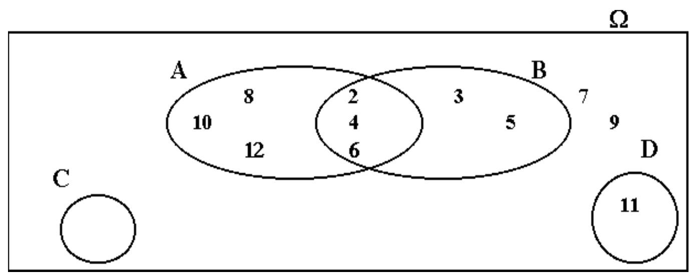
Soient les sous-ensembles de Ω:

A = les résultats pairs

B = les résultats ≤ 6

C = les résultats >12

D = les résultats divisibles par 11



Écrire les éléments des sous-ensembles obtenus par les opérations suivantes :

Les ensembles complémentaires

$\bar{A}$ = les résultats impairs
$\bar{B}$ = les résultats > 6
$\bar{C}$ = les résultats ≤ 12
$\bar{D}$ = les résultats non divisibles par 11

solutions

a. $\{3, 5, 7, 9, 11\}$
b. $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
c. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
d. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$

Intersection

$A \cap B$: les résultats pairs et ≤ 6
$A \cap D$: les résultats pairs et > 12
$B \cap B$: les résultats ≤ 6 et ≤ 6
$B \cap C$: les résultats ≤ 6 et > 12
$\Omega \cap D$: tous les résultats et divisibles par 11

solutions

- *a.* $\{2,4,6\}$
- *b.* $\emptyset$
- *c.* $\{2,3,4,5,6\}$
- *d.* $\emptyset$
- ***e.*** $\{11\}$

Union

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: les $\mathrm{r}\acute{e}$sultats pairs ou ≤ 6
$\mathrm{A} \cup \mathrm{D}$: les $\mathrm{r}\acute{e}$sultats pairs ou divisibles par 11
$\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$: les $\mathrm{r}\acute{e}$sultats ≤ 6 ou > 12

les éléments appartenant à la fois à A et à B ne sont inscrit qu'une seule fois dansle nouveau sous-ensemble.

solutions

- *a.* $\{2,3,4,5,6,8,10,12\}$
- *b.* $\{2,4,6,8,10,11,12\}$
- *c.* $\{2,3,4,5,6\}$

Différence

$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$: $\mathrm{r}\acute{e}$sultats pairs sauf ceux ≤ 6
fi $\setminus$ A : tous les $\mathrm{r}\acute{e}$sultats sauf ceux qui sont pairs
$\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}$: $\mathrm{r}\acute{e}$sultats pairs sauf ceux qui sont pairs
$\mathrm{A} \setminus \emptyset$: $\mathrm{r}\acute{e}$sultats pairs sauf l'ensemble vide

solutions

- *a.* $\{8,10,12\}$
- *b.* $\{3,5,7,9,11\}$
- *c.* $\emptyset$
- *d.* $\{2,4,6,8,10,12\}$

APPLICATIONS : LES SUITES

APPLICATION :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ; Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

SOLUTION :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]0,1]$ donc $u_0 > 0$. Montrons que $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} > 0$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in [0,1]$ donc $u_0 \leq 1$. Montrons que $u_n \leq 1$ entraine que $u_{n+1} \leq 1$.

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow u_n^2 < 1$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{(1)^2}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

APPLICATION :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ; Soit $(un)n\geq 0$ la suite de nombres réels définie par $u0\in]1,2]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, un>1$.

2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $un\leq 2$.

SOLUTION :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u0\in]1,2]$ donc $u0\geq 1$. Montrons que $un>1$ entraine que $un+1>1$.

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $un>1$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u0\in]1,2]$ donc $u0\leq 2$. Montrons que $un\leq 2$ entraine que $un+1\leq 2$.

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{(2)^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \leq 2$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, U$n\leq 2$.

APPLICATION :

Soient U0,a et b trois réels. On considère la suite $(un)n\geq 0$ de nombres réels définie par $u0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(un)n\geq 0$ lorsque a=1 ? Lorsque que b=0 et $a\neq 1$?

2. Exprimer un dans les deux cas particulier de la question 1.

3. Dans le cas général, calculer $u1$,$u2$ et $u3$ en fonction de $u0$,a et b.

SOLUTION

1. Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.
   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_{n+1} = au_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a,
2. Lorsque $a = 1$ alors $u_n = u_0 + nb$
   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_n = a^n u_0$(remarque, si $a = 1$ cela ne change rien).
3.

$$u_1 = au_0 + b$$
$$u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + (a + 1)b$$
$$u_3 = au_2 + b = a(a^2u_0 + (a + 1)b + b = a^3u_0 + (a^2 + a + 1)b$$

APPLICATION :

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de u_0

1. Montrer que si $u0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $un \leq 2$ et que la suite est monotone.

2. Montrer que si $u0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $un \geq 2$ et que la suite est monotone.

3. On pose $vn = un - 2$. Montrer que la suite (vn) est une suite géométrique de raison ½ .

SOLUTION

1. Par récurrence $u_0 \leq 2$ et montrons que $u_n \leq 2$ entraine $u_{n+1} \leq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2. Par récurrence $u_0 \geq 2$ et montrons que $u_n \geq 2$ entraine $u_{n+1} \geq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante

3.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

APPLICATION :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n+8}{2u_n+1}$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-3/5$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.

SOLUTION :

1.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1}-2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1}+2} = \frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{u_n+8+2(2u_n+1)} = \frac{-3u_n+6}{5u_n+10} = -\frac{3}{5}\times\frac{u_n-2}{u_n+2} = -\frac{3}{5}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$

2.

$$v_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n v_0 = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{u_0-2}{u_0+2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n-2 \Leftrightarrow v_nu_n+2v_n = u_n-2 \Leftrightarrow v_nu_n-u_n = -2-2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -2-2v_n \Leftrightarrow u_n = -\frac{2+2v_n}{v_n-1} = -\frac{2-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^n-1}$$