrac{k-k'}{n} < 1$, or $\dfrac{k-k'}{n} \in \mathbb{Z}$ donc $\dfrac{k-k'}{n} = 0$ d'où $k = k'$.
On déduit que les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}$ sont deux à deux distincts donc $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments.

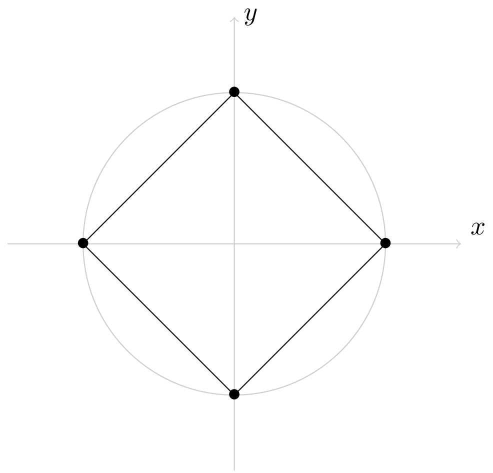
Exemples :

- Racines cubiques de l'unité :
  - $\mathbb{U}_3 = \{e^{\frac{2ik\pi}{3}} / k \in \{0, 1, 2\}\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\} = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$.
  - $j^3 = 1, j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.
  - Les racines cubiques de l'unité $1, j, j^2$ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité :



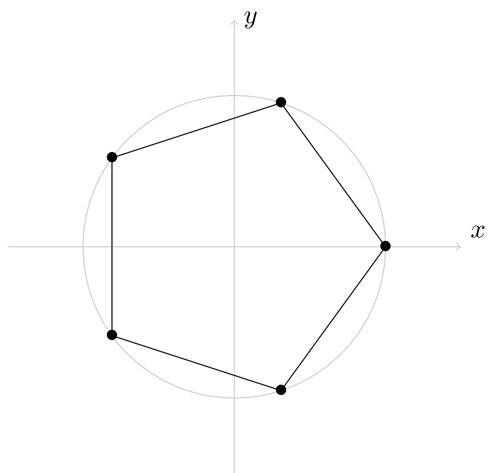
Racines cubiques de l'unité

– Racines 4-ièmes de l'unité :
  – $\mathbb{U}_4 = \{e^{\frac{2ik\pi}{4}} / k \in \{0,1,2,3\}\} = \{e^{\frac{ik\pi}{2}} / k \in \{0,1,2,3\}\} = \{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{\frac{3i\pi}{2}}\} = \{1, i, -1, -i\}$.
  – Les racines 4-ièmes de l'unité $1, i, -1, -i$ sont les affixes des sommets d'un carré inscrit dans le cercle unité :



Racines 4-ièmes de l'unité

– Racines 5-ièmes de l'unité :
  – $\mathbb{U}_5 = \{e^{\frac{2ik\pi}{5}} / k \in \{0,1,2,3,4\}\} = \{1, e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{3i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}\}$.
  – Les racines 5-ièmes de l'unité $1, e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{3i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}$ sont les affixes des sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité :



Racines 5-ièmes de l'unité

Remarques : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\forall k, k' \in \{0, \dots, n-1\}, e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}} \Rightarrow k = k'$.
- Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle unité.
- Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\right\} = \left\{\omega^k / k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$.
- $\forall z \in \mathbb{U}_n$ distinct de 1, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0$. En particulier, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle (i. e $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$).

5.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe :

Définition 5.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z, u \in \mathbb{C}$.*
On dit que u est une racine n-ième de z si $u^n = z$.

Proposition 5.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$.*
- *z admet exactement n racines n-ième.*
- *Si $z = re^{it}$ est la forme trigonométrique de z alors l'ensemble des racines n-ièmes de z est :*

$$\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

Démonstration :
Soit $u \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} u^n = z &\iff u^n = re^{it} \\ &\iff u^n = \left(\sqrt[n]{t} e^{i\frac{t}{n}}\right)^n \\ &\iff \left(\frac{u}{\sqrt[n]{t} e^{i\frac{t}{n}}}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{u}{\sqrt[n]{t} e^{i\frac{t}{n}}} \in \mathbb{U}_n \\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{u}{\sqrt[n]{t} e^{i\frac{t}{n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, u = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

On déduit que l'ensemble des racines n-ièmes de z est $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$.
Soit $k, k' \in \{0, \dots, k-1\}$ tels que $\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k'\pi}{n}\right)}$ donc $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ d'où $k = k'$.
On déduit que les éléments de l'ensemble $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$ sont deux à deux distincts donc z admet exactement n racines n-ième.

Exemples :
- On a $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc l'ensemble des racines cubiques de $1 + i$ est :

$$\left\{ \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} / k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} \right\} = \left\{ \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}, \sqrt[6]{2} e^{\frac{17i\pi}{12}} \right\}$$

- On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc l'ensemble des racines 4-ièmes de $1 + i\sqrt{3}$ est :

$$\left\{ \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)} / k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}, \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}, \sqrt[4]{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}, -\sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, -\sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{12}} \right\}$$

- On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc l'ensemble des racines 5-ièmes de i est :

$$\left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)} / k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{10}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{9\pi}{10}}, e^{i\frac{13\pi}{10}}, e^{i\frac{17\pi}{10}} \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{10}}, i, -e^{-i\frac{\pi}{10}}, -e^{i\frac{3\pi}{10}}, -e^{-i\frac{3\pi}{10}} \right\}$$

Remarque : Si $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = re^{it}$ alors les racines carrées de z sont :

$$\sqrt{r} e^{i\frac{t}{2}} \text{ et } -\sqrt{r} e^{i\frac{t}{2}}$$

6 Nombres complexes et géométrie plane :

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6.1 Interprétation géométrique du rapport $\dfrac{b-a}{c-a}$:

Corollaire 6.1 *Soit A, B et C trois points deux à deux distincts du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a, b et c.*
Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{b-a}{c-a}$ est réel.

Démonstration :
Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AB}$ si, et seulement si, $\exists\lambda \in \mathbb{R}, b-a = \lambda(c-a)$ si, et seulement si, $\exists\lambda \in \mathbb{R}, \dfrac{b-a}{c-a} = \lambda$ si, et seulement si, $\dfrac{b-a}{c-a}$ est réel.
Exemple : On considère les points $A(1,1), B(2,-1)$ et $C(4,-5)$: Les affixes de A, B et C sont respectivement $a = 1+i, b = 2-i$ et $c = 4-5i$ donc :

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(2-i)-(1+i)}{(4-5i)-(1+i)} = \frac{1-2i}{3-6i} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

d'où les points A, B et C sont alignés.

Proposition 6.2 *Soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d.*
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si, $\dfrac{b-a}{d-c}$ est imaginaire pur.

Démonstration :
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si, et seulement, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si, et seulement, $\arg(b-a) - \arg(d-c) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(b-a) - \arg(d-c) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si, et seulement si, $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si, et seulement si, $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\dfrac{b-a}{d-c}$ est imaginaire pur.
Exemple : On considère les points $A(1,0), B(-1,1), C(0,-1)$ et $D(1,1)$: Les affixes de A, B, C et D sont respectivement $a = 1, b = -1+i, c = -i$ et $d = 1+i$ donc :

$$\frac{b-a}{d-c} = \frac{(-1+i)-1}{(1+i)+i} = \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{i(1+2i)}{1+2i} = i \in i\mathbb{R}$$

d'où les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Rappel : Soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan $\mathscr{P}$.
Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si, et seulement si, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \pi[2\pi]$.

Proposition 6.3 *Soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d.*
Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si, et seulement si, $\dfrac{c-b}{c-a} \times \dfrac{d-a}{d-b}$ est réel.

Démonstration :
Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si, et seulement si, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) + \pi[2\pi]$ si, et seulement si, $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) - \arg\left(\dfrac{b-d}{a-d}\right) \equiv 0[2\pi]$ ou $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) - \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right) \equiv \pi[2\pi]$ si, et seulement si, $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a} \times \dfrac{d-a}{d-b}\right) \equiv 0[2\pi]$ ou $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a} \times \dfrac{d-a}{d-b}\right) \equiv \pi[2\pi]$ si, et seulement si, $\dfrac{c-b}{c-a} \times \dfrac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}$.
Exemple : On considère les points $A(3,1), B(-2,-4), C(1,5)$ et $D(-5,-3)$: Les affixes de A, B, C et D sont respectivement $a = 3+i, b = -2-4i, c = 1+5i$ et $d = -5-3i$ donc :

$$\frac{c-b}{c-a} \times \frac{d-a}{d-b} = \frac{(1+5i)-(-2-4i)}{(1+5i)-(3+i)} \times \frac{(-5-3i)-(3+i)}{(-5-3i)-(-2-4i)} = \frac{3+9i}{-2+4i} \times \frac{-8-4i}{-3+i} = \frac{3(1+3i)}{2i(2+i)} \times \frac{-4(2+i)}{i(1+3i)} = -6 \in \mathbb{R}$$

d'où les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques. Or :

$$\frac{d-a}{c-a} = \frac{(-5-3i)-(3+i)}{(1+5i)-(3+i)} = \frac{-8-4i}{-2+4i} = \frac{-4(2+i)}{2i(2+i)} = 2i \notin \mathbb{R}$$

donc les points A, C et D ne sont pas alignés donc les points A, B, C et D ne sont pas alignés d'où les points A, B, C et D sont cocycliques.

Proposition 6.4 *Si A, B, C et D sont des points deux à deux distincts du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d alors :*

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{AB}{AC} \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$$

Démonstration :
On a :

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{|b-a|}{|c-a|} = \frac{AB}{AC}$$

et :

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg(b-a) - \arg(c-a)[2\pi] \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AC})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$$

Applications : Soient A, B, C trois points deux à deux distincts du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a, b et c.

- ABC est un triangle isocèle en A si, et seulement si, $\exists t \in \mathbb{R}, \frac{b-a}{c-a} = e^{it}$ si, et seulement si, $\exists t \in \mathbb{R}, \frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{U}$.
- ABC est un triangle rectangle en A si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur.
- ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{b-a}{c-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exemples :

- On considère les points $A(1,1), B(3,2)$ et $C(2,3)$: On a :

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \left|\frac{(3+2i)-(1+i)}{(2+3i)-(1+i)}\right| = \left|\frac{2+i}{1+2i}\right| = \frac{|2+i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

  donc ABC est un triangle isocèle en A.
- On considère les points $A(1,0), B(3,1)$ et $C(0,2)$: On a :

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(3+i)-1}{2i-1} = \frac{2+i}{i(2+i)} = -i$$

  donc :

$$\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R} \text{ et } \left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$$

  d'où ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.
- On considère les points $A(1,0), B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$ et $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$: On a :

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}+3}{2}}{\sqrt{3}+i\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)i}{2(1+i)} = \frac{\left(1-\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)i\right)(1-i)}{4} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

  donc ABC est un triangle équilatéral.

6.2 Interprétation géométrique de l'application $z \mapsto az + b$:

Proposition 6.5 Interprétation géométrique de l'application $z \mapsto z + a$ avec $a \in \mathbb{C}$:
Si $a \in \mathbb{C}$ et u le vecteur de $\mathscr{P}$ d'affixe a.
L'application $M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = z + a$ est la translation de vecteur u.

Démonstration :
Soit t la translation de vecteur u et $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectifs z et z'. On a :

$$M' = t(M) \iff \overrightarrow{MM'} = u \iff z' - z = a \iff z' = z + a$$

On déduit que la translation t est l'application $M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = z + a$.
Exemple : L'application $z \mapsto z + 3 - 2i$ est la translation de vecteur $u(3, -2)$.

Proposition 6.6 Interprétation géométrique de l'application $z \mapsto \lambda z + a$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $a \in \mathbb{C}$:
Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ différent de 1.
L'application $M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = \lambda z + a$ est l'homothétie de rapport λ et de centre le point Ω d'affixe $\frac{a}{1-\lambda}$.

Démonstration :
Soit h l'homothétie de rapport λ, de centre Ω et $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectifs z et z'. On a :

$$\begin{aligned} M' = h(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{OM} \\ &\iff \left(z' - \frac{a}{1-\lambda}\right) = \lambda\left(z - \frac{a}{1-\lambda}\right) \\ &\iff z' = \lambda z - \frac{\lambda a}{1-\lambda} + \frac{a}{1-\lambda} \\ &\iff z' = \lambda z - \frac{a - \lambda a}{1-\lambda} \\ &\iff z' = \lambda z - \frac{(1-\lambda)a}{1-\lambda} \\ &\iff z' = \lambda z + a \end{aligned}$$

On déduit que l'homothétie h est l'application $M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = \lambda z + a$.
Remarque : Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, Ω, M, M' des points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes ω, z, z' et h l'homothétie de rapport λ et de centre Ω.
- Si $h(M) = M'$ alors $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.
- Si $h(M) = M'$ alors $z' = \lambda z + (1-\lambda)\omega$.

Exemples :
- L'application $z \mapsto 2z + 3 - 5i$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point Ω d'affixe $\frac{3-5i}{1-2} = -3 + 5i$.
- L'homothétie de rapport -3 et de centre $\Omega(2, -3)$ est l'application $z \mapsto -3z + (1-(-3))(2-3i) = -3z + 8 - 12i$.

Proposition 6.7 *Interprétation géométrique de l'application $z \mapsto e^{i\theta}z + a$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ et $a \in \mathbb{C}$:*
Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.
L'application $M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = e^{i\theta}z + a$ est la rotation d'angle θ et de centre le point Ω d'affixe $\dfrac{a}{1-e^{i\theta}}$.

Démonstration :
Soit r la rotation d'angle θ, de centre Ω et $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectifs z et z'.
- Si $M \neq \Omega$ alors :

$$\begin{aligned} M' = r(M) &\iff \Omega M' = \Omega M \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \\ &\iff \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \\ &\iff \left|\frac{z' - \frac{a}{1-e^{i\theta}}}{z - \frac{a}{1-e^{i\theta}}}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \frac{a}{1-e^{i\theta}}}{z - \frac{a}{1-e^{i\theta}}}\right) \equiv \theta[2\pi] \\ &\iff \frac{z' - \frac{a}{1-e^{i\theta}}}{z - \frac{a}{1-e^{i\theta}}} = e^{i\theta} \\ &\iff z' - \frac{a}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}z - \frac{ae^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &\iff z' = e^{i\theta}z + \frac{a}{1-e^{i\theta}} - \frac{ae^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &\iff z' = e^{i\theta}z + \frac{(1-e^{i\theta})a}{1-e^{i\theta}} \\ &\iff z' = e^{i\theta}z + a \end{aligned}$$

- Si $M = \Omega$ alors $z = \dfrac{a}{1-e^{i\theta}}$ et on a :

$$M' = r(M) \iff M' = M \iff z' = \frac{a}{1-e^{i\theta}} \iff z' = \frac{a - ae^{i\theta} + ae^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{a}{1-e^{i\theta}}e^{i\theta} + a = e^{i\theta}z + a$$

On déduit que la rotation r est l'application $M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = e^{i\theta}z + a$.
Remarque :
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, Ω, M, M' des points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives ω, z, z' et r la rotation d'angle θ et de centre Ω.
  - Si $r(M) = M'$ alors $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
  - Si $r(M) = M'$ alors $z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$.

- Interprétation géométrique du nombre $e^{i\theta}z$: Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Si M et M' sont les points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives z et $e^{i\theta}z$ alors M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.

Exemples :

- L'application $z \mapsto jz + 1 + 2i$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre le point Ω d'affixe $\frac{1+2i}{1-j} = \frac{1+2i}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}(1+2i)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}+i\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}+i\frac{6+\sqrt{3}}{6}$.
- La rotation de d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(1,1)$ est l'application $z \mapsto e^{\frac{i\pi}{2}}z + \left(1-e^{\frac{i\pi}{2}}\right)(1+i) = iz + (1-i)(1+i) = iz+2$.

Proposition 6.8 *Interprétation géométrique de l'application $z \mapsto az+b$:*
Soit $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \notin \{0,1\}$ et θ un argument de a.
L'application $f : M(z) \in \mathscr{P} \mapsto M(z')$ tel que $z' = az+b$ est la composée commutative de la rotation r d'angle θ et de centre le point Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$ et l'homothétie h de rapport $|a|$ et de centre Ω. Autrement dit $f = r \circ h = h \circ r$.
f s'appelle la similitude d'angle θ, de rapport $|a|$ et de centre Ω.

Démonstration :
Soient $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z et z' donc :

$$h(M) = M' \iff z' = |a|z + \frac{1-|a|}{1-a}b \text{ et } r(M) = M' \iff e^{i\theta}z + \frac{1-e^{i\theta}}{1-a}b$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}
M' = (r \circ h)(M) &\iff M' = r(h(M)) \\
&\iff z' = e^{i\theta}\left(|a|z + \frac{1-|a|}{1-a}b\right) + \frac{1-e^{i\theta}}{1-a}b \\
&\iff z' = |a|e^{i\theta}z + \frac{e^{i\theta}-|a|e^{i\theta}}{1-a}b + \frac{1-e^{i\theta}}{1-a}b \\
&\iff z' = az + \frac{e^{i\theta}-a}{1-a}b + \frac{1-e^{i\theta}}{1-a}b \\
&\iff z' = az + \frac{e^{i\theta}-a+1-e^{i\theta}}{1-a}b \\
&\iff z' = az + \frac{1-a}{1-a}b \\
&\iff z' = az+b \\
&\iff M' = f(M)
\end{aligned}$$

On déduit que $f = r \circ h$. De même :

$$\begin{aligned}
M' = (h \circ r)(M) &\iff M' = h(r(M)) \\
&\iff z' = e^{i\theta}\left(|a|z + \frac{1-|a|}{1-a}b\right) + \frac{1-e^{i\theta}}{1-a}b \\
&\iff z' = |a|\left(e^{i\theta}z + \frac{1-e^{i\theta}}{1-a}b\right) + \frac{1-|a|}{1-a}b \\
&\iff z' = |a|e^{i\theta}z + \frac{|a|-|a|e^{i\theta}}{1-a}b + \frac{1-|a|}{1-a}b \\
&\iff z' = az + \frac{|a|-a}{1-a}b + \frac{1-|a|}{1-a}b \\
&\iff z' = az + \frac{|a|-a+1-|a|}{1-a}b \\
&\iff z' = az + \frac{1-a}{1-a}b \\
&\iff z' = az+b \\
&\iff M' = f(M)
\end{aligned}$$

On déduit que $f = h \circ r$ donc $f = h \circ r = r \circ h$.

Interprétation géométrique du produit de deux nombres complexe : Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de a. Si M et M' sont les points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a et ab alors $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta[2\pi]$ et $OM' = |a|OM$.