CHAPITRE 1

Statistique

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

En **6ᵉ**, les élèves ont été mis en situation de recevoir de l'information à partir de la lecture et de l'interprétation de données sous différentes formes (tableaux, graphiques, …). Ce travail s'est poursuivi en **5ᵉ** où les élèves ont été entraînés à acquérir les premiers outils statistiques, calculer des effectifs et des fréquences, regrouper des données en classes d'égale amplitude, lire et interpréter des informations à partir d'un tableau ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme), présenter des données dans un tableau, les représenter sous forme de diagramme ou d'histogramme.

En **4ᵉ** a été mis en place un premier paramètre de position, la moyenne d'une série statistique, avec la mise en œuvre des deux procédés de calcul : la somme des *n* données divisée par *n* (compétence au socle) et la moyenne pondérée des valeurs par leurs effectifs (compétence hors socle). Les calculs se font à la main pour de petits effectifs, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur pour de plus grands. Créer une feuille de calcul, la modifier, insérer une formule, créer un graphique à partir des données d'une feuille de calcul sont des capacités attendues.

2. Médiane d'une série statistique

Avec ce chapitre, qui peut être traité à tout moment de l'année, s'achève la mise en place des paramètres de position.

L'activité 1 a quatre objectifs :

- rappeler la signification de la moyenne ;
- montrer l'insuffisance de la moyenne pour résumer une série statistique ;
- introduire la notion de médiane dans le cas d'un nombre impair de données ;
- donner du sens à la notion de médiane.

Ici l'effectif est impair. Les questions invitent les élèves à ranger les valeurs de la série par ordre croissant, puis à s'intéresser à la valeur qui occupe la position centrale dans la liste, « la valeur du milieu ».

Cette activité met aussi en évidence le fait que, contrairement à la moyenne, la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes de la série.

Dans **l'activité 2** nous proposons deux séries statistiques sous forme de listes non ordonnées, comportant un nombre pair de données ainsi qu'une série présentée sous forme de tableau. Ici les élèves ont à prendre des initiatives.

Des échanges peuvent s'instaurer, d'une part sur le fait que les listes de données sont à ranger par ordre croissant, d'autre part sur la façon de déterminer la médiane dans le cas d'un effectif pair, par partition des données en deux groupes d'égal effectif. Dans la première série, nous avons opté pour faire étudier le cas particulier où la plus grande des valeurs les plus petites est la même que la plus petite des valeurs les plus grandes ; il conviendra de montrer, pour la seconde série, que toute valeur comprise entre ces deux valeurs peut convenir, et que par convention, on choisit leur demi-somme.

La troisième série, présentée sous forme d'un tableau, peut conduire à réfléchir, à comprendre aussi que sous cette présentation se cache une liste avec répétition des valeurs (à noter que dans ce cas, l'effectif est impair).

La dernière question de cette activité permet de dégager une règle liant la détermination de la médiane d'une série et la parité de l'effectif total.

Donner du sens à la notion de médiane est aussi un objectif de cette activité. En effet, calculer le pourcentage de valeurs de la série inférieures ou égales à la médiane, puis supérieures ou égales à médiane non seulement amène à réinvestir le calcul d'une fréquence en pourcentage mais aussi à préciser que la médiane est un nombre M tel que :

- au moins la moitié des données lui sont inférieures ou égales ;
- au moins la moitié des données lui sont supérieures ou égales.

La remarque de certains élèves : « Mais ça fait plus de 100 %… » à propos des exemples **a.** et **c.** peut donner lieu à une nouvelle explication du rôle de la médiane, en s'aidant de représentations visuelles montrant que dans ces cas, comme dans le cas de l'activité 1, certaines données de la série, la médiane ou les valeurs égales à la médiane, sont à la fois dans le groupe des « petites valeurs » et dans celui des « grandes », alors que dans le cas de l'exemple **b.**, la médiane n'est pas une valeur de la série.

Les exercices à l'oral 9 à 13 pourront être abordés immédiatement ; ils permettront aux élèves de s'approprier la détermination de la médiane d'une série donnée le plus souvent par une liste, ordonnée ou non.

3. Étendue d'une série statistique

Avec la notion d'étendue, puis plus tard de quartiles, une première approche de la dispersion est abordée.

Dans **l'activité 3**, il s'agit de définir ce qu'est l'étendue d'une série statistique et de remarquer que l'étendue est sensible aux valeurs extrêmes (sauf cas particulier de répétition de ces valeurs extrêmes).

On pourra faire suivre cette activité par l'étude des **exercices à l'oral 14 à 16.**

Ce travail sur médiane et étendue est poursuivi dans **l'activité 4** où l'on exploite des résultats de mesures d'une grandeur. C'est l'occasion, face à cet effectif total assez grand, d'utiliser un tableur et de rappeler la détermination d'une moyenne, qu'on soit dans le cas d'une moyenne somme des *n* données divisée par *n* ou dans celui d'une moyenne pondérée.

Puis vient la détermination de la médiane à l'aide de la formule =MEDIANE(plage de cellules) dans le cas d'une série donnée par une liste. L'enseignant peut soit laisser les élèves découvrir cette formule en utilisant l'assistant fonctions, soit leur fournir la formule, soit les renvoyer page II, au début du manuel.

On peut faire remarquer aux élèves que dans le cas d'une série présentée sous forme d'un tableau comme dans l'exemple **b.**, il n'est pas possible de faire déterminer la médiane par le tableur (sauf en écrivant chaque valeur autant de fois que ne l'indique l'effectif). C'est la raison pour laquelle nous demandons de déterminer cette médiane mentalement.

Par contre, déterminer l'étendue d'une série à l'aide d'un tableur est possible dans les deux exemples. Nous avons opté pour laisser les élèves trouver cette formule à partir des deux fonctions MAX et MIN. L'assistant fonctions ou la page II pourront être utilisés.

La dernière question peut être l'occasion de remarquer que l'étendue d'une série est une caractéristique de dispersion. Ici, on peut noter que bien qu'ayant la même moyenne et la même médiane, les deux séries de mesures sont différentes, la seconde présentant des mesures plus dispersées que la première.

Remarque : On peut prolonger cette activité ainsi :

Si la valeur mesurée d'une résistance diffère de plus de 1 % de la valeur moyenne du lot, alors on peut la retourner au fabricant pour échange.

Déterminer la quantité de résistances à renvoyer.

4. Quartiles d'une série statistique

Avec la notion de quartiles cette fois, on poursuit l'étude sur une première approche de la dispersion.

L'activité 5 a pour objectif d'introduire les quartiles à l'aide de séries données sous forme de listes. Les calculs pourront être faits à l'aide de la calculatrice.

Le travail dans la question **1.** porte sur une série de 15 valeurs ; il permet d'aborder le fait qu'on choisit comme rang du premier quartile le plus petit entier supérieur au quart de l'effectif total (même chose pour le troisième quartile où on choisit comme rang le plus petit entier supérieur aux trois-quarts de l'effectif). Les élèves peuvent être plus autonomes dans la question **2.** (série de 12 valeurs). On notera que la parité de l'effectif total n'a aucune influence ici.

La question **3.** est l'occasion de réaliser un schéma pour montrer un résumé statistique d'une série. La comparaison des deux séries, qui peut être travaillée en collaboration avec le professeur d'Histoire-Géographie, invite les élèves à échanger à propos des pays de l'Union européenne.

Les exercices à l'oral 17 à 19 pourront être étudiés ensuite ; les élèves pourront ainsi vérifier s'ils ont compris comment déterminer les quartiles d'une série puis ils pourront revenir sur médiane, étendue et moyenne.

Les élèves pourront utilement se référer **au cours**, où les différentes définitions sont accompagnées d'exemples et de représentations visuelles facilitant leur appropriation.

Le schéma final résumant une série statistique est là pour aider à donner du sens à ces nouvelles notions.

Les deux notes historiques peuvent faire prendre conscience aux élèves de la relative proximité de la découverte de ces notions.

5. Les savoir-faire

• Nous avons fait le choix de proposer deux **exercices résolus 1 et 4** qui nécessitent uniquement l'utilisation et la compréhension des notions mises en place (médiane, étendue et quartiles de deux séries présentées sous forme de tableaux), sans oublier la notion de moyenne.

Le premier exercice se traite à la main ; les élèves peuvent vérifier leurs réponses grâce à la solution ou suivre celle-ci en cas de difficulté. Grâce à l'animation interactive, les élèves voient où aller prendre les éléments nécessaires.

Le second exercice permet de découvrir plusieurs nouvelles fonctionnalités de la calculatrice.

Il s'agit de produire des éléments de résumés statistiques mais aussi de s'interroger sur l'information apportée par ce résumé, d'interpréter des résultats.

Les exercices des rubriques « **J'applique** » sont là pour consolider cet apprentissage et aussi pour travailler sur l'interprétation des résultats obtenus.

• La page **Atelier Brevet** est alimentée par deux exercices extrêmement différents. **L'exercice guidé 7** porte sur la compréhension de ce que sont médiane et quartiles d'une série statistique et sur l'interprétation de résultats (aucun calcul n'est demandé). On pourra insister sur la nécessité de bien connaître les définitions.

L'exercice guidé 8 est la première partie d'un problème qui porte ensuite sur des notions de probabilité. Outre la détermination d'une médiane interviennent ici la saisie d'une formule simple dans une cellule d'une feuille de calcul ainsi que la réalisation d'un diagramme en bâtons. On pourra faire remarquer une prise d'initiative intéressante, consistant à regrouper des résultats et les présenter dans un tableau afin de faciliter les réponses aux deux dernières questions.

6. Compléments

Qu'ils soient d'application ou d'approfondissement, qu'ils se résolvent à la main, avec une calculatrice ou avec un tableur, les exercices proposent des situations familières, issues le plus souvent de la vie courante. Les résultats de mesures d'une grandeur obtenues par exemple lors d'une activité expérimentale sont également exploités.

Un des objectifs des **exercices d'application** est la maîtrise de la technique de détermination de la médiane, de l'étendue et des quartiles d'une série statistique. A cet effet, nous proposons pour chaque notion (les titres des rubriques aidant à repérer l'objectif essentiel) quelques exercices portant sur des séries de nombres, puis des exercices portant sur des thèmes variés, afin de donner du sens à ces notions et de susciter intérêt et curiosité. Des questions peuvent porter également sur la moyenne.

Une lecture attentive des énoncés, textes enrichis de données présentées sous forme de tableaux ou de diagrammes, est nécessaire.

On insistera sur la nécessaire interprétation des résultats obtenus.

Toute prise d'initiative, tout essai de formulation écrite ou orale seront valorisés.

Les **exercices 39** (Math et Arts) et **40** (Maths in English) permettent de faire le point avec l'élaboration d'un résumé statistique.

La partie **Prendre des initiatives** peut être le support d'échanges au sein de la classe, d'une part sur les démarches utilisées, d'autre part sur les nombreuses réponses possibles (cas des **exercices 30, 42** et **43**). **L'exercice 44** peut être riche d'interactivité entre élèves après une recherche au sein des groupes et un important travail d'écriture.

• Des capacités en vue de l'acquisition de la pratique d'une démarche scientifique sont travaillées dans la partie **Présenter, argumenter, communiquer**, en particulier présenter la démarche suivie, extraire et organiser l'information utile, exploiter des résultats pour invalider les conjectures proposées, faire des essais, porter un regard critique sur des affirmations, sur des diagrammes.

• Les sujets proposés en **travail autonome** permettent aux élèves de faire leur bilan personnel, avec renvoi au cours ou aux exercices résolus en cas de non réussite.

• La page **Objectif Brevet** est alimentée par des sujets récents, où en plus des notions de moyenne, médiane, étendue et quartiles, interviennent des notions rencontrées les années précédentes, comme des calculs d'effectifs, de fréquences et de pourcentages, ou encore la réalisation d'un diagramme en bâtons.

• Les **Exercices d'approfondissement** ne sont pas particulièrement difficiles ; par contre ils regroupent plusieurs compétences, nécessitent souvent de la réflexion et ne se traitent pas en quelques minutes. Ils peuvent être l'occasion de travaux collectifs. L'utilisation d'un tableur n'est pas signalée, elle peut relever de l'initiative d'élèves. Ici aussi, toute piste de recherche sera valorisée.

• Lors de la **tâche complexe,** les élèves – qui peuvent là aussi travailler en petits groupes – doivent analyser différentes mesures. Il leur faut extraire des informations d'un ensemble de documents, informations qu'il sera nécessaire d'organiser.

Le compte-rendu pourra être fait sous différentes formes ; un document écrit est demandé ; il peut être complété par un exposé oral.

• L'exercice proposé dans la rubrique **En route vers la seconde,** à télécharger sur le site, nécessite une bonne organisation, mais aussi une certaine maîtrise du tableur. Les élèves auront à y prendre des initiatives.

D'autres situations avec téléchargement de fichier sont proposées sur le site.

Corrigés

1. Devinettes

- **Devinette**

$(60 \times 4 + 80) : 5 = 320 : 5 = 64$

Karima a 320 points pour les cinq contrôles.

Après le 5^{e} contrôle, sa moyenne est 64 (sur 100).

- **Devinette**

Nombre de paniers réussis :

Équipe de Léo : $18 \times 4 + 25 \times 3 = 147$

Équipe de Claire : $17 \times 2 + 24 \times 5 = 154$

$154 > 147$ donc c'est Claire qui a raison.

Remarque : Dans l'équipe de Léo, les garçons et les filles ont de meilleurs scores moyens que dans l'équipe de Claire. Toutefois la répartition garçons/filles n'est pas la même dans les deux équipes et seul le calcul du score total de chaque équipe permet de connaître l'équipe gagnante.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : b.

$150 \times 4 = 600$ donc un quart des collégiens viennent en bus.

$360° : 4 = 90°$ donc sur le diagramme circulaire, l'angle du secteur bus mesure 90° ; on élimine ainsi la réponse **a.**

Les collégiens venant en voiture sont moins nombreux que ceux qui viennent à pied ($165 < 213$), donc la mesure de l'angle du secteur « voiture » est inférieure à celle de l'angle du secteur « à pied » ; on élimine ainsi la réponse **c.**

2 Bonne réponse : a.

$10 + 40 = 50$ et $10 + 40 + 20 + 10 = 80$

Parmi les 80 personnes interrogées, 50 font moins de 3 h de sport par semaine.

La fréquence est $\frac{50}{80}$; $\frac{50}{80} = 0{,}625$ ou 62,5 %.

b. « moins de 3 h » signifie ici « 0 h ou 1 h ou 2 h », mais « 3 h » n'en fait pas partie.

c. Confusion entre « au moins 3 h » et « moins de 3 h » ; 37,5 % est la fréquence de ceux qui font « au moins 3 h » de sport par semaine.

3 Bonne réponse : c.

$M = \frac{1620}{5} = 324$. Ainsi la moyenne est 324.

a. Si on utilise une calculatrice, il faut penser à mettre des parenthèses.

$M = (275 + 387 + 291 + 318 + 349) : 5$ ainsi $M = 1620 : 5$ soit $M = 324$.

b. La moyenne d'une série de valeurs est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total.

On ne doit pas s'intéresser seulement aux valeurs extrêmes.

4 Bonne réponse : b.

Il s'agit d'une moyenne pondérée, il faut ajouter les produits « valeur × effectif » avant de diviser par l'effectif total.

$M = \frac{1683}{85} = 19{,}8$. Ainsi la masse moyenne des noix est 19,8 g.

a. Il faut tenir compte de l'effectif de chaque valeur.

c. Il n'est pas demandé d'arrondir la moyenne trouvée.

3. Calcul mental

5 **a.** 13 **b.** 22,5 **c.** – 0,5 **d.** 20,3 **e.** 35,56 **f.** 312

6 C'est le club B. En effet :

Club A : 38 buts marqués en 20 matchs soit une moyenne de 1,9 but par match.

Club B : 40 buts marqués en 20 matchs soit une moyenne de 2 buts par match.

4. Activités

Médiane d'une série statistique

1 Résumer les salaires d'une entreprise

1. a. $M = \frac{54594}{27}$ soit $M = 2022$.

Le salaire moyen est de 2 022 €.

b. Si on supprime le plus haut salaire (9 899 €) et le plus bas (560 €), on obtient : $M' = \frac{44135}{25}$ soit $M' = 1\,765{,}20$.

Le salaire moyen est devenu 1 765,20 €.

c. Le salaire moyen de 2 022 € ne permet pas de décrire correctement les salaires de cette entreprise. On note que ce salaire moyen baisse de manière importante (265,80 €) si on enlève les salaires le plus bas et le plus haut.

2. a. On range les salaires dans l'ordre croissant :

560 ; 1 130 ; 1 200 ; 1 220 ; 1 230 ; 1 240 ; 1 300 ; 1 350 ; 1 415 ; 1 420 ; 1 440 ; 1 440 ; 1 550 ; 1 620 ; 1 630 ; 1 650 ; 1 810 ; 1 810 ; 1 840 ; 1 840 ; 2 000 ; 2 290 ; 2 380 ; 2 980 ; 3 090 ; 3 260 ; 9 899.

Le salaire qui occupe la position centrale dans cette liste de 27 salaires est le 14^{e}, c'est-à-dire 1 620 €.

b. Si on supprime le plus haut salaire (9 899 €) et le plus bas (560 €), on obtient une série de 25 salaires ; celui qui occupe la position centrale est le 13^{e} : 1 620 €.

Le nouveau salaire médian reste le même.

c. Le salaire médian permet de mieux décrire les salaires de l'entreprise, car il y a le même nombre de salaires inférieurs à ce salaire de 1 620 € que de salaires supérieurs. De plus, il n'est pas sensible aux salaires extrêmes.

3. • « Avec la somme totale des 27 salaires de l'entreprise, si chacun recevait le même salaire, celui-ci serait de 2 022 € ».

• « Plus de la moitié des salariés de l'entreprise gagnent 1 620 € ou plus, et plus de la moitié gagnent 1 620 € ou moins ».

2 Observer la parité de l'effectif total

1. a. • On range les performances dans l'ordre croissant.
5,30 ; 5,45 ; 5,50 ; 5,50 ; 5,53 ; 5,60 ; 5,60 ; 5,60 ; 5,60 ; 5,75 ; 5,75 ; 5,75 ; 5,77 ; 5,80 ; 5,82 ; 5,83.

Il y a un nombre pair de performances (16).

Il n'y a pas une performance qui occupe une position centrale, mais on peut partager la liste de valeurs en deux listes de même effectif (8).

$\boxed{5{,}30 ; 5{,}45 ; 5{,}50 ; 5{,}50 ; 5{,}53 ; 5{,}60 ; 5{,}60 ; \mathbf{5{,}60}}$

et $\boxed{\mathbf{5{,}60} ; 5{,}75 ; 5{,}75 ; 5{,}75 ; 5{,}77 ; 5{,}80 ; 5{,}82 ; 5{,}83}$

5,60 est la plus grande valeur parmi les 8 valeurs les plus petites et aussi la plus petite valeur parmi les 8 valeurs les plus grandes. Il semble naturel de la choisir comme médiane. Ainsi M = 5,60.

• 9 performances sur les 16 sont inférieures ou égales à M, ce qui correspond à un pourcentage de 56,25 %.

11 performances sur les 16 sont supérieures ou égales à M, ce qui correspond à un pourcentage de 68,75 %.

b. On range les températures de la plus basse à la plus haute. Il y a un nombre pair de températures (14).

On partage la série en deux séries de 7 températures :

$\boxed{-2{,}7 ; -2{,}1 ; -1{,}6 ; -1{,}1 ; -0{,}9 ; -0{,}3 ; \mathbf{0{,}8} ;}$

$\boxed{\mathbf{1} ; 1{,}3 ; 1{,}6 ; 1{,}7 ; 2{,}5 ; 2{,}8 ; 6{,}6}$

La médiane est une valeur comprise entre 0,8 (la plus grande valeur parmi les 7 valeurs les plus petites) et 1 (la plus petite valeur parmi les 7 valeurs les plus grandes).

Par convention, on choisit la demi-somme de ces deux valeurs ; ainsi M = 0,9.

• 7 températures sur les 14 sont inférieures ou égales à M, ce qui correspond à un pourcentage de 50 %. De même 50 % des températures sont supérieures ou égales à M.

c. • 5 + 9 + 7 + 6 + 3 + 1 = 31

L'effectif (31) est impair. $31 = 2 \times 15 + 1$ ainsi la valeur qui occupe la position centrale est la 16^e^. On peut remplacer le tableau par la série de valeurs ci-dessous :

0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; **2** ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 …

La 16e valeur est 2. Donc M = 2.

• 5 + 9 + 7 = 21 ; 21 jours sur 31 ont vu un nombre d'opérations inférieur ou égal à M, soit environ 68 %.

7 + 6 + 3 + 1 = 17 ; 17 jours sur 31 ont vu un nombre d'opérations supérieur ou égal à M, soit environ 55 %.

2. Règle liant la valeur médiane d'une série et la parité de l'effectif total :

❯ Si la série est donnée par une liste

• si l'effectif total est impair, on repère la valeur qui occupe la position centrale dans la liste de valeurs rangées par ordre croissant.

• si l'effectif total est pair, on partage en deux groupes les valeurs rangées par ordre croissant ; la médiane est la demi-somme de la plus grande valeur du groupe contenant les valeurs les plus petites et de la plus petite valeur du groupe contenant les valeurs les plus grandes.

❯ Si la série est donnée par un tableau d'effectifs, on procède de même selon que l'effectif total est pair ou impair ; on ajoute les effectifs des différentes valeurs jusqu'à trouver la valeur qui convient ou un encadrement de celle-ci.

Étendue d'une série statistique

3 Une mesure de dispersion

a. • 5,83 – 5,30 = 0,53

L'étendue de la série des performances est 0,53 m.

• 6,6 – (–2,7) = 9,3

L'étendue de la série des températures est 9,3°C.

• Le nombre maximal d'opérations réalisées par jour est 5, le nombre minimal est 0.

5 – 0 = 5 donc l'étendue de la série est 5.

b. En général, l'étendue d'une série est sensible aux valeurs extrêmes, puisqu'elle est la différence entre ces valeurs extrêmes.

Remarque : si les valeurs extrêmes sont répétées, l'étendue peut ne pas varier si on supprime les valeurs extrêmes.

Exemple : l'étendue de la série 1 ; 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 7 ; 7 est 6 ; si on supprime les valeurs extrêmes, l'étendue de la série 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 7 est encore 6.

4 Mesurer une grandeur en Physique

a.

C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1001	999	1005	1003	1000	1002	1001	1000	999	997		moyenne	1000,75
1005	1001	1001	1002	1001	1000	1004	998	1002	1000		médiane	1001
1002	1003	999	1003	1000	1002	1004	1005	999	1003		étendue	8
1003	999	997	1000	1003	997	999	998	1003	997			

On saisit les formules :

• = MOYENNE(A1 : L4) dans la cellule O1

• = MEDIANE(A1 : L4) dans la cellule O2

• = MAX(A1 : L4)–MIN(A1 : L4) dans la cellule O3.

On pourra utiliser l'assistant fonctions du tableur ou se reporter à la page II de couverture (début du manuel).

La moyenne de ces mesures est 1 000,75 Ω ; la médiane est 1 001 Ω et l'étendue des mesures est 8 Ω.

b.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1008	1010		effectif total	72
2	4	9	6	7	5	4	8	6	4	7	5	4	3		somme des produits	72054
3															moyenne	1000,75
4															étendue	15

On vérifie que l'effectif total est bien 72 en entrant la formule = SOMME(A2 : M2) dans la cellule P1.

On entre les formules :

• = SOMMEPROD(A1 : M1 ; A2 : M2) dans la cellule P2

• = P2/P1 dans la cellule P3

• = MAX(A1 : M1)–MIN(A1 : M1) dans la cellule P4.

La moyenne de ces mesures est 1 000,75 Ω et l'étendue des mesures est 15 Ω.

• L'effectif (72) est pair ; $72 = 2 \times 36$ donc la médiane est la demi-somme des 36e et 37e valeurs.

$4+9+6+7+5+4=35$ ($35 < 36$) et $35+8=43$ ($43 > 37$)

Les 36e et 37e valeurs sont égales à 1001 donc la médiane est 1 001 Ω.

c. On remarque que ces deux séries de mesures ont la même moyenne et la même médiane. Cependant, l'étendue de la 1ère série de mesures est 8 Ω alors que l'étendue de la 2e série de mesures est 15 Ω, les mesures de la 2e série sont plus dispersées que celle de la 1ère.

Quartiles d'une série statistique

5 En Géographie

1. a. • $\dfrac{448530}{15} = 29902$.

Le PIB moyen est 29 902 € dans l'Europe des 15.

• Le PIB le plus élevé est celui du Luxembourg et le plus faible est celui du Portugal.

66 510 – 19 570 = 46 940.

L'étendue de la série est 46 940 €.

• On range les PIB par ordre croissant.

L'effectif (15) est impair ; $15 = 2 \times 7 + 1$; le PIB médian est la 8e valeur de la série.

19 570 ; 21 540 ; 24 760 ; 25 210 ; 26 250 ; 27 280 ;

27 900 ; 28 370 ; 29 090 …

7e **8e** 9e

Le PIB médian est de 28 370 € (c'est celui de la Belgique).

b. 25 % de 15 c'est $\dfrac{1}{4} \times 15$ soit 3,75. Comme ce nombre n'est pas un nombre entier, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des PIB lui soient inférieurs ou égaux est la 4e valeur, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

19 570 ; 21 540 ; 24 760 ; 25 210 ; 26 250 …

3e **4e** 5e

Ainsi Q_1 = 25 210 € (c'est le PIB de l'Italie).

c. 75 % de 15 c'est $\dfrac{3}{4} \times 15$ soit 11,25. Comme ce nombre n'est pas un nombre entier, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des PIB lui soient inférieurs ou égaux est la 12e valeur, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

… 29 540 ; 29 990 ; 30 150 ; 30 500 ; 31 870

11e **12e** 13e

Ainsi Q_3 = 30 150 € (c'est le PIB de l'Irlande).

d. 9 pays sur les 15 ont leur PIB compris entre Q_1 et Q_3.

$\dfrac{9}{15} = 0{,}6$ donc 60 % des PIB sont compris entre Q_1 et Q_3.

Steeve a raison.

2. a. • $\dfrac{198380}{12} \approx 16532$. Le PIB moyen des 12 nouveaux pays est d'environ 16 532 €.

• Le PIB le plus élevé est celui de Chypre et le plus faible est celui de la Bulgarie.

23 840 – 10 710 = 13 130.

L'étendue de la série est 13 130 €.

• On range les PIB par ordre croissant.

L'effectif (12) est pair ; $12 = 2 \times 6$; le PIB médian est la demi-somme des 6e et 7e valeurs de la série.

10 710 ; 11 000 ; 12 520 ; 13 550 ;

15 140 ; 15 810 ; 15 860 ; 18 310 …

5e **6e** **7e** 8e

$\dfrac{15810+15860}{2} = 15835$. Le PIB médian est de 15 835 €.

b. 25 % de 12 c'est $\dfrac{1}{4} \times 12$ soit 3. La plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des PIB lui soient inférieurs ou égaux est la 3e valeur, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

10 710 ; 11 000 ; 12 520 ; 13 550 …

2e **3e** 4e

Ainsi Q_1 = 12 520 € (c'est le PIB de la Lettonie).

c. 75 % de 12 c'est $\dfrac{3}{4} \times 12$ soit 9. La plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des PIB lui soient inférieurs ou égaux est la 9e valeur, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

… 18 310 ; 20 090 ; 20 160 …

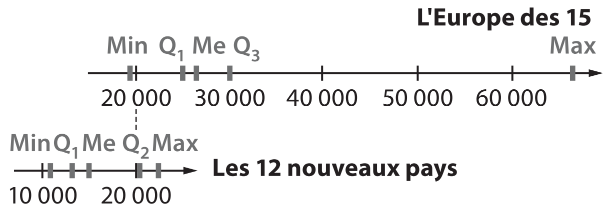
8e **9e** 10e

Ainsi Q_3 = 20 090 € (c'est le PIB de la République tchèque).

d. 7 pays sur les 12 ont leur PIB compris entre Q_1 et Q_3.

$\dfrac{7}{12} \approx 0{,}58$ donc environ 58 % des PIB sont compris entre Q_1 et Q_3. Steeve a encore raison.

3. On compare les deux séries :



Elles sont très différentes. En effet,

• le PIB moyen de la 1ère série (29 902 €) est proche du double du PIB moyen de la 2e série (16 532 €).

• le PIB le plus bas de la 1ère série (19 570 € pour le Portugal) est proche du double du PIB le plus bas (10 710 € pour la Bulgarie) dans la 2e série. De plus les 2/3 des PIB (8 pays sur 12) de la 2e série sont inférieurs à ce PIB le plus bas de la 1ère série.

• Le PIB médian de la 1ère série (28 370 €) est proche du double du PIB médian de la 2e série (15 835 €).

• Tous les PIB de la 2e série sont inférieurs au 1er quartile de la 1ère série (25 210 €).

• L'étendue de la 1ère série est 46 940 €, celle de la 2e série n'est que de 13 130 €, les PIB de la 2e série sont beaucoup moins dispersés que ceux de la 1ère série.

Cependant, le Luxembourg occupe une place à part dans la 1ère série : en effet son PIB est très nettement supérieur aux PIB des autres pays. Si on ne tient pas compte du Luxembourg dans la 1ère série, on peut remarquer que l'étendue devient alors 12 300 €, ce qui est très proche et même inférieur à l'étendue de la 2e série.

5. J'applique

2 **a. • Effectif :** Il y a 29 élèves dans la classe.

• **Moyenne :** il s'agit d'une moyenne pondérée, on ajoute les produits « valeur × effectif » avant de diviser par l'effectif total.

$m = \dfrac{174}{29} = 6$ ainsi chaque élève a reçu 6 spams en moyenne.

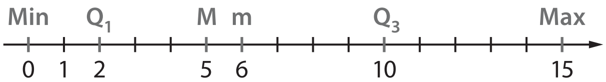
• **Médiane :** Effectif impair (29) ; médiane M : 5 (15e valeur).

• **Étendue :** 15 – 0 = 15 ; l'étendue de la série est 15.

• **Quartiles :** $\dfrac{1}{4} \times 29 = 7{,}25$ donc $Q_1 = 2$ (8e valeur).

$\dfrac{3}{4} \times 29 = 21{,}75$ donc $Q_3 = 10$ (22e valeur).

• **Représentation graphique :**



b. Le 3e quartile Q_3 est 10 donc c'est Lucile qui a raison (selon la définition du 3e quartile).

• Autre raisonnement valable :

4 élèves sur les 29 ont reçu plus de 10 spams, d'où une fréquence de $\dfrac{4}{29} \approx 0{,}14$; environ 14 % des élèves ont reçu plus de 10 spams, donc Rémi a tort.

8 élèves ont reçu 10 spams ou plus d'où une fréquence de $\dfrac{8}{29} \approx 0{,}28$; environ 28 % des élèves ont reçu 10 spams ou plus ; Lucile a raison.

3 **a. • Effectif :** 10 + 14 + … + 6 + 5 = 120

Le jardinier a trié 120 bulbes.

• **Moyenne :** il s'agit d'une moyenne pondérée.

$m = \dfrac{4375}{120}$ soit $m \approx 36$; la masse moyenne d'un bulbe est 36 g (à 1 g près).

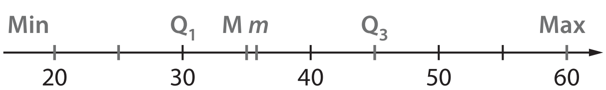
• **Médiane :** Effectif pair (120) ; médiane M : 35 (demi-somme des 60e et 61e valeurs, toutes deux égales à 35).

• **Étendue :** 60 – 20 = 40 ; l'étendue de la série est 40 g.

• **Quartiles :** $\dfrac{1}{4} \times 120 = 30$ donc $Q_1 = 30$ (30e valeur).

$\dfrac{3}{4} \times 120 = 90$ donc $Q_3 = 45$ (90e valeur).

• **Représentation graphique :**



b. • D'après la définition de la médiane d'une série :

Au moins 50 % des bulbes ont une masse comprise entre 20 g et 35 g.

Au moins 50 % des bulbes ont une masse comprise entre 35 g et 60 g.

• D'après la définition des quartiles d'une série :

Au moins 50 % des bulbes ont une masse comprise entre 30 g et 45 g.

5 La médiane est 280 g.

Les quartiles : $Q_1 = 270$ et $Q_3 = 290$.

6 La médiane est 3 livres.

Les quartiles : $Q_1 = 1$ et $Q_3 = 6$.

6. Atelier Brevet

7 **a.** 6,2 m/s est la médiane de la série, donc au moins la moitié des mesures relevées pendant l'année lui sont inférieures ou égales. Le vent a soufflé à moins de 6,2 m/s pendant au moins six mois.

b. 4 m/s est le 1er quartile donc au moins un quart des mesures lui sont inférieures ou égales. Un quart d'une année correspond à trois mois ; ainsi l'éolienne n'a pu fonctionner faute de vent suffisant pendant au moins trois mois.

8 **a.** La valeur minimale pour chaque dé étant 1, la somme minimale est 2 ; elle ne peut donc pas être égale à 1.

b. On peut obtenir la somme 12 avec deux 6.

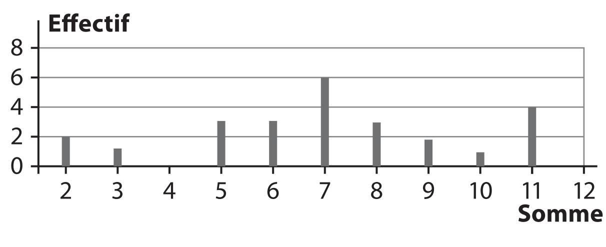
c. On peut entrer la formule =L2+L3 ou =SOMME(L2 : L3) ou =SOMME(L2 ; L3) les cellules L2 et L3 étant contigües.

d. On présente dans un tableau le nombre de fois où chaque somme a été rencontrée.

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	1	0	3	3	6	3	2	1	4	0

Effectif total impair (25) ; la médiane est 7 (13e valeur).

e. Diagramme en bâtons



7. Exercices à l'oral

Médiane d'une série statistique

9 Les valeurs des séries sont toutes rangées par ordre croissant.

a. Effectif impair (5) ; médiane : 15 (3e valeur) ; c'est une valeur de la série.

b. Effectif pair (4) ; médiane : 7 (demi-somme des 2e et 3e valeurs : $\dfrac{5+9}{2} = 7$) ; ce n'est pas une valeur de la série.

c. Effectif pair (6) ; médiane : –1 (demi-somme des 3^e et 4^e valeurs, toutes deux égales à –1) ; c'est une valeur de la série.

d. Effectif impair (7) ; médiane : 2 (4^e valeur) ; c'est une valeur de la série.

10 Mathis se trompe, la moyenne d'une série n'est pas la valeur du milieu. Ici la moyenne est $\frac{70}{7}=10$.

Maeva se trompe aussi car elle a oublié de ranger les nombres dans l'ordre croissant.

6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 12 ; 13 ; 15

Effectif impair (7) ; médiane : 9 (4^e valeur).

11 • **Moyenne :** $\frac{8}{8}=1$ ainsi la température moyenne est 1 °C.

• **Médiane :** Les températures sont rangées dans l'ordre croissant.

Effectif pair (8) ; médiane : 1 (demi -somme des 5^e et 6^e valeurs : $\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$).

12 On range les valeurs des séries **A** et **C** par ordre croissant :

A : 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 **C :** 5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 10 ; 12

Série A : Effectif impair (5) ; médiane : 9 (3^e valeur).

Série B : Effectif pair (6) ; médiane : 8 (demi-somme des 3^e (7) et 4^e (9) valeurs).

Série C : Effectif pair (4) ; médiane : 8 (demi-somme des 2^e et 3^e valeurs, toutes deux égales à 8).

Série D : Effectif impair (7) ; médiane : 8 (4^e valeur).

Les séries **B** ; **C** et **D** ont la même médiane (8).

13 On peut réaliser un tableau :

Nombre de téléchargements	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	2	2	3	4	5	4	5

• **Effectif :** 25.

• **Moyenne :** $\frac{90}{25}=3,6$

• **Médiane :** Effectif impair (25) ; médiane : 4 (13^e valeur).

• **Conclusion :** 3,6 < 4 donc c'est Maxime qui a raison.

Étendue d'une série statistique

14 Les valeurs des séries sont rangées par ordre croissant.

a. 29 – 12 = 17 ainsi l'étendue de cette série est 17.

b. 10 – (–13) = 23 ainsi l'étendue de cette série est 23.

15 Vincent s'est trompé car il a oublié de ranger les valeurs de la série dans l'ordre croissant :

12 ; 15 ; 17 ; 18 ; 24 ; 25

25 – 12 = 13 ainsi l'étendue de cette série est 13.

16 1,4 – 1,1 = 0,3 ainsi l'étendue de la série est 0,3.

Quartiles d'une série statistique

17 Les valeurs des séries sont rangées dans l'ordre croissant, sauf pour **d**.

a. Effectif : 8.

$\frac{1}{4}\times 8=2$: Q_1 = 9 (2^e valeur).

$\frac{3}{4}\times 8=6$: Q_3 = 20 (6^e valeur).

b. Effectif : 6.

$\frac{1}{4}\times 6=1,5$: Q_1 = 5 (2^e valeur).

$\frac{3}{4}\times 6=4,5$: Q_3 = 12 (5^e valeur).

c. Effectif : 9.

$\frac{1}{4}\times 9=2,25$: Q_1 = 2 (3^e valeur).

$\frac{3}{4}\times 9=6,75$: Q_3 = 6 (7^e valeur).

d. On range les cinq valeurs par ordre croissant :

32 ; 36 ; 40 ; 42 ; 45

$\frac{1}{4}\times 5=1,25$: Q_1 = 36 (2^e valeur).

$\frac{3}{4}\times 5=3,75$: Q_3 = 42 (4^e valeur).

18 On peut réaliser un tableau pour chaque série.

Série A

Valeur	5	10	15	20	25	30
Effectif	4	0	3	2	4	3

• **Étendue :** 30 – 5 = 25 ; l'étendue de la série est 25.

• **Médiane :** Effectif pair (16) ; médiane : 20 (demi-somme des 8^e et 9^e valeurs, toutes deux égales à 20).

• **Quartiles :** $\frac{1}{4}\times 16=4$ et $\frac{3}{4}\times 16=12$

Ainsi Q_1 = 5 (4^e valeur) et Q_3 = 25 (12^e valeur).

Série B

Valeur	8	9	10	11	12	13
Effectif	2	4	5	2	6	4

• **Étendue :** 13 – 8 = 5 ; l'étendue de la série est 5.

• **Médiane :** Effectif impair (23) ; médiane : 11 (12^e valeur).

• **Quartiles :** $\frac{1}{4}\times 23=5,75$ et $\frac{3}{4}\times 23=17,25$.

Ainsi Q_1 = 9 (6^e valeur) et Q_3 = 12 (18^e valeur).

19 **1. Bonne réponse c.**

En effet on n'a pas les notes extrêmes.

a. Il s'agit de l'écart interquartile.

b. Il s'agit de l'effectif total de la série de notes.

2. Bonne réponse c.

En effet l'effectif (148) est pair et 148 = 2 × 74.

3. Bonne réponse b.

$\frac{1}{4}\times 148=37$ ainsi Q_1 est la 37^e valeur de la série.

a. 8 est la valeur du premier quartile, ce n'est pas son rang.

c. 37 est un nombre entier ; on a immédiatement le rang de Q_1 (37^e).

4. Bonnes réponses a. et c.

• 11 étant la médiane de la série, au moins 50 % des notes sont inférieures ou égales à 11.

• 8 et 15 étant les 1^{er} et 3^e quartiles, au moins 50 % des notes sont comprises entre ces deux quartiles.

b. Confusion entre moyenne et médiane.

Interpréter des résultats

20 Cette affirmation n'est pas une interprétation correcte de ce graphique. En effet, la différence entre les deux années est d'environ 10 000 cambriolages sur un total d'environ 310 000 en 2009, ce qui correspond à une augmentation d'environ 3,2 % $\left(\frac{10000}{310000} \approx 0{,}032\right)$.

L'origine sur l'axe des ordonnées est 300 000, ce qui peut renforcer l'idée d'une très forte augmentation. Si l'origine avait été 0, la différence de hauteur entre les deux barres aurait été à peine visible.

21 L'affirmation de Zoé n'est pas correcte. En effet elle semble avoir oublié que l'étude indique « dans 69 % des couples » et qu'il ne s'agit donc pas de la totalité des couples.

8. Exercices d'application

Médiane d'une série statistique

22 • Les valeurs de la série sont rangées dans l'ordre croissant.

Effectif impair (13) ; médiane M = 12 (7^e valeur).

7 valeurs sur les 13 sont inférieures ou égales à M et 7 valeurs sont supérieures ou égales à M.

$\frac{7}{13} \approx 0{,}54$ donc environ 54 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M et environ 54 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M.

23 • Les 8 valeurs de la série sont à ranger par ordre croissant : –6,3 ; –6,1 ; –2,6 ; –2,5 ; –2,1 ; 1,7 ; 2,3 ; 2,5

La médiane est la demi-somme des 4^e et 5^e valeurs :

$$\frac{-2{,}5+(-2{,}1)}{2} = -2{,}3 \text{ ; ainsi } M = -2{,}3.$$

• 4 valeurs sur les 8 sont inférieures ou égales à M et 4 valeurs sont supérieures ou égales à M.

$\frac{4}{8} = 0{,}5$ donc 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M et 50 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M.

24 • Les 9 valeurs de la série sont à ranger par ordre croissant : 1,3 ; 1,5 ; 1,5 ; 2,13 ; 2,4 ; 2,4 ; 4,7 ; 4,9 ; 6.

La médiane est la 5^e valeur ; ainsi M = 2,4.

• 6 valeurs sur les 9 sont inférieures ou égales à M.

$\frac{6}{9} \approx 0{,}67$ donc environ 67 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M.

• 5 valeurs sur les 9 sont supérieures ou égales à M.

$\frac{5}{9} \approx 0{,}56$ donc environ 56 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M.

25 • Les 12 valeurs de la série sont à ranger par ordre croissant : 7 ; 8 ; 8 ; 12 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 20 ; 25 ; 25

La médiane est la demi-somme des 6^e et 7^e valeurs, toutes deux égales à 15 ; ainsi M = 15.

• 9 valeurs sur les 12 sont inférieures ou égales à M.

$\frac{9}{12} = 0{,}75$ donc 75 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M.

• 8 valeurs sur les 12 sont supérieures ou égales à M.

$\frac{8}{12} \approx 0{,}67$ donc environ 67 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M.

26 **a.** • $11{,}4 \times 11 = 125{,}4$

$125{,}4 + 12{,}5 + 12{,}9 = 150{,}8$

$150{,}8 : 13 = 11{,}6$

La longueur moyenne des phasmes augmente de 2 mm, elle est désormais de 11,6 cm.

b. • $11 = 2 \times 5 + 1$; la médiane est la 6^e valeur.

Le phasme qui avait la longueur médiane portait bien le n° 6.

• $11 + 2 = 13$ et $13 = 2 \times 6 + 1$ donc la médiane est désormais la 7^e valeur. Le phasme qui a la longueur médiane porte le n° 7 et non le n° 8 ; donc Léo n'a pas raison.

c. Ce que dit Jules est possible, si parmi les 13 phasmes, ceux portant les numéros 6 et 7 ont la même longueur.

27 **a.** La médiane 12 est la 4^e valeur de la série ; il n'y a pas répétition de la valeur 12 ; l'effectif est donc impair et égal à 7. Il manque deux nombres, supérieurs ou égaux à 15.

b. La médiane 12 n'est pas une valeur de la série ; l'effectif est donc pair ; 12 étant la demi-somme de 10 et de 14, qui sont les 3^e et 4^e valeurs, l'effectif est donc égal à 6. Il manque un nombre, supérieur ou égal à 17.

c. La médiane 12 est une valeur répétée dans la série ; elle peut être :

• la 4^e valeur de la série ; alors l'effectif est impair et égal à 7. Il manque un nombre, supérieur ou égal à 13.

• la 5^e valeur de la série ; alors l'effectif est impair et égal à 9. Il manque alors trois nombres, supérieurs ou égaux à 13.

• la demi-somme des 4^e et 5^e valeurs de la série ; alors l'effectif est pair et égal à 8. Il manque deux nombres, supérieurs ou égaux à 13.

d. La médiane 12 est une valeur répétée dans la série ; elle peut être :

• la 3^e valeur de la série mais alors l'effectif impair serait égal à 5 ; dans ce cas il ne manque aucun nombre.

• la 4^e valeur de la série et alors l'effectif est impair et égal à 7. Il manque deux nombres, supérieurs ou égaux à 14.

• la demi-somme des 3^e et 4^e valeurs de la série et alors l'effectif est pair et égal à 6. Il manque un nombre, supérieur ou égal à 14.

28 **a.** Il s'agit d'une moyenne pondérée : $M = \frac{627}{209} = 3$.
En moyenne, chaque élève a emprunté 3 livres.
b. Effectif impair (209) ; médiane : 2 (105^{e} valeur).
c. Interprétation du résultat de **a.** :
Pour le même nombre total de livres empruntés, si chaque élève avait emprunté le même nombre de livres, celui-ci serait de 3 livres.
Interprétation du résultat de **b.** :
Au moins la moitié des 209 élèves ont emprunté 2 livres ou plus de 2 livres *ou* Au moins la moitié des 209 élèves ont emprunté 2 livres ou moins de 2 livres.

29 **a.** On saisit les formules =MOYENNE(B1 : K1) en cellule B2 et =MEDIANE(B1 : K1) en cellule B3.
On lit 2,86 pour la moyenne et 2,7 pour la médiane.
b. On remarque que la moyenne change (elle devient 2,7625), mais la médiane ne change pas.
Ceci confirme le fait que la moyenne des valeurs d'une série est sensible aux valeurs extrêmes, mais que la médiane ne l'est pas (les valeurs extrêmes de la série n'étant pas répétées).

30 Nombreuses solutions possibles :
a. Toute série de sept nombres différents dont la 4^{e} valeur est 5 (lorsque les valeurs de la série sont rangées par ordre croissant), par exemple :
S_1 : 2 ; 3 ; 4 ; **5** ; 6 ; 7 ; 8 ou –4 ; 2 ; 3 ; **5** ; 10 ; 11 ; 2012 etc.
b. Toute série de six nombres dont les 3^{e} et 4^{e} valeurs sont 5 (lorsque les valeurs de la série sont rangées par ordre croissant), par exemple :
S_2 : 2 ; 3 ; **5** ; **5** ; 6 ; 7 ou –20 ; **5** ; **5** ; **5** ; 6 ; 7 etc.
c. Toute série de huit nombres différents de 5, dont la demi-somme des 4^{e} et 5^{e} valeurs est 5 (lorsque les valeurs de la série sont rangées par ordre croissant), par exemple :
S_3 : 1 ; 2 ; 3 ; **4 ; 6** ; 7 ; 8 ; 9 ou –5 ; 2 ; 2 ; **3 ; 7** ; 11 ; 25 ; 78 etc.

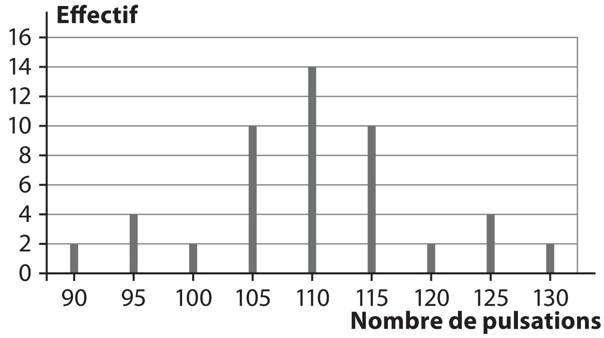
31 **a. • Médianes**
L'étude porte sur 9 années donc la médiane est la 5^{e} valeur de chaque série.
On range les valeurs par ordre croissant :
Alpes de Haute-Provence :
4 ; 5 ; 6 ; 10 ; **13** ; 14 ; 16 ; 19 ; 37.
Vaucluse :
5 ; 7 ; 9 ; 10 ; **13** ; 18 ; 22 ; 26 ; 48.
On remarque que le nombre médian de jours avec pics d'ozone est le même pour les deux départements : 13 jours par an.

• Moyennes
Alpes de Haute-Provence :
$$M_A = \frac{124}{9} \text{ soit } M_A \approx 14 \text{ jours par an.}$$
Vaucluse :
$$M_V = \frac{158}{9} \text{ soit } M_V \approx 18 \text{ jours par an.}$$
b. Les médianes des deux séries de mesures sont les mêmes, mais les moyennes sont différentes. Dans chacun des deux départements, la moitié du nombre de jours avec pics d'ozone est au moins 13 par an. Par contre, il y a eu en moyenne 4 jours de plus par an avec pics d'ozone dans le Vaucluse que dans les Alpes de Haute Provence.
On peut remarquer que globalement, les deux diagrammes ont des allures proches, mais avec davantage de nombres de jours avec pics d'ozone dans le Vaucluse chaque année (sauf en 2001).
c. Les deux diagrammes ont une barre plus élevée que les autres en 2003, année de la canicule en été, où la pollution atmosphérique a été importante, particulièrement la pollution par l'ozone.

32 **a.** On présente d'abord les données dans un tableau.

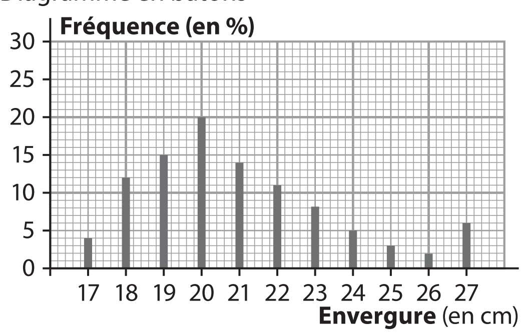
Nombre de pulsations	90	95	100	105	110	115	120	125	130
Effectif	2	4	2	10	14	10	2	4	2

Diagramme en bâtons :



b. • Moyenne
$M = \frac{5500}{50} = 110$ pulsations par minute.
• Médiane
Effectif pair (50) ; médiane : 110 pulsations par minute (demi-somme des 25^{e} et 26^{e} valeurs, toutes deux égales à 110).
c. On remarque que la médiane et la moyenne de la série sont égales. On note que le diagramme présente un axe de symétrie « vertical » qui passe justement par la valeur 110.

33 **a. • Moyenne**
On pondère les envergures par les fréquences.
$$M = \frac{2098}{100} = 20{,}98 \text{ cm.}$$
• Médiane
Effectif pair (100) ; médiane : 20 cm (demi-somme des 50^{e} et 51^{e} valeurs, toutes deux égales à 20).
b. Diagramme en bâtons



c. La différence entre moyenne et médiane est à relier à la dissymétrie du diagramme, dont la « pente » est plus douce à droite du bâton qui correspond à l'envergure 20 cm, qu'à gauche.

Étendue d'une série statistique

34 **a.** 53 – 44 = 9

L'étendue est 9 cm ; elle représente la différence de taille entre le bébé le plus grand et le bébé le plus petit.

b. Les tailles de ces bébés correspondent à une exception près à la fourchette 46 cm – 54 cm indiquée par les spécialistes. On peut penser que le bébé mesurant 44 cm est un bébé prématuré.

Moyenne :

– avec le bébé prématuré : $M = \dfrac{2333}{47}$ soit $M \approx 49{,}6$ cm.

– sans le bébé prématuré : $M = \dfrac{2289}{46}$ soit $M \approx 49{,}8$ cm.

La moyenne est proche de la moyenne de 50 cm indiquée par les spécialistes.

35

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
66	61	57,5	66	68,5	65	65,5	61,5	66,5	66	60		moyenne	64,39
63,5	65	67	69	66,5	64,5	66,5	62,5	61,5	63,5	59,5		médiane	65,25
67	66	66	64,5	61	62	67	66	63	66	66,5		étendue	12
63	62,5	65,5	63,5	67	67,5	60	69	65,5	65,5	67			
65,5	68,5	63	65	66,5	58,5	66	65	59	68	69,5			
62	60,5	65,5	68	64,5	66	62	66,5	66	62	67			
60,5	66,5	66	61,5	61	62	57,5	65,5	61,5	65	66			
60	66	68,5	62	66	67,5	62	65	62,5	62	63,5			

On a entré les formules :

=MOYENNE(A1 : K8) dans la cellule N1

=MEDIANE(A1 : K8) dans la cellule N2

=MAX(A1 : K8)–MIN(A1 : K8) dans la cellule N3.

On lit : la moyenne des distances mesurées est environ 64,4 cm, la médiane est 65,25 cm et l'étendue 12 cm.

Quartiles d'une série statistique

36 **a.** • Les valeurs de la **série A** sont rangées dans l'ordre croissant. L'effectif est 9.

$\dfrac{1}{4} \times 9 = 2{,}25$; $Q_1 = -1$ (3ᵉ valeur).

$\dfrac{3}{4} \times 9 = 6{,}75$; $Q_3 = 3$ (7ᵉ valeur).

• On range les valeurs de la **série B** dans l'ordre croissant : 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 10. L'effectif est 8.

$\dfrac{1}{4} \times 8 = 2$; $Q_1 = 5$ (2ᵉ valeur).

$\dfrac{3}{4} \times 8 = 6$; $Q_3 = 9$ (6ᵉ valeur).

b.

	Pourcentage de valeurs v avec $v \leqslant Q_1$	**Pourcentage de valeurs v avec $v \geqslant Q_3$**	**Pourcentage de valeurs v avec $Q_1 \leqslant v \leqslant Q_3$**
Série A	33 % $\left(\dfrac{3}{9} \approx 0{,}33\right)$	33 % $\left(\dfrac{3}{9} \approx 0{,}33\right)$	55 % $\left(\dfrac{5}{9} \approx 0{,}55\right)$
Série B	25 % $\left(\dfrac{2}{8} = 0{,}25\right)$	37,5 % $\left(\dfrac{3}{8} = 0{,}375\right)$	75 % $\left(\dfrac{6}{8} = 0{,}75\right)$

37 **a.** • $\dfrac{1}{4} \times 50 = 12{,}5$; $Q_1 = 94$ cm (13ᵉ valeur).

• $\dfrac{3}{4} \times 50 = 37{,}5$; $Q_3 = 101$ cm (38ᵉ valeur).

b. • Au moins 25 % des saumons capturés ont une longueur inférieure ou égale à 94 cm.

• Au moins 50 % des saumons capturés ont une longueur comprise entre 94 cm et 101 cm.

• Au moins 25 % des saumons capturés ont une longueur supérieure ou égale à 101 cm.

38 **a.** $M = \dfrac{1303}{125} = 10{,}424$ ainsi la moyenne des dépassements de la vitesse autorisée est de 10,424 $km \cdot h^{-1}$.

b. $4 + 5 + \ldots + 6 + 3 = 66$; ainsi 66 véhicules sont concernés.

Fréquence : $\dfrac{66}{125} = 0{,}528$ donc 52,8 % des véhicules ont dépassé la vitesse autorisée d'au moins 10 $km \cdot h^{-1}$.

c. • **Médiane :** Effectif impair (125) ; médiane : 10 $km \cdot h^{-1}$ (63ᵉ valeur).

• **Quartiles :** $\dfrac{1}{4} \times 125 = 31{,}25$; $Q_1 = 5\ km \cdot h^{-1}$ (32ᵉ valeur).

$\dfrac{3}{4} \times 125 = 93{,}75$; $Q_3 = 15\ km \cdot h^{-1}$ (94ᵉ valeur).

39 **a.** • **Moyenne :** $m = \dfrac{484}{20} = 24{,}2$

Le nombre théorique moyen de vers par poème est 24,2. En moyenne, il y a environ 24 vers par poème.

• **Médiane :** on range les nombres de vers par ordre croissant.

8 ; 12 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 20 ; 20 ; 20 ; 22 ; 28 ; 28 ; 44 ; 44 ; 58 ; 60.

Effectif pair (20) ; médiane : 18 (demi-somme des 10ᵉ et 11ᵉ valeurs, 16 et 20 respectivement).

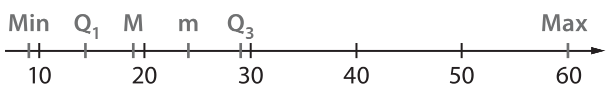
• **Quartiles :**

$\dfrac{1}{4} \times 20 = 5$; $Q_1 = 14$ (5ᵉ valeur).

$\dfrac{3}{4} \times 20 = 15$; $Q_3 = 28$ (15ᵉ valeur).

• Étendue : 60 – 8 = 52 ainsi l'étendue est de 52.

• Représentation graphique



L'étendue est grande, mais au moins 75 % des poèmes d'Anatole Le Braz ont 28 vers au plus (exactement 16 poèmes sur 20 soit 80 %). Au moins 50 % des poèmes ont entre 14 et 28 vers (exactement 14 poèmes sur 20 soit 70 %). 50 % des poèmes ont moins de 18 vers et 50 % en ont plus de 18.

b. Il s'agit de sonnets.

40 **a.** • **Moyennes**

Classe A : $M_A = \dfrac{146}{15}$ soit $M_A \approx 9{,}7$

Classe B : $M_B = \dfrac{108}{11}$ soit $M_B \approx 9{,}8$

• **Médianes**

On range les notes dans l'ordre croissant.

Classe A : 2 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 10 ; 11 ; 13 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 19

Effectif impair (15) ; médiane : 10 (8e note).

Classe B : 2 ; 5 ; 6 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 14 ; 19

Effectif impair (11) ; médiane : 10 (6e note).

• **Quartiles**

• **Classe A :**

$\frac{1}{4}\times 15 = 3{,}75$; $Q_1 = 4$ (4e note).

$\frac{3}{4}\times 15 = 11{,}25$; $Q_3 = 15$ (12e note).

• **Classe B :**

$\frac{1}{4}\times 11 = 2{,}75$; $Q_1 = 6$ (3e note).

$\frac{3}{4}\times 11 = 8{,}25$; $Q_3 = 14$ (9e note).

• **Étendues**

Classe A : 19 – 2 = 17. **Classe B :** 19 – 2 = 17.

b. Comparaison des notes des deux classes :

Les séries de notes des deux classes ont sensiblement la même moyenne, ont la même médiane (10), la même étendue (17), elles ont aussi une note basse (2) et une note élevée (19), elles n'ont pas les mêmes quartiles, mais :

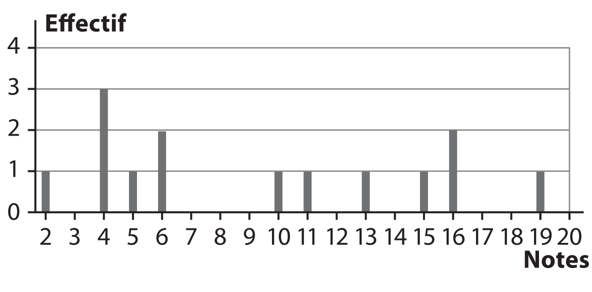
• dans la classe A, 11 élèves sur 15 ont entre 4 et 15, soit environ 73 %

• dans la classe B, 8 élèves sur 11 ont entre 6 et 14, soit environ 73 % aussi.

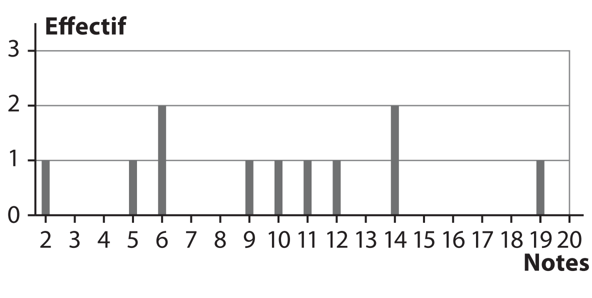
Les notes de la classe A semblent plus dispersées que celles de la classe B. Si on supprime les deux notes extrêmes (2 et 19), l'étendue des notes de la classe A est 12 et celle de la classe B est 9.

On peut représenter ces séries par deux diagrammes :

• **Classe A :**



• **Classe B :**



Prendre des initiatives

41 Somme des âges des petits-enfants : $15\times 7 = 105$ ans.

Somme des âges des neuf personnes : $28\times 9 = 252$ ans.

252 – 105 = 147 ; à eux deux, Valère et Annie ont 147 ans.

$$147 + 3 = 150 \text{ et } 150 : 2 = 75$$

Valère a 75 ans (et Annie 72).

42 **a.** Nombreuses possibilités, 10 étant la 3e valeur de la série, si les valeurs sont rangées par ordre croissant, l'étendue étant 10, la moyenne étant 10.

Quelques exemples :

• 5 ; 7 ; 10 ; 13 ; 15 (avec symétrie)

• 4 ; 9 ; 10 ; 13 ; 14 (sans symétrie ; la somme des 4 nombres autres que 10 doit être 40)

• 5 ; 10 ; 10 ; 10 ; 15

b. 10 possibilités, 10 étant la 3e valeur de la série, si les valeurs sont rangées par ordre croissant, l'étendue étant 10, la moyenne étant 11.

• 6 ; 7 ; 10 ; 16 ; 16
• 6 ; 8 ; 10 ; 15 ; 16
• 6 ; 9 ; 10 ; 14 ; 16
• 6 ; 10 ; 10 ; 13 ; 16
• 8 ; 8 ; 10 ; 13 ; 18
• 7 ; 7 ; 10 ; 14 ; 17
• 7 ; 8 ; 10 ; 13 ; 17
• 7 ; 9 ; 10 ; 12 ; 17
• 7 ; 10 ; 10 ; 11 ; 17
• 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 18

c. 10 possibilités, 11 étant la 3e valeur de la série, si les valeurs sont rangées par ordre croissant, l'étendue étant 10, la moyenne étant 10.

• 3 ; 10 ; 11 ; 13 ; 13
• 3 ; 11 ; 11 ; 12 ; 13
• 5 ; 6 ; 11 ; 13 ; 15
• 5 ; 7 ; 11 ; 12 ; 15
• 5 ; 8 ; 11 ; 11 ; 15
• 4 ; 7 ; 11 ; 14 ; 14
• 4 ; 8 ; 11 ; 13 ; 14
• 4 ; 9 ; 11 ; 12 ; 14
• 4 ; 10 ; 11 ; 11 ; 14
• 6 ; 6 ; 11 ; 11 ; 16

43 $7 = 2 \times 3 + 1$ donc la médiane de la série des sept distances est la 4e valeur.

On range les six distances par ordre croissant :

4,8 ; 5 ; 6,5 ; 7,5 ; 10 ; 11,7

a. 7,5 est la 4e valeur, la randonnée du dimanche peut avoir n'importe quelle longueur supérieure ou égale à 7,5 km.

b. 7 n'est pas une valeur de la série ; une seule longueur est possible pour la randonnée du dimanche : 7 km.

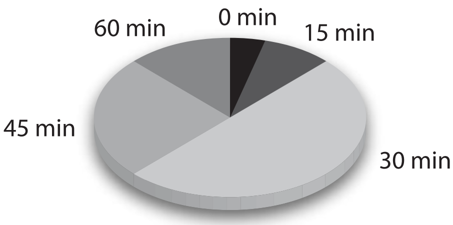
c. 6,5 est déjà la 3e valeur, une seule longueur est possible pour la randonnée du dimanche : 6,5 km.

d. 5 étant la 2e valeur, il n'est pas possible, en ajoutant une seule longueur, de faire passer cette médiane au rang 4.

44 **a.** On peut réaliser un tableau :

Temps de travail	0 min	15 min	30 min	45 min	60 min	Total
Effectif	1	2	12	6	3	24
Mesure de l'angle (en °)	15	30	180	90	45	360

Diagramme circulaire.



b. Exemples de questions :

• Quelle est la durée moyenne du temps de travail à la maison pour les élèves de cette classe ?

Réponse : 35 min $\left(\text{en effet} : \dfrac{840}{24} = 35\right)$

• Quelle est l'étendue de la série ? *ou* Quelle est la différence de temps de travail entre les élèves qui travaillent le plus longtemps et l'élève qui dit ne pas travailler pas ?
Réponse : 1 h.

• Quel est le pourcentage d'élèves de la classe qui travaillent 0 min ? 15 min ? 30 min ? 45 min ? 1 h ?
Réponses :

Durée (en min)	0	15	30	45	60
Fréquence	$\frac{1}{24} \approx 0{,}04$ environ 4 %	$\frac{2}{24} \approx 0{,}08$ environ 8 %	50 %	25 %	$\frac{3}{24} = 0{,}125$ 12,5 %

• Quel est le pourcentage d'élèves de la classe qui travaillent au plus 15 min ? 30 min ? 45 min ?
Réponses :
$1 + 2 = 3$ d'où $\dfrac{3}{24} = 0{,}125$; 12,5 % des élèves travaillent au plus 15 minutes à la maison.
12,5 + 50 = 62,5 ; 62,5 % des élèves travaillent au plus 30 min.
62,5 + 25 = 87,5 ; 87,5 % des élèves travaillent au plus 45 min.

• Quelle est la durée médiane du temps de travail à la maison pour les élèves de cette classe ?
Réponse : 30 min (en effet : l'effectif (24) est pair ; la médiane est la demi-somme des 12^e et 13^e valeurs de la série, toutes deux égales à 12).

• Quels sont les quartiles Q_1 et Q_3 pour cette série ?
Réponse : $\dfrac{1}{4} \times 24 = 6$; $Q_1 = 30$ min (6^e durée).
$\dfrac{3}{4} \times 24 = 18$; $Q_3 = 45$ min (18^e durée).

9. Vrai ou faux

45 **Faux.** Exemple : la médiane de la série 1 ; 2 ; 3 ; 4 est 2,5.

46 **Vrai.** L'effectif est impair et $25 = 2 \times 12 + 1$.

47 **Vrai.** En effet, pour la série de huit valeurs ci-dessous :
1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

• la médiane est 1 (demi-somme des 4^e et 5^e valeurs toutes deux égales à 1).

• $\dfrac{1}{4} \times 8 = 2$; $Q_1 = 1$ (2^e valeur).

48 **Faux.** En effet au moins 50 % des valeurs sont comprises entre Q_1 et Q_3.
Par exemple pour la série de huit valeurs ci-dessous :
1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2
$Q_1 = 1$ (2^e valeur) et $Q_3 = 2$ (6^e valeur), 100 % des valeurs sont comprises entre Q_1 et Q_3.

10. Calcul mental et réfléchi

49 80 personnes ont été interrogées.
a. 16 personnes sur 80 sont allées deux fois au cinéma.
$\dfrac{16}{80} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{20}{100}$ soit une fréquence de 20 %.
b. 8 + 15 + 12 + 9 = 44 ainsi 44 personnes sur 80 sont allées au moins 3 fois au cinéma.
$\dfrac{44}{80} = \dfrac{11}{20} = \dfrac{55}{100}$ soit une fréquence de 55 %.
c. 100 % – 55 % = 45 %
55 % des personnes étant allées « au moins trois fois » au cinéma, alors le complément à 100 % correspond à « moins de trois fois » ; ainsi 45 % des personnes sont allées moins de trois fois au cinéma.

50 Les valeurs des séries sont rangées dans l'ordre croissant.

	Moyenne	**Médiane**
Série A (effectif 4)	$\frac{60}{4} = 15$	$\frac{10+14}{2} = 12$ (demi-somme des 2^e et 3^e valeurs)
Série B (effectif 5)	$\frac{7}{5} = 1{,}4$	1 (3^e valeur)
Série C (effectif 20)	$\frac{220}{20} = 11$	10 (11^e valeur)

51 Les valeurs des séries sont rangées dans l'ordre croissant.

	Médiane	Q_1	Q_3
Série D (effectif 7)	–1 (4^e valeur)	–8 (2^e valeur)	4 (6^e valeur)
Série E (effectif 10)	$\frac{7+10}{2} = 8{,}5$ (demi-somme des 5^e et 6^e valeurs)	7 (3^e valeur)	10 (8^e valeur)
Série F (effectif 20)	8 (demi-somme des 10^e et 11^e valeurs)	4 (5^e valeur)	9 (15^e valeur)

52 30,2 – 15,6 = 14,6 ainsi l'étendue est 14,6 cm.

11. Présenter, argumenter, communiquer

53 Anaïs n'a pas écrit comment elle trouve l'effectif total. De plus ligne 2, elle enchaîne les calculs de façon incorrecte. Réécriture :

• 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 4 + 4 = 25
25 feuilles de platane ont été mesurées.
• L'effectif est impair.
25 = 2 × 12 + 1 donc la médiane est 20
(13^e valeur de la série).
• $\frac{1}{4} \times 25 = 6{,}25$ donc $Q_1 = 18$
(7^e valeur de la série).
$\frac{3}{4} \times 25 = 18{,}75$ donc $Q_3 = 22$
(19^e valeur de la série).

54 **a.** Toutes les informations sauf une sont dans le texte : il manque la fréquence en pourcentage du mode de déplacement « Deux roues motorisées ». Il est indiqué que ce mode de déplacement assure le reste des déplacements, d'où le calcul : 100 – (57 + 15 + 24 + 2) = 2.

Voici le tableau :

Mode de déplacement	Voiture	Transports collectifs	Marche	Bicyclette	2 roues motorisés
Fréquence (en %)	57	15	24	2	2

b. Exemples de questions :

• Quel est le nombre moyen de déplacements par jour et par personne des habitants de Nantes Métropole, du lundi au vendredi ?

Réponse : $\frac{2100000}{580000} \approx 3{,}6$

Le nombre théorique moyen de déplacements faits par jour et par personne, du lundi au vendredi est environ 3,6. On peut dire qu'en moyenne chaque personne effectue environ 4 déplacements par jour du lundi au vendredi.

• Quel est le nombre de déplacements effectués par les habitants de Nantes Métropole, chaque jour, du lundi au vendredi, en voiture ? en transports en commun ? à pied ? en bicyclette ? en deux roues motorisées ?

Réponse :

Mode de déplacement	Voiture	Transports collectifs	Marche	Bicyclette	2 roues motorisés
Nombre de déplacements	1 197 000	315 000	504 000	42 000	42 000

55 **a.** Il y a 5 fromages donc la médiane est le Reblochon (3^e valeur).

b. On ne peut pas calculer de moyenne, car on n'a pas de valeur numérique

56 **a.** La moyenne augmente de 5 car on ajoute 5 à chaque valeur et on divise par le même effectif total.

b. La médiane augmente de 5 car en ajoutant 5 à chaque valeur, celles-ci restent rangées dans le même ordre et la médiane conserve son rang.

c. L'étendue reste la même. En effet :

$$\begin{aligned}\text{Étendue } 2^e \text{ série} &= (\text{valeur}_{max} + 5) - (\text{valeur}_{min} + 5)\\ &= \text{valeur}_{max} + 5 - \text{valeur}_{min} - 5\\ &= \text{valeur}_{max} - \text{valeur}_{min}\\ &= \text{Étendue } 1^{ère} \text{ série}\end{aligned}$$

d. Les quartiles augmentent de 5 car en ajoutant 5 à chaque valeur, celles-ci restent rangées dans le même ordre et les quartiles conservent leurs rangs.

57 Maël s'est trompé ; il y a plus de voitures blanches dans la ville A que dans la ville B. En effet :

• Dans la ville A, 25 % des 60 000 voitures sont blanches, soit 15 000 voitures $\left(\frac{25}{100} \times 60000 = 15000\right)$.

• Dans la ville B, 60 % des 18 000 voitures sont blanches, soit 10 800 voitures $\left(\frac{60}{100} \times 18000 = 10800\right)$.

58 Comme le premier quartile est de 3 ans, au moins 25 % des ordinateurs testés ont une durée de vie inférieure ou égale à 3 ans ; donc l'affirmation « jamais en panne avant 5 ans » est erronée.

59 L'effectif 25 est impair ; 25 = 2 × 12 + 1 donc la médiane est la 13^e valeur de la série.

On peut commencer par répartir équitablement les 25 données (5 valeurs 2, 5 valeurs 6, etc.)

On peut utiliser un tableur, entrer le tableau, insérer un diagramme en barres, et afficher

– en cellule H2 l'effectif total =SOMME(B2 : F2) ;

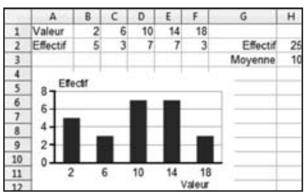
– en cellule H3 la moyenne

= SOMMEPROD(B1 : F1 ; B2 : F2)/H2.

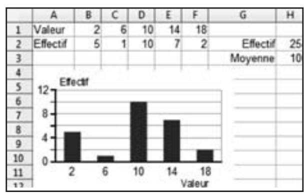
Ensuite, on modifie les effectifs de façon à conserver un effectif total de 25, une moyenne égale à 10, une médiane égale à 10 (la 13^e valeur doit être 10), sans qu'il y ait un axe de symétrie pour le diagramme.

Il y a plusieurs solutions, en voici 4.

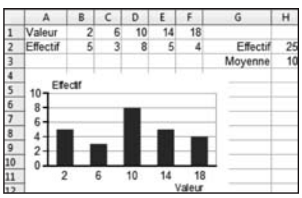
Exemple 1



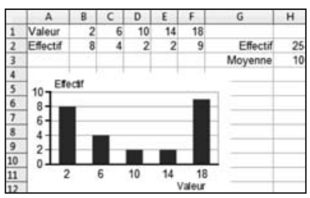
Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4



Ensuite on imagine une situation de la vie courante, par exemple :

• les résultats à un test d'évaluation sur 20 (5 notes 2, 3 notes 6, 7 notes 10, 7 notes 14 et 3 notes 18)

• la répartition des chiens d'un chenil selon leur masse (5 chiens de 2 kg, 1 de 6 kg, 10 de 10 kg, etc.)

• la répartition des élèves d'une classe selon le temps passé par semaine à jouer à des jeux vidéo, à regarder la télévision, à tchater sur internet, etc. (5 élèves pendant 2 h, 3 pendant 6 h, 8 pendant 10 h, etc.)

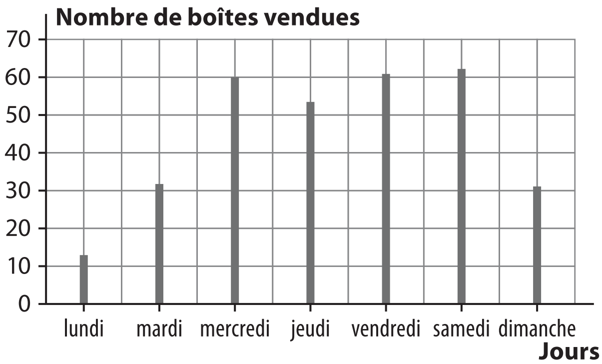
• la répartition des élèves d'une classe selon le nombre de livres lus dans l'année ou le nombre de films vus, etc.

12. QCM pour s'évaluer

60 a. **61** b. **62** b. **63** c. **64** a. **65** b. **66** a.
68 a. **68** c. **69** b. c. **70** a. c. **71** c.

13. Objectif Brevet

72 **a.** Diagramme en bâtons



b. 13 + 32 + 60 + 54 + 61 + 63 + 32 = 315.
315 boîtes ont été vendues durant la semaine.

c. 63 + 32 = 95 ainsi 95 boîtes ont été vendues le week-end.
Pourcentage de boîtes vendues durant le week-end : 70 % (à 1 près) ; en effet $\frac{95}{135} \approx 0{,}70$.

d. 45 boîtes ont été vendues en moyenne par jour $\left(\frac{315}{7} = 45\right)$.

73 **a.** 164 + 239 + … + 308 + 321 = 1 939
$M = \frac{1939}{7} = 277$ ainsi il y a eu 277 spectateurs en moyenne à la séance de midi pendant cette semaine.

b. Le mercredi, il y a eu 312 places occupées sur les 325.
Fréquence : 96 % $\left(\text{en effet } \frac{312}{325} = 0{,}96\right)$.

74 **a.** On ajoute les produits « valeur × effectif » avant de diviser par l'effectif total.

$$M = \frac{651}{50} = 13{,}02.$$

On peut arrondir à 13 la note moyenne obtenue par le site.

b. 12 + 9 + 8 = 29 ainsi 29 personnes ont donné une note supérieure ou égale à 14.

Deux démarches possibles :

• $\frac{29}{50} = \frac{58}{100}$ donc 58 % des internautes ont donné une note supérieure ou égale à 14.
L'enquête est donc jugée satisfaisante (58 % > 55 %).

• $\frac{55}{100} \times 50 = 27{,}5$; or 29 > 27,5.
L'enquête est jugée satisfaisante.

75 **a.** 20,69 – 20,09 = 0,6 ainsi l'étendue de la série est 0,6 s.

b. La valeur arrondie au centième de la médiane de la série est 20,31 s $\left(M = \frac{142{,}2}{7}, M \approx 20{,}31\right)$.

c. On range les valeurs de la série dans l'ordre croissant :
20,09 ; 20,12 ; 20,19 ; 20,25 ; 20,38 ; 20,48 ; 20,69.
L'effectif est impair (7); la médiane est 20,25 s (4^e valeur).

d. L'athlète classé premier a parcouru 200 mètres en 20,09 s ; sa vitesse moyenne en m/s est donc $V = \frac{200}{20{,}09}$.
La valeur arrondie au millième est 9,955 m/s.

76 **a.** 10 – 1 = 9.
Ainsi l'étendue de la série est 9 kg.

b. L'effectif total (48) est pair ; la médiane est 6,5 kg (demi-somme des 24^e (6) et 25^e (7) valeurs).

c. $\frac{1}{4} \times 48 = 12$; Q_1 = 5 kg (12^e valeur).

$\frac{3}{4} \times 48 = 36$; Q_3 = 8 kg (36^e valeur).

d. • Le 1^{er} quartile est 5 kg, donc au moins les trois quarts des cartables pèsent 5 kg ou plus.
• Autre démarche : 4 + 11 + 8 + 9 + 3 + 4 = 39
39 cartables sur 48 pèsent 5 kg ou plus, soit une fréquence de $\frac{39}{48}$ ou 81,25 %, ce qui est supérieur à 75 % $\left(\frac{3}{4} = 0{,}75\right)$.

14. Exercices d'approfondissement

77 On extrait de l'énoncé les informations suivantes :
– les marguerites sont au nombre de 10.
– le nombre minimal de pétales obtenus est 40, le nombre maximal 60.
– l'étendue de la série est 17.
– les quartiles sont $Q_1 = 44$ et $Q_3 = 55$.
– les nombres de pétales obtenus sont tous différents.

Or $\frac{1}{4} \times 10 = 2{,}5$ et $\frac{3}{4} \times 10 = 7{,}5$ donc Q_1 et Q_3 sont respectivement la 3^e et la 8^e valeurs de la série.

On en déduit, si les nombres de pétales obtenus sont rangés par ordre croissant, que le 3^e nombre est 44 et le 8^e 55.

On peut donc chercher les différentes possibilités, de 40 à 57 pétales, de 41 à 58 pétales, de 42 à 59 pétales et de 43 à 60 pétales, puisque l'étendue de la série est 17.

• De 40 à 57 pétales :

minimum		Q_1					Q_3		maximum
40	41	44					55	56	57
40	42	44					55	56	57
40	43	44					55	56	57

• De 41 à 58 pétales :

minimum		Q_1					Q_3		maximum
41	42	44					55	56	58
41	43	44					55	56	58
41	42	44					55	57	58
41	43	44					55	57	58

• De 42 à 59 pétales :

minimum		Q_1					Q_3		maximum
42	43	44					55	56	59
42	43	44					55	57	59
42	43	44					55	58	59

• Il n'est pas possible d'avoir de 43 à 60 pétales, car on ne peut pas avoir 43 en 1$^{\text{ère}}$ valeur et 44 en 3$^{\text{e}}$ valeur sans répétition.

On trouve donc 10 possibilités.

78 Deux démarches possibles :

1. On peut faire des essais, à la main ou avec un tableur, comme ci-dessous, en entrant la formule =(A2*30+B2*14)/(A2+B2) dans la cellule C2.

On élimine les cas où il y a autant de jeunes que d'adultes, la moyenne d'âge étant alors 22 $\left(\dfrac{30+14}{2}=22\right)$ et ceux où le nombre d'adultes est supérieur au nombre de jeunes, la moyenne d'âge étant alors supérieure à 22.

	A	B	C
1	nombre d'adultes	nombre de jeunes	moyenne d'âge du groupe
2	1	2	19,3333333333
3	1	3	18
4	2	3	20,4
5	2	4	19,3333333333
6	3	4	20,8571428571
7	3	5	20
8	3	6	19,3333333333
9	4	5	21,1111111111
10	4	6	20,4
11	4	7	19,8181818182
12	5	6	21,2727272727
13	5	7	20,6666666667
14	5	8	20,1538461538
15	6	7	21,3846153846
16	6	8	20,8571428571
17	6	9	20,4
18	6	10	20

On remarque que la moyenne d'âge du groupe est 20 ans lorsqu'il y a 3 adultes et 5 jeunes, ou 6 adultes et 10 jeunes.

Le rapport entre le nombre d'adultes et de jeunes est : $\dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}\right)$.

On peut faire d'autres essais avec 9 adultes et 15 jeunes ou 12 adultes et 20 jeunes, etc. pour confirmer la conjecture $\left(\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{12}{20}\right)$.

2. On note a le nombre d'adultes et j le nombre de jeunes.

La moyenne d'âge est 20 ans se traduit par :

$$\frac{30a+14j}{a+j}=20$$

Grâce à l'égalité des produits en croix on obtient :

$30a+14j=20(a+j)$ soit $30a+14j=20a+20j$ ou $10a=6j$.

Alors $\dfrac{a}{j}=\dfrac{6}{10}$ ou encore $\dfrac{a}{j}=\dfrac{3}{5}$.

Le rapport entre le nombre d'adultes et le nombre de jeunes est $\dfrac{3}{5}$, c'est-à-dire qu'il y a 3 adultes pour 5 jeunes dans ce centre de vacances.

79 **a.** Les relevés qui sont dans la fourchette entre 6 et 7,5 sont au nombre de 11 sur les 14 effectués :

6,40 ; 6,72 ; 6,56 ; 6,58 ; 6,57 ; 6,73 ; 7,18 ; 6,86 ; 6,53 ; 6,64 ; 6,79

Pourcentage des relevés dans la fourchette : environ 79 % $\left(\dfrac{11}{14}\approx 0{,}79\right)$.

b. On range les 14 relevés dans l'ordre croissant :

5,76 ; 5,93 ; 6,40 ; 6,53 ; 6,56 ; 6,57 ; 6,58 ; 6,64 ; 6,72 ; 6,73 ; 6,79 ; 6,86 ; 7,18 ; 7,68.

$\dfrac{1}{4}\times 14=3{,}5$ et $\dfrac{3}{4}\times 14=10{,}5$

Ainsi $Q_1 = 6{,}53$ (4$^{\text{e}}$ relevé) et $Q_3 = 6{,}79$ (11$^{\text{e}}$ relevé).

c. Les quartiles sont 6,53 et 6,79 ; comme le relevé immédiatement inférieur à 6,53 est 6,40 et celui immédiatement supérieur à 6,79 est 6,86, on peut dire qu'en effet au moins 50 % des relevés sont compris entre 6,5 et 6,8 (d'après la définition des quartiles d'une série).

80 **a. • Moyennes**

On nomme M_m la distance moyenne parcourue par jour par l'infirmière du matin et M_{am} celle parcourue par l'infirmière de l'après-midi.

$3\times 4+3{,}5\times 5+4\times 6+4{,}5\times 2+5=67{,}5$

$2{,}5\times 3+3\times 2+3{,}5\times 4+4\times 3+4{,}5\text{ x }4+5\times 2=67{,}5$

$M_m=\dfrac{67{,}5}{18}=3{,}75$ km et $M_{am}=\dfrac{67{,}5}{18}=3{,}75$ km.

• Médianes

L'effectif (le nombre de jours d'étude) est 18 ; la médiane est la demi-somme des 9$^{\text{e}}$ et 10$^{\text{e}}$ valeurs de chaque série.

Pour l'infirmière du matin, la médiane est 3,75 (9$^{\text{e}}$ valeur : 3,5 et 10$^{\text{e}}$ valeur : 4).

Pour l'infirmière de l'après-midi, la médiane est 3,75 (9$^{\text{e}}$ valeur : 3,5 et 10$^{\text{e}}$ valeur : 4).

• Quartiles

$\dfrac{1}{4}\times 18=4{,}5$ donc Q_1 est la 5$^{\text{e}}$ valeur de la série.

$\dfrac{3}{4}\times 18=13{,}5$ donc Q_3 est la 14$^{\text{e}}$ valeur de la série.

Pour l'infirmière du matin, $Q_1 = 3{,}5$ et $Q_3 = 4$; l'écart interquartile est 0,5.

Pour l'infirmière de l'après-midi, $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 4{,}5$; l'écart interquartile est 1,5.

b. Pour ces deux infirmières, la médiane et la moyenne sont égales (3,75 km par jour).

En moyenne, l'infirmière du matin et celle de l'après-midi parcourent la même distance par jour, mais l'infirmière du matin parcourt des distances plus régulières que l'infirmière de l'après-midi car l'écart interquartile est plus petit. Pendant environ 61 % des journées $\left(\frac{11}{18}\right)$ l'infirmière du matin parcourt entre 3,5 et 4 km ; alors que pendant environ 72 % des jours $\left(\frac{13}{18}\right)$, l'infirmière de l'après-midi parcourt entre 3 et 4,5 km.

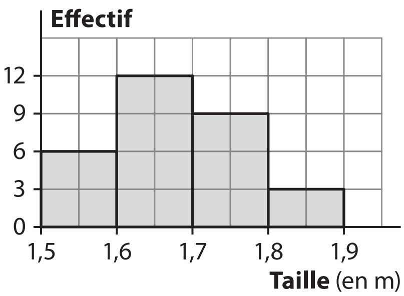
81 **a.** Il s'agit ici d'un histogramme et non d'un diagramme en barres ou en bâtons.

Un exemple : la question étudiée est la répartition des élèves d'une classe selon leur taille (en m).

b. Tableau correspondant à la situation :

Taille *t* (en m)	$1{,}5 \leqslant t < 1{,}6$	$1{,}6 \leqslant t < 1{,}7$	$1{,}7 \leqslant t < 1{,}8$	$1{,}8 \leqslant t < 1{,}9$
Effectif	6	12	9	3

c.



82 L'effectif est 11 ; la 6^{e} valeur de la série (la médiane) est 2.

$\frac{1}{4} \times 11 = 2{,}75$; la 3^{e} valeur (le 1er quartile Q_1) est 1.

$\frac{3}{4} \times 11 = 8{,}25$; la 9^{e} valeur (le 3^{e} quartile Q_3) est 6.

Valeur	0	1	2	6	Total
Effectif	*a*	*b*	*c*	*d*	11

Si on désigne par *a*, *b*, *c* et *d* les effectifs respectivement de 0, de 1, de 2 et de 6, on peut déduire de ce qui précède :

• La 3^{e} valeur est 1, alors *a* est un entier tel que : $0 \leqslant a \leqslant 2$.

• La 6^{e} valeur est 2, alors *b* est un entier tel que : $0 \leqslant b \leqslant 5$

• La 6^{e} valeur est 2 et la 9^{e} valeur est 6, alors *d* est un entier tel que : $4 \leqslant d \leqslant 6$.

D'autre part, la moyenne est 3, donc :

$\frac{a \times 0 + b \times 1 + c \times 2 + d \times 6}{11} = 3$ c'est-à-dire $b + 2c + 6d = 33$.

On en déduit d'une part que *b* est un nombre impair, d'autre part que *d* ne peut pas être égal à 6 (car $6 \times 6 > 33$).

On fait alors des essais ciblés :

si $d = 5$, alors $b + 2c = 3$.

• $b = 1$ et $c = 1$ mais alors $a = 6$ et $6 > 2$.

• $b = 3$ et $c = 0$ mais alors $a = 3$ et $3 > 2$.

donc *d* ne peut pas être égal à 5.

Par conséquent $d = 4$ et $b + 2c = 9$

• si $b = 1$ alors $c = 4$ et $a = 2$.

• si $b = 3$ alors $c = 3$ et $a = 1$.

• si $b = 5$ alors $c = 2$ et $a = 0$.

On trouve donc trois solutions :

Valeur	0	1	2	6	Total
Effectif	0	5	2	4	11

Valeur	0	1	2	6	Total
Effectif	1	3	3	4	11

Valeur	0	1	2	6	Total
Effectif	2	1	4	4	11

83 **a.** Il n'est pas possible de calculer la moyenne d'émission d'équivalent CO_2 par habitant pour l'UE car on ne connaît pas le nombre d'habitants par pays.

b. On peut déterminer :

• **l'étendue de la série :** 25,8 – 5,2 = 20,6

La différence entre l'émission du pays le plus pollueur (le Luxembourg) et celle du pays le moins pollueur (la Lettonie) est très importante (20,6 tonnes équivalent CO_2 par habitant).

On peut noter que l'émission pour le Luxembourg est très supérieure aux émissions des autres pays. Si on ne tient pas compte du Luxembourg, l'étendue devient : 16,3 – 5,2 = 11,1, soit près de la moitié moindre.

• **la médiane de la série :** il y a 27 pays ; $27 = 2 \times 13 + 1$, la médiane est la 14^{e} valeur de la série, soit 10,4. Cette émission médiane correspond aux chiffres de l'Autriche et de la Pologne.

Pour 14 pays sur les 27, l'émission de gaz à effet de serre en tonnes équivalent CO_2 par habitant est supérieure ou égale à 10,4 soit une fréquence de $\frac{14}{27}$ c'est-à-dire environ 52 %.

Pour 15 pays sur les 27, l'émission de gaz à effet de serre en tonnes équivalent CO_2 par habitant est inférieure ou égale à 10,4 soit une fréquence de $\frac{15}{27}$ c'est-à-dire environ 56 %.

• les quartiles de la série :

$\frac{1}{4}\times 27 = 6{,}75$; $Q_1 = 7{,}4$ (7e valeur), valeur associée au Portugal.

On peut noter le chiffre pour la France très proche de Q_1.

$\frac{2}{4}\times 27 = 20{,}25$; $Q_3 = 12{,}6$ (21e valeur), valeur associée aux Pays-Bas.

• Pour 7 pays sur les 27, l'émission de gaz à effet de serre en tonnes équivalent CO_2 par habitant est inférieure ou égale à 7,4 soit une fréquence de $\frac{7}{27}$ (environ 26 %).

Pour 7 pays sur les 27, l'émission de gaz à effet de serre en tonnes équivalent CO_2 par habitant est supérieure ou égale à 12,6 soit une fréquence de $\frac{7}{27}$ (environ 26 % également).

15 pays sur les 27 ont une émission comprise entre 7,4 et 12,6 tonnes équivalent CO_2 par habitant (environ 56 %).

84 Un défi

Il y a 8 solutions : 9 cm ; 10,5 cm ; 12 cm ; 13,5 cm ; 15 cm ; 16,5 cm ; 18 cm et 19,5 cm.

Si on fait une recherche par essais successifs, on peut par exemple :

• imaginer une série de 2 valeurs de moyenne 6 cm, avec une somme de 12 cm pour ces deux valeurs ; avec la 3e valeur, la moyenne devenant 7,5 cm, la somme des trois valeurs est 22,5 cm. La valeur oubliée est la différence des deux sommes, soit ici 10,5 cm.

Bilan des essais :

Nombre de valeurs de moyenne 6 cm	Somme des valeurs de moyenne 6 cm	Nombre de valeurs de moyenne 7,5 cm	Somme des valeurs de moyenne 7,5 cm	Valeur oubliée
1	6	2	15	9
2	12	3	22,5	10,5
3	18	4	30	12
4	24	5	37,5	13,5
5	30	6	45	15
6	36	7	52,5	16,5
7	42	8	60	18
8	48	9	67,5	19,5
9	*54*	*10*	*75*	*21*

Le dernier essai est à rejeter, car toutes les mesures doivent être inférieures à 20 cm.

Pour aller plus loin :

En nommant n le nombre de mesures reportées et S_1 la somme de ces mesures, on a : $S_1 = 6n$.

En nommant S_2 la somme des mesures de moyenne 7,5 cm on a : $S_2 = 7{,}5(n + 1)$.

La valeur oubliée est égale à $S_2 - S_1$ soit $7{,}5(n + 1) - 6n$.

En développant on obtient : Valeur oubliée $= 1{,}5n + 7{,}5$

En remplaçant successivement n par les nombres entiers supérieurs ou égaux à 1, on obtient les valeurs oubliées. On s'arrête lorsque la valeur est supérieure à 20 cm.

15. Tâche complexe

85 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : La présentation des données du document 1, jour par jour, paraissant peu facile à exploiter, quel outil statistique peut-on utiliser pour traiter cette série de données ?

Aide n° 2 : Comment se situent les taux relevés du 24 mars au 6 avril 2011, pendant les jours ayant suivi l'arrivée du nuage radioactif en France métropolitaine, par rapport aux taux moyens relevés dans ces mêmes villes du 1er au 15 mars 2011, avant l'arrivée du nuage radioactif ? et par rapport aux normes ?

Aide n° 3 : À combien de minutes peut-on estimer le temps pendant lequel une personne est soumise à la radioactivité lorsqu'elle fume une cigarette ?

2. Quelques commentaires

• L'outil statistique retenu pour cette tâche complexe est la moyenne, somme de *n* données divisée par *n*, compétence au socle.

• Une clé de cette tâche complexe est de penser à organiser les informations utiles, et par exemple de comparer des données extraites d'un document avec d'autres données issues d'un autre document (par exemple comparer le document 1 avec les taux moyens qui figurent dans le tableau du document 3).

• Il est possible que des élèves soient attirés par le tableau du document 1 et se lancent dans des calculs à partir de ces données. S'ils cherchent le taux moyen de radioactivité jour après jour (colonne par colonne), ils auront des taux moyens journaliers mais qu'en faire ? Ils s'apercevront sans doute qu'alors ils n'exploitent pas le tableau du document 3.

• Les élèves devront comprendre qu'une autre démarche est à envisager. Ils pourront alors s'orienter vers un calcul de taux moyen de radioactivité ville par ville (ligne par ligne) et pourront alors comparer ces taux moyens avec ceux fournis dans le document 3.

• Les élèves trouveront confirmation dans l'article de presse situé à gauche dans le document 2 que toutes les données du tableau du document 1 sont inférieures aux normes.

• Que faire du second article de presse du document 2 ? et de la seconde information du document 3 ? Ces deux informations semblent aller de pair. C'est là que l'aide n° 3 peut se révéler utile.

• Selon le temps disponible, on pourra demander aux élèves de rédiger leur compte-rendu des éventuels risques encourus en classe ou à la maison.

En séance plénière, les élèves pourront présenter leurs démarches, leurs calculs, leurs résultats. Ils formuleront leur propre opinion en l'explicitant. Il serait sans doute intéressant d'entendre des élèves s'interroger sur le fait que les cinq villes n'ont peut-être pas été choisies au hasard. On pourra alors leur répondre qu'elles font partie de 147 villes de prélèvements, pour lesquelles les mesures effectuées sur l'air ambiant entre le 1er et le 15 mars 2011 donnaient des taux moyens compris entre 44,3 et 258,3 nSv/h et celles effectuées entre le 24 mars et le 6 avril 2011 des taux tous aussi proches des taux moyens observés précédemment. Ces cinq villes ont été choisies dans cinq régions différentes.

• Il est possible que des élèves s'expriment sur les effets nocifs du tabac.

On pourra apporter d'autres éléments de comparaison :

– un voyage aller-retour Paris-New York en avion long courrier non supersonique : 0,08 mSv (soit 9,5 µSv/h) ;

– une centrale nucléaire française, en état de fonctionnement normal, hors accident : 0,002 mSv/an.

3. Éléments de réponse

• Calcul des taux moyens (en nSv/h) pour chaque site et comparaison avec les taux moyens relevés du 01 au 15 mars :

	Colmar	Montluçon	Paris	Toulon	Vannes
Moyenne du 24/03 au 06/04	$\frac{1697}{14} \approx 121{,}2$	$\frac{3122}{14} = 223$	$\frac{427}{14} = 30{,}5$	$\frac{882}{14} = 63$	$\frac{1878}{14} \approx 134{,}1$
Moyenne du 01 au 15/03	121,1	224,2	31,4	64,3	135,1

On constate que ces taux sont très proches des taux moyens relevés sur les quinze premiers jours de mars (presque tous légèrement inférieurs).

• Tous les taux figurant dans le document 1 sont inférieurs au taux moyen (274 nSv/h) reçu par une personne.

• 0,01 mSv = 100 nSv

Fumer une cigarette prend environ 10 minutes, ce qui correspond à environ 600 nSv/h ce qui est nettement supérieur à 274 nSv/h.

Toutes les affirmations sont donc exactes.

On peut donc dire d'après ces documents que la France métropolitaine n'a pas couru de risque particulier lié à cet accident au Japon.

16. En route vers la Seconde

86 • Pour vérifier la phrase : « Au 1er janvier 2011, près d'un quart de la population avait moins de 20 ans », on calcule le pourcentage de jeunes de moins de 20 ans dans la population.

En cellule E4, on entre la formule =(D4+D5)/D18 et on formate la cellule pour avoir un affichage en pourcentage.

On lit 24,6 %, ce qui est très proche de 25 % (un quart).

• Pour vérifier : « quant aux personnes du 3è âge (60 ans et plus) leur pourcentage dans la population est de l'ordre de 23 %. », on calcule le pourcentage de personnes ayant 60 ans et plus dans la population.

En cellule E14, on entre la formule =somme(D14 : D17)/D18 et on formate la cellule pour avoir un affichage en pourcentage.

On lit 23,1 %, ce qui est très proche de 23 %.

• Pour vérifier : « Vers 2050, la France pourrait compter (selon les démographes) environ 22,5 millions de personnes de plus de 60 ans, soit une augmentation de 50 % », on peut calculer le nombre de personnes de plus de 60 ans en 2011 et l'augmenter de 50 %.

En cellule F7, on entre la formule =somme(D14 :D17).

En cellule F8, on entre la formule = F7*1,5.

On lit 22 528 113 ce qui correspond bien aux 22,5 millions annoncés.

A	B	C	D	E	F
Population par sexe et groupes d'âges quinquennaux au 1er janvier 2011, France					
	Femmes	Hommes	Ensemble		
Moins de 15 ans	5877436	6162183	12039619	24,6%	
15-19 ans	1930814	2013627	3944441		
20-24 ans	2040752	2082862	4123614		
25-29 ans	2022747	1992493	4015240		15018742
30-34 ans	2016598	1976005	3992603		22528113
35-39 ans	2213389	2175020	4388409		
40-44 ans	2272968	2221119	4494087		
45-49 ans	2299262	2221416	4520678		
50-54 ans	2215043	2107757	4322800		
55 -59 ans	2148052	2018600	4166652		
60-64 ans	2123242	1998803	4122045	23,1%	
65-69 ans	1409318	1282448	2691766		
70-74 ans	1328485	1100810	2429295		
75 ans ou plus	3643985	2131651	5775636		
Ensemble	33542091	31484794	65026885		
Champ : France					
Source : INSEE, estimations de population (résultats provisoires arrêtés fin 2010).					

• Les données ne permettent pas de vérifier la phrase : « un français sur trois aura plus de 60 ans en 2050. »

CHAPITRE 2

Notion de probabilité

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Les probabilités apparaissent en classe de **3e** dans les programmes de collège. Les élèves sont amenés pour la première fois à travailler explicitement sur des situations où intervient le hasard. Pour mettre en place les notions de probabilités, l'enseignant peut prendre appui sur d'autres notions mathématiques déjà introduites au collège, notamment sur la démarche statistique familière aux élèves.

Nous pouvons dégager trois objectifs majeurs à l'enseignement des probabilités en classe de **3e** :

– rappeler et structurer le vocabulaire relatif à l'aléatoire utilisé dans la vie courante, puis le transposer en un vocabulaire mathématique ;

– développer et mettre en œuvre une démarche de modélisation à partir de situations réelles ;

– introduire puis manipuler quelques concepts et outils des probabilités.

Pour ce dernier objectif, le travail sur les nombres en écriture fractionnaire entamé en classe de **6e** et poursuivi en **5e** (via le calcul des fréquences) puis en **4e** sera réinvesti.

2. Notion de probabilité

L'enseignement des probabilités au collège est nouveau pour les élèves. Il doit donc développer en priorité une réflexion sur l'aléatoire, avant d'aborder sa modélisation puis d'effectuer des calculs sur les probabilités. Dans les activités proposées ici, l'accent est mis sur la compréhension des expériences aléatoires, sur le vocabulaire utilisé pour les décrire.

Dans la vie de tous les jours, les élèves rencontrent régulièrement des situations relevant du hasard (jeux, loterie, …).

L'activité 1 a pour objectif de prendre en compte les représentations existantes des élèves sur l'aléatoire. En particulier, un vocabulaire usuel en relation avec le hasard est déjà connu des élèves. **L'activité 1** se propose de l'exploiter pour le transformer progressivement en un langage mathématique. De plus, la dernière question permet de développer l'esprit critique des élèves.

Les exercices à l'oral 12 et 16 pourront être abordés immédiatement.

L'activité 2 doit permettre aux élèves de se familiariser avec une situation réelle aléatoire, d'identifier tous les résultats (ou issues) de l'expérience et de découvrir une manière de les présenter : cet exemple d'expérience à une seule épreuve est mis à profit pour mettre en place un moyen de représentation et de traitement qui sera réutilisé dans les expériences à deux épreuves. À ce stade de l'introduction des probabilités, les élèves retiennent qu'une expérience aléatoire est une expérience qui ne donne pas nécessairement le même résultat, bien qu'on la répète dans les mêmes conditions.

Des échanges peuvent s'instaurer au sein de la classe à propos du mode de calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair.

On pourra faire suivre cette activité par l'étude des **exercices à l'oral 11, 14, 18 et 19**.

L'activité 3 a pour objectif d'approfondir la compréhension d'une expérience aléatoire et sa description, en s'intéressant aux événements attachés à cette expérience. La sélection de ces événements est motivée par le contexte de la situation étudiée. Dans un premier temps, il s'agit de repérer et d'expliciter les événements, puis d'identifier les issues qui les réalisent (en référence à la liste de toutes les issues prises en compte dans cette expérience aléatoire).

Dans un deuxième temps, on se propose de décrire des événements particuliers puis de mettre en évidence des relations entre ces événements (événements contraires).

Le travail sur la mathématisation du vocabulaire courant relatif au hasard se poursuit ainsi avec l'introduction des événements certain et impossible. Les élèves retiennent qu'un événement est représenté par une phrase concernant les issues de l'expérience aléatoire. L'événement se décrit mathématiquement par la liste des issues qui le réalisent.

L'exercice à l'oral 20 permettra aux élèves de manipuler le vocabulaire récemment introduit.

L'activité 4, reliant fréquence et probabilité, a pour objectif de mettre en évidence le principe statistique suivant : on affecte comme valeur à la probabilité d'un événement, la fréquence de réalisation de cet événement dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire. On peut rencontrer des situations où on ne sait pas, même intuitivement, envisager *a priori* des fréquences pour les issues possibles. On a besoin de faire des essais pour estimer la probabilité de telle issue. Pour cela, on expérimente pour un nombre d'essais « suffisamment grand » et on observe l'évolution des fréquences des issues obtenues, jusqu'à ce que les résultats se stabilisent.

La calculatrice est ici utilisée comme instrument produisant du hasard : un nombre décimal aléatoire compris entre 0 et 1. La collecte des résultats de plusieurs groupes permet de traiter un grand nombre de données. Il ne s'agit évidemment pas ici de mettre en évidence la loi des grands nombres, mais de faire sentir aux élèves le lien mathématique entre le calcul d'une fréquence et le calcul d'une probabilité.

3. Expériences aléatoires à deux épreuves

L'activité 5 propose un premier exemple d'expérience aléatoire à deux épreuves. On réinvestit ici le mode de représentation introduit dans l'activité 2. On justifie la règle de multiplication des probabilités par une approche fréquentielle. A cette occasion, un lien étroit pourra être mis en évidence entre les pourcentages de pourcentages et l'aspect multiplicatif des probabilités. Ceci conduit à admettre que, de manière générale, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités « rencontrées le long du chemin » qui mène à cette issue. C'est ce modèle de traitement que les élèves seront invités à réinvestir dans des situations simples de la vie courante. **Les exercices à l'oral 21 et 22** pourront être étudiés ensuite.

4. Les savoir-faire

• Les quatre **exercices résolus** proposés sont complémentaires.

Le premier exercice s'appuie sur le langage spécifique des probabilités. Les notions de risque et de sondage sont désormais très présentes dans le discours médiatique et, plus généralement, dans la société actuelle. Il convient de former les élèves à l'interprétation des informations qu'ils reçoivent, tout en développant leur esprit critique.

Le deuxième exercice permet de travailler ce nouveau mode de représentation qu'est l'arbre des possibles pondéré par les probabilités. L'animation interactive permet aux élèves de visualiser les différentes étapes conduisant à la réalisation de l'arbre, à partir des informations utiles extraites de l'énoncé.

Le troisième exercice résolu propose l'étude d'une expérience aléatoire à deux épreuves, pour laquelle l'arbre des possibles facilite le calcul de la probabilité cherchée.

Le dernier exercice résolu présente le tableur comme outil de simulation. La fonction ALEA () y est présentée, ainsi que la fonction de comptage NB.SI. Le lien entre fréquence et probabilité est retravaillé lors de l'analyse des résultats de la simulation.

Les exercices des rubriques « **J'applique** » permettent de consolider ces apprentissages, **l'exercice 6** propose de travailler l'expression « au moins » dans sa dernière question.

• La page **Atelier Brevet** est alimentée par deux exercices très différents. **L'exercice guidé 9** porte sur la compréhension de la distinction entre fréquence d'une issue (calculée après collecte des résultats d'une expérience aléatoire) et probabilité de cette même issue (nombre « théorique » que l'on peut déterminer par des considérations de symétrie sans réaliser l'expérience).

L'exercice guidé 10 met en avant l'utilisation d'un arbre pour visualiser les issues d'une expérience aléatoire. On pourra faire remarquer aux élèves que la définition de l'événement contraire d'un événement à l'aide d'une phrase n'est pas unique : on peut utiliser la négation de la description de l'événement initial ou créer une nouvelle phrase regroupant les issues réalisant l'événement considéré. Le calcul de la probabilité de l'événement A *ou* C se fait ici de manière naturelle, en cherchant les issues qui le réalisent.

5. Compléments

Qu'ils soient d'application ou d'approfondissement, qu'ils se résolvent de manière intuitive, à l'aide d'un arbre ou avec un tableur, les exercices proposent des situations familières, issues le plus souvent de la vie courante. L'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec quelques éléments simples de mathématisation de la situation réelle. L'esprit critique des élèves est très souvent sollicité, dans une volonté de formation des futurs citoyens qu'ils représentent.

Un des objectifs des **exercices d'application** est de mettre en place les concepts d'expérience aléatoire, d'événement, de probabilité et surtout de leur donner du sens. Le vocabulaire standard des probabilités est très souvent comparé à celui du langage courant, pour ne pas couper les élèves de leurs représentations du hasard.

Les informations utiles à prélever dans les exercices se trouvent dans des supports variés : tableaux, arbres, dessins, textes descriptifs, figures géométriques.

La partie **Prendre des initiatives** peut être la source d'échanges au sein de la classe, tant sur les démarches utilisées (**exercices 45** et **46**) que sur les nécessaires recherches documentaires (**exercice 47**). **L'exercice 46** peut être riche d'interactivité entre élèves après une recherche en groupe et la rédaction de conseils argumentés.

• Des capacités en vue de l'acquisition de la pratique d'une démarche scientifique sont travaillées dans la partie **Présenter, argumenter, communiquer**, en particulier *extraire et organiser l'information utile*, *exploiter des résultats pour invalider les conjectures proposées*, *faire des essais*, *porter un regard critique sur des affirmations*.

• Les questions proposées en **travail autonome** permettent aux élèves de faire leur bilan personnel, avec renvoi au cours ou aux exercices résolus en cas de non réussite.

• Dans la page **Objectif Brevet**, on trouve quatre énoncés récents, permettant, à l'aide de conseils, ou en autonomie, de retravailler les principales notions exposées dans le chapitre.

• Les **Exercices d'approfondissement** laissent une large part à la prise d'initiative. Les situations proposées sont plus riches et demandent à l'élève une réflexion plus importante lors d'une ou plusieurs étape(s) de leur résolution :

– repérer précisément les conditions de l'expérience aléatoire ;

– identifier toutes les issues de l'expérience et choisir un mode de représentation adapté ;

– expliciter les événements qui font partie des données connues de l'exercice et identifier les issues qui les réalisent ;

– calculer les probabilités d'autres événements, à partir des probabilités repérées auparavant et des règles de calcul vues dans la leçon.

Ils peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Toute piste de recherche sera valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète de l'exercice.

L'exercice 83 pourra être l'occasion d'utiliser le tableur, à l'initiative des élèves.

• Dans la **tâche complexe,** les élèves – qui peuvent là aussi travailler en petits groupes – doivent extraire des informations d'un ensemble de documents, informations qu'il sera nécessaire d'organiser. La situation proposée, à support géométrique, demande aussi de mobiliser ses connaissances sur la notion de vitesse moyenne.

Le compte-rendu pourra être fait sous différentes formes : exposé oral, figure réalisée sur un logiciel de géométrie dynamique puis commentée, document écrit.

• Dans la rubrique **En route vers la seconde,** le premier exercice permet de réinvestir les fonctions vues lors des précédentes situations de simulation : ALEA.ENTRE.BORNES, NB.SI et demande de la part des élèves une bonne connaissance du tableur.

Dans le second exercice, le calcul littéral se révèle un outil pertinent pour résoudre le problème posé. La copie d'écran du logiciel de calcul formel Xcas permet de surmonter la résolution de l'équation du second degré intervenant dans l'exercice.

Une recherche pas à pas avec le tableur permet également de déterminer la solution entière cherchée.

Corrigés

1. Devinettes

• **Devinette**

$3 \times (1+2+3+4+5+6) - (1+2+3+5+6+2+4)$
$= 3 \times 21 - 23 = 63 - 23 = 40$

La somme des faces cachées de cette pile est égale à 40.

• **Devinette**

Imaginons que 90 conducteurs sont évalués à 51/100 et 10 conducteurs sont évalués à 1/100.
La moyenne des conducteurs interrogés est alors de

$\frac{90 \times 51 + 10 \times 1}{100} = \frac{4\,590 + 10}{100} = \frac{4\,600}{100} = 46.$

Dans ce cas, les appréciations sont alors toutes correctes.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : c

$\frac{6\,000}{36\,000} = \frac{1 \times 6\,000}{6 \times 6\,000} = \frac{1}{6}$

2 Bonne réponse : c

$30\ \%$ de $150 = \frac{30}{100} \times 150 = 3 \times 15 = 45$

3 Bonne réponse : b.

$\frac{10}{16} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$

4 Bonne réponse : c.

$\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$ et $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ donc $\frac{6}{5} > \frac{1}{3} > \frac{4}{15}$

5 Bonne réponse : b.

$\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}$

6 Bonne réponse : a.

$0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}12 + 0{,}14 = 0{,}26$

3. Calcul mental

7 **a.** $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ **b.** $p = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$
c. $p = 100\ \% - 28\ \% = 72\ \%$ **d.** $q = 1 - \frac{3}{8} = \frac{8-3}{8} = \frac{5}{8}$
e. $q = 1 - (1 - 0{,}9) = 0{,}9$ **f.** $p = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

8 **a.** $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\ \%$ **b.** $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\ \%$
c. $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} = 60\ \%$ **d.** $\frac{3}{3} = 1 = 100\ \%$
e. $120\ ‰ = \frac{120}{1000} = \frac{12}{100} = 12\ \%$
f. $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 0{,}5 \times 25\ \% = 12{,}5\ \%$

9 **a.** $25\ \%$ de $600 = \frac{1}{4} \times 600 = \frac{600}{4} = \frac{300}{2} = 150$
b. $30\ \%$ de $50 = \frac{30}{100} \times 50 = \frac{50}{100} \times 30 = \frac{1}{2} \times 30 = 15$
c. $125\ \%$ de $80 = 100\ \%$ de $80 + 25\ \%$ de 80
$= 80 + \frac{80}{4} = 80 + 20 = 100$
d. $45\ \%$ de $90 = 40\ \%$ de $90 + 5\ \%$ de 90
$= \frac{40}{100} \times 90 + \frac{90}{20} = 36 + 4{,}5 = 40{,}5$

4. Activités

Notion de probabilité

1 Répartir au hasard

a.

Sur la tête de Gary	Sur la tête de Hermine	Sur la tête de Dan
G	*H*	*D*
H	**G**	**D**
G	**D**	**H**
H	D	G
D	G	H
D	**H**	**G**

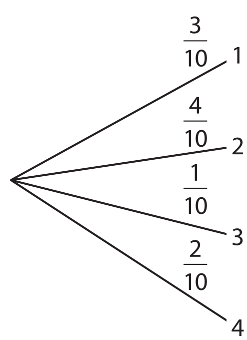
b. (1) « Il y a 2 chances sur 6 que Gary retrouve son chapeau de sorcier. »
(2) *« Il y a 1 chance sur 6 que chacun retrouve son chapeau. »*
(3) « Il y a 2 chances sur 6 que personne ne se retrouve avec son chapeau. »
(4) **« Il y a 3 chances sur 6 qu'une seule personne se retrouve avec son couvre-chef. »**

c. Hermine et Dan ont chacun 2 chances sur 6 de se retrouver avec leur chapeau, donc Hermine a tort d'affirmer avoir plus de chances que Dan de se retrouver avec son chapeau.

2 Découvrir un arbre des possibles

1. a. On a 3 chances sur 10 de tirer une boule numérotée 1, car il y a 3 boules portant le numéro 1 parmi les 10 boules du sac.
On a 4 chances sur 10 de tirer une boule numérotée 2, car il y a 4 boules portant le numéro 2 parmi les 10 boules du sac.
On a 1 chance sur 10 de tirer une boule numérotée 3, car il y a 1 boule portant le numéro 3 parmi les 10 boules du sac.
On a 2 chances sur 10 de tirer une boule numérotée 4, car il y a 2 boules portant le numéro 4 parmi les 10 boules du sac.

b. Voir l'arbre ci-contre.



2. a. Les résultats « 2 » et « 4 » permettent de réaliser son souhait.

b. Il y a 2 boules numérotées 4 et 4 boules numérotées 2, donc il y a 6 boules dans le sac qui portent un nombre pair. Il y a ainsi 6 chances sur 10 d'obtenir un nombre pair. La probabilité que l'événement P se réalise est de $\frac{6}{10} = 0{,}6$.

3 Lancer d'un dé

a. Les issues qui réalisent l'événement A sont : « 10 », « 11 », « 12 », …, « 19 » et « 20 ». Il y en a 11. La probabilité de l'événement A est donc $p\,(\mathrm{A}) = \frac{11}{20}$.

Les issues qui réalisent l'événement B sont : « 16 », « 17 », « 18 », « 19 » et « 20 ». Il y en a 5. La probabilité de l'événement B est donc $p\,(\mathrm{B}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Les issues qui réalisent l'événement C sont : « 1 », « 2 », « 3 », …, « 8 » et « 9 ». Il y en a 9. La probabilité de l'événement C est donc $p\,(\mathrm{C}) = \frac{9}{20}$.

Aucune issue ne réalise l'événement D. Sa probabilité est donc $p\,(\mathrm{D}) = \frac{0}{20}$.

Toutes les issues réalisent l'événement E. Sa probabilité est donc $p\,(\mathrm{E}) = \frac{20}{20} = 1$.

Les issues qui réalisent l'événement F sont : « 8 », « 9 », « 10 », « 11 » et « 12 ». Il y en a 5. La probabilité de l'événement F est donc $p\,(\mathrm{F}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

b. Aucune issue ne réalise l'événement D, il n'a aucune chance de se produire. C'est un événement *impossible*.
Toutes les issues réalisent l'événement E, il a toutes les chances de se produire. C'est un événement *certain*.
Aucune issue ne réalise à la fois l'événement A et l'événement C, ils ne peuvent donc pas se réaliser en même temps. Ces deux événements sont *incompatibles*.
On peut également remarquer que les issues qui ne réalisent pas l'événement A réalisent l'événement C.
Les événements A et C sont *contraires* l'un de l'autre.

4 Passer de la fréquence à la probabilité

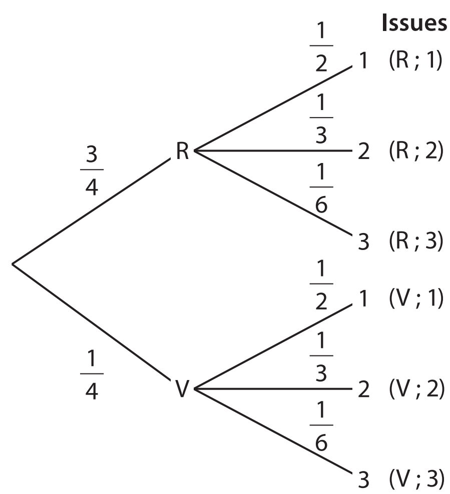
c. Lorsqu'on augmente le nombre de tirages, la fréquence d'apparition du 0 a tendance à se stabiliser autour du nombre $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

d. Au regard d'un très grand nombre de tirages, il semble que les affichages de 0 ou 1 par la calculatrice soient aléatoires.

Expérience aléatoire à deux épreuves.

5 Expérimenter avec une urne et une roue

a.



b. Si l'on réalise 120 fois cette expérience, on obtiendra environ $\frac{3}{4}$ des issues commençant par R.
Parmi celles-ci, il y en aura environ la moitié finissant par 1, c'est-à-dire 45.
La fréquence du résultat (R ; 1) est de $\frac{45}{120} = \frac{3}{8}$.

c. On réalise N fois cette expérience. Parmi ces N réalisations de l'expérience, les trois quarts commencent par R. Et parmi les issues commençant par R, la moitié finit par 1. On obtient alors $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times N$ issues (R ; 1).

La fréquence de (R ; 1) est donc de $\dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times N}{N} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$.

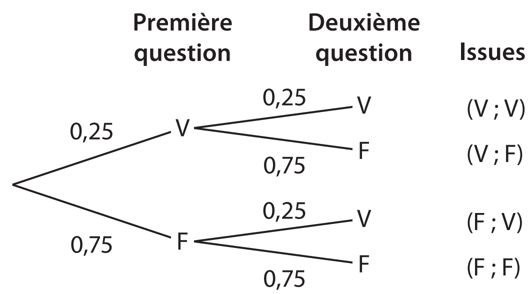
5. J'applique

4 La bonne réponse est C. En effet, « les probabilités de pluie sont de 30 % » signifie qu'il y a 30 chances sur 100 qu'il pleuve, c'est-à-dire que, sur une durée de 100 jours, on peut estimer à 30 le nombre de jours de pluie.

5 Le mot « NOTOUS » comporte 3 consonnes (N, T et S) parmi ses 6 lettres, donc la probabilité de l'événement E_1 : « On obtient une consonne » est $p\,(\mathrm{E}_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Les lettres O, U et S appartiennent au mot « CAGOUS ». Il y a donc 4 lettres du mot « NOTOUS » qui appartiennent au mot « CAGOUS ». La probabilité de l'événement E_2 est donc $p\,(\mathrm{E}_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

6 **a.** Parmi les 4 réponses proposées, une est la bonne réponse et trois sont des réponses fausses.
Ainsi $p\,(\mathrm{V}) = \frac{1}{4}$ et $p\,(\mathrm{F}) = \frac{3}{4}$.

b.



c. La probabilité que Mélanie réponde correctement aux deux questions est égale au produit $0{,}25 \times 0{,}25$. Ainsi $p\,(\mathrm{V} ; \mathrm{V}) = 0{,}0625$.

d. L'événement « Mélanie répond correctement à une seule question » est réalisé par les deux issues (V ; F) et (F ; V). Ainsi la probabilité que Mélanie réponde correctement à une seule question est égale à la somme $0{,}25 \times 0{,}75 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875 + 0{,}1875 = 0{,}375$.

e. L'événement « Mélanie ne répond correctement à aucune question » est réalisé par l'issue (F ; F). Ainsi la probabilité que Mélanie ne réponde correctement à aucune question est égale au produit $0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625$.

f. L'événement contraire de l'événement « Mélanie répond correctement à au moins une question » est « Mélanie ne répond correctement à aucune question ».

Or, p (F ; F) = 0,5625, donc la probabilité que Mélanie réponde correctement à au moins une question est égale à 1 – 0,5625 = 0,4375.
D'une autre manière, l'événement « Mélanie répond correctement à au moins une question » est réalisé par les issues (V ; V), (V ; F) et (F ; V). Sa probabilité est donc égale à $0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}75 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}4375$.

8 **a.** Entrer la formule = ENT(8*ALEA() + 1).
b. La formule 10*ALEA() renvoie un nombre compris strictement entre 0 et 10. Sa partie entière est donc un nombre entier compris entre 0 et 9. Ainsi la formule = 10*ENT(10*ALEA()) affiche 0, 10, 20, 30, …, 80 ou 90.

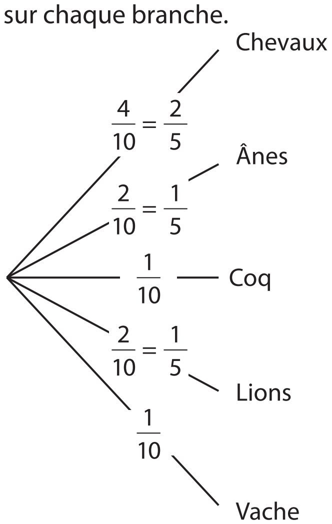
6. Atelier Brevet

9 **1. a.** Sur les 100 lancers du dé, la couleur jaune est apparue 20 fois. Sa fréquence d'apparition est donc :

$$\frac{20}{100} = 0{,}2.$$

b. Sur les 100 lancers du dé, la couleur noire est apparue 30 fois. La fréquence d'apparition de la couleur noire est donc $\frac{30}{100} = 0{,}3$.
2.a. Le dé est équilibré, donc toutes les faces ont une probabilité d'apparition égale à $\frac{1}{6}$. Sur les 6 faces du dé, une est peinte en jaune, donc la probabilité d'obtenir la couleur jaune est $\frac{1}{6}$.
b. Sur les 6 faces du dé, deux sont peintes en noir, donc la probabilité d'obtenir la couleur noire est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
3. Pour la couleur noire : la fréquence d'apparition est $\frac{30}{100}$ et la probabilité d'obtenir la couleur noire est $\frac{1}{3}$.
Les fréquences calculées en **1.** sont proches des probabilités calculées en **2.**, mais il y a un écart. Quand on réalise une expérience un grand nombre de fois, la fréquence d'une issue se rapproche de la probabilité de cette issue. Ici l'expérience n'a porté que sur 100 lancers d'où l'écart existant entre les deux valeurs; si on renouvelait l'expérience un plus grand nombre de fois, les fréquences se rapprocheraient davantage des probabilités.

10 **1.** On dessine un arbre des possibles et on inscrit les probabilités sur chaque branche.



Il y a 10 animaux sur le manège, dont 4 chevaux ; la probabilité que Vaite monte sur un cheval est $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
2. a. L'événement *non L* correspond à « Vaite ne monte pas sur un lion ». On peut aussi le décrire de la façon suivante : « Vaite monte sur un cheval, un âne, un coq ou une vache ».
La somme des probabilités d'un événement et de l'événement contraire est 1, donc la probabilité de l'événement *non* L est 1 – p (L). Ainsi p (*non* L) = $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
b. Les événements A et C sont incompatibles car Vaite ne peut monter simultanément sur un âne et un coq.
Donc p (A ou C) = p (A) + p (C) = $\frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

7. Exercices à l'oral

Notion de probabilité

11 **a.** Si on répond au hasard à une question, c'est une expérience aléatoire.
b. Attribuer un nom à son chien n'est pas une expérience aléatoire, car la première lettre du nom est imposée par l'année de naissance du chien (par exemple, les chiens de pure race nés en 2011 ont un nom qui commence par la lettre G).
c. Ce n'est pas une expérience aléatoire, car la direction du ballon n'est pas due au hasard : le buteur vise les perches.
d. Faire tourner une roue de loterie équilibrée est une expérience aléatoire, car c'est une expérience qui a plusieurs résultats et pour laquelle on ne peut pas prévoir avec certitude lequel se produira.

12 **1.** Cette expérience a 4 issues : « 1 », « 2 », « 3 » et « 4 ».
2. a. Il y a 2 chances sur 10 d'obtenir 3 points.
b. Il y a 7 chances sur 10 d'obtenir moins de 3 points. (On sous-entend ici « strictement moins de 3 points ».)
c. Il y a 3 chances sur 10 d'obtenir au moins 3 points.
3. Les événements A et B sont incompatibles, car aucune des 4 issues ne les réalise simultanément. Ils ne peuvent pas se produire en même temps.

13 **a.** La pièce étant équilibrée, on a 1 chance sur 2 d'obtenir chacune des faces. La probabilité d'obtenir Pile est donc $\frac{1}{2} = 0{,}5$.
b. « Obtenir Pile » est l'événement contraire de l'événement « Obtenir Face ». Donc la somme de leur probabilité est égale à 1.
Alors la probabilité d'obtenir Pile est 1 – 0,54 = 0,46.

14 **1.** Les issues de cette expérience sont « 1 », « 2 », « 3 », « 4 », « 5 » et « 6 ».
2. a. Les issues « 2 », « 4 » et « 6 » réalisent l'événement P.
b. Toutes les issues de cette expérience réalisent l'événement E.
c. Les issues « 3 » et « 6 » réalisent l'événement M.
d. Aucune issue de cette expérience ne réalise l'événement N.
3. a. p (P) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ **b.** p (E) = $\frac{6}{6} = 1$

c. $p(\mathrm{M}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **d.** $p(\mathrm{N}) = \frac{0}{6} = 0$.

15 Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, donc ce qu'affirme Nam n'a pas de sens.

16 Le dé de Pierre est équilibré, donc à chaque lancer, chaque face a une chance sur six d'apparaître, quels que soient les résultats des lancers précédents : le dé n'a pas de « mémoire ». La probabilité d'obtenir « 6 » au 11e lancer est donc $\frac{1}{6}$.

17 Dans l'urne, il y a des boules de deux couleurs : des blanches et des noires. L'expérience aléatoire consistant à tirer une boule dans l'urne possède deux issues dont la somme des probabilités est égale à 1. La probabilité de tirer une boule blanche est inférieure à 0,5. On a moins d'une chance sur deux de tirer une boule blanche, donc les boules noires sont les plus nombreuses dans l'urne.

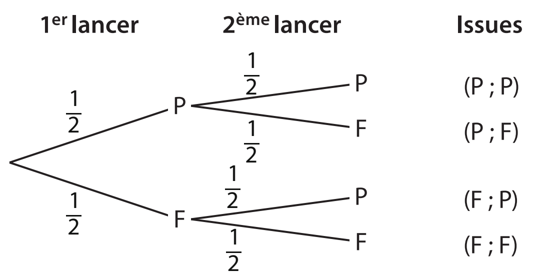
18 Dans l'urne 1, il y a 10 boules dont 3 vertes. La probabilité de tirer une boule verte dans l'urne 1 est donc $\frac{3}{10}$. L'arbre qui lui correspond est l'arbre B.
Dans l'urne 2, il y a 5 boules rouges et 5 boules vertes. La probabilité de tirer une boule verte est donc la même que celle de tirer une boule rouge. L'arbre qui correspond à l'urne 2 est l'arbre C.
Dans l'urne 3, il y a 7 boules dont 3 rouges. La probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne 3 est donc $\frac{3}{7}$. L'arbre qui lui correspond est l'arbre A.

19 Dans cette expérience, chaque issue a une probabilité égale à 0,5. Or, la somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1, donc cette expérience possède 2 issues. Voici un exemple : tourner une roue de loterie équilibrée partagée en 8 secteurs superposables (4 verts et 4 rouges) et relever la couleur du secteur qui s'arrête en face du repère.

20 **a.** Le dé possède 4 faces dont une porte la lettre « I ».
La probabilité d'obtenir « I » est donc $\frac{1}{4}$.
b. Le dé ne porte que des voyelles, donc « obtenir une consonne » est un exemple d'événement impossible.
c. Le dé ne porte que des voyelles, donc « obtenir une voyelle » est un exemple d'événement certain.

Expérience à deux épreuves

21 L'arbre des possibles ci-dessous décrit l'expérience aléatoire à deux épreuves.



a. $p(\mathrm{F}\,;\mathrm{F}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. La probabilité d'obtenir deux tirages différents est la somme $p(\mathrm{P}\,;\mathrm{F}) + p(\mathrm{F}\,;\mathrm{P}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

22 **a.** Les issues de cette expérience sont :
(1 ; 2) (1 ; 4) (1 ; 6) (1 ; 8)
(5 ; 2) (5 ; 4) (5 ; 6) (5 ; 8)
(7 ; 2) (7 ; 4) (7 ; 6) (7 ; 8)

b. La probabilité de tirer le jeton 1 dans la boîte A est $\frac{1}{3}$.
La probabilité de tirer le jeton 2 dans la boîte B est $\frac{1}{4}$.
La probabilité de tirer le jeton 1 puis le jeton 2 est donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

8. Exercices d'application

Notion de probabilité

23 Natacha n'a pas raison : le dé est équilibré et n'a pas de mémoire, à chaque lancer, les six faces ont la même probabilité de sortie.

24 Dans le sac, il y a 15 boules dont 5 noires. La probabilité de tirer une boule noire est $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

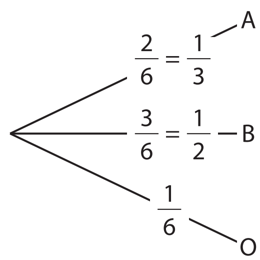
25 Le nombre de bouteilles d'eau est :
$$100 - (22 + 32 + 18) = 100 - 72 = 28.$$
Alors $p(\mathrm{E}) = \frac{28}{100} = 0{,}28$.

26 **a.**

Somme		Sac rouge		
		1	**2**	**3**
Sac bleu	**1**	2	3	4
	2	3	4	5
	3	4	5	6
	4	5	6	7

b. Parmi les 12 sommes possibles, deux sont égales à 3 et trois sont égales à 5. Donc l'événement « Obtenir une somme égale à 5 » est plus probable que l'événement « Obtenir une somme égale à 3 ».

27 **a.** Chloé se trompe : il y a 6 boules dans l'urne et parmi ces 6 boules, 3 portent la lettre B. Donc Chloé a 3 chances sur 6 de tirer le B, c'est-à-dire, une chance sur deux.
b.



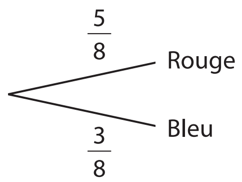
c. Parmi les 6 lettres de l'urne, il y a 3 voyelles (deux A et un O), donc la probabilité de tirer une voyelle est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
d. Si on réalise 250 fois cette expérience, on peut estimer que l'on obtiendra environ 125 fois le B, mais ce n'est qu'une estimation. Plus le nombre de réalisations de l'expérience augmente, plus la fréquence d'apparition de la lettre B a tendance à se rapprocher de la probabilité d'obtenir la lettre B, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$.

28 a. La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1, donc la probabilité écrite sous la tache est $1-\frac{1}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$.

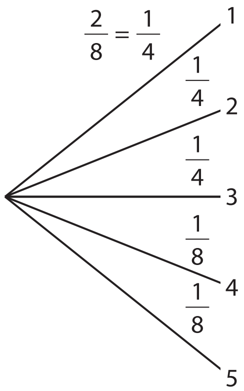
b. Un paquet de bonbons contient 1 bonbon à la fraise, 2 à la menthe et 4 au citron. On choisit au hasard un bonbon dans le paquet et on note son parfum.

29 1.a. Quand on s'intéresse à la couleur de la boule, l'expérience aléatoire possède 2 issues : Rouge et Bleu. Il y a 5 boules rouges et 3 boules bleues, donc l'issue Rouge a plus de chances de se réaliser.

b.

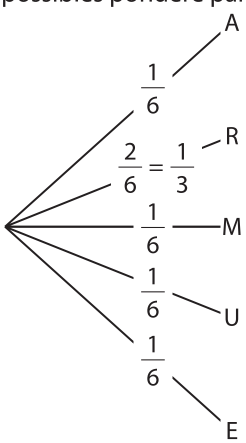


2. a.



b. « Tirer une boule de couleur verte », « Tirer une boule portant le numéro 6 » sont des événements impossibles. « Tirer une boule rouge portant un numéro inférieur ou égal à 4 » est un événement dont la probabilité est 0,5. En effet, sur les 8 boules de l'urne, il y a 4 boules rouges portant un numéro inférieur ou égal à 4.

30 1. Les issues de cette expérience sont A, R, M, U et E. Voici l'arbre des possibles pondéré par les probabilités.



2. a. Toutes les issues de l'expérience réalisent l'événement E_1, donc $p\,(E_1)=\frac{6}{6}=1$.

b. Aucune issue de l'expérience ne réalise l'événement E_2, donc $p\,(E_2)=\frac{0}{6}=0$.

c. Les issues A et M réalisent l'événement E_3, donc $p\,(E_3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

d. Les issues R et M réalisent l'événement E_4, donc $p\,(E_4)=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

31 1. La fréquence d'une classe est égale au quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total.

Masse (en g)	135 à moins de 140	140 à moins de 145	145 à moins de 150	150 à moins de 155	155 à moins de 160	160 à moins de 165	Total
Effectif	15	21	93	126	27	18	300
Fréquence	0,05	0,07	0,31	0,42	0,09	0,06	1

2. a. Les issues qui réalisent l'événement A sont les deux dernières classes.

Donc $p\,(A)=0{,}09+0{,}06=0{,}15=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$.

b. Si la masse réelle de la barquette diffère de moins de 10 g de la masse marquée, alors la masse réelle de la barquette est comprise entre 140g et 160g.

Donc $p\,(B)=0{,}07+0{,}31+0{,}42+0{,}09=0{,}89=\frac{89}{100}$.

32 1. L'expérience aléatoire a 8 issues : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

a. L'issue 6 réalise l'événement E_1, car 6 est un multiple de 2 et de 3.

b. Les issues 2, 3, 4, 6 et 8 réalisent l'événement E_2, car 2, 4, 6 et 8 sont des multiples de 2 et 3 est un multiple de 3.

c. Les issues 1, 3, 5, 6, 7 et 8 réalisent l'événement E_3, car 1 et 3 sont impairs et 5, 6, 7 et 8 sont supérieurs ou égaux à 5.

2. a. $p\,(E_1)=\frac{1}{8}$. **b.** $p\,(E_2)=\frac{5}{8}$. **c.** $p\,(E_3)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

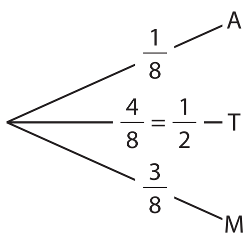
33 a. Une personne du groupe B peut être de rhésus positif ou de rhésus négatif. Ces deux événements sont incompatibles donc $p\,(B)=8\,\%+1\,\%=9\,\%$.

b. Une personne de rhésus positif peut appartenir au groupe 0, au groupe A, au groupe B ou au groupe AB. Ces événements étant incompatibles :

$$p\,(R+)=36\,\%+38\,\%+8\,\%+3\,\%=85\,\%.$$

c. $p\,(A-)=7\,\%$

34 a.



b. L'événement non A est « La roue ne s'arrête pas sur A ». On peut aussi l'exprimer de la façon suivante « La roue s'arrête sur T ou sur M ».

Sa probabilité est $p\,(\text{non } A)=1-p\,(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

35 1. a. The probability that Duncan will choose a blue sweet is $1-0{,}35-0{,}24-0{,}19=0{,}22$.

b. The probability that Duncan will not choose a red sweet is 1 – 0,24 = 0,76.

2. We can estimate that 60 red sweets are in the box.

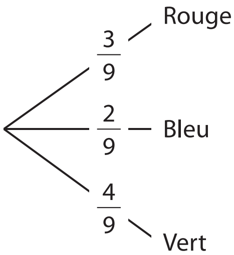
36 Les issues de cette expérience sont Rouge, Vert et Bleu. La mesure de l'angle du secteur vert est égale à :

$$360° - (120° + 80°) = 360° - 200° = 160°.$$

La probabilité d'obtenir la couleur Verte est alors :

$$p\,(\mathrm{V}) = \frac{160}{360} = \frac{4}{9}.$$

De même, $p\,(\mathrm{R}) = \dfrac{120}{360} = \dfrac{3}{9}$ et $p\,(\mathrm{B}) = \dfrac{80}{360} = \dfrac{2}{9}$.



37 **a.** Il faut vérifier que la somme des probabilités des issues est égale à 1 :

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$$

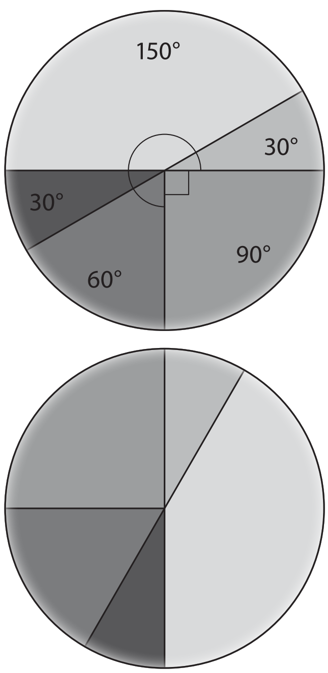
$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

Donc les probabilités indiquées permettent de fabriquer la roue.

b.

Couleur	Jaune	Vert	Noir	Rouge	Bleu	Total
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	1
Angle en °	$360 \times \frac{1}{12} = 30$	$360 \times \frac{5}{12} = 150$	$360 \times \frac{1}{12} = 30$	$360 \times \frac{1}{6} = 60$	$360 \times \frac{1}{4} = 90$	360

c.



38 La somme des probabilités des issues de cette expérience aléatoire est égale à 1, donc $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$.
En utilisant les égalités $P_1 = P_2$ et $P_3 = P_4$, on obtient :

$$P_1 + P_1 + P_3 + P_3 = 1.$$

Mais $P_3 = 4P_1$, donc $P_1 + P_1 + 4P_1 + 4P_1 = 1$.
Alors $10P_1 = 1$ et $P_1 = 0{,}1$. On utilise alors les égalités de l'énoncé pour écrire $P_1 = P_2 = 0{,}1$ et $P_3 = P_4 = 4P_1 = 0{,}4$.

39 On considère l'événement non E : « Le chiffre 9 figure dans le numéro ». Les issues qui réalisent cet événement sont 09, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90, 91, …, 98 et 99.
Il y en a 19. Donc $p\,(\text{non E}) = \dfrac{19}{100}$ et ainsi

$$p\,(\mathrm{E}) = 1 - p\,(\text{non E}) = 1 - 0{,}19 = 0{,}81.$$

40 **a.**

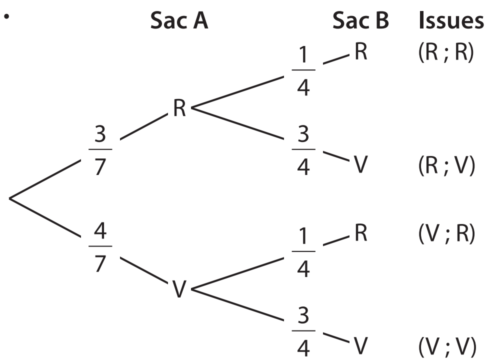
Nombre de lancers	Rouge	Bleu	Vert	Jaune	Total
	179	186	75	80	320

b. Le dé ne paraît pas équilibré car il y a de grands écarts entre le nombre d'apparitions de chaque face.

c. La fréquence d'apparition de la couleur jaune permet d'estimer la probabilité $p\,(\mathrm{J})$. Ainsi $p\,(\mathrm{J}) \approx \dfrac{80}{320}$, donc $p\,(\mathrm{J}) \approx 0{,}25$.

Expériences à deux épreuves

41 **1.**



2. a. $p\,(\mathrm{R}\,;\mathrm{V}) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{28}$.

b. $p\,(\mathrm{V}\,;\mathrm{R}) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$.

c. L'événement « Jérémy tire deux foulards de la même couleur » est réalisé par les deux issues (R ; R) et (V ; V). Comme ces issues ne peuvent se produire en même temps, la probabilité de l'événement est égale à la somme :

$$p\,(\mathrm{R}\,;\mathrm{R}) + p\,(\mathrm{V}\,;\mathrm{V}) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{28} + \frac{12}{28} = \frac{15}{28}$$

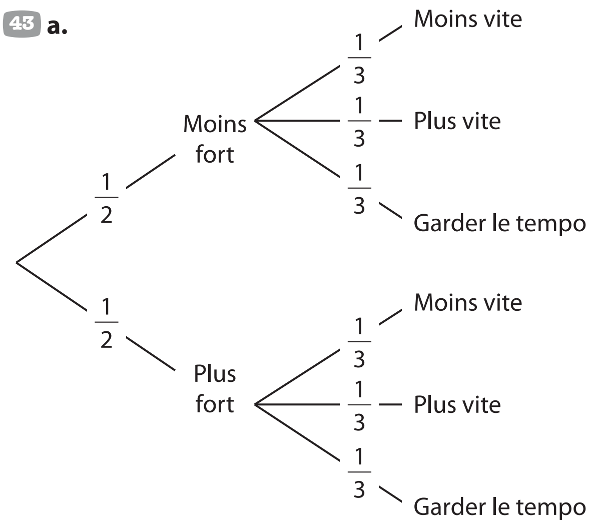
42 Le tableau ci-dessous présente les 36 issues de cette expérience aléatoire à deux épreuves.

	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

a. Il y a 6 issues qui réalisent cet événement donc la probabilité d'obtenir le même nombre sur les deux dés est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b. « Obtenir deux nombres différents » est l'événement contraire de l'événement précédent.
Donc la probabilité d'obtenir deux nombres différents est $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

43 **a.**

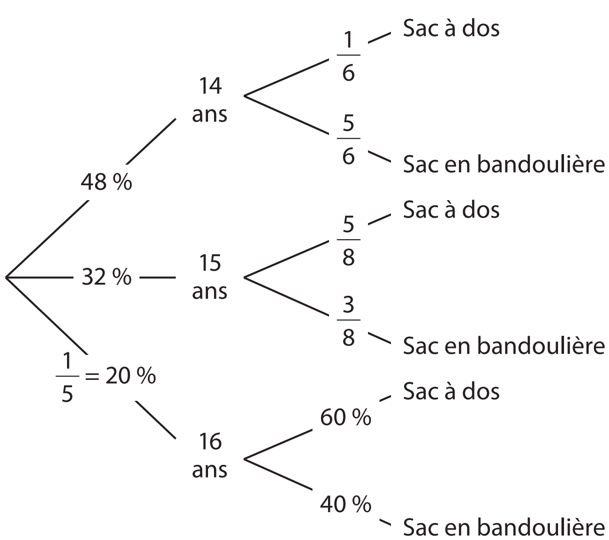


b. $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

44 **1.** Voici l'arbre des possibles pondéré par les probabilités :



a. La probabilité que l'élève ait un sac à dos et soit âgé de 14 ans est $48\,\% \times \frac{1}{6} = \frac{48}{100} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{100} = 8\,\% = 0{,}08$.

b. La probabilité que l'élève ait un sac à dos et soit âgé de 15 ans est $32\,\% \times \frac{5}{8} = \frac{32}{100} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{100} = 20\,\% = 0{,}2$.

c. La probabilité que l'élève ait un sac à dos et soit âgé de 16 ans est :

$$20\,\% \times 60\,\% = \frac{20}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{12}{100} = 12\,\% = 0{,}12.$$

2. La probabilité que l'élève ait un sac à dos est égale à la somme des probabilités calculées ci-dessus :

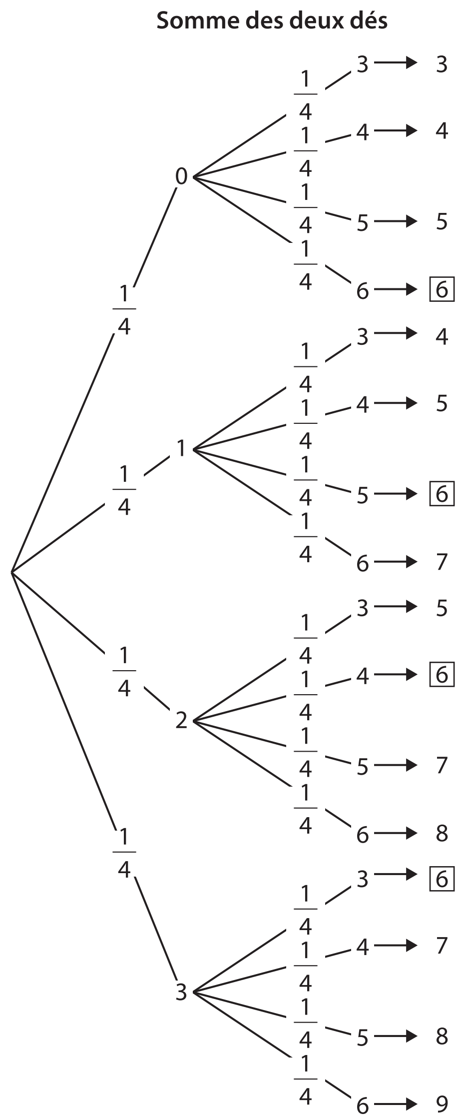
$$0{,}08 + 0{,}2 + 0{,}12 = 0{,}4 = 40\,\%.$$

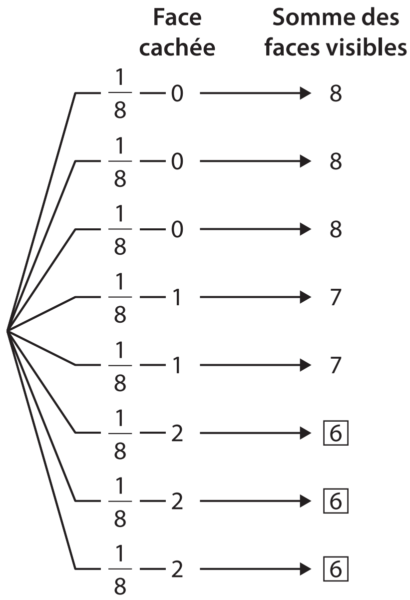
Prendre des initiatives

45 La probabilité que la fève se trouve à l'intérieur du disque délimité par la couronne est égale au quotient :

$$\frac{\text{aire du disque délimité par la couronne}}{\text{aire de la galette}} = \frac{\pi \times 10^2}{\pi \times 20^2} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}.$$

46



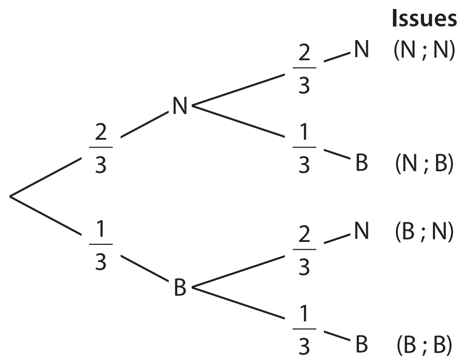


La probabilité d'obtenir une somme de 6 avec les deux dés à 4 faces est égale à $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
La probabilité d'obtenir une somme de 6 avec le dé à 8 faces est égale à $\frac{3}{8} = 0{,}375$. Justin a donc intérêt à lancer le dé à 8 faces.

47 **a.** La France compte 96 départements métropolitains, parmi lesquels 4 appartiennent à la région Bretagne (Finistère, Côtes d'Armor, Morbihan, Ile-et-Vilaine). La probabilité que le département choisi appartienne à la région Bretagne est donc $\frac{4}{96} = \frac{1}{24}$.
b. La France compte 5 DOM (Départements d'Outre Mer) et 8 départements dans la région Ile-de-France. Donc le département a plus de chances d'être situé en région parisienne qu'outre-mer. Malik a tort.

9. Vrai ou faux

48 Cette affirmation est **fausse** : une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
49 Cette affirmation est **vraie**.
50 Cette affirmation est **fausse** : si la pièce est équilibrée, la probabilité d'obtenir Pile est bien égale à 0,5 à chaque lancer, mais sur 100 lancers, on ne peut pas prévoir le nombre de lancers qui donneront Pile.
51 Cette affirmation est **fausse** : à chaque lancer d'un dé classique équilibré, chacune des 6 faces a la même probabilité de sortie. On n'est pas certain d'obtenir les six issues 1, 2, 3, 4, 5 et 6 en lançant six fois le dé.
52 Cette affirmation est **fausse** : à chaque tirage du Loto, tous les numéros ont la même chance de sortir, le hasard n'a pas de mémoire.
53 Cette affirmation est **vraie** : l'événement « Obtenir au moins une boule noire » est l'événement contraire de l'événement « Obtenir deux boules blanches ». Donc la probabilité d'obtenir au moins une boule noire est :
$1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. (voir l'arbre des possibles ci-après)



10. Calcul mental et réfléchi

54 **a.** $p\,(V) = 1 - p\,(R) - p\,(J) = 1 - 0{,}25 - 0{,}4 = 0{,}35$.
b. $p\,(V) = 1 - p\,(R) - p\,(J) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{2} = \frac{12-5-6}{12} = \frac{1}{12}$.

55 **a.** $\frac{2}{5} \times 5 = 2$.
b. $\frac{2}{5} \times 35 = 2 \times \frac{35}{5} = 2 \times 7 = 14$.
c. $\frac{2}{5} \times 75 = \frac{2 \times 75}{5} = \frac{150}{5} = 30$.
d. $\frac{2}{5} \times 125 = 2 \times \frac{125}{5} = 2 \times 25 = 50$.
e. $\frac{2}{5} \times 1\,000 = 2 \times \frac{1000}{5} = 2 \times 200 = 400$.

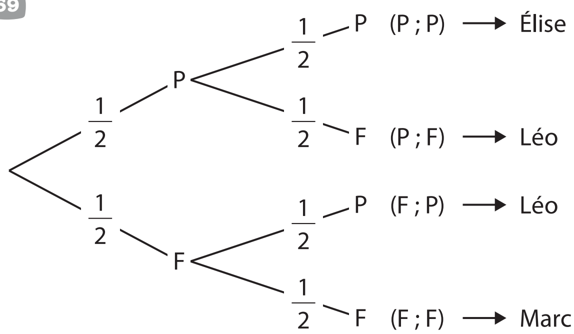
56 **a.** La fréquence du choix « Poisson » est égale à :
100 % – (38 % + 27 % + 15 %) = 100 % – 80 % = 20 %.
b. 20 % × 200 = 0,2 × 200 = 40.

57 On utilise l'égalité $p\,(\text{non } A) = 1 - p\,(A)$ qui lie la probabilité d'un événement et la probabilité de l'événement contraire.
a. $p\,(\text{non } A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
b. $p\,(\text{non } A) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$
c. $p\,(\text{non } A) = 100\,\% - 43\,\% = 57\,\%$
d. $p\,(\text{non } A) = 1 - 1 = 0$.

11. Présenter, argumenter, communiquer

58 **a.** Dans la classe, il y a 3 + 11 = 14 filles. Donc la probabilité que l'élève soit une fille est $\frac{14}{25} = 0{,}56$.
Dans la classe, il y a 9 + 11 = 20 demi-pensionnaires, donc il y a 25 – 20 = 5 externes. La probabilité que l'élève soit externe est $\frac{5}{25} = 0{,}2$.
b. Il y a 20 demi-pensionnaires dans la classe, parmi lesquels 9 garçons. Si l'élève est demi-pensionnaire, la probabilité que ce soit un garçon est donc $\frac{9}{20} = 0{,}45$.

59



Marc et Elise : « Nous sommes favorables à ce système, nous avons chacun une chance sur quatre de faire la vaisselle ! »
Léo : « Moi, je ne suis pas d'accord avec ce système, j'ai deux chances sur quatre de faire la vaisselle, c'est-à-dire deux fois plus de chances que vous ! C'est injuste ! »

60 À chaque tirage, le nombre de pions blancs est égal au nombre de pions noirs puisque les pions tirés sont remis après chaque tirage, donc on a une chance sur deux de tirer un pion blanc, quels que soient les tirages précédents. Ainsi chaque enfant a la même probabilité de prendre un pion blanc la prochaine fois.

61 **a.** La première guerre mondiale a débuté en 1914 et s'est achevée en 1918. Il y a donc 5 années (1914, 1915, 1916, 1917, 1918) qui réalisent l'événement G.

Donc $p(\text{G}) = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

b. La V^{e} République a débuté en 1958 (le 5 octobre). Toutes les années du XX^{e} siècle à partir de 1958 réalisent donc l'événement K. Donc $p(\text{K}) = \frac{43}{100} = 0{,}43$.

62 **1.a.** Dans le jeu d'Enzo (jeu de 32 cartes), il n'y a pas de 5 de Carreau. En effet, chaque enseigne (Pique, Cœur, Carreau, Trêfle) comprend les 8 cartes suivantes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. L'événement est donc impossible pour Enzo. La probabilité est nulle.

b. Dans un jeu de 52 cartes, les quatre enseignes (Pique, Cœur, Carreau, Trêfle) comprennent chacune 13 cartes : As, Roi, Dame, Valte, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Pour Léa, la probabilité de tirer le 5 de Carreau est donc $\frac{1}{52}$.

2. Dans les deux jeux de cartes, les cartes sont également réparties en 4 enseignes (Pique, Cœur, Carreau et Trèfle) et la probabilité de tirer un Coeur est $\frac{1}{4}$ dans les deux jeux. Donc Luce a raison.

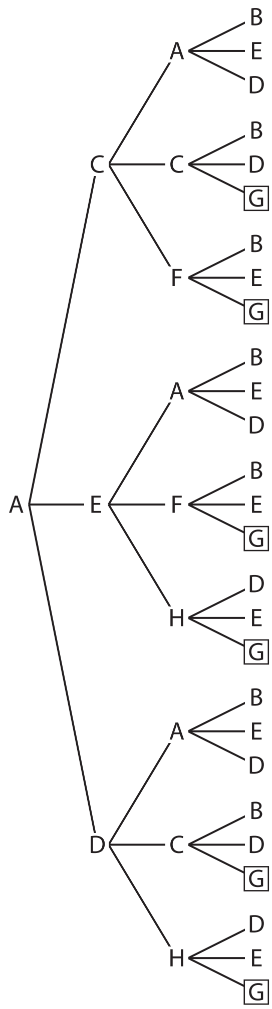
3. Il y a 4 As dans chacun des deux jeux, mais le jeu d'Enzo contient moins de cartes que celui de Léa, donc Enzo a la plus grande probabilité de tirer un As $\left(\frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ contre } \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ pour Léa}\right)$.

63 Voici les 6 dispositions possibles.

Couteau	Fourchette	Cuiller
Couteau	Cuiller	Fourchette
Fourchette	Cuiller	Couteau
Fourchette	Couteau	Cuiller
Cuiller	Couteau	Fourchette
Cuiller	Fourchette	Couteau

Il y a 2 dispositions qui réalisent l'événement « Le couteau est placé entre la fourchette et la cuiller » donc la probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

64 Voici l'arbre des possibles de cette expérience aléatoire à trois épreuves. Chacune des 27 issues a 1 chance sur 27 de se produire, 6 issues réalisent l'événement « Le scarabée a traversé le cube », donc la probabilité que le scarabée ait traversé le cube est $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.



12. QCM pour s'évaluer

65 **c.** **66** **b.** **67** **c.** **68** **a.** **69** **b.** **70** **a.** **71** **b.** et **c.**
72 **b.** et **c.** **73** **a.**, **b.** et **c.**

13. Objectif Brevet

74 **a.** Les possibilités de lancers correspondant à une somme égale à 8 sont :

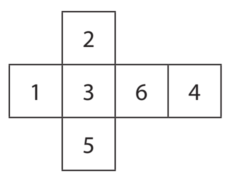
Dé n° 1	2	3	4
Dé n° 2	6	5	4

b. La fréquence de la somme 6 est égale au quotient de l'effectif de la somme 6 par l'effectif total :

$$\frac{677}{5\,000} = 0{,}1354 \text{ soit } 13{,}54\ \%.$$

c. Bertrand a autant de chances d'obtenir une somme égale à 2 en lançant ses dés qu'Aline en lançant les siens car, dans chaque cas, sur les 36 issues possibles, une seule (1 ; 1) permet d'obtenir 2.

d.



75 **a.** Le nombre de lancers qui donnent la somme 7 est 170. La fréquence de la somme 7 est alors :

$$\frac{170}{1\,000} = 0{,}17 = 17\ \%.$$

b.

Somme des 2 dés		**Valeur 2ème dé**					
		1	2	3	4	5	6
Valeur 1er dé	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

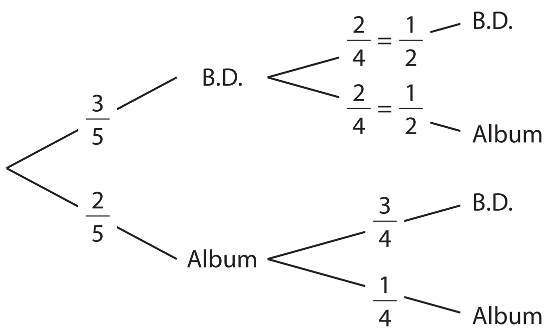
Sur les 36 issues possibles, 6 permettent d'obtenir une somme égale à 7.

Donc la probabilité d'obtenir cette somme est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

c. La fréquence obtenue à la question a et la probabilité obtenue à la question b sont très proches. En effet, lorsqu'on réalise un grand nombre de fois une même expérience, la fréquence d'une issue se rapproche de la probabilité de cette issue.

76 **a.** Le colis contient 5 livres dont 3 bandes-dessinées. La probabilité que le livre sorti au hasard soit une bande-dessinée est donc $\frac{3}{5}$.

b. Voici l'arbre des possibles pondéré par les probabilités pour cette expérience à deux épreuves.



Les issues (BD ; album), (BD ; BD) et (album ; BD) réalisent l'événement « Obtenir au moins une bande-dessinée ».

Donc la probabilité d'obtenir au moins une bande-dessinée est :

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}.$$

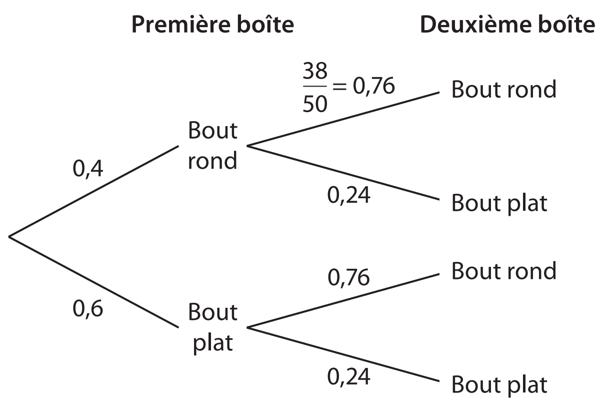
La probabilité de l'événement contraire est :

$$p\,(\text{album} ; \text{album}) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}.$$

Donc la probabilité d'obtenir au moins une bande-dessinée est : $1 - p\,(\text{album} ; \text{album}) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

77 **1.** Dans la 1re boîte, il y a 100 vis dont 40 à bout rond. La probabilité que la vis prise au hasard dans cette boîte soit à bout rond est $\frac{40}{100} = 40\ \% = 0{,}4$.

2. a. Voici l'arbre des possibles pondéré par les probabilités pour cette expérience aléatoire à deux épreuves.



b. Les issues (rond ; plat) et (plat ; rond) réalisent l'événement « Obtenir deux vis différentes ».

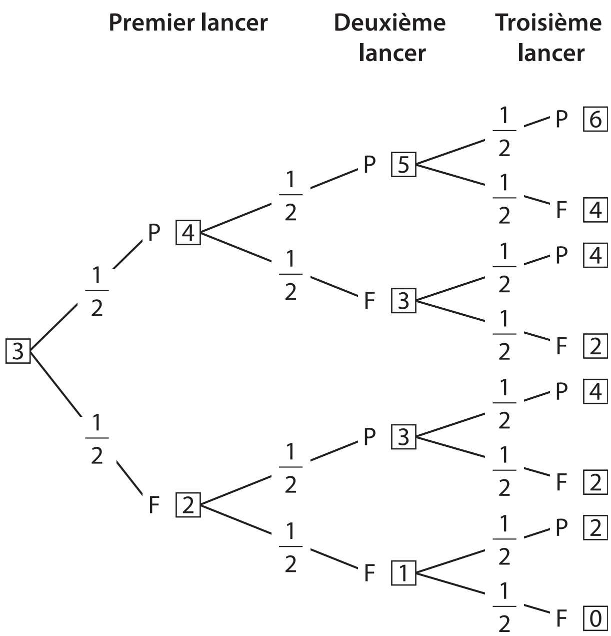
La probabilité d'obtenir deux vis différentes est alors :

$$\begin{aligned}0{,}4\times 0{,}24 + 0{,}6\times 0{,}76 &= 0{,}096 + 0{,}456\\ &= 0{,}552.\end{aligned}$$

Cette probabilité est supérieure à 0,5 donc l'électricien a plus d'une chance sur deux d'obtenir deux vis différentes.

14. Exercices d'approfondissement

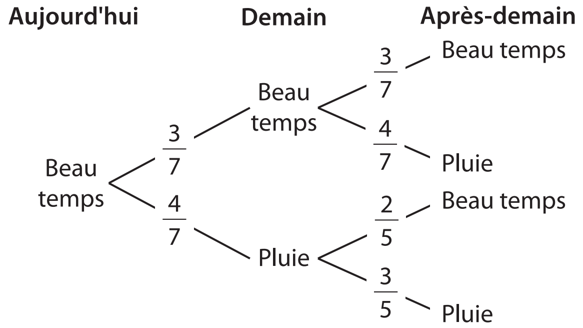
78 Voici l'arbre des possibles pondérés par les probabilités pour cette expérience aléatoire à trois épreuves.



Il y a alors 3 chances sur 8 qu'Olivier se retrouve sur le 4e barreau et également 3 chances sur 8 qu'il se retrouve sur le 2e barreau.

L'affirmation d'Olivier est donc exacte.

79 Voici l'arbre des possibles pondéré par les probabilités pour cette expérience aléatoire à deux épreuves.



Deux chemins mènent au beau temps après-demain
La probabilité qu'il fasse beau après-demain est donc :

$$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{9}{49}+\frac{8}{35}=\frac{9\times5+8\times7}{245}=\frac{101}{245}.$$

Cette probabilité est inférieure à $\frac{1}{2}$ (puisque 101 est inférieur à la moitié de 245), donc il y a moins d'une chance sur deux qu'il fasse beau après-demain. Ce n'est pas raisonnable d'envisager se promener après-demain.

80 **1. a.** Le sac contient 20 boules dont 10 rouges.
La probabilité de tirer une boule rouge est donc :

$$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

b. Il y a dans le sac 6 boules noires et 4 boules jaunes, donc la probabilité de tirer une boule noire ou jaune est $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0{,}5.$ On peut également remarquer que « Tirer une boule noire ou jaune » est l'événement contraire de l'événement « Tirer une boule rouge ».

Alors p (noire ou jaune) = 1 – p (rouge) = 1 – 0,5 = 0,5.

2. On appelle n le nombre de boules bleues dans le sac.

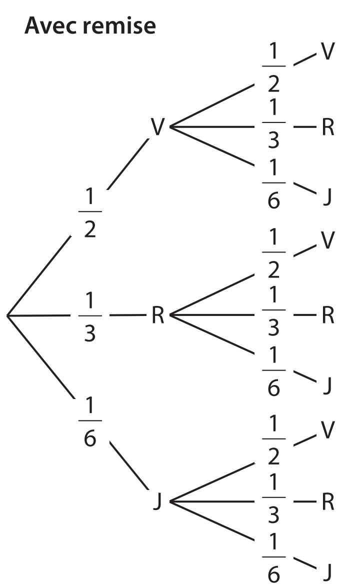
Il y a n + 20 boules dans le sac dont n bleues.

La probabilité de tirer une boule bleue est alors :

$$\frac{n}{n+20}=\frac{1}{5}.$$

En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient $5n = n + 20$. D'où $4n = 20$ et donc $n = 5$. Il y a 5 boules bleues dans le sac.

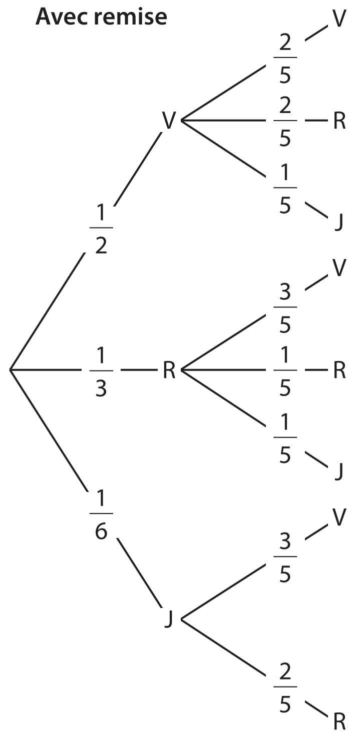
81 **1. a.**



b. Les issues (V ; V), (R ; R) et (J ; J) réalisent l'événement « Obtenir deux jetons de la même couleur ». La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est donc :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$$
$$=\frac{9+4+1}{36}$$
$$=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}.$$

2. a.



b. Les issues (V ; V) et (R ; R) réalisent l'événement « Obtenir deux jetons de la même couleur ». Donc la probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est :

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{4}{15}.$$

82 **a.b.c.** *cf. fichier tableur à télécharger.*

d. Une estimation de la probabilité de l'événement L est donnée par la fréquence d'apparition du 1, c'est-à-dire 0,238.

83 **Un défi**

Cette expérience aléatoire à trois épreuves possède $6^3 = 216$ issues, puisque chaque dé possède 6 faces. Quel que soit le nombre choisi par le joueur, la probabilité de gagner (c'est-à-dire d'être remboursé de sa mise et de recevoir en plus 1€, 2€ ou 3€) est la même. Supposons que le joueur parie sur le nombre 1. Une seule issue (1 ; 1 ; 1) lui permet d'être remboursé de sa mise et de recevoir en plus 3€. 15 issues lui permettent d'être remboursé de sa mise et de recevoir en plus 2 € : (1 ; 1 ; 2), (1 ; 1 ; 3), (1 ; 1 ; 4), (1 ; 1 ; 5), (1 ; 1 ; 6), (1 ; 2 ; 1), (1 ; 3 ; 1), (1 ; 4 ; 1), (1 ; 5 ; 1), (1 ; 6 ; 1), (2 ; 1 ; 1), (3 ; 1 ; 1), (4 ; 1 ; 1), (5 ; 1 ; 1), (6 ; 1 ; 1). 75 issues lui permettent d'être remboursé de sa mise et de recevoir en plus 1 € :

Dé n° 1	Dé n° 2	Dé n° 3
1	2	2
		3
		4
		5
		6
1	3	2, 3, 4, 5 ou 6
1	4, 5 ou 6	2, 3, 4, 5 ou 6

Donc, il y a 25 issues où le nombre 1 est obtenu avec le dé n° 1. Il y en a également 25 avec le dé n° 2 et 25 avec le dé n° 3. D'où un total de 75 issues comportant une seule fois le nombre 1.
On peut alors calculer la somme reçue en moyenne par le joueur : sur 216 issues, il reçoit 1 fois 3€ plus sa mise, 15 fois 2€ plus sa mise et 75 fois 1€ plus sa mise. Pour toutes les autres issues, il perd sa mise de 1€.
Ainsi il reçoit en moyenne :

$$\frac{1\times(3+1)+15\times(2+1)+75\times(1+1)+108\times(-1)}{216}=\frac{91}{216}$$
$$\approx 0{,}42 \text{ €}.$$

Cette somme est inférieure à sa mise de 1€, donc il est perdant.

15. Tâche complexe : Déterminer une probabilité

84 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Représenter géométriquement la zone dans laquelle le satellite va tomber.
Aide n° 2 : Quelle distance l'hélicoptère peut-il parcourir avant que le satellite ne coule ?
Aide n° 3 : Représenter géométriquement la zone dans laquelle l'hélicoptère peut se rendre avant que le satellite ne coule.

2. Quelques commentaires

• Les informations utiles pour déterminer la distance que peut parcourir l'hélicoptère sont à extraire des deux premiers documents.

• Certains élèves n'éprouveront pas le besoin de représenter géométriquement les zones considérées et raisonneront directement sur le quotient des aires des surfaces intervenant dans la situation.

• Cette tâche complexe pourra être l'occasion de sensibiliser les élèves aux risques encourus lors de transports maritimes et de s'intéresser aux moyens de secours existants et à leur vitesse d'intervention.

• Certains élèves utiliseront naturellement un logiciel de géométrie dynamique qui leur permettra de conjecturer la valeur de la probabilité cherchée en calculant le quotient des aires des deux disques à l'aide du logiciel.

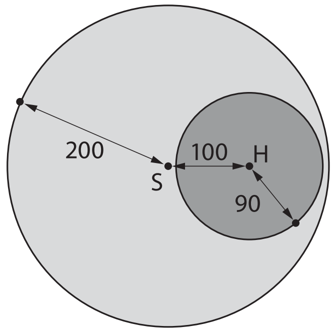
3. Éléments de réponse

• L'hélicoptère a 24 minutes pour récupérer le satellite. Il vole à une vitesse moyenne de 225 km/h. Donc en 24 minutes, il peut parcourir une distance de :

$$d=v\times t=\frac{225\,\text{km}}{1\text{h}}\times 24\text{ min}=\frac{225\,\text{km}}{60\,\text{min}}\times 24\text{ min}=90\text{ km}.$$

• L'hélicoptère décolle du point H, situé à 100 km à l'Est du point S (point de coordonnées W15°S10°).
Il peut ainsi couvrir le disque rouge de centre H et de rayon 90 km.
• La probabilité que l'hélicoptère puisse récupérer le satellite avant qu'il ne coule est alors égale au quotient de l'aire du disque rouge par l'aire du disque bleu, soit :

$$\frac{\pi\times 90^2}{\pi\times 200^2}=\frac{8\,100}{40\,000}=0{,}2025.$$



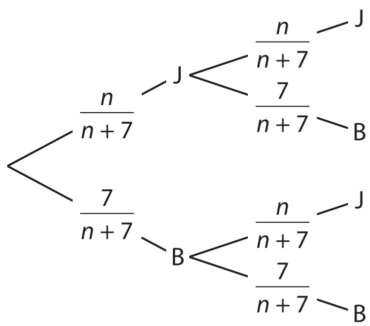
16. En route vers la Seconde

85 **a. b. c.** *Cf. fichier tableur à télécharger.*
d. On peut estimer la probabilité d'obtention d'un triangle grâce à la fréquence observée : 0,526.

86 **1. a.** Le sac contient $n + 7$ balles, dont 7 blanches. La probabilité de tirer une balle blanche dans le sac est donc $\frac{7}{n+7}$.
b. Steeve affirme que $\frac{7}{n+7}=\frac{2}{5}$.
En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient :

$$2(n+7)=35.$$

Mais 35 est un nombre impair et $2(n+7)$ est un nombre pair. Donc ceci est impossible. Steeve se trompe.
2. a.



b. Les issues (J ; B) et (B ; J) réalisent l'événement « Prendre deux balles de couleurs différentes ».

Alors la probabilité que Sarah prenne deux balles de couleurs différentes est :

$$\frac{n}{n+7}\times\frac{7}{n+7}+\frac{7}{n+7}\times\frac{\mathrm{n}}{n+7}=\frac{14n}{(n+7)^2}\ .$$

c. D'après la copie d'écran du logiciel Xcas, l'équation $\frac{14n}{(n+7)^2}=\frac{4}{9}$ possède deux solutions $\frac{7}{2}$ et 14.

Mais n est le nombre de balles jaunes du sac, donc n est un nombre entier.

Donc le sac contient 14 balles jaunes.

CHAPITRE 3

Nombres entiers et rationnels

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Les élèves rencontrent tout au long de leur scolarité divers types de nombres et apprennent à les utiliser pour effectuer des calculs (exacts ou approchés) sous différentes formes (calcul mental, à la main et à la machine) et pour résoudre des problèmes.

En 6^e, le travail initié à l'école primaire se poursuit sur les nombres entiers et décimaux. Les élèves sont entraînés à écrire un nombre décimal sous diverses écritures. Une première approche des nombres rationnels est faite. Ce travail est poursuivi **en 5^e** avec l'introduction des techniques opératoires sur l'addition et la soustraction de nombres en écritures fractionnaires. Les élèves découvrent et étudient aussi les nombres relatifs. L'addition et la soustraction de ces nouveaux nombres sont abordées.

En 4^e, les connaissances des élèves sur les nombres relatifs et les nombres en écriture fractionnaire se complètent avec la découverte de nouvelles opérations. Les élèves doivent ainsi développer des capacités à mener des calculs sous différentes formes en choisissant l'écriture la plus appropriée d'un nombre suivant la situation.

2. Divisibilité

Les deux activités proposées sous forme de deux problèmes concrets permettent de faire le point des connaissances sur les nombres entiers et la notion de division euclidienne.

L'activité 1 fait référence au système sexagésimal avec les heures. On pourra ainsi rappeler les différences avec le système décimal.

L'activité 2 fait appel à la notion de diviseurs d'un nombre entier. Une méthode est proposée pour donner la liste des diviseurs. Cette activité permet aussi de rappeler les critères de divisibilité qui seront utiles dans la suite du chapitre. Si les élèves rencontrent des difficultés à visualiser les rangées de pièces, on pourra les inciter à faire des essais pour obtenir toutes les dispositions.

3. Diviseurs communs à deux nombres entiers

Les deux activités introduisent progressivement la notion de plus grand commun diviseur à deux nombres entiers.

Dans **l'activité 3**, les élèves abordent un exemple de composition de bouquets soumis à deux contraintes. Les questions détaillent la démarche pour faire apparaître la nécessité de connaître le plus grand commun diviseur.

Pour cela les élèves recherchent tous les diviseurs de 84 et 48 puis doivent repérer le PGCD de 84 et 48 pour déterminer le nombre de bouquets et leur composition.

L'activité 4, permet de vérifier la compréhension des élèves sur la détermination du PGCD de deux entiers sur des exemples simples.

De plus, les nombres premiers entre eux pourront être définis aux élèves dans le cas où le PGCD est 1. On pourra faire émerger l'idée que les critères de divisibilité peuvent aider à déterminer si des nombres ne sont pas premiers entre eux.

4. Fractions irréductibles

Avant d'aborder la simplification de fractions, nous proposons des résolutions de problèmes dans **l'activité 5** faisant appel aux nombres rationnels et aux techniques opératoires sur ces nombres. Ces opérations sont encore en cours d'assimilation pour bon nombre d'élèves. Nous en profitons aussi pour introduire une définition du nombre rationnel. Les élèves réinvestissent ainsi les règles de calculs vues dans les classes précédentes.

L'activité 6 aborde la notion de fraction irréductible en détaillant une démarche possible pour la calculer. Les questions **a.** et **b.** rappellent la méthode pour simplifier une fraction avec les critères de divisibilité. Mais la recherche des diviseurs avec les critères de divisibilité a ses limites. En effet, pour des numérateurs et des dénominateurs plus grands, la méthode sera fastidieuse. C'est pourquoi l'exemple de Gaël à la question **c.** présente une méthode dans laquelle on fait apparaître le plus grand commun diviseur au numérateur et au dénominateur. Les élèves doivent ainsi reconnaître ce nombre en écrivant la liste des diviseurs des deux nombres. Mais cette méthode présente des limites que l'on rencontre à la question **d.** En effet, il peut sembler très long d'écrire tous les diviseurs d'un nombre entier quand ce nombre est grand.

5. Algorithmes de calculs du PGCD

Les activités 7 et 8 présentent la méthode de calcul du PGCD de deux nombres à l'aide de l'algorithme des soustractions successives. Après avoir remarqué que le PGCD de deux nombres entiers se ramène à déterminer le PGCD de deux nombres plus petits en calculant leur différence, la méthode est décrite étape par étape. Les élèves doivent repérer le plus grand des deux nombres pour pouvoir effectuer les soustractions et obtenir une suite de nombres entiers positifs. Cette activité permet de présenter la notion d'algorithme qui sera abordée l'année suivante pour bon nombre d'élèves.

L'activité 9 présente une deuxième méthode pour calculer le PGCD de deux nombres : l'algorithme d'Euclide. Dans le programme, il n'est pas spécifié d'utiliser une méthode précise, c'est pourquoi il nous a semblé pertinent de présenter les deux algorithmes et ainsi de donner la possibilité aux élèves de comparer l'efficacité de leurs calculs. Nous reviendrons sur ces deux algorithmes en utilisant un tableur dans les exercices **67** et **140** de ce chapitre.

6. Les savoir-faire

Trois **exercices résolus** sont proposés. **L'exercice 1** aborde la notion de nombres premiers entre eux. Les élèves disposent ainsi de plusieurs méthodes pour pouvoir répondre à ce type de questions. Suivant les données numériques, une méthode sera privilégiée. En faisant preuve d'esprit critique, les élèves pourront faire le choix de la méthode la plus pertinente.

L'exercice 2 donne un exemple pour rendre une fraction irréductible à l'aide du PGCD. L'utilisation d'un algorithme pour la détermination du PGCD est présentée. Les élèves disposent ainsi d'un modèle de présentation pour ce type de problème. Nous les incitons à vérifier leurs réponses sur la calculatrice ce qui est d'ailleurs exigible au socle commun.

En 3^{e}, les élèves doivent être capables de mener des calculs sur les nombres rationnels en utilisant les priorités opératoires. C'est l'objet de **l'exercice 3**, qui permet aussi de rappeler différentes écritures d'un même nombre.

Les exercices des rubriques **« J'applique »** permettent aux élèves de s'entraîner sur des exercices de base.

L'exercice 12 porte sur l'utilisation de la calculatrice pour contrôler des calculs de PGCD et pour vérifier si une fraction est bien irréductible. C'est l'occasion aussi de revenir sur le calcul sur les fractions avec la calculatrice.

Les deux exercices de la page **Atelier Brevet** permettent de travailler différentes compétences sur les nombres entiers et rationnels.

L'exercice guidé 15 présente une situation classique d'utilisation du PGCD de deux nombres entiers dans un problème issu de la vie courante.

L'exercice guidé 16 est composé de 5 questions du type **Vrai-faux**. Par la diversité des questions, les élèves mettent en œuvre des raisonnements mêlant arithmétique, logique mathématique et connaissance sur les nombres. C'est aussi l'occasion de faire vivre cet exercice sous forme de débat en classe.

7. Compléments

Plusieurs exercices font référence aux compétences du B2I autour du tableur (exercices **67**, **140** et **147**). Nous consacrons certains exercices à la détermination de la nature d'un nombre sans approfondir conformément au programme (exercices **32**, **70**, **73**, **100** et **121**). Ce chapitre sur les nombres permet donc de faire un travail complet à la fois sur les calculs avec nombres en écriture fractionnaire (exercices **73** à **78**, **97**, **100**, **102**) mais aussi sur le langage mathématique (exercices **21**, **40** à **43**). Les élèves doivent aussi justifier leur réponse en faisant preuve ainsi de réflexion et d'initiative comme dans les exercices **25** et **44**. C'est aussi l'occasion de familiariser les élèves aux raisonnements arithmétiques (**ex 24** et **45** par exemple).

Un des objectifs des **exercices d'application** est la maîtrise d'une méthode au choix pour calculer le PGCD de deux nombres entiers. Les élèves doivent être aussi capables de rendre une fraction irréductible. Les élèves sont invités à utiliser régulièrement la calculatrice pour vérifier leurs calculs (comme dans les exercices **61 à 64**). En effet, dans le cadre du socle commun, les élèves doivent être capables de rendre irréductible une fraction avec cet outil. (exercices **34** et **35**)

Plusieurs situations autour de la résolution de problème de la vie courante sont proposées aux élèves (exercices **55**, **68**, **69**, **82**, **85**, **87**, **103**, **125** à **128**). Cela permet ainsi de donner du sens aux calculs effectués et d'éveiller l'intérêt des élèves pour des situations dans lesquelles il n'est pas question de PGCD a priori.

De nombreux exercices de ce chapitre permettent de travailler des compétences du socle. A la fois ceux avec le logo socle mais aussi ceux situés dans la partie **Présenter, argumenter, communiquer**.

Dans les **Exercices d'approfondissement**, les élèves doivent mettre en œuvre des raisonnements plus élaborés, en faisant des essais, en expliquant leur démarche. L'exercice **137** propose une démonstration de l'algorithme des soustractions successives. L'exercice **138** aborde un problème historique qui apporte ainsi un nouvel éclairage sur la notion de PGCD. Comme dans les autres chapitres, un exercice en anglais est proposé (exercice **139**).

Dans l'**exercice 142 (tâche complexe)**, les élèves auront à travailler sur l'optimisation d'une production. Il leur faudra mettre en œuvre une démarche pour résoudre la situation-problème proposée. Ils devront extraire des informations de plusieurs documents en repérant celles qui peuvent être utilisées telles quelles et celles qui nécessitent un traitement.

Pour faciliter la transition vers le lycée, un exercice avec le logiciel Xcas est proposé dans la rubrique **En route vers la seconde**.

Cela peut être ainsi l'occasion de présenter aux élèves d'autres outils aussi utiles que la calculatrice pour calculer un PGCD. Tableurs, calculatrices et logiciels de calcul formel peuvent donc être exploités avec les élèves.

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

On effectue la somme de tous les chiffres.

$24 + 4\,984\,704\,677 = 4\,984\,704\,701$

Et $4\,984\,704\,701 = 553856077 \times 9 + 8$ donc le reste est 8.
Ce nombre est bien valide.

• Devinette

Le nombre de minéraux est un nombre compris entre 70 et 100.

Quand je regroupe par 5 il ne m'en reste aucun donc ce nombre est un multiple de 5. On a donc le choix entre 70, 75, 80, 85, 90, 95 et 100.

De plus, ce *nombre –1* est divisible par 2, par 3 et par 4.

Donc, le *nombre –1* est un multiple de 2, de 3 et de 4 c'est donc un multiple de 12.

À l'aide des nombres possibles cités précédemment :

70 – 1 = 69 or 69 n'est pas un multiple de 12.

75 – 1 = 74 or 74 n'est pas un multiple de 12.

80 – 1 = 79 or 79 n'est pas un multiple de 12.

85 – 1 = 84 or 84 est un multiple de 12.

90 – 1 = 89 or 89 n'est pas un multiple de 12.

95 – 1 = 94 or 94 n'est pas un multiple de 12.

100 – 1 = 99 or 99 n'est pas un multiple de 12.

Donc le nombre de minéraux est 85.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : b.

Dividende = diviseur × quotient + reste et reste < diviseur.

2 Bonne réponse : a.

La somme des chiffres du nombre doit être un multiple de 3.

3 Bonne réponse : b.

$45 = 3 \times 15$ et le quotient doit être entier.

4 Bonne réponse : a.

La division décimale de 3 par 5 tombe juste

$$\begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ \cline{2-2} 30 & 0,6 \\ 0 & \end{array}$$

5 Bonne réponse : c.

En effet : $\dfrac{22}{32} = \dfrac{2 \times 11}{2 \times 16} = \dfrac{11}{16}$

6 Bonne réponse : b.

$\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{12} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{11}{12}$

7 Bonne réponse : a.

$\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{2}{5}$

3. Calcul mental

8 **a.** quotient 10 et reste 1 **b.** quotient 13 et reste 0
c. quotient 10 et reste 4 **d.** quotient 17 et reste 5

9 **a.** 13 n'est pas divisible par 2, par 3, par 4, par 5, par 9.

b. 84 est divisible par 2, par 3 et par 4.

c. 50 est divisible par 2 et par 5.

d. 3 380 est divisible par 2, par 4 et par 5.

e. 82 035 est divisible par 3, par 5 et par 9.

10 • $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

• $1 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{11}{6}$

• $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{2 \times 5}{3 \times 3 \times 2} = \dfrac{5}{9}$

• $4 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

• $\dfrac{23}{12} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{23}{12} + \dfrac{4}{12} - \dfrac{3}{12} = \dfrac{24}{12} = 2$

4. Activités

Divisibilité

1 Connaître les unités de temps

10 000 : 3 600 = 2 reste 2 800

et 2800 : 60 = 46 reste 40

24 h – 2 h 46 min 40 s = 21 h 13 min 20 s

Il est donc 21 h 13 min 20 s.

2 Chercher diverses dispositions

a. Avec 72 pièces, Lucile ne peut pas disposer 5 pièces par rangées toutes identiques car 72 n'est pas divisible par 5. Comme 72 est divisible par 4, Lucile peut réaliser 18 rangées de 4 pièces chacune.

b. « Le nombre de pièces sur chaque rangée est **un diviseur** de 72 »

c. On cherche les diviseurs de 72 :

$72 = 1 \times 72$; $72 = 2 \times 36$; $72 = 3 \times 24$;

$72 = 4 \times 18$; $72 = 6 \times 12$; $72 = 8 \times 9$

On peut donc disposer 72 pièces en

– 1 rangée de 72 pièces ;
– 2 rangées de 36 pièces ;
– 3 rangées de 24 pièces ;
– 4 rangées de 18 pièces ;
– 6 rangées de 12 pièces ;
– 8 rangées de 9 pièces ;
– 9 rangées de 8 pièces ;
– 12 rangées de 6 pièces ;
– 18 rangées de 4 pièces ;
– 24 rangées de 3 pièces ;
– 36 rangées de 2 pièces et 72 rangées de 1 pièce.

Diviseurs communs à deux nombres entiers

3 Écrire une liste de diviseurs

a. Mme Champ avec 84 marguerites et 48 roses ne peut pas faire 7 bouquets identiques car 48 n'est pas divisible par 7. Elle pourra faire 3 bouquets identiques car 3 est un diviseur de 84 et 48.

$$84 : 3 = 28 \text{ et } 48 : 3 = 16$$

Chaque bouquet sera composé de 28 marguerites et de 16 roses.

b. Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Les diviseurs de 84 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

c. Le nombre de bouquets identiques est un diviseur commun à 48 et 84.

Les diviseurs communs à 48 et 84 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Mme Champ pourra donc faire 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 bouquets tous identiques en utilisant toutes les fleurs.

d. Le nombre maximal de bouquets qu'elle pourra réaliser est 12 bouquets.

$$84 : 12 = 7 \text{ et } 48 : 12 = 4.$$

Chaque bouquet sera composé de 7 marguerites et 4 roses.

4 Déterminer un PGCD

a. PGCD (19 ; 19) = 19 **b.** PGCD (2 ; 5) = 1

c. PGCD (24 ; 56) = 8 **d.** PGCD (25 ; 100) = 25

e. PGCD (12 ; 25) = 1 **f.** PGCD (30 ; 40) = 10

Fractions irréductibles

5 Résoudre trois problèmes

a. $1-\frac{12}{27}=\frac{27}{27}-\frac{12}{27}=\frac{15}{27}=\frac{3\times5}{3\times9}=\frac{5}{9}.$

Après avoir utilisé ses rollers, il reste $\frac{5}{9}$ du trajet à parcourir.

$\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{27}$. Elle parcourt $\frac{5}{27}$ du trajet en marchant.

$1-\frac{12}{27}-\frac{5}{27}=\frac{27-12-5}{27}=\frac{10}{27}$

Elle a couru sur $\frac{10}{27}$ du trajet.

b. $\frac{7}{8}\times\left(1-\frac{3}{7}\right)=\frac{7}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Le cadet reçoit la moitié des timbres du grand-père.

$$\begin{aligned}1-\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\right)&=1-\left(\frac{6}{14}+\frac{7}{14}\right)\\&=1-\frac{13}{14}\\&=\frac{14}{14}-\frac{13}{14}\\&=\frac{1}{14}\end{aligned}$$

Le troisième enfant reçoit $\frac{1}{14}$ de la collection de timbres.

c. Les $\frac{3}{4}$ des économies de Karim représentent 45 €.

$\frac{3}{4}\times ? = 45$ donc $45\times\frac{4}{3}=60$

Donc ses économies s'élevaient à 60 €.

6 Rendre une fraction irréductible

a. $\frac{42}{36}=\frac{21}{18}=\frac{7}{6}$. Comme PGCD (7 ; 6) = 1 alors les nombres 7 et 6 sont premiers entre eux. La fraction $\frac{7}{6}$ est bien irréductible.

On peut diviser 42 et 36 par 6 pour obtenir directement la fraction irréductible. 6 est le PGCD de 42 et 36.

b. • 60 et 40 sont divisibles par 10.

$$\frac{10\times6}{10\times4}=\frac{6}{4}=\frac{3\times2}{2\times2}=\frac{3}{2}$$

Comme PGCD (3 ; 2) = 1, alors 3 et 2 sont des nombres premiers entre eux. Donc $\frac{3}{2}$ est une fraction irréductible.

- 126 et 198 sont divisibles par 9.

$$\frac{126}{198}=\frac{9\times14}{9\times22}=\frac{14}{22}=\frac{2\times7}{2\times11}=\frac{7}{11}$$

Comme PGCD (7 ; 11) = 1, alors 7 et 11 sont des nombres premiers entre eux. Donc $\frac{7}{11}$ est une fraction irréductible.

- 105 et 90 sont divisibles par 5.

$$\frac{105}{90}=\frac{5\times21}{5\times18}=\frac{21}{18}=\frac{3\times7}{3\times6}=\frac{7}{6}$$

et PGCD (7 ; 6) = 1

c. Pour rendre irréductible $\frac{540}{702}$ en une seule étape, Gaël a divisé le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Les diviseurs de 540 sont : 1, 2, 3, 4,5, 6, 9, 10, 12, 15,18, 20, 27,30, 36, 45, 54, 60, 90,108, 135, 180, 270, 540.

Les diviseurs de 702 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 13, 18, 26, 27,39, 54,78, 117, 234, 351, 702.

Les diviseurs communs à 540 et 702 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54. Donc le PGCD de 540 et 702 est bien 54.

d. Pour rendre irréductible la fraction $\frac{1976}{1144}$ on cherche le PGCD de 1976 et 1144. Les diviseurs de 1976 sont 1, 2, 4, 8, 13, 19, 26, 38, 52, 76, 104, 152, 247,494, 988,1976.

Les diviseurs de 1 144 sont 1,2, 4, 8, 11, 13, 22, 26, 44, 52, 88, 104, 143,286, 572, 1 144.

Les diviseurs communs à 1976 et 1144 sont 1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104. Le PGCD de 1976 et 1144 est 104.

$$\frac{1976}{1144}=\frac{104\times19}{104\times11}=\frac{19}{11}$$

Algorithmes de calcul du PGCD

7 Comparer deux PGCD

- $a = 18$ et $b = 12$

Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

18 – 12 = 6

Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6.

PGCD (18 ; 12) = 6 et PGCD (12 ; 6) = 6.

- $a = 25$ et $b = 22$

Les diviseurs de 25 sont 1, 5 et 25.

Les diviseurs de 22 sont 1, 2, 11 et 22.

25 – 22 = 3

Les diviseurs de 25 – 22 = 3 sont 1et 3.

PGCD (25 ; 22) = 1 et PGCD (22 ; 3) = 1.

- $a = 45$ et $b = 9$

Les diviseurs de 45 sont 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

Les diviseurs de 9 sont 1, 3, 9.

45 – 9 = 36

Les diviseurs de 45 – 9 = 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

PGCD(45 ; 9) = 9 et PGCD(9 ; 36) = 9.
Donc on vérifie bien lorsque $a > b$ que :
PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a – b).

8 Découvrir l'algorithme des soustractions successives

a. Étape 1 : 14 964 – 11 223 = **3 741** donc :
PGCD (14 964 ; 11 223) = PGCD (11 223 ; **3 741**).
Étape 2 : 11 223 – 3 741 = **7 482** donc :
PGCD (11 223 ; 3 741) = PGCD (**7 482** ; 3 741).
Étape 3 : 7 482 – 3 741 = **3 741** donc :
PGCD (7 482 ; 3 741) = PGCD (3 741 ; **3 741**).
Étape 4 : 3 741 – 3 741 = 0.
b. Donc PGCD (14 964 ; 11 223) = PGCD (3 741 ; 3 741)
= 3 741.

9 Découvrir l'algorithme d'Euclide

a. Sur le tableau 1, on peut lire PGCD (224 ; 64) = 32.
b. 224 – 64 = 160 ; 160 – 64 = 96 et 96 – 64 = 32
donc 224 – 64 -64 – 64 = 32.
Donc 224 = 3 × 64 + 32.
« 32 est le **reste** dans la division euclidienne de **224** par **64** ».
La ligne violette du tableau 2 a été complétée à l'aide du dividende, du diviseur et du reste de la division euclidienne de 224 par 64.
c. La ligne bleue du tableau 2 a été complétée à l'aide de la division euclidienne de 64 par 32. 64 = 2 × 32 + 0.
d. PGCD (224 ; 64) = PGCD (64 ; 32) = 32.
C'est le dernier reste non nul.

5. J'applique

4 a. Les diviseurs de 55 sont : 1 ; 5 ; 11 ; 55.
Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Le seul diviseur commun à 55 et 12 est 1 donc 55 et 12 sont des nombres premiers entre eux.
b. Les nombres 24 et 50 sont pairs, donc 2 est un diviseur commun à 24 et 50. Donc 24 et 50 ne sont pas premiers entre eux.
c. Les diviseurs de 350 sont :
1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 25 ; 35, 50, 70,175, 350.
Les diviseurs de 121 sont : 1 ; 11 ; 121.
Le seul diviseur commun à 350 et 121 est 1 donc 350 et 121 sont des nombres premiers entre eux.

5 a. Les diviseurs de 27 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 27.
Les diviseurs de 65 sont : 1 ; 5 ; 13 ; 65.
Le seul diviseur commun à 27 et 65 est 1 donc 27 et 65 sont des nombres premiers entre eux.
b. Les nombres 3 282 et 45 sont divisibles par 3 car la somme de leurs chiffres est un multiple de 3. Donc 3 est un diviseur commun à 3 282 et 45. Les nombres 3 282 et 45 ne sont pas premiers entre eux.
c. On peut calculer PGCD (629 ; 5 678) avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
5 678	629	17
629	17	0

PGCD (5 678 ; 629) = 17. Donc 5 678 et 629 ne sont pas des nombres premiers entre eux.

6 Alexia a raison car 850 et 715 sont divisibles par 5 donc ils ne sont pas premiers entre eux.
Marc a raison aussi car 93 = 3 × 31
donc PGCD (93 ; 31) = 31.
Les nombres 31 et 93 ne sont donc pas premiers entre eux.

7

a	b	Différence
238	68	**170**
170	68	102
102	68	34
68	34	34
34	34	0

Donc PGCD (238 ; 68) = 34

8

Dividende	Diviseur	Reste
837	783	54
783	54	27
54	27	0

PGCD (837 ; 783) = 27.
On simplifie la fraction par ce PGCD.

$$\frac{837}{783} = \frac{\cancel{27} \times 31}{\cancel{27} \times 29} = \frac{31}{29}$$

9 Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide

Dividende	Diviseur	Reste
21 150	16 920	4 230
16 920	4 230	0

PGCD (21 150 ; 16 920) = 4 230.
On simplifie la fraction par ce PGCD.

$$\frac{16\,920}{21\,150} = \frac{\cancel{4\,230} \times 4}{\cancel{4\,230} \times 5} = \frac{4}{5}$$

10 a. $A = \frac{7}{3} - \frac{6}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$ et

$$B = \frac{2}{3} + \frac{17}{2} \times \frac{4}{3}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{17 \times 2 \times 2}{2 \times 3}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{34}{3}$$
$$= \frac{36}{3}$$
$$= 12$$

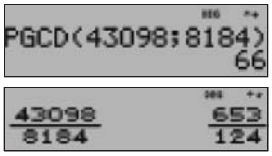
b. A est rationnel et B est un entier qui peut aussi s'écrire sous forme rationnelle donc Paolo a tort.

11 $A = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} \times \frac{9}{4}$

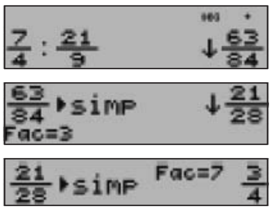
$A = \frac{7}{15} - \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 5 \times 2 \times 2}$

$$A = \frac{7}{15} - \frac{3}{10}$$
$$A = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} - \frac{3 \times 3}{10 \times 3}$$
$$A = \frac{14}{30} - \frac{9}{30}$$
$$A = \frac{5}{30}$$
$$A = \frac{1}{6}$$
$$B = \frac{1}{3} - \frac{4}{15} \times \frac{5}{8}$$
$$B = \frac{1}{3} - \frac{4 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 4}$$
$$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$
$$B = \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$
$B = \frac{1}{6}$ Donc A = B.

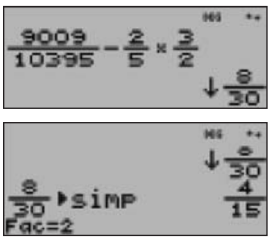
13 Les conclusions sont justes après vérification à la calculatrice.



14 **1. Réponse a.**



2. Réponse c.



6. Atelier Brevet

15 **1.** On calcule le PGCD de 186 et 155, par exemple avec l'algorithme des soustractions.

186 – 155	= 31
155 – 31	= 124
124 – 31	= 93
93 – 31	= 62
62 – 31	= 31
31 – 31	= 0

PGCD (186 ; 155) = 31.

2. a. Le nombre de colis est le PGCD de 186 et 155, soit 31 d'après la question **1**.

b. 186 : 31 = 6 et 155 : 31 = 5

Il y aura 6 pralines et 5 chocolats par colis.

16 **a. Vrai** $\left(\frac{3}{25} = 0{,}12\right)$.

b. Faux (570 et 795 sont divisibles par 5).

c. Vrai On désigne par a et b et deux multiples de 5 ; donc il existe deux entiers k et k' tels que $a = 5k$ et $b = 5k'$.
Alors $a + b = 5(k + k')$ multiple de 5. L'affirmation est vraie.

d. Faux (6 est divisible par 2 et par 3 mais pas par 5).

e. Faux (un diviseur commun à 238 et 425 ne peut pas être pair car 425 n'est pas pair).

7. Exercices à l'oral

Divisibilité

17 **a.** quotient 7 et reste 3 **b.** quotient 8 et reste 7
c. quotient 12 et reste 0 **d.** quotient 0 et reste 3.

18 Dans une division euclidienne :
dividende = diviseur × quotient + reste et reste < diviseur. Or si 256 = 12 × 20 + 16 alors 16 > 12, donc Fanny a tort. En revanche , on peut dire : « Le quotient de la division euclidienne de 256 par 20 est 12 ».

19 **a**. Les diviseurs de 7 sont : 1 ; 7.
b. Les diviseurs de 20 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20.
c. Les diviseurs de 25 sont : 1 ; 5 ; 25.
d. Les diviseurs de 35 sont : 1 ; 5 ; 7 ; 35.
e. Les diviseurs de 36 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.

20 Exemples de réponses
a. Cinq multiples de 8 : 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40.
b. Cinq multiples de 11 : 11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55.
c. Cinq multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60.
d. Cinq multiples de 15 : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75.
e. Cinq multiples de 25 : 25 ; 50 ; 75 ; 100 ; 125.

21 **a**. 75 est un **multiple** de 5.
b. 3 est un **diviseur de** 36.
c. 54 est **divisible par** 9
d. 5 **divise** 250.

22 **a.** 234 est divisible par 2 car il est pair.
b. 55 est divisible par 5 car il se termine par 5.
c. 230 est divisible par 2 car il est pair et par 5 et 10 car il se termine par 0.
d. 333 n'est ni divisible par 2 ni par 5, ni par10.
e. 648 est divisible par 2 car il est pair.

23 **a**. 5 789 n'est pas divisible par 3, ni par 4, ni par 9.
b. 1 000 est divisible par 4 car il se termine par 00.
c. 764 est divisible par 4 car 64 est un multiple de 4.
d. 990 est divisible par 3 et par 9 car la somme de ses chiffres est 18.
e. 1 113 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est 6.

24 12 est un contre-exemple, il est divisible par 3 mais pas par 9. Marine a raison.

25 **a.** 110 et 120 sont divisibles par 2 et par 5.
b. 102, 108, 114 et 120 sont divisibles par 2 et par 3.
c. il n'y a pas de nombres divisibles par 5 et par 9 compris entre 101 et 125.
d. 117 est divisible par 9 mais pas par 2.
e. 104, 112, 116 et 124 sont divisibles par 4 mais pas par 3.

f. 105 est divisible par 3 et par 5 mais pas par 2.

Diviseurs communs à deux nombres entiers

26 Exemples de réponses

a. Un diviseur commun à 12 et 15 est 3.
b. Un diviseur commun à 25 et 50 est 5.
c. Un diviseur commun à 56 et 49 est 7.
d. Un diviseur commun à 42 et 54 est 6.
e. Un diviseur commun à 135 et 732 est 3.
f. Un diviseur commun à 200 et 40 est 10.
g. Un diviseur commun à 54 et 954 est 9.
h. Un diviseur commun à 63 et 77 est 7.

27 **a.** les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.
Donc PGCD (12 ; 18) = 6.
b. les diviseurs de 14 sont 1, 2, 7 et 14.
Les diviseurs de 35 sont 1, 5, 7 et 35.
Donc PGCD (14 ; 35) = 7.
c. Les diviseurs de 17 sont 1 et 17.
Les diviseurs de 34 sont 1, 2, 17 et 34.
Donc PGCD (17 ; 34) = 17.

28 **a**. Les diviseurs communs à 81 et 72 sont 1, 3 et 9.
Donc PGCD (81 ; 72) = 9.
b. Les diviseurs communs à 48 et 36 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
Donc PGCD (48 ; 36) = 12.
c. Le seul diviseur commun à 8 et 15 est 1.
Donc PGCD (8 ; 15) = 1.

29 **a.** PGCD (20 ; 60) = 20 **b**. PGCD (15 ; 35) = 5
c. PGCD (40 ; 24) = 8 **d.** PGCD (25 ; 25) = 25

30 **a.** PGCD (40 ; 63) = 1 donc les nombres 40 et 63 sont premiers entre eux.
b. 32 et 152 sont des nombres pairs donc leur PGCD n'est pas 1, donc les nombres 32 et 152 ne sont pas premiers entre eux.
c. 87 et 27 sont divisibles par 3 donc leur PGCD n'est pas 1, donc les nombres 87 et 27 ne sont pas premiers entre eux.
d. 55 et 110 sont divisibles par 5 donc leur PGCD n'est pas 1, donc les nombres 55 et 110 ne sont pas premiers entre eux.
e. PGCD (1 ; 8) = 1 donc les nombres 1 et 8 sont premiers entre eux.
f. 486 et 1 143 sont divisibles par 9 donc leur PGCD n'est pas 1, donc les nombres 486 et 1 143 ne sont pas premiers entre eux.

31 **a. Faux :** 345 et 670 sont divisibles par 5 donc ils ne sont pas premiers entre eux.
b. Vrai : 27 et 8 n'ont qu'un seul diviseur commun qui est 1 ; donc leur PGCD est 1.
c. Vrai : Les diviseurs communs à 12 et 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12 donc PGCD (12 ; 24) = 12.
d. Faux : PGCD (56 ; 88) = 8

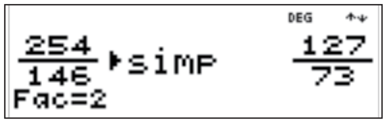
Fractions irréductibles

32 **a.** 3,24 est un nombre décimal.
b. $\frac{5}{4} = 1{,}25$ est un nombre décimal.
c. $\frac{7}{3}$ est un nombre rationnel non décimal.
d. 2π est un nombre irrationnel.
e. $10^{-2} = 0{,}01$ est un nombre décimal.
f. $\frac{42}{7} = 6$ est un nombre entier.

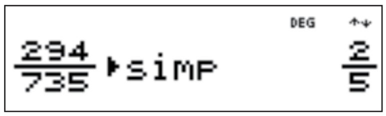
33 **a.** $\frac{35}{55} = \frac{7}{11}$ **b.** $\frac{24}{50} = \frac{12}{25}$ **c.** $= \frac{63}{27} = \frac{7}{3}$
d. $\frac{200}{40} = \frac{5}{1} = 5$ **e.** $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

34 D'après l'écran de la calculatrice :
PGCD (284 ; 436) = 4. On divise le numérateur et le dénominateur par 4.
$$\frac{284}{436} = \frac{\cancel{4} \times 71}{\cancel{4} \times 109} = \frac{71}{109}$$

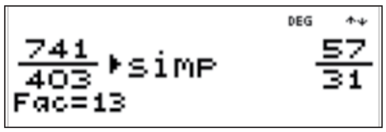
35 **a.** avec simplification « Manuel »



b. avec simplification « Auto »



c. avec simplification « Manuel »



8. Exercices d'application

Divisibilité

36 **a.** quotient 6 et reste 3 **b.** quotient 6 et reste 4
c. quotient 6 et reste 4 **d.** quotient 25 et reste 0

37 $256 = 24 \times 10 + 16$

38 **a.** $942 = 58 \times 16 + 14$ et le reste doit être inférieur au diviseur.
$14 < 16$ donc le diviseur est 16, le quotient est 58 et le reste 14.
$14 < 58$ donc le diviseur est 58, le quotient est 16 et le reste est 14.
b. $362 = 10 \times 35 + 12$ et le reste doit être inférieur au diviseur.
$12 < 35$ donc le diviseur est 35, le quotient est 10 et le reste 12.

39 On recherche un nombre inférieur à 8 000. On peut éliminer 9 555.
On cherche un nombre non multiple de 2. On peut éliminer 5 664 et 6 270.

On cherche un nombre multiple de 3. On peut éliminer 3 335, 553, 3 125 et 2 045.

Il reste 1 785 qui est aussi multiple de 5.

40 **a.** 8 est un **multiple** de 4.

b. 6 est un **multiple** de 3.

c. 20 est un **multiple** de 1.

d. 10 est un **multiple** de 2.

41 **a.** 5 est un **diviseur** de 15.

b. 24 est un **diviseur** de 24.

c. 13 est un **diviseur** de 143.

d. 7 est un **diviseu**r de 21.

42 **a.** $132 = 11 \times 12$ **b.** $252 = 36 \times 7$

c. $25\,035 = 5\,007 \times 5$ **d.** $117 = 9 \times 13$

43 Exemples de réponses

a. $135 = 15 \times 9$

15 est un **diviseur** de 135, 135 est **divisible par** 9 et 135 est un **multiple** de 15.

b. $\frac{891}{3} = 297$

3 est un **diviseur** de 891, 891 est **divisible par** 3 et 891 est **un multiple** de 297.

c. $569 \times 18 = 10\,242$

18 est un **diviseur** de 10 242, 10 242 est **divisible par** 569 et 10 242 est un **multiple** de 18.

44 Le nombre cherché est 1 440.

45 Le plus petit entier divisible par tous les entiers inférieurs à 10 est donc un multiple de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Les nombres multiples de 9 sont aussi multiples de 3, les nombres multiples de 8 sont aussi multiples de 2 et de 4.

Les nombres multiples de 8 et de 9 sont aussi multiples de 6.

Donc il suffit de calculer $5 \times 7 \times 8 \times 9 = 2\,520$.

46 **a. Faux** 2 623 n'est pas divisible par 3 car :

$$2 + 6 + 2 + 3 = 13.$$

b. Vrai 8 984 est divisible par 4 car 84 est un multiple de 4.

c. Faux 47 830 est divisible par 2 et par 10 mais pas par 4.

d. Vrai 8 910 est divisible par 9 car $8 + 9 + 1 + 0 = 18$ et son chiffre des unités est 0.

Diviseurs communs à deux nombres entiers

47 **a.** Les diviseurs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Les diviseurs communs à 64 et 24 sont 1, 2, 4 et 8.

b. Les diviseurs de 27 sont 1, 3, 9 et 27.

Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18 et 36.

Les diviseurs communs à 27 et 36 sont 1, 3 et 9.

c. Les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

Les diviseurs de 77 sont 1, 7, 11 et 77.

Le diviseur commun à 48 et 77 est 1.

d. Les diviseurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100.

Les diviseurs de 75 sont 1, 3, 5, 15, 25 et 75.

Les diviseurs communs à 100 et 75 sont 1, 5 et 25.

48 **a.** Les diviseurs de 65 sont 1, 5, 13 et 65.

Les diviseurs de 39 sont 1, 3, 13 et 39.

Donc PGCD (65 ; 39) = 13.

b. Les diviseurs de 49 sont 1, 7 et 49.

Les diviseurs de 80 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 et 80.

Donc PGCD (49 ; 80) = 1.

c. Les diviseurs de 144 sont 1, 2, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 77 et 144.

Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

Donc PGCD (144 ; 36) = 36.

d. Les diviseurs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.

Les diviseurs de 96 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 et 96. Donc PGCD (60 ; 96) = 12.

49 **a.** PGCD (13 ; 90) = 1 **b.** PGCD (24 ; 60) = 12

c. PGCD (70 ; 42) = 14 **d.** PGCD (180 ; 360) = 180.

50 Les diviseurs de 100 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 50 et 100.

Les diviseurs de 125 sont : 1 ; 5 ; 25 et 125.

Les diviseurs de 200 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 25 ; 40 ; 50 ; 100 et 200.

Les diviseurs de 225 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 25 ; 45 ; 75 et 225.

PGCD (100 ; 225) = 25

PGCD (125 ; 200) = 25

PGCD (125 ; 225) = 25

Donc Inès et Théo ont raison.

51 **a.** les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Les diviseurs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

b. Les diviseurs communs à 24 et 84 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Donc PGCD (24 ; 84) = 12.

c. les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. On remarque que les diviseurs de 12 sont aussi les diviseurs communs à 24 et 84.

52 Le nombre non colorié est 9.

3 *R*	18 *J*	12 *R*	2 *RN*
6 *R*	9	5 *VN*	10 *N*
11 *B*	4 *R*	50 *N*	1 *VRN*

(V pour vert ; R pour rouge ; J pour jaune ; B pour bleu ; N pour noir)

53 13 160 : 235 = 56 reste 0.

Donc PGCD (13 160 ; 235) = 56.

Donc PGCD (13 160 ; 56) = 235.

54 **a**. 14 ne peut pas être le PGCD de 140 et 314 car 14 ne divise pas 314 (mais il divise 140).

b. 3 ne peut pas être le PGCD de 42 et 480 car c'est bien un diviseur commun à 42 et à 480 mais ce n'est pas le plus grand car 42 et 480 sont aussi divisibles par 2.

55 **a.** Il y a 30 filles et 20 garçons donc le nombre d'équipes est un diviseur commun à 30 et à 20. Il ne peut pas y avoir 3 ou 4 équipes. 5 est un diviseur commun à 30 et à 20 donc les élèves peuvent être répartis par équipes de 5.

b. Pour réaliser le plus grand nombre d'équipes toutes identiques, le nombre d'équipes est le PGCD de 30 et 20. Le professeur pourra faire 10 équipes de 3 filles et 2 garçons chacune.

56 **a.** 124 et 26 sont des nombres pairs, donc ils sont divisibles par 2, ils ne sont donc pas premiers entre eux.

b. 369 et 54 sont divisibles par 9 donc ils ne sont pas premiers entre eux.

c. 483 et 57 sont divisibles par 3 donc ils ne sont pas premiers entre eux.

d. 25 et 95 sont divisibles par 5 donc ils ne sont pas premiers entre eux.

57 154 et 3 780 sont des nombres pairs donc leur PGCD est un nombre qui sera divisible par 2. Ce n'est donc pas 7. Liliane a tort.

58 **a.** Calcul du PGCD de 2 210 et 2 353 avec l'algorithme des soustractions successives :

2 353 – 2 210 = 143
2 210 – 143 = 2 067
2 067 – 143 = 1 924
1 924 – 143 = 1 781
1 781 – 143 = 1 638
1 638 – 143 = 1 495
1 495 – 143 = 1 352
1 352 – 143 = 1 209
1 209 – 143 = 1 066
1 066 – 143 = 923
923 – 143 = 780
780 – 143 = 637
637 – 143 = 494
494 – 143 = 351
351 – 143 = 208
208 – 143 = 65
143 – 65 = 78
78 – 65 = 13
65 – 13 = 52
52 – 13 = 39
39 – 13 = 26
26 – 13 = 13
13 – 13 = 0.

Donc PGCD (2 353 ; 2 210) = 13.

b. Calcul du PGCD de 472 et 177 avec l'algorithme des soustractions successives.

472 – 177 = 295
295 – 177 = 118
177 – 118 = 59
118 – 59 = 59
59 – 59 = 0.

Donc PGCD (472 ; 177) = 59.

c. Calcul du PGCD de 657 et 527 avec l'algorithme des soustractions successives :

657 – 527 = 130
527 – 130 = 397
397 – 130 = 267
267 – 130 = 137
137 – 130 = 7
130 – 7 = 123
123 – 7 = 116
etc. jusqu'à :
11 – 7 = 4
7 – 4 = 3
4 – 3 = 1
3 – 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0.

Donc PGCD (527 ; 657) = 1.

59 **a.** 203 - 87 = 116
116 – 87 = 29

b. 203 - 87 = 116
116 – 87 = 29
87 – 29 = 58
58 – 29 = 29
29 – 29 = 0.

Donc PGCD (203 ; 87) = 29

60 **a.** Calcul du PGCD de 20 153 et de 11 516 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
20 153	11 516	8 637
11 516	8 637	2 879
8 637	2 879	0

Donc PGCD (20153 ; 11516) = 2 879.

b. Calcul du PGCD de 425 et de 1 050 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
1 050	425	200
425	200	25
200	25	0

Donc PGCD (1050 ; 425) = 25.

c. Calcul du PGCD de 1 429 et de 976 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
1 429	976	453
976	453	70
453	70	33
70	33	4
33	4	1
4	1	0

Donc PGCD (1 429 ; 976) = 1.

61 PGCD (24 ; 60) = 12 (mentalement)

62 Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
5 678	629	17
629	17	0

Donc PGCD (5 678 ; 629) = 17.

63 Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
1 288	575	138
575	138	23
138	23	0

Donc PGCD (1 288 ; 575) = 23.

64 Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
696	552	144
552	144	120
144	120	24
120	24	0

Donc PGCD (552 ; 696) = 24.

65 **a.** Calcul du PGCD avec l'algorithme des soustractions successives.

185 – 133 = 52	11 – 6 = 5
133 – 52 = 81	6 – 5 = 1
81 – 52 = 29	5 – 1 = 4
52 – 29 = 23	4 – 1 = 3
29 – 23 = 6	3 – 1 = 2
23 – 6 = 17	2 – 1 = 1
17 – 6 = 11	1 – 1 = 0.

Donc PGCD (133 ; 185) = 1.

Les nombres 133 et 185 sont premiers entre eux.

b. Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
1 520	263	205
263	205	58
205	58	31
58	31	27
31	27	4
27	4	3
4	3	1
3	1	0

Donc PGCD (1 520 ; 263) = 1.

Les nombres 1 520 et 263 sont premiers entre eux.

66 **a.** Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
118 404	13 884	7 332
13 884	7 332	6 552
7 332	6 552	780
6 552	780	312
780	312	156
312	156	0

Donc PGCD (118 404 ; 13 884) = 156.

b. $\frac{118404}{156} = 759$ et $\frac{13884}{156} = 89$.

Calcul du PGCD de 759 et de 89 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
759	89	47
89	47	42
47	42	5
42	5	2
5	2	1
2	1	0

Donc PGCD (759 ; 89) = 1.

Les nombres 759 et 89 sont bien premiers entre eux.

67 **1. a.**

	A	B	C
1	a	b	a-b
2	2829684	1918722	910962
3	1918722	910962	1007760
4	1007760	910962	96798
5	910962	96798	814164
6	814164	96798	717366
7	717366	96798	620568
8	620568	96798	523770
9	523770	96798	426972
10	426972	96798	330174
11	330174	96798	233376
12	233376	96798	136578
13	136578	96798	39780
14	96798	39780	57018
15	57018	39780	17238
16	39780	17238	22542
17	22542	17238	5304
18	17238	5304	11934
19	11934	5304	6630
20	6630	5304	1326
21	5304	1326	3978
22	3978	1326	2652
23	2652	1326	1326
24	1326	1326	0

b. Dans la cellule C2 on entre = A2-B2

d. Dans la cellule B3 on écrit

= SI (B2 > C2 ; C2 ; B2)

e. On obtient PGCD (2 829 684 ; 1 918 711) = 1 326.

2. a. PGCD (37 352 ; 5 768) = 56.

	A	B	C
1	a	b	a-b
2	37352	5768	31584
3	31584	5768	25816
4	25816	5768	20048
5	20048	5768	14280
6	14280	5768	8512
7	8512	5768	2744
8	5768	2744	3024
9	3024	2744	280
10	2744	280	2464
11	2464	280	2184
12	2184	280	1904
13	1904	280	1624
14	1624	280	1344
15	1344	280	1064
16	1064	280	784
17	784	280	504
18	504	280	224
19	280	224	56
20	224	56	168
21	168	56	112
22	112	56	56
23	56	56	0

b. PGCD (4 898 ; 2 295) = 1.

	A	B	C
1	a	b	a-b
2	4898	2295	2603
3	2603	2295	308
4	2295	308	1987
5	1987	308	1679
6	1679	308	1371
7	1371	308	1063
8	1063	308	755
9	755	308	447
10	447	308	139
11	308	139	169
12	169	139	30
13	139	30	109
14	109	30	79
15	79	30	49
16	49	30	19
17	30	19	11
18	19	11	8
19	11	8	3
20	8	3	5
21	5	3	2
22	3	2	1
23	2	1	1
24	1	1	0

68 **1.** Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
1 394	255	119
255	119	17
119	17	0

Donc PGCD (1 394 ; 255) = 17.

2. a. L'artisan veut réaliser des colliers tous identiques en utilisant toutes ses graines donc le nombre de colliers est le PGCD de 1 394 et 255. D'après la question **1,** il pourra réaliser au maximum 17 colliers.

b. 1 394 : 17 = 82 et 255 : 17 = 15. Chaque collier contient 82 graines d'açaï et 15 graines de palmier pêche.

69 **a.** Calcul du PGCD avec l'algorithme des soustractions successives.

258 – 210 = 48	48 – 18 = 30
210 – 48 = 162	30 – 18 = 12
162 – 48 = 114	18 – 12 = 6
114 – 48 = 66	12 – 6 = 6
66 – 48 = 18	6 – 6 = 0

Donc PGCD (258 ; 210) = 6.

b. La toile doit contenir des carrés tous identiques les plus grands possibles, la longueur du côté d'un motif carré est donc le PGCD de 258 et 210. La longueur du côté d'un carré est donc 6 cm.

c. 258 : 6 = 43 et 210 : 6 = 35.

$43 \times 35 = 1\,505$

Il pourra peindre 1 505 motifs carrés.

Fractions irréductibles

70 Anaïs a tort car $\frac{257}{123}$ n'admet pas d'écriture décimale.

Nils a raison car : $\frac{4}{3} : \frac{2}{9} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{3 \times 2} = 6$ et 6 est un nombre entier.

Paul a raison car : $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$ et $\frac{7}{6}$ est un nombre rationnel.

71 **a.** 12 et 48 sont des nombres pairs donc ils ne sont pas premiers entre eux donc $\frac{12}{48}$ n'est pas irréductible.

$$\frac{12}{48} = \frac{12 \times 1}{12 \times 4} = \frac{1}{4}$$

b. 300 et 21 sont divisibles par 3 donc $\frac{300}{21}$ n'est pas irréductible. $\frac{300}{21} = \frac{3 \times 100}{3 \times 7} = \frac{100}{7}$.

c. 810 et 69 sont divisibles par 3 donc ils ne sont pas premiers entre eux donc $\frac{810}{69}$ n'est pas irréductible.

$$\frac{810}{69} = \frac{3 \times 270}{3 \times 23} = \frac{270}{23}$$

d. 630 et 900 sont divisibles par 10 donc $\frac{630}{900}$ n'est pas irréductible. $\frac{630}{900} = \frac{10 \times 63}{10 \times 90} = \frac{63}{90} = \frac{9 \times 7}{9 \times 10} = \frac{7}{10}$

e. 84 et 126 sont pairs donc $\frac{84}{126}$ n'est pas irréductible.

$\frac{84}{126}=\frac{2\times 42}{2\times 63}=\frac{42}{63}=\frac{6\times 7}{9\times 7}=\frac{6}{9}=\frac{2\times 3}{3\times 3}=\frac{2}{3}$

f. 90 et 270 sont divisibles par 10 donc $\frac{90}{270}$ n'est pas irréductible. $\frac{90}{270}=\frac{9\times 10}{27\times 10}=\frac{9}{27}=\frac{9\times 1}{9\times 3}=\frac{1}{3}$.

72 **a**. Format du rectangle 1 : $\frac{32}{18}=\frac{2\times 16}{2\times 9}=\frac{16}{9}$

Format du rectangle 2 : $\frac{36}{27}=\frac{9\times 4}{9\times 3}=\frac{4}{3}$

Format du rectangle 3 : $\frac{60}{45}=\frac{15\times 4}{15\times 3}=\frac{4}{3}$

Format du rectangle 4 : $\frac{80}{45}=\frac{5\times 16}{5\times 9}=\frac{16}{9}$

Format du rectangle 5 : $\frac{128}{72}=\frac{8\times 16}{8\times 9}=\frac{16}{9}$

b. La longueur L vérifie $\frac{L}{54}=\frac{16}{9}$

donc $L=\frac{16}{9}\times 54=\frac{16\times 6\times 9}{9}=96$

La longueur du rectangle est 96 mm.

73 $x=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{15}{8}$; $y=\frac{6}{5}-\frac{7}{14}:\frac{5}{7}$; $z=\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{4}\right):\frac{3}{8}$

$x=\frac{3}{4}-\frac{2\times 3\times 5}{3\times 2\times 4}$; $y=\frac{6}{5}-\frac{7}{14}\times\frac{7}{5}$; $z=\left(\frac{10}{4}-\frac{7}{4}\right)\times\frac{8}{3}$

$x=\frac{3}{4}-\frac{5}{4}$; $y=\frac{6}{5}-\frac{7\times 7}{2\times 7\times 5}$; $z=\frac{3}{4}\times\frac{4\times 2}{3}$

$x=\frac{-2}{4}$; $y=\frac{6}{5}-\frac{7}{10}$; $z=2$

$x=\frac{-1}{2}$; $y=\frac{12}{10}-\frac{7}{10}$

$y=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

74 $C=\frac{A}{B}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}$

$C=\frac{\frac{8+5}{20}}{\frac{8-5}{20}}=\frac{\frac{13}{20}}{\frac{3}{20}}=\frac{13}{20}\times\frac{20}{3}=\frac{13}{3}$

75 $A=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$

$A=\frac{6}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12}$

$A=\frac{5}{12}$

$B=\frac{40}{9}-\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{9}\right)$

$B=\frac{40}{9}-\left(\frac{12}{9}-\frac{2}{9}\right)$

$B=\frac{40}{9}-\frac{10}{9}$

$B=\frac{30}{9}$

$B=\frac{10}{3}$

76 $A=2-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$A=2-\left(\frac{6}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$A=2-\frac{5}{4}$

$A=\frac{8}{4}-\frac{5}{4}$

$A=\frac{3}{4}$

$B=\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)$

$B=\left(\frac{14}{20}-\frac{5}{20}\right)-\left(\frac{12}{20}-\frac{15}{20}\right)$

$B=\frac{9}{20}-\left(\frac{-3}{20}\right)$

$B=\frac{12}{20}$

$B=\frac{3}{5}$

77 $A=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}-\frac{1}{4}$

$A=\frac{6}{5}-\frac{1}{4}$

$A=\frac{24}{20}-\frac{5}{20}$

$A=\frac{19}{20}$

$B=\left(\frac{4}{5}-2\right)\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)$

$B=\left(\frac{4}{5}-\frac{10}{5}\right)\times\left(\frac{9}{12}-\frac{8}{12}\right)$

$B=-\frac{6}{5}\times\frac{1}{12}$

$B=\frac{-6}{5\times 6\times 2}$

$B=\frac{-1}{10}$

78 $A=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right):\frac{2}{3}$

$A=\left(\frac{6}{15}+\frac{5}{15}\right):\frac{2}{3}$

$A=\frac{11}{15}\times\frac{3}{2}$

$A=\frac{11\times 3}{3\times 5\times 2}$

$A=\frac{11}{10}$

$B=\frac{16}{15}:\frac{2}{9}-\frac{2}{3}$

$B=\frac{16}{15}\times\frac{9}{2}-\frac{2}{3}$

$B=\frac{2\times 8\times 3\times 3}{3\times 5\times 2}-\frac{2}{3}$

$B=\frac{24}{5}-\frac{2}{3}$

$B=\frac{72}{15}-\frac{10}{15}$

$B=\frac{62}{15}$

$C=\frac{2}{13}-\frac{5}{13}:\frac{10}{16}$; $C=\frac{2}{13}-\frac{5}{13}\times\frac{16}{10}$

$C=\frac{2}{13}-\frac{5\times 2\times 8}{13\times 2\times 5}$; $C=\frac{2}{13}-\frac{8}{13}$

$C=\frac{-6}{13}$

79 $a=\frac{3}{2}$ $b=-3$ $c=\frac{1}{4}$

$A=a+b-c=\frac{3}{2}-3-\frac{1}{4}$

$A=\frac{6}{4}-\frac{12}{4}-\frac{1}{4}$

$A=\frac{-7}{4}$

$B=a-(b-c)=\frac{3}{2}-\left(-3-\frac{1}{4}\right)$

$B=\frac{6}{4}-\left(-\frac{12}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$B=\frac{6}{4}-\left(-\frac{13}{4}\right)$

$B=\frac{19}{4}$

$C=a+bc=\frac{3}{2}+(-3)\times\frac{1}{4}$

$C=\frac{6}{4}+\frac{-3}{4}$

$C=\frac{3}{4}$

$D=a\times\frac{b}{c}=\frac{3}{2}\times\frac{-3}{\frac{1}{4}}$

$D=\frac{3}{2}\times(-3)\times\frac{4}{1}$

$D=-18$

80 **a.** Calcul du PGCD avec l'algorithme des soustractions successives.

375 – 240 = 135

240 – 135 = 105

135 – 105 = 30
105 – 30 = 75
75 – 30 = 45
45 – 30 = 15
30 – 15 = 15
15 – 15 = 0. Donc PGCD (240 ; 375) = 15.

b. Pour rendre irréductible la fraction $\frac{240}{375}$, on divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD de 240 et 375. $\frac{240}{375} = \frac{\cancel{15} \times 16}{\cancel{15} \times 25} = \frac{16}{25}$

81 **a.** La fraction $\frac{408}{578}$ n'est pas irréductible car 408 et 578 étant pairs ils ne sont pas premiers entre eux.
b. Calcul du PGCD de 408 et 578 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste de la division euclidienne
578	408	170
408	170	68
170	68	34
68	34	0

Donc PGCD (578 ; 408) = 34.
c. Pour rendre irréductible la fraction $\frac{408}{578}$, on divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD de 408 et 578. $\frac{408}{578} = \frac{\cancel{34} \times 12}{\cancel{34} \times 17} = \frac{12}{17}$

82 **a.** La proportion de la production électrique en France en 2010 produite par un parc éolien offshore est :
$$\frac{85 \times 10^6}{550 \times 10^9} = \frac{17 \times 5}{110 \times 5 \times 10^3} = \frac{17}{110\,000}$$
b. On sait que 20 éoliennes produisent 85×10^6 kWH, et on cherche le nombre d'éoliennes pour produire 550×10^9 kWh.
$$\frac{20 \times 550 \times 10^9}{85 \times 10^6} = \frac{2200}{17} \times 10^3 \approx 129\,412$$
Il faudra environ 129 412 éoliennes.

Prendre des initiatives

83 **a.** Avec le programme de calcul si on choisit 5 au départ on trouve :
$$\left(5 \times \frac{1}{4} + 5\right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{5}{4} + \frac{20}{4}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{25}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{25}{12}$$
Si on choisit 1,6 on obtient :
$$\left(1{,}6 \times \frac{1}{4} + 5\right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1{,}6}{4} + \frac{20}{4}\right) \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{21{,}6}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7{,}2 \times 3}{4 \times 3}$$
$$= 1{,}8$$
b. Deux démarches possibles :
1. On « remonte » le programme de calcul, en utilisant le fait que $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3 et que $\frac{1}{4}$ est l'inverse de 4 :
• $10 \times 3 = 30$ • $30 - 5 = 25$ • $25 \times 4 = 100$
Marie avait choisi 100 comme nombre de départ.

2. On résout l'équation ci-dessous, où x désigne le nombre choisi au départ par Marie.
$$\left(x \times \frac{1}{4} + 5\right) \times \frac{1}{3} = 10$$
$$x \times \frac{1}{4} + 5 = 30$$
$$x \times \frac{1}{4} = 25$$
$$x = 4 \times 25 = 100$$
Marie avait choisi 100 comme nombre de départ.
c. Joris n'a pas raison. Un contre exemple est 12. 12 est un multiple de 4. On trouve avec ce programme de calcul $\frac{8}{3}$ qui n'est pas un nombre entier.

84 Si on multiplie par 3 deux nombres entiers premiers entre eux, alors les deux nombres auront un PGCD égal à 3, donc on n'obtient plus des nombres premiers entre eux.

85 **a.** Le nombre de pages d'un cahier est un diviseur commun à 608 et 480.
Plusieurs démarches sont possibles :
• Par essais successifs : on teste les nombres entiers compris entre 30 et 50 pour savoir s'ils divisent à la fois 608 et 480.
On obtient un seul nombre : 32 (38 est un diviseur de 608 mais pas de 480 ; 40 et 48 sont des diviseurs de 480 mais pas de 608).
• Par recherche des diviseurs communs à 608 et 480.
Les diviseurs de 608 sont 1, 2, 4, 8, 16, 19, 32, 38, 76, 152, 304, 608.
Les diviseurs de 480 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12,15, 16, 20, 24, 30, 32,40, 48, 60,80, 96, 120, 160, 240, 480.
Les diviseurs communs à 608 et 480 sont 1, 2, 4, 8,16 et 32.
Le nombre de pages est compris entre 30 et 50 donc un cahier a 32 pages.
• Par recherche du PGCD de 608 et 480 et de ses diviseurs.
PGCD (608 ; 480) = 32 (par une méthode au choix)
Les diviseurs de 32 sont 1, 2, 4, 8, 16 et 32. Ils sont aussi les diviseurs communs à 608 et 480.
Le seul nombre qui convienne est 32.
Conclusion : chaque cahier possède 32 pages.
b. 608 : 32 = 19 et 480 : 32 = 15.
Le livre de 608 pages est composé de 19 cahiers.
Le livre de 480 pages est composé de 15 cahiers.

86 Le nombre entier 2 est compris entre $\frac{201}{101}$ et $\frac{91}{45}$ car $\frac{201}{101} = \frac{202}{101} - \frac{1}{101} = 2 - \frac{1}{101}$ et $\frac{91}{45} = 2 + \frac{1}{45}$.
• Nombreuses solutions pour un nombre décimal non entier ; par exemple : 1,99009915 ; 1,991 ; 2,01 ; 2,02 ; 2,021 etc. On peut se servir des valeurs approchées des deux nombres :
$$\frac{201}{101} \approx 1{,}99009901 \text{ et } \frac{91}{45} \approx 2{,}02222222$$

• Nombreuses solutions pour un nombre rationnel non décimal ; par exemple $\frac{3016}{1515}$; $\frac{1810}{909}$; $\frac{604}{303}$; $\frac{203}{101}$; $\frac{9187}{4545}$ $\left(\text{liés au fait que } \frac{201}{101} = \frac{9045}{4545} \text{ et } \frac{91}{45} = \frac{9191}{4545}\right)$ et aussi $\frac{151}{75}$; $\frac{299}{150}$; $\frac{93}{46}$; $\frac{203}{101}$; $\frac{181}{90}$; $\frac{601}{300}$ (liés au fait que $\frac{601}{300} = 2 + \frac{1}{300}$ et $\frac{1}{300} < \frac{1}{45}$ par exemple).

87 **a.** Proportion de la population française de jeunes de moins de 25 ans :

• En Guadeloupe : $\frac{143156}{20004386} = \frac{71578}{10002193}$

soit environ $\frac{7}{1000}$.

• En Guyane : $\frac{116260}{20004386} = \frac{58130}{10002193}$

soit environ $\frac{6}{1000}$.

• En Martinique : $\frac{133974}{20004386} = \frac{66987}{10002193}$

soit environ $\frac{7}{1000}$.

• À La Réunion : $\frac{339140}{20004386} = \frac{169570}{10002193}$

soit environ $\frac{17}{1000}$.

• En Ile de France : $\frac{3870772}{20004386} = \frac{1935386}{10002193}$

soit environ $\frac{193}{1000}$ ou $\frac{19}{100}$.

• En Province : $\frac{15426256}{20004386} = \frac{7713128}{10002193}$

soit environ $\frac{771}{1000}$ ou $\frac{77}{100}$.

b. 143 156 + 116 260 + 133 974 + 339 140 = 732 530.

En 2010, il y a 732 530 jeunes de moins de 25 ans dans les départements d'outre-mer.

$\frac{732\,530}{20\,004\,386} \approx 0{,}037$

Ils représentent environ 3,7 % des moins de 25 ans Français. Marine a donc raison.

9. Vrai ou faux

88 **Faux**

En effet, 36 à 9 diviseurs(1, 2, 3, 4, 6, 9,12, 18 et 36).

Et 48 en a 10 (1, 2, 3, 4, 6, 8,12, 16, 24 et 48).

89 **Vrai**

PGCD (45 ; 75) = 15 et PGCD (60 ; 105) = 15.

90 **Vrai**

$12\,000 = 1\,000 \times 12$ et $18\,000 = 1\,000 \times 18$

PGCD (12 000 ; 18 000) = 6 000

PGCD (12 ; 18) = 6.

PGCD (12 000 ; 18 000) = 6 000 = 6 × 1 000
= 1000 × PGCD (12 ; 18)

91 **Vrai**

451 et 93 sont des nombres premiers entre eux.

92 **Faux**

$3{,}14 = \frac{314}{100}$

93 **Vrai**

Deux nombres pairs sont divisibles par 2 donc ils ne sont pas premiers entre eux.

94 **Faux**

39 et 13 sont impairs mais ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 13.

95 **Faux**

7 ne divise pas 127.

96 **Faux**

121 110 987 654 321 et 123 456 789 101 112 sont divisibles par 3 car la somme de leurs chiffres est un multiple de 3. Donc ces nombres ne sont pas premiers entre eux.

10. Calcul mental et réfléchi

97 $A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$B = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{15}{10} = \frac{4}{5} - \frac{15}{50} = \frac{40}{50} - \frac{15}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

$C = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

$D = 2 - \frac{16}{10} = 2 - \frac{8}{5} = \frac{10}{5} - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$

98 **a.** $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$ **b.** $\frac{60}{144} = \frac{5}{12}$ **c.** $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

d. $\frac{12^2 \times 5^4}{5^2 \times 12^3} = \frac{5^2}{12} = \frac{25}{12}$ **e.** $\frac{2^5 \times 5^5}{10^6} = \frac{10^5}{10^6} = \frac{1}{10}$

99 **a.** PGCD (30 ; 50) = 10 **b.** PGCD (63 ; 49) = 7

c. PGCD (31 ; 31) = 31

100 $A = \frac{3}{4} \times \frac{12}{3} = \frac{12}{4} = 3$ et 3 est un entier.

$B = \frac{21}{49} \times \frac{7}{3} = \frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$ et 1 est un entier.

$C = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.

$D = 1 : \frac{1}{4} = 1 \times \frac{4}{1} = 4$ et 4 est un entier.

101 **a.** 9 et 5 sont premiers entre eux car leur PGCD est 1.

b. 10 et 25 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 5.

c. 49 et 50 sont premiers entre eux car leur PGCD est 1.

d. 21 et 18 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 3.

102 $A = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$

$A = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$

$A = \frac{6}{2} = 3$

11. Présenter, argumenter, communiquer

103 *Copie corrigée* :

Les tas sont tous identiques et le nombre de tas doit être le plus grand possible donc le nombre de tas est le PGCD de 147 et 84.

Calcul du PGCD avec l'algorithme des différences.
147 – 84 = 63
84 – 63 = 21
63 – 21 = 42
42 – 21 = 21
21 – 21 = 0. Donc PGCD (147 ; 84) = 21.
147 : 21 = 7
84 : 21 = 4.
Le serveur pourra faire 21 tas composés de 7 torchons et de 4 serviettes.

104 **a. Vrai** Si *a* et *b* sont deux nombres multiples de 3 alors il existe deux entiers *n* et n' tels que $a = 3n$ et $b = 3n'$.
$a - b = 3n - 3n' = 3(n - n')$ donc la différence est un multiple de 3.

b. Vrai On désigne par x le premier nombre entier, les 5 entiers consécutifs sont donc:

$$x ; x+1 ; x+2 ; x+3 ; x+4.$$

Leur somme est :

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5x + 10 = 5(x + 2)$$

donc la somme est un multiple de 5.

c. Vrai Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ; s'il est en plus divisible par 2 alors il se termine par 0. Un nombre qui se termine par 0 est divisible par 10.

d. Faux $\frac{5}{3} + \frac{4}{\pi} \times \pi = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$.

105 Les deux nombres oubliés sont 5 et 60. Yves devait chercher les diviseurs de 60.

106 **1. a.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ permet de calculer la part de la tablette de chocolat prise par les deux premiers enfants.

b. $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ permet de calculer ce qui reste de la tablette de chocolat après que les deux premiers se soient servis.

c. $\frac{2}{5} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$ permet de calculer la part du troisième enfant.

2.
$A = 1 - \left[\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right] - \frac{2}{5} \times \left[1 - \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right)\right]$

$A = 1 - \frac{7}{12} - \frac{2}{5} \times \left[1 - \frac{7}{12}\right]$

$A = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{12}{12} - \frac{7}{12}\right)$

$A = \frac{5}{12} - \frac{2}{5} \times \frac{5}{12}$

$A = \frac{5}{12} - \frac{2}{12}$

$A = \frac{3}{12}$

$A = \frac{1}{4}$

Il reste $\frac{1}{4}$ de la tablette pour le 4ème enfant.

107 Affirmation 1 **vraie** :
$\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

Affirmation 2 **fausse** :
le reste doit être inférieur au diviseur.
$58 = 12 \times 4 + 10$.
La division euclidienne de 58 par 12 a pour quotient 4 et pour reste 10.

108 On a inscrit dans le tableau les fractions irréductibles :

	3	5	6	20	12
3		$\frac{5}{3}$		$\frac{20}{3}$	
5	$\frac{3}{5}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{12}{5}$
6		$\frac{5}{6}$			
20	$\frac{3}{20}$				
12		$\frac{5}{12}$			

On trouve ainsi 8 fractions, c'est donc Mattias qui a raison.

109 $A = \frac{190}{114} + \frac{1}{3}$

a. Simon calcule le PGCD de 190 et 114 par la méthode des soustractions successives pour pouvoir simplifier la fraction.

b. 190 – 114 = 76
114 – 76 = 38
76 – 38 = 38
38 – 38 = 0 donc PGCD (190 ; 114) = 38

$A = \frac{190 : 38}{114 : 38} + \frac{1}{3}$

$A = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}$

$A = \frac{6}{3}$

$A = 2$.

110 Si on ajoute 1 au nombre cherché, les restes des divisions euclidiennes par 2, par 3,… par 9 sont 0.
Autrement dit, l*e nombre cherché +1* est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
Le plus petit de ces nombres est $9 \times 8 \times 7 \times 5$ soit 2 520.
Le nombre cherché est donc 2 519.

12. QCM

111 **c.** **112** **c.** **113** **a.** **114** **b.** **115** **c.**
116 **b.** **117** **b.** **118** **b.** **119** **b.** **120** **b.**
121 **a. b. c** **122** **b. c.** **123** **a. b.** **124** **a. c.**

13. Objectif Brevet

125 **a.** Avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
260	90	80
90	80	10
80	10	0

Donc PGCD (260 ; 90) = 10

b. La longueur du côté d'un carré est le PGCD de 260 et 90, donc 10 cm d'après la question **a.**

$260 : 10 = 26$ et $90 : 10 = 9$

$26 \times 9 = 234$.

Tina pourra obtenir 234 carrés.

126 **1.** Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
378	270	108
270	108	54
108	54	0

Donc PGCD (378 ; 270) = 54.

2. a. Le nombre de lots est le PGCD de 378 et 270, donc 54 lots d'après la question **1.**

b. $378 : 54 = 7$ et $270 : 54 = 5$

Chaque lot contiendra 7 billes et 5 calots.

127 **a.** Calcul du PGCD avec l'algorithme des différences.

$144 - 120 = 24$

$120 - 24 = 96$

$96 - 24 = 72$

$72 - 24 = 48$

$48 - 24 = 24$

$24 - 24 = 0$.

PGCD (120 ; 144) = 24.

b. Le nombre de coffrets est le PGCD de 120 et 144, donc 24 d'après **a.**

$144 : 24 = 6$ et $120 : 24 = 5$

Chaque coffret contiendra 5 flacons de parfum au tiare et 6 savonnettes au monoï.

128 **1.** Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
640	520	120
520	120	40
120	40	0

Donc PGCD (640 ; 520) = 40.

2. a. les nombres 20 et 40 sont des diviseurs communs à 640 et 520. Les dalles peuvent donc avoir comme longueur 20 cm ou 40 cm.

b. $640 : 20 = 32$ et $520 : 20 = 26$

$32 \times 26 = 832$

Il faudra 832 dalles de 20 cm de côté.

$640 : 40 = 16$ et $520 : 40 = 13$

$16 \times 13 = 208$

Il faudra 208 dalles de 40 cm de côté.

129 **1.** La fraction $\frac{1848}{2040}$ n'est pas irréductible car 1 848 et 2 040 sont pairs.

2. Avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
2 040	1 848	192
1 848	192	120
192	120	72
120	72	48
72	48	24
48	24	0

Donc PGCD (2 040 ; 1 848) = 24

3. Pour simplifier la fraction on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

$$\frac{1848}{2040} = \frac{24 \times 77}{24 \times 85} = \frac{77}{85}$$

130 **a.** Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
2 499	1 911	588
1 911	588	147
588	147	0

Donc PGCD (2 499 ; 1 911) = 147.

Pour simplifier la fraction on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

$$\frac{1911}{2499} = \frac{13 \times 147}{17 \times 147} = \frac{13}{17}$$

131 Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
5 148	2 431	286
2 431	286	143
286	143	0

Donc PGCD (5 148 ; 2 431) = 143.

Pour simplifier la fraction on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

$$\frac{5148}{2431} = \frac{36 \times 143}{17 \times 143} = \frac{36}{17}$$

132 Calcul du PGCD avec l'algorithme des soustractions successives.

$425 - 100 = 325$

$325 - 100 = 225$

$225 - 100 = 125$

$125 - 100 = 25$

$100 - 25 = 75$

$75 - 25 = 50$

$20 - 25 = 25$.

$25 - 25 = 0$.

Donc PGCD (425 ; 100) = 25.

$$\frac{425}{100} = \frac{25 \times 17}{25 \times 4} = \frac{17}{4}$$

$$A = \frac{425}{100} - \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{17}{4} - \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{17}{4} - \frac{6}{4}$$

$$A = \frac{11}{4}$$

14. Exercices d'approfondissement

133 **a.** 29 687 – 47 = 29 640

Et 35 312 – 32 = 35 280.

On cherche donc un diviseur commun à 29 640 et à 35 280 supérieur à 100. Les diviseurs communs à 29 640 et 35 280 sont les diviseurs du PGCD.

Calcul du PGCD de 29 640 et de 35 280 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
35280	29 640	5 640
29 640	5 640	1 440
5 640	1 440	1 320
1 440	1 320	120
1 320	120	0

Donc PGCD (35 280 ; 29 640) = 120.

Les diviseurs de 120 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120.

Comme le diviseur commun est supérieur à 100 c'est donc 120.

b. $29\,687 = 120 \times 247 + 47$

$35\,312 = 120 \times 294 + 32$

Ainsi le quotient de 29 687 par 120 est 247 et le quotient de 35 312 par 120 est 294.

134 On cherche deux nombres entiers a et b tels que $ab = 16\,875$. De plus 15 est un diviseur commun à a et b.

Donc il existe deux entiers k et k' tels que $a = 15k$ et $b = 15k'$.

Donc $15k \times 15k' = 16\,875$

$225\,kk' = 16\,875$.

$kk' = 16\,875 : 225 = 75$.

Donc k et k' sont des diviseurs de 75.

$k = 1$ et $k' = 75$ donc $a = 15$ et $b = 1\,125$

$k = 3$ et $k' = 25$ donc $a = 45$ et $b = 375$

$k = 5$ et $k' = 15$ donc $a = 75$ et $b = 225$.

135 Le nombre est divisible par 11, 2, 3 et 5 donc il est divisible par $2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$.

330 est bien compris entre 100 et 400. Donc le nombre caché est 330.

136 $x = 2 \times 3 \times 5$ et $y = 2^2 \times 5 \times 7$

a. 2 est un diviseur de y car c'est un facteur de y.

b. 6 est un diviseur de x mais pas 7 car ce n'est pas un facteur de x.

c. PGCD $(2 \times 3 \times 5 ; 2^2 \times 5 \times 7) = 2 \times 5 = 10$.

137 **1. a.** d est un diviseur commun à a et b.

$a = dk$ et $b = dk'$.

$a - b = dk - dk' = d(k - k')$

b. Si d divise a et b alors d divise $a - b$.

2. Si d est un diviseur commun à b et à $a - b$ alors il existe deux entiers n et n' tels que $b = dn$ et $a - b = dn'$

$a = a - b + b = dn' + dn = d(n' + n)$ donc d divise a.

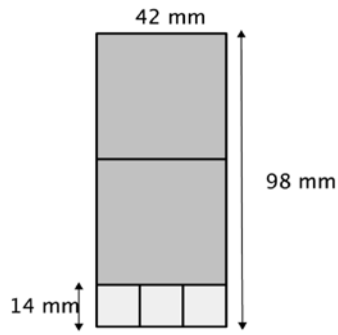
3. a. D'après les questions précédentes les diviseurs communs à a et b sont aussi des diviseurs communs à b et $a - b$.

b. Le PGCD de a et b est celui de b et $a - b$.

138 **1. a.** La division euclidienne de 98 par 42 a pour quotient 2 et pour reste 14. Cela signifie que dans le grand rectangle de largeur 42 mm et de longueur 98 mm, il y a deux carrés de côté de longueur 42 mm et il reste un rectangle de dimensions 14 mm et 42 mm.

b. 42 :14 = 3

Dans le rectangle de longueur 42 mm et de largeur 14 mm, on peut tracer 3 carrés de côté de longueur 14 mm.



c. Les carrés tous identiques qui permettent de paver tout le rectangle de longueur 98 mm et de largeur 42 mm ont leurs côtés de longueur 14 mm. Donc le PGCD de 98 et 42 est 14 car ce sont les plus grands carrés possibles tous identiques.

2. Pour paver une feuille de 297 mm sur 210 mm on calcule le PGCD de 297 et 210. On peut utiliser l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
297	210	87
210	87	36
87	36	15
36	15	6
15	6	3
6	3	0

Donc PGCD (297 ; 210) = 3

On peut paver une feuille de format A4 avec des carrés tous identiques de côté de longueur 3 mm.

139 On veut réaliser le plus grand nombre de tartes identiques avec toutes les fraises et les framboises. On calcule le PGCD de 1 394 et 255 avec l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Reste
1 394	255	119
255	119	17
119	17	0

Donc PGCD (1 394 ; 255) = 17

Il pourra réaliser 17 tartes.

140 **1. c.** Dans la cellule A3 on saisit = B2 et dans la cellule B3 on saisit = C2.

	A	B	C
1	dividende	diviseur	reste
2	1411340	645184	120972
3	645184	120972	40324
4	120972	40324	0
5	40324	0	#VALEUR !

Donc PGCD (1 411 340 ; 645 184) = 40 324.

2.

	A	B	C
1	dividende	diviseur	reste
2	5203536	3176880	2026656
3	3176880	2026656	1150224
4	2026656	1150224	876432
5	1150224	876432	273792
6	876432	273792	55056
7	273792	55056	53568
8	55056	53568	1488
9	53568	1488	0
10	1488	0	#VALEUR !

Donc PGCD (5 203 536 ; 3 176 880) = 1 488

141 Plusieurs démarches possibles : par essais successifs ou à l'aide d'un tableur ou en résolvant une équation.

• **Solution à l'aide d'un tableur**

On entre 0 et 9 dans les cellules A2 et A3, =A2+9 en cellule B2, =B2+9 en cellule C2, =C2+9 en cellule D2 et =SOMME(A2:D2) en cellule E2 et on étend vers le bas.

	A	B	C	D	E
1	1er nb	2e nb	3e nb	4e nb	Somme
2	0	9	18	27	54
3	9	18	27	36	90
4	18	27	36	45	126
5	27	36	45	54	162
6	36	45	54	63	198
7	45	54	63	72	234
8	54	63	72	81	270
9	63	72	81	90	306
10	72	81	90	99	342
11	81	90	99	108	378
12	90	99	108	117	414
13	99	108	117	126	450
14	108	117	126	135	486

• **Solution à l'aide d'une équation**

n désignant un nombre entier positif, les quatre nombres cherchés peuvent s'écrire, par ordre croissant,

$$9n\ ;\ 9(n+1)\ ;\ 9(n+2)\ ;\ 9(n+3).$$

On obtient l'équation :

$9n + 9(n + 1) + 9(n + 2) + 9(n + 3) = 486$

$9n + 9n + 9 + 9n + 18 + 9n + 27 = 486$

$36n + 54 = 486$

$36n = 486 - 54$

$36n = 432$ donc $n = 12$

Les quatre multiples consécutifs de 9 sont 108, 117, 126 et 135.

15. Tâche complexe : Optimiser une production

142 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Peut-on déterminer le nombre de bracelets que Louise souhaite réaliser ?

Aide n° 2 : Comment calculer le coût de fabrication d'un bracelet avec ses perles ?

Aide n° 3 : Quelle condition doit vérifier le coût de fabrication d'un bracelet ?

2. Quelques commentaires

• Il est probable que certains élèves commencent par s'intéresser au document **3**, mais ils comprendront rapidement que les éléments de ce document ne suffisent pas pour déterminer le coût de fabrication des bracelets.

• On peut dans un premier temps laisser les élèves réfléchir individuellement. Ils doivent extraire et organiser diverses informations à partir d'un énoncé relativement long et des documents **2** et **3** qui comportent plusieurs données chiffrées. Il faut prendre le temps de lire et d'analyser tous ces documents.

• Une clé de cette tâche complexe est la détermination du nombre de bracelets. On le déduit après lecture du document **2**. La recherche du PGCD de trois nombres peut sembler difficile au premier abord, mais les élèves disposent de divers outils ; ce PGCD peut apparaître assez rapidement.

• Après un temps de recherche individuelle, il peut être intéressant de proposer un moment collectif d'échanges, où les élèves pourront expliciter ce qu'ils ont compris de la situation, pourront poser d'éventuelles questions, etc. On pourra alors orienter ceux qui paraissent en difficulté vers la recherche du nombre de bracelets.

• Il est nécessaire que les élèves conçoivent une méthode pour résoudre cette situation-problème.

On peut penser que le travail s'effectuera en quatre phases :

1. Détermination du nombre de bracelets réalisés

2. Détermination du nombre de perles de chaque couleur par bracelet

3. Calcul du coût de fabrication d'un bracelet (ou des bracelets)

4. Détermination du prix de vente minimal d'un bracelet.

• Une fois trouvé ce nombre de bracelets, la recherche du nombre de perles de chaque couleur par bracelet, ainsi que la détermination du coût de fabrication d'un bracelet ne devraient pas poser problème. A noter que certains groupes peuvent rechercher le coût de fabrication de tous les bracelets. Il sera intéressant, lors de la synthèse, de faire remarquer que selon le choix, les données qui ne nécessitent aucun traitement et celles qui nécessitent un traitement ne sont pas les mêmes.

• Une autre clé de cette tâche est la détermination du prix minimal de vente d'un bracelet. Les élèves vont devoir traduire la phrase « les coûts de fabrication ne doivent pas représenter plus des deux septièmes du prix de vente». Il est probable que certains groupes s'intéressent dans un premier temps au fait que les coûts de fabrication représentent les $\frac{2}{7}$ du prix de vente, puis ajustent ensuite leur réponse. D'autres peuvent traduire cette phrase par : les coûts de fabrication représentent au maximum $\frac{2}{7}$ du prix de vente. A ce stade de l'année, les élèves ne disposent pas encore de la procédure experte (résolution d'une inéquation) ; aussi toute méthode par tâtonnement, avec calculatrice ou tableur, tout raisonnement arithmétique seront valorisés.

• Il pourra être pertinent de proposer aux élèves une phase collective, où les groupes présenteront leurs travaux. Ce sera alors l'occasion de faire vivre les différentes démarches en faisant expliquer l'enchaînement des idées. Une synthèse à l'écrit ou à l'oral pourra être demandée aux élèves pour rendre compte de leur travail.

3. Eléments de réponse

• *Nombre de perles de chaque couleur par bracelet*

La créatrice souhaite réaliser un nombre maximal de bracelets tous identiques en utilisant toutes les perles. Le nombre de bracelets est donc le PGCD des nombres 138, 184 et 230.

En écrivant les listes des diviseurs de ces trois nombres, on obtient :

Diviseurs de 138 : 1, 2, 3, 6, 23, 46, 69 et 138.

Diviseurs de 184 : 1, 2, 4, 8, 23, 46, 92 et 184.

Diviseurs de 230 : 1, 2, 5, 10, 23, 46, 115 et 230.

Le Plus Grand Commun Diviseur à 138, 184 et 230 est 46.

Louise pourra réaliser 46 bracelets tous identiques.

• $138 = 3 \times 46$ • $184 = 4 \times 46$ • $230 = 5 \times 46$

Ainsi chaque bracelet comportera 3 perles jaunes, 4 perles vertes et 5 perles bleues.

• *Coût de fabrication par bracelet*

– Données qui ne nécessitent aucun traitement :

Coût de la chaîne : 1,50 €

Coût du fermoir : 2,40 €

– Données qui nécessitent un traitement :

Coût d'une perle jaune : 55,20 € : 138×3 = 1,20 €

Coût d'une perle verte : 64,40 € : 184×4 = 1,40 €

Coût d'une perle bleue : 78,20 € : 230×5 = 1,70 €

Main d'œuvre : 20 € : 8 = 2,50 €

– Coût par bracelet :

1,50 + 2,40 + 1,20 + 1,40 + 1,70 + 2,50 = 10,70

Le coût de fabrication d'un bracelet est de 10,70 €.

• *Prix de vente minimal d'un bracelet*

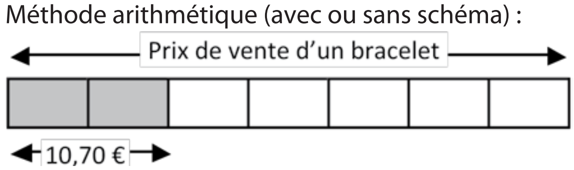
Le coût de fabrication ne doit pas représenter plus des deux septièmes du prix de vente, autrement dit, le coût de fabrication doit être inférieur ou égal aux deux septièmes du prix de vente.

Plusieurs démarches sont possibles.

– Méthode par tâtonnement, avec l'aide d'un tableur :

	A	B
1	Prix de vente	2/7 du prix de vente
2	50	14,29
3	40	11,43
4	30	8,57
5	39	11,14
6	38	10,86
7	37	10,57
8	37,9	10,83
9	37,8	10,80
10	37,7	10,77
11	37,6	10,74
12	37,5	10,71
13	37,4	10,69
14	37,49	10,71
15	37,48	10,71
16	37,47	10,71
17	37,46	10,703
18	37,45	10,700
19	37,44	10,697

– Méthode arithmétique (avec ou sans schéma) :



10,70 : 2 = 5,35

$5{,}35 \times 7$ = 37,45 €

– Méthode algébrique

On note x le prix de vente d'un bracelet.

On résout l'inéquation : $10{,}70 \leqslant \frac{2}{7}x$.

On obtient : $10{,}70 \times \frac{7}{2} \leqslant x$ soit $37{,}45 \leqslant x$.

– Conclusion : le prix de vente minimal d'un bracelet est de 37,45 €.

• *Remarque :* il est aussi possible de déterminer le coût de fabrication de tous les bracelets.

– Données qui ne nécessitent aucun traitement :

Coût des perles jaunes : 55,20 €

Coût des perles vertes : 64,40 €

Coût des perles bleues : 78,20 €

– Données qui nécessitent un traitement :

Coût des chaînes : 1,50 € $\times$ 46 = 69 €

Coût des fermoirs : 2,40 € $\times$ 46 = 110,40 €

Main d'œuvre : 20 € : 8×46 = 115 €

– Coût des bracelets :

55,20 + 64,40 + 78,20 + 69 + 110,40 + 115 = 492,20

Le coût de fabrication des bracelets est de 492,20 €.

On en déduit que le prix minimal de vente des 46 bracelets est 1 722,70 € soit 37,45 € par bracelet.

Note : certains élèves peuvent interpréter l'information sur la main-d'œuvre (20 € pour 8 bracelets) comme indissociable et décider que le montant de la main-d'œuvre est 120 € (comme pour 48 bracelets).

Dans ce cas, le coût de fabrication des bracelets est de 497,20 € et le prix minimal de vente d'un bracelet est alors 37,84 €.

16. En route vers la Seconde

143 **1.** $r = \frac{105}{273} = \frac{3 \times 35}{3 \times 91} = \frac{35}{91} = \frac{5 \times 7}{13 \times 7} = \frac{5}{13}$

2. a. $\frac{5}{13} = \frac{-85}{13 \times (-17)}$ car $5 \times (-17) = -85$

Donc $\frac{5}{13} = \frac{-85}{-221}$

b. $\frac{5}{13} = \frac{5 \times 19}{247}$ car $13 \times 19 = 247$

Donc $\frac{5}{13} = \frac{95}{247}$

3. Comme 236 n'est pas un multiple de 13 on ne peut pas trouver de fraction égale à $\frac{5}{13}$ dont le dénominateur serait 236.

144 $E = \frac{3399669}{7770672} + \frac{9}{16}$

D'après la copie d'écran

PGCD (3 399 669 ; 7 770 672) = 485 667.

De plus le quotient de 3 399 669 par 485 667 est 7 et le quotient de 7 770 672 par 485 667 est 16.

donc on obtient $\frac{3399669}{7770672} = \frac{485667 \times 7}{485667 \times 16} = \frac{7}{16}$

$E = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1$

145 **a.** $A = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2 \times 0,2 \times 0,6}{0,2^2 + 0,6^2}$

$= \frac{0,24}{0,04 + 0,36} = \frac{0,24}{0,4} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

b. $A = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{16}} = \frac{3}{4} \times \frac{16}{13} = \frac{12}{13}$

146 $A = \frac{4x + 5}{6} + \frac{2x}{3} = \frac{4x + 5}{6} + \frac{4x}{6} = \frac{8x + 5}{6}$

$B = \frac{3x}{12} - \frac{2x + 9}{4} = \frac{x}{4} - \frac{2x + 9}{4} = -\frac{x + 9}{4}$

$C = 2 - \frac{5}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{5}{x} = \frac{2x - 5}{x}$

147 A = 5*n* + 4 et B = 7*n* + 5

On peut conjecturer avec un tableur.

n	*5n + 4*	*7n + 5*	PGCD
0	4	5	1
1	9	12	3
2	14	19	1
3	19	26	1
4	24	33	3
5	29	40	1
6	34	47	1
7	39	54	3
8	44	61	1
9	49	68	1
10	54	75	3
11	59	82	1
12	64	89	1

On remarque que le PGCD de A et B est 3 si *n* est de la forme 3*k* + 1 pour *k* entier.

Dans tous les autres cas, ce PGCD semble être égal à 1 ; A et B sont alors des nombres premiers entre eux. On peut donc conjecturer que les nombres A et B sont premiers entre eux pour les valeurs de *n* différentes de 3*k* + 1 (*k* entier positif) ; c'est-à-dire pour toutes valeurs de *n* sauf 1, 4, 7, 10, 13, 16, etc.

Chapitre 4 Puissances – Calcul littéral

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

• Les puissances

En **4e**, les notations a^n et a^{-n} sont étudiées et les règles de calcul sur les puissances sont utilisées sur des exemples numériques (socle).

Les élèves apprennent à écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^n$ et à utiliser sa notation scientifique.

• Le calcul littéral

En **6e** et dans la continuité de l'école primaire, quelques lettres sont introduites avec précaution (symboles d'unités, grandeurs ou mesures variables dans formules).

Cette approche progressive se poursuit durant le cycle central et l'enseignant doit être conscient des différentes fonctions des lettres (unité, variable, indéterminée, inconnue, paramètre…)

Le sens du signe égal est travaillé, en **6e** et en **5e**, comme se lisant de gauche à droite mais aussi de droite à gauche.

En **5e,** on introduit progressivement les premières notions de calcul littéral. Les élèves utilisent des expressions littérales(socle), et en produisent. Les règles de distributivité simple : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ où (k, a et b sont des nombres positifs) sont étudiées, et ce dans les deux sens, permettant ainsi de développer ou de factoriser des expressions.

En **4e**, les élèves continuent à utiliser les expressions littérales (socle), apprennent à réduire une expression littérale, à supprimer les parenthèses dans les sommes algébriques.

En terme de distributivité, le développement d'expressions du type $(a + b)(c + d)$ est abordé.

2. Puissances d'un nombre relatif

Dans la continuité avec le programme de **4e**, les activités 1 et 2 visent à réinvestir les notations a^n et a^{-n} et les propriétés de calcul sur les puissances.

L'activité 1 a pour objectif de conforter la notation puissance abordée en **4e** et d'appuyer sur sa signification. La situation concrète et transdisciplinaire est de nature à faciliter cette compréhension.

L'activité 2 a pour but de faire retrouver les règles :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

(où a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs). Il s'agit aussi d'habituer les élèves à retrouver ces formules en cas d'oubli.

3. Développement

Sur une situation très concrète, **l'activité 3** permet la mise au travail des élèves grâce à un travail numérique préalable ne nécessitant pas d'autre prérequis que la connaissance de l'aire du rectangle. Avec l'aide éventuelle du professeur, elle donne l'occasion d'observer les deux formes (factorisée et développée) d'une même expression. Ce type de développement est un réinvestissement du programme de 4e.

Cette activité a tout lieu d'être illustrée par l'utilisation du tableur. C'est alors l'occasion de revoir l'écriture d'une formule dans une feuille de tableur.

4. Identités remarquables

Dans **l'activité 4**, pour introduire le développement de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nous avons choisi un support visuel géométrique (a et b désignent ici alors des longueurs, positives).

On généralise ensuite pour le cas où a et b sont des nombres relatifs en développant l'expression $(a + b)^2$.

Contrôler à l'aide d'un tableur que deux colonnes $(a + b)^2$ et $a^2 + 2ab + b^2$ renvoient la même valeur pour un très grand nombre de valeurs différentes de a et b peut constituer un apport supplémentaire.

On introduit les deux autres identités remarquables dans **l'activité 5**.

Le support géométrique pourra, là encore, être envisagé en classe.

À noter que dans le cadre du socle commun, les élèves doivent connaître l'existence des identités remarquables et doivent savoir les utiliser pour calculer une expression numérique mais aucune mémorisation des formules n'est exigée.

C'est pourquoi les **activités 4 et 5** se terminent toutes les deux par un calcul mental, type d'activité à renouveler au maximum.

5. Factorisation

C'est en repartant d'un exemple numérique que la notion de factorisation est réactivée dans **l'activité 6**. Cette notion a déjà été vue, sur des cas plus simples, en **5e** puis en **4e**.

Les activités 6 et 7 sont l'occasion de travailler le statut du signe égal comme se lisant de gauche vers la droite mais aussi de la droite vers la gauche.

Dans **l'activité 7**, la factorisation se fait à l'aide des identités remarquables.

6. Savoir Faire

L'exercice résolu 1 est l'occasion de manipuler les différents registres : langage courant (milliards de milliards), écriture avec puissances de 10, notation scientifique. Il met en évidence l'intérêt des règles de calcul sur les puissances. Dans les **exercices 4, 5 et 6**, les élèves peuvent appliquer à nouveau ces compétences sur des cas concrets de très grands ou très petits nombres.

L'exercice résolu 2 se penche sur l'aspect technique des développements. D'une part on développe une identité remarquable. D'autre part, on mêle dans le b. divers aspects techniques tels que : développement d'une identité remarquable, développement à l'aide de la double distributivité, règle de suppression des parenthèses.

Ces compétences sont réinvesties, de façon progressive, dans les exercices 7 et 8.

L'exercice 9 permet, lui, de travailler l'esprit critique des élèves et de leur donner du recul sur une erreur fréquemment commise à savoir le développement « coûte que coûte » d'expressions numériques qui pourraient se contenter de voir appliquées les règles de priorités sur les calculs. Cet esprit critique à développer chez les élèves est la raison de l'étiquette « socle » de cet exercice.

Les deux aspects de la factorisation vus en **3^e^** sont la reconnaissance d'un facteur commun ou l'utilisation d'une identité remarquable. Ces deux méthodes d'obtention d'un produit sont détaillées dans **l'exercice résolu 3** et à appliquer dans les **exercices 10**, puis **35 à 37**, puis **73 à 82**.

L'exercice résolu 11 montre aux élèves l'un des grands intérêts du tableur : celui de pouvoir observer des résultats (ici la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs) et de pouvoir en dégager une conjecture. Il faut alors souligner l'importance que l'enseignant doit accorder au fait que les multiples exemples ne suffisent pas à conclure. La nécessité d'une preuve est alors amenée.

Ce schéma d'une conjecture faite à l'aide du tableur suivie d'une démonstration à l'aide du calcul littéral se retrouve dans les **exercices 12 et 13**.

Par le biais des formules qui sont à manipuler sur tableur, ces trois exercices sont très propices au travail des compétences du B2i.

L'exercice 14 de l'atelier brevet a pour support un programme de calcul. Ce type d'exercices, fréquemment rencontré au brevet traite de l'aspect procédural d'une expression littérale. Tous les élèves peuvent l'aborder car les premières questions ne nécessitent que des calculs numériques élémentaires. Puis il permet de souligner la nécessité d'avoir recours aux lettres pour généraliser un résultat. Un autre exercice de ce type est l'exercice **87** et d'autres sont présents dans le chapitre **6**.

L'**exercice 15** de cet atelier brevet est un Questionnaire à Choix Multiples, fréquemment rencontré aussi dans les épreuves du DNB. Ce type d'exercices permet aux élèves ne maîtrisant par les justifications écrites et la rédaction d'être valorisés.

Il est important de signaler aux élèves que pour certaines questions, il faut traiter le calcul tel qu'il se présente, mais pour d'autres, il est aussi possible de tester les différentes solutions proposées (pour la question 2 par exemple).

L'utilisation pertinente de la calculatrice y est encouragée (intérêt du mode VERIF pour les questions 1 et 2).

7. Compléments

- Les exercices **Je vérifie mes acquis** sont une évaluation diagnostique précieuse pour l'enseignant.
- Dans les **exercices à l'oral** tout comme dans les **exercices d'application**, la progressivité de l'apprentissage est particulièrement prise en compte.

En ce qui concerne les puissances :

L'exposant est positif, puis l'exposant est négatif, puis on passe à l'apprentissage des règles de calcul sur les puissances, puis aux puissances de 10.

En ce qui concerne les écritures littérales, on aborde dans l'ordre : la distributivité, la double distributivité, l'utilisation de la règle de suppression des parenthèses (signe + puis signe –) ; des factorisations progressives, puis des factorisations utilisant les identités remarquables.

À côté des exercices de pure technique, on trouvera des exercices issus de situations qui permettent de donner du sens à ce type de calcul.

L'exercice 51 (Math et Arts) qui propose un travail à partir d'une œuvre de l'artiste américain Chris Jordan peut être complété par une recherche sur le titre original de l'œuvre de Seurat dont il s'est inspiré, et aussi par une recherche sur les moyens de recycler l'aluminium.

- Les exercices de la page **Présenter, argumenter, communiquer** sont issus de domaines variés.

Présenter la démarche suivie, présenter les résultats obtenus à l'aide d'un langage adapté, argumenter, communiquer à l'aide d'un langage adapté sont des items de la compétence 3 du socle commun de connaissances et de compétences.

- Dans la première partie de la page **Objectif Brevet**, les trois exercices proposent des calculs sur des nombres en écriture fractionnaire et sur des puissances. Ils sont aussi l'occasion de revoir les acquis sur les écritures scientifique et décimale d'un nombre, sur l'écriture d'une fraction sous forme irréductible.

Il sera intéressant de faire vérifier ces calculs à l'aide de la calculatrice, avec introduction de certaines parenthèses indispensables mais non écrites.

On notera qu'il ne suffit pas de savoir se servir de sa calculatrice pour répondre, une étape de calcul au moins étant demandée.

Dans la seconde partie, trois exercices sont proposés, dont deux sont issus du domaines géométrique (il s'agit ici d'exprimer des longueurs et des aires, en fonction d'une longueur inconnue). Développer, factoriser une expression algébrique sont les capacités visées ici. On peut compléter le travail sur **l'exercice 151** en utilisant un logiciel de géométrie.

• Les situations proposées dans les **exercices d'approfondissement** sont riches et variées. Ces exercices peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Toute piste de recherche sera valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète.

Ces exercices demandent à l'élève des compétences dans différents domaines et une réflexion plus importante.

L'exercice 133 ne devrait pas être piégeant pour des élèves un peu avertis. En effet, s'ils utilisent leur calculatrice, ils vont trouver 0 comme résultat, mais le résultat n'est pas 0. Le fait que cet exercice figure parmi les exercices d'approfondissement et s'intitule **Imaginer une stratégie** doit alerter les élèves, qui ont déjà été mis en alerte sur la confiance toute relative avec laquelle on peut utiliser sa calculatrice ! Cet exercice peut être rapproché de la narration de recherche (109), mais ici les élèves devront prendre des initiatives, imaginer une stratégie.

Dans **l'exercice 134 (problème ouvert)**, les élèves procéderont par essais et tâtonnements. Après cette recherche menée avec une calculatrice, une recherche organisée pourra être faite à l'aide d'un tableur.

Dans **l'exercice 135**, les élèves devront extraire des informations à la fois d'un texte et d'un tableau. Ils pourront noter l'influence de l'exposant de la puissance de 10 sur les résultats, les nombres d'habitants étant tous écrits en écriture scientifique.

Dans **les exercices 136 et 140**, on cherche à déterminer une valeur maximale à l'aide d'un tableur. Toutefois les deux exercices sont différents. En effet, dans l'exercice 136, les élèves doivent produire une expression littérale avant d'utiliser le tableur, alors que dans l'exercice 140, l'expression est donnée. D'autre part, dans l'exercice 136, la réponse est obtenue par lecture d'un tableau alors que dans le 140, elle l'est par lecture d'un graphique (à réaliser).

Les exercices 137 et 138 pourront être traités conjointement. Les titres sont explicites, mais dans l'exercice 138, l'élève doit prendre l'initiative de faire apparaître $\times 1$. L'enseignant choisira l'ordre dans lequel il les propose à ses élèves.

• Dans **la tâche complexe**, on cherchera à dénombrer les chemins que peut prendre une bille dans une planche à clous proche de la planche de Galton. Pour permettre de visualiser des lancers de bille, une simulation peut être téléchargée sur le site *transmath.net*.

• Dans la rubrique **En route vers la Seconde**, si **l'exercice 144** est un exercice de calcul numérique qui demande un peu de réflexion et d'habileté, le calcul littéral est présent dans les autres exercices : nombres en écriture fractionnaire à mettre au même dénominateur, développements, factorisations ou production d'expressions littérales (147) avec pour support des calculs de volumes. Dans **l'exercice 148**, on pourra utilement vérifier à l'aide du mode VERIF de certaines calculatrices.

La conjecture établie dans **l'exercice 147** pourra être validée ultérieurement (après le **chapitre 6**).

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

On peut faire un arbre pour penser aux multiplications à effectuer : $3 \times 3 \times 3 \times 2$.

Lucette a 54 paires de chaussettes.

• Devinette

Penser à utiliser un tableur.

Les deux autres départements sont :

Marne : $13 + 1 + 18 + 14 + 5 = 51$

Essonne : $5 + 19 + 19 + 15 + 14 + 14 + 5 = 91$

2. Je vérifie mes acquis

1 b	**2** a	**3** b	**4** c
5 b	**6** a	**7** c	**8** c

3. Calcul mental

9 **a.** 40 000 **b.** 7 820

10 **a.** $1{,}5 \times 10^7$ **b.** 5×10^{-17}

4. Activités

1 **1. a.** À 15 h : 2^3 millions ou 8 millions.

b. À 18 h : 2^6 millions ou 64 millions.

c. À 22h : 2^{10} millions ou 1 024 millions ou 1 milliard et 24 millions.

2. À 11 h, le nombre de bactéries était de $\dfrac{1}{2}$ ou 2^{-1}.

À 7h, le nombre de bactéries était de $\dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ ou $\dfrac{1}{2^5}$ ou 2^{-5}.

3. a. Après 2 heures, le jour suivant.

En effet : 2^{13} millions $<$ 10 000 millions $<$ 2^{14} millions ou 8 192 millions $<$ 10 000 millions $<$ 16 384 millions.

b. Avant 23h, la veille.

En effet : 200 = 0,0002 million

$$2^{-12} = \frac{1}{4\,096} \text{ soit } 2^{-12} \approx 0{,}00024$$

$$\text{et } 2^{-13} = \frac{1}{8192} \text{ soit } 2^{-13} \approx 0{,}00012$$

2 **1. a.** $2^4 \times 2^3 = 2^7$ **b.** $3^4 \times 3^{-2} = 3^2$

c. $10^{-5} \times 10^2 = 10^{-3}$ **d.** $7^{-1} \times 7^{-2} = 7^{-3}$

2. a. • 5^4 • 3^{-2} • 10^{-6} • 6^{-1} • 7^2

b. • 3^8 • 5^{-6} • 6^{-3} • 4^2

c. • 10^4 • 12^{-2} • 4^3 • $1{,}25^{-1}$

3. a. • a^{m+n} • a^{m-n} • $a^{m \times n}$ • $(a \times b)^n$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3 **a.** $(300 - 20) \times (200 - 20) = 280 \times 180 = 50\,400$

Si $x = 10$, l'aire boisée est de 50 400 m².

b. $(300 - 2x)(200 - 2x) = 60\,000 - 600x - 400x + 4x^2$
$= 60\,000 - 1\,000x + 4x^2$

c. 3 ha = 3 hectares = 30 000m²

	A	B
1	x (m)	Aire boisée (m²)
2	0	=4*A2^2-1000*A2+60000

	A	B
1	x (m)	Aire boisée (m²)
2	0	60 000
3	1	59 004

⇓

35	33	31 356
36	34	30 624
37	35	29 900

Pour boiser moins de 3 hectares, la largeur minimale de la clairière doit être de 35 mètres.

4 **1. a.** Aire du carré de côté $a + b$:

• $(a + b)^2$ • $a^2 + ab + ab + b^2$

b. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. a. $(x + 7)^2 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

b. $(5y + 4)^2 = (5y)^2 + 2 \times 5y \times 4 + 4^2 = 25y^2 + 40y + 16$

c. $\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 = t^2 + 2 \times t \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = t^2 + t + \dfrac{1}{4}$

4. $105^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2$
$= 10\,000 + 1\,000 + 25$
$= 11\,025$

5 **1.** • $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
$= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

• $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

2. a. $(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

b. $(3y - 1)^2 = (3y)^2 - 2 \times 3y \times 1 + 1^2 = 9y^2 - 6y + 1$

c. $(2t + 1)(2t - 1) = (2t)^2 - 1^2 = 4t^2 - 1$

3. a. $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
$= 10\,000 - 200 + 1$
$= 9\,801$

b. $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2$
$= 10\,000 - 4$
$= 9\,996$

6 **1. a.** Tarik a oublié cette ligne :

$A = \underline{3{,}7} \times 100 - \underline{3{,}7} \times 10 = 3{,}7 \times (110 - 10)$

b. $B = 5{,}24 \times (1{,}9 + 0{,}1) = 5{,}24 \times 2 = 10{,}48$

$C = 12 \times (499 + 1) = 12 \times 500 = 6\,000$

2. a. $A = 3x^2 + 21x = \mathbf{3x} \times x + \mathbf{3x} \times 7 = 3x \times (x + 7)$

b. $B = (x + 4)(2x + 5 + 2x + 1) = (x + 4)(4x + 6)$

Remarque : On peut encore factoriser B :

$B = (x + 4)\,2(2x + 3) = 2(x + 4)(2x + 3)$

7 **1.** On peut reconnaître la 3e identité remarquable :

$8{,}5^2 - 1{,}5^2 = (8{,}5 + 1{,}5) \times (8{,}5 - 1{,}5) = 10 \times 7 = 70$

2. $A = (x + 5)^2$ $B = (2x - 3)^2$

5. J'applique

4 **a.** $4\,800\,000 \times 500 \times 10^4 = 4{,}8 \times 10^6 \times 5 \times 10^2 \times 10^4$
$= 24 \times 10^{12}$

b. $24 \times 10^{12} = 2{,}4 \times 10^{13}$ (notation scientifique)

Il y a en moyenne $2{,}4 \times 10^{13}$ globules rouges dans le corps humain.

5 **a.** $4\,500 \times 10^{-29} = 4{,}5 \times 10^3 \times 10^{-29} = 4{,}5 \times 10^{-26}$

$179 \times 10^{-27} = 1{,}79 \times 10^2 \times 10^{-27} = 1{,}79 \times 10^{-25}$

b. Ecrivons chacune des masses en kg sous la forme $a \times 10^{-26}$ afin de pouvoir les comparer :

Aluminium : $4{,}5 \times 10^{-26}$ Or : $32{,}7 \times 10^{-26}$

Fer : $9{,}3 \times 10^{-26}$ Argent : $17{,}9 \times 10^{-26}$

$32{,}7 > 17{,}9 > 9{,}3 > 4{,}5$ donc Lola a raison.

6 **a.** Masse d'une mole de carbone :

$6{,}022 \times 10^{23} \times 1{,}99 \times 10^{-26}$ kg $= 0{,}01198378$ kg
$= 11{,}98378$ g

b. L'arrondi de cette masse au gramme est 12 g.

7 $A = x^2 - 20x + 100$

$B = 25 - 9x^2$

$C = 4x^2 - 4x + 1$

$D = 30x + 18x^2 - 10 - 6x + 4x^2 + 28x + 49 = 22x^2 + 52x + 39$

8 **a.** $A = 16a^2 - 25 - (2a^2 - 5a + 10a - 25)$
$= 16a^2 - 25 - (2a^2 + 5a - 25)$
$= 16a^2 - 25 - 2a^2 - 5a + 25$
$= 14a^2 - 5a$

b. Pour calculer mentalement A lorsque $x = 1$, il est préférable d'utiliser l'expression trouvée au **a**.

$A = 14 \times 1^2 - 5 \times 1 = 14 - 5 = 9$

9 **a.** Oui, le calcul d'Antoine est correct mais il est inutilement long. Il aurait dû d'abord effectuer le calcul à l'intérieur des parenthèses et écrire $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$.

b. $\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right)^2 = 1^2 = 1$

10 $A = 7(2a - 4 - (3a - 6)) = 7(2a - 4 - 3a + 6) = 7(-a + 2)$

$B = (b + 1)(3b + 4 + 8b - 3) = (b + 1)(11b + 1)$

$C = (5 - 2a)(5 - 2a - (a + 1)) = (5 - 2a)(-3a + 4)$

12 **a.**

	A	B	C
1	Deux entiers consécutifs		Somme des carrés
2	0	=A2+1	=A2^2+B2^2

	A	B	C
1	Deux entiers consécutifs		Somme des carrés
2	0	1	1
3	1	2	5
4	2	3	13
5	3	4	25
6	4	5	41
7	5	6	61
111	109	110	23981
112	110	111	24421
1208	1206	1207	2911285
1209	1207	1208	2916113

Il semble que la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs soit impaire

b. Notons n et $n + 1$ deux nombres entiers consécutifs.

$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1$
$= 2n^2 + 2n + 1$
$= 2(n^2 + n) + 1$

qui désigne un nombre impair.

Donc la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs quelconques est impaire.

13 **a.**

	A	B	C
1	Deux nombres impairs Consécutifs		Différence Des carrés
2	1	=A2+2	=B2^2-A2^2
3	=B2	=A3+2	=B3^2-A3^2

	A	B	C
1	Deux nombres impairs Consécutifs		Différence Des carrés
2	1	3	8
3	3	5	16
4	5	7	24
5	7	9	32
6	9	11	40
7	11	13	48
8	13	15	56

Il semble que la différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs soit un multiple de 8.

b. Soit $2n + 1$ un nombre impair quelconque. Le nombre impair qui le suit est $2n + 3$.

Or $(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 = 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1)$
$= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1$
$= 8n + 8$
$= 8(n + 1)$ qui est un multiple de 8

Donc l'affirmation d'Annabelle est vraie.

6. Atelier Brevet

14 **1. a.** • $2 \times (-2) = -4$ • $-4 + 5 = 1$ • $1 \times 5 = 5$.

Le résultat est 5.

b. • $3 \times (-2) = -6$ • $-6 + 5 = -1$ • $-1 \times 5 = -5$.

Le résultat est -5.

2. En prenant 2 comme nombre de départ, le résultat est 5.

En prenant 3 comme nombre de départ, le résultat est -5.

Essayons comme nombre de départ 2,5 :

• $2{,}5 \times (-2) = -5$ • $-5 + 5 = 0$ • $0 \times 5 = 0$.

Le résultat est 0.

Remarque : On peut aussi appeler le nombre de départ x.

Le programme de calcul donne alors :

• $x \times (-2) = -2x$ • $-2x + 5$ • $(-2x + 5) \times 5 = -10x + 25$

On a alors une équation à résoudre $-10x + 25 = 0$
$-10x = -25$
$x = \frac{-25}{-10} = 2{,}5$

3. $(x - 5)^2 - x^2 = x^2 - 10x + 25 - x^2 = -10x + 25$.

Arthur a raison.

15 **1.** Réponse 2 ; **2.** Réponse 3 ; **3.** Réponse 1 ; **4.** Réponse 2

7. Exercices à l'oral

16 • Le cube de 2 : $2^3 = 8$ • Le carré de -3 : $(-3)^2 = 9$

$8 < 9$. Le cube de 2 n'est pas supérieur au carré de -3. Alexis a tort.

17 **a.** $2^6 = 64$ **b.** $(-7)^2 = 49$ **c.** $10^{-3} = 0{,}001$ **d.** $5^{-2} = 0{,}04$ **e.** $(-4)^{-1} = -0{,}25$

18 **a.** $(-3)^2 = 9$ **b.** $-3^2 = -9$ **c.** $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ **d.** $2^{-3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$ **e.** $(-2)^3 = -8$ **f.** $-2^3 = -8$

19 **a.** $2 + 5^2 = 2 + 25 = 27$ **b.** $(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$
c. $(2 - 5)^2 = (-3)^2 = 9$ **d.** $2 - 5^2 = 2 - 25 = -23$
e. $5 - (2 \times 5)^2 = 5 - 10^2 = 5 - 100 = -95$

20 • $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$. Camille a tort. Elisa a raison

21 **a.** $3 \times 10^6 = 3\,000\,000$ **b.** $-2{,}6 \times 10^4 = -26\,000$ **c.** $-432 \times 10^{-2} = -4{,}32$ **d.** $55 \times 10^{-3} = 0{,}055$

22 **b.** 7×10^{-3} **d.** $-9{,}99 \times 10^{-13}$ **f.** $-6{,}1 \times 10^{-1}$
sont des nombres écrits en écriture scientifique.
Il y en a donc 3. Julien a tort.

23 **a.** $5^3 \times 5^7 = 5^{10}$ **b.** $6^{-5} \times 6^{-4} = 6^{-9}$ **c.** $2^4 \times 2^{-7} = 2^{-3}$ **d.** $9 \times 9^4 \times 9^{-6} = 9^{-1}$

24 **a.** $\dfrac{8^9}{8^5} = 8^4$ **b.** $\dfrac{10^3}{10^{12}} = 10^{-9}$ **c.** $\dfrac{7^2}{7^{-6}} = 7^8$ **d.** $\dfrac{3}{3^2} = 3^{-1}$ **e.** $\dfrac{2^{-1} \times 2^{-3}}{2^{-5}} = 2^1 = 2$

25 **a.** $(5^3)^2 = 5^6$ **b.** $(5^{-1})^4 = 5^{-4}$ **c.** $(7^5)^{-3} = 7^{-15}$ **d.** $(10^{-6})^{-2} = 10^{12}$ **e.** $(2^{-5})^2 = 2^{-10}$

26 **a.** $2^7 \times 5^7 = 10^7$ **b.** $10^3 \times 5^3 = 50^3$ **c.** $1{,}2^6 \times (-4)^6 = (-4{,}8)^6$ **d.** $\dfrac{110^5}{11^5} = 10^5$
e. $\dfrac{9^2}{45^2} = \left(\dfrac{9}{45}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$

27 **1. b.** **2. a.** **3. b.**

28 $A = -14a$ $B = 48x$ $C = 48y^2$

29 $E = -6x^2 + 12x$ $F = 8x^2 - 16$

30 $A = 30 - 12x$ $B = -21t + 35$ $C = 20x^2 - 36x$

31 **1. c.** **2. b.** **3. a.**

32 $A = (t + 3)^2 = t^2 + 6t + 9$ $B = (x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$
$C = (x + 0{,}5)^2 = x^2 + x + 0{,}25$ $D = (8 + y)^2 = 64 + 16y + y^2$
$E = (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ $F = (y - 6)^2 = y^2 - 12y + 36$
$G = (t - 1)^2 = t^2 - 2t + 1$ $H = (7 - y)^2 = 49 - 14y + y^2$

33 $I = (x + 8)(x - 8) = x^2 - 64$ $J = (t - 5)(t + 5) = t^2 - 25$
$K = (x + 0{,}1)(x - 0{,}1) = x^2 - 0{,}01$

34 **a.** $35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 5 + 5^2$
$= 900 + 300 + 25 = 1\,225$
$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \times 50 \times 1 + 1^2$
$= 2\,500 - 100 + 1 = 2\,401$
$73 \times 67 = (70 + 3)(70 - 3) = 70^2 - 3^2 = 4\,900 - 9 = 4\,891$

35 Pour A, le facteur commun est 7. **A–3**
Pour B, le facteur commun est x. **B–1**
Pour C, le facteur commun est $(x + 1)$. **C–2**

36 **a.** $x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$ **b.** $9t^2 - 16 = (3t + 4)(3t - 4)$
c. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ **d.** $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

37 En développant le résultat de Louise, on trouve $4x(x - 1) = 4x^2 - 4x$ qui n'est pas égal à E.
Louise a donc tort. Elle doit factoriser E en utilisant une identité remarquable : $E = (2x - 1)^2$

8. Exercices d'application

38 **a.** $(-11)^2 = 121$ **b.** $(-5)^3 = -125$
c. $-50^2 = -2\,500$ **d.** $(-1)^{25} = -1$
e. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$ **f.** $(-10)^{-1} = \dfrac{1}{-10} = -0{,}1$
g. $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$ **h.** $(-5)^{-2} = \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{25}$
i. $(0{,}5)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$ **e.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{27}} = 27$

39 **a.** $15^4 = 50\,625$ **b.** $2{,}5^{-3} = \dfrac{8}{125} = 0{,}064$
c. $(-2)^{10} = 1\,024$ **d.** $(-0{,}6)^{-4} = \dfrac{625}{81}$
e. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{243}{1\,024}$ **f.** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-4} = \dfrac{81}{625} = 0{,}1296$
g. $4{,}5^4 - \left(2^{-2} - 1{,}5^2\right)^3 = \dfrac{6\,689}{16} = 418{,}0625$

40 **a.** $-2\,820\,000$ **b.** $0{,}0152$ **c.** $0{,}001125$ **d.** 400

41 $A = B = D = 300$; $C = -300$

42 $a = f = \dfrac{1}{25}$; $b = e = -\dfrac{1}{5}$; $c = d = 1$
Benjamin a raison.

43 Au bout de n bonnes réponses, le candidat gagne 3^n €.
On essaie : $3^{10} = 59\,049$; $3^9 = 19\,683$.
Au bout de 10 bonnes réponses, le gain dépassera 50 000 €.

44 **1. c.** **2. a.** **3. b.**

45 **a**. La distance Terre-Soleil est $\mathbf{1{,}5 \times 10^8}$ km.
b. Le diamètre du virus de la grippe est de 90 nanomètres ou $\mathbf{9 \times 10^{-8}}$ m.
c. La masse de la planète Mars est de $\mathbf{6{,}42 \times 10^{23}}$ kg.
d. La masse d'un atome d'or est de $\mathbf{3{,}3 \times 10^{-22}}$ g.

46 **1.** b **2.** a **3.** a **4.** c **5.** c

47 $A = \dfrac{3 \times 10^{-4} \times 1{,}5 \times 10^{-4}}{10^{-6} \times 9} = \dfrac{3 \times 1{,}5}{9} \times \dfrac{10^{-4} \times 10^{-4}}{10^{-6}}$
$= 0{,}5 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-3}$
$B = \dfrac{3 \times 10^5 - 6 \times 10^3}{3 \times 10^{11}} = \dfrac{300\,000 - 6\,000}{3 \times 10^{11}} - \dfrac{294\,000}{3 \times 10^{11}}$
$= 98 \times 10^{-8} = 9{,}8 \times 10^{-7}$

48 **a.** $25x^2$ **b.** $16x^4$ **c.** $0{,}36\,x^2$

d. $\frac{1}{9}x^2$ **e.** $\frac{8}{27}x^3$ **f.** $\frac{9}{16}x^2$

49 **a.** • $15^2 = 3^2 \times 5^2$ • $14^3 = 2^3 \times 7^3$

b. $E = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 15^2} = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 3^2 \times 5^2} = 2^5 \times 5^5 = 10^5$

$F = \frac{7^5 \times 5^3}{5^2 \times 2^{-1} \times 14^3} = \frac{7^5 \times 5^3}{5^2 \times 2^{-1} \times 7^3 \times 2^3}$

$= \frac{7^2 \times 5^1}{2^2} = \frac{49 \times 5}{4} = \frac{245}{4} = 61{,}25$

50 **a.** $5^{-8} \times 2^{-8} = 10^{-8}$ **b.** $4^6 \times 25^6 = 100^6 = \left(10^2\right)^6 = 10^{12}$

c. $2^{-1} \times (5^3)^{-1} \times (2^2)^{-1} = 2^{-1} \times 5^{-3} \times 2^{-2} = 2^{-3} \times 5^{-3} = 10^{-3}$

Donc Rose a raison.

51 **a.** $106\,000 \times 2 \times 60 \times 24 \times 365 \times 10 \approx 1{,}114 \times 10^{12}$

En 10 ans $1{,}114 \times 10^{12}$ canettes sont bues aux USA soit environ 1 114 milliards.

b. $1{,}114 \times 10^{12} : 70 \approx 1{,}59 \times 10^{10}$

$1{,}59 \times 10^{10}$ kg $= 1{,}59 \times 10^7$ tonnes $= 15\,900\,000$ tonnes

Tessa a raison.

52 **1. a.** A = 39 et B = –16 **b.** A = –3 et B = 26

c. A = –1 et B = 4 **d.** A = 69 et B = 194

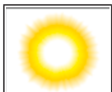
e. $A = \frac{3}{4}$ et $B = -\frac{1}{4}$

2.

	A	B	C
1	x	A	B
2	-10	=A2^2+3*A2-1	=(A2-2)^2-5*A2
3	-9,9		
4	-9,8		

Puis copier la plage B2 : C2 vers le bas.

53

					
T °C	25	37,2	180	**0**	**100**
T °F	**77**	**98,96**	**356**	32	212

54 **a.** $(100 - 1) \times 24 = 2\,400 - 24 = 2\,376$

b. $(100 + 2) \times 36 = 3600 + 72 = 3\,672$

c. $(100 - 2)(100 - 1) = 10\,000 - 100 - 200 + 2 = 9\,702$

55 $A = -35a + 28$ $B = 5y^2 - 30y$ $C = \frac{2}{21}x - x$

56 **a.** Si $x = 0$; • $4x(2x - 3) - 5(3x - 1) = 5$

• $8x^2 - 27x - 5 = -5$

L'égalité est fausse. Léa s'est donc trompée dans son développement.

b. $-5(3x - 1) = -15x + 5$

Léa a commis une faute de signe.

c. $4x(2x - 3) - 5(3x - 1) = 8x^2 - 12x - 15x + 5 = 8x^2 - 27x + 5$

57 **a.** $A = (x + 1)(2x + 4) = 2x^2 + 6x + 4$

$B = (3x + 2)(7x - 5) = 21x^2 - x - 10$

b. Pour $x = 3$; A = 40 et B = 176

Pour $x = -2$; A = 0 et B = 76

58 $A = 5(4x - 7) + (x + 9)(5x - 6)$

$= 20x - 35 + 5x^2 - 6x + 45x - 54$

$= 5x^2 + 59x - 89$

$B = (x - 5)(x + 7) + (2x - 4)(3x - 1)$

$= x^2 + 2x - 35 + 6x^2 - 14x + 4$

$= 7x^2 - 12x - 31$

59 **a.** • Maxence a mis ces parenthèses en rouge car elles sont particulièrement importantes pour montrer qu'on soustrait tout une expression.

• $4x - (x^2 - 6x + 3x - 18) = 4x - x^2 + 6x - 3x + 18$

$= -x^2 + 7x + 18$

b. $C = 3x(x - 3) - (x + 7)(4x - 2)$

$= 3x^2 - 9x - (4x^2 + 26x - 14)$

$= 3x^2 - 9x - 4x^2 - 26x + 14$

$= -x^2 - 35x + 14$

$D = (y - 9)(3y + 2) - (2y - 7)(4y - 5)$

$= 3y^2 - 25y - 18 - (8y^2 - 38y + 35)$

$= 3y^2 - 25y - 18 - 8y^2 + 38y - 35$

$= -5y^2 + 13y - 53$

60 **1. d.** **2. a.**

61 $A = x^2 + 6x + 9$ $B = x^2 + 16x + 64$ $C = x^2 + 24x + 144$

62 $A = x^2 - 10x + 25$ $B = x^2 - 4x + 4$ $C = x^2 - 18x + 81$

63 $A = x^2 - 49$ $B = x^2 - 36$

64 $A = n^2 + 2n + 1$ $B = t^2 - \frac{1}{9}$ $C = 16 - 8a + a^2$

65 $A = y^2 - 5y + 6{,}25$ $B = 1 - x^2$ $C = 25 + 10t + t^2$

66 **a.** $(100 + 2)^2 = 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404$

b. $(100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$

c. $(1\,000 + 5)^2 = 1\,000\,000 + 10\,000 + 25 = 1\,010\,025$

d. $(100 + 3) \times (100 - 3) = 10\,000 - 9 = 9\,991$

e. $(10 + 0{,}1) \times (10 - 0{,}1) = 100 - 0{,}01 = 99{,}99$

67 $A = 4x^2 + 4x + 1$ $B = 9\,x^2 + 42x + 49$

$C = 25x^2 + 90x + 81$

68 $A = 9\,x^2 - 30x + 25$ $B = 16x^2 - 24x + 9$

$C = 4x^2 - 4x + 1$

69 $A = 64x^2 - 49$ $B = 9x^2 - 25$

70 $A = 49x^2 + 56x + 16 + 81x^2 - 54x + 9$

$= 130x^2 + 2x + 25$

$B = 9x^2 - 81x - (49x^2 + 28x + 4)$

$= -40x^2 - 109x - 4$

$C = 15x^2 - 53x + 42 - (25x^2 - 36)$

$= -10x^2 - 53x + 78$

71 **a.**

	A	B	C
1	x	A	B
2	-5	=(2*A2+7)^2-(A2+5)^2	=(2*A2+5)^2-(A2+1)^2

	A	B	C
1	x	A	B
2	-5	9	9
3	-4,99	8,8803	8,8803
4	-4,98	8,7612	8,7612
5	-4,97	8,6427	8,6427
6	-4,96	8,5248	8,5248
7	-4,95	8,4075	8,4075
8	-4,94	8,2908	8,2908
9	-4,93	8,1747	8,1747

En analysant les résultats donnés par le tableur, on peut conjecturer que A = B.

b. $A = 4x^2 + 28x + 49 - x^2 - 10x - 25$
$\quad = 3x^2 + 18x + 24$
$B = 4x^2 + 20x + 25 - x^2 - 2x - 1$
$\quad = 3x^2 + 18x + 24$
Donc, pour toute valeur de x, A = B.

72 **a.** $V = 2 \times \frac{1}{3}(x+1)^2 \times 6 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4x^2 + 8x + 4$
b. Le volume est de 900 cm^3 pour $x = 14$ cm.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	1	2	3	4	5	6	7
2	V	16	36	64	100	144	196	256
	I	J	K	L	M	N	O	P
1	8	9	10	11	12	13	14	15
2	324	400	484	576	676	784	900	1024

73 $A = \underline{3}x - \underline{3} \times 1 = 3(x - 1)$
$B = 4x + 6 = \underline{2} \times 2x + \underline{2} \times 3 = 2(2x + 3)$
$C = 8 + 2x = \underline{2} \times 4 + \underline{2} \times x = 2(4 + x)$
$D = 7y^2 - 5y = 7\underline{y} \times y - 5\underline{y} = y(7y - 5)$
$E = 30a + 36a^2 = \underline{6a} \times 5 + \underline{6a} \times 6a = 6a(5 + 6a)$
$F = \underline{-9}x^2 \underline{-9} \times 1 = -9(x^2 + 1)$

74 $A = \underline{(x-2)}(x+3) + \underline{(x-2)}(x+6) = (x-2)(2x+9)$
$B = \underline{(x+5)}(4x-2) - \underline{(x+5)}(9x+1) = (x+5)(-5x-3)$
$C = (3x+8)^2 - (6x-7)(3x+8)$
$\quad = \underline{(3x+8)}(3x+8) - (6x-7)\,\underline{(3x+8)}$
$\quad = (3x+8)(-3x+15)$

75 $D = (4x+5)^2 - 5(4x+5)$
$\quad = \underline{(4x+5)}(4x+5) - 5\underline{(4x+5)}$
$\quad = (4x+5)(4x)$
$E = \underline{(7x-3)}(2x+5) + (x-4)\underline{(7x-3)} = (7x-3)(3x+1)$
$F = 2x\underline{(5x-8)} - (3x+1)\underline{(5x-8)} = (5x-8)(-x-1)$

76 $G = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7)$
a. $G = 9x^2 + 12x + 4 - 3x^2 - 21x - 2x - 14$
$\quad = 6x^2 - 11x - 10$
b. $G = \underline{(3x+2)}(3x+2) - \underline{(3x+2)}\,(x+7)$
$\quad = (3x+2)(3x+2-x-7)$
$\quad = (3x+2)(2x-5)$
c. • Pour $x = 2{,}5$; avec le **b.**, G = 0.
• Pour $x = 0$; avec le **a.**, G = –10.
• Pour $x = -1$; avec le **a.**, G = 7.

77	**Forme factorisée**	**Forme développée**
a	$(x+5)^2$	$\mathbf{x^2 + 10x + 25}$
b	$\mathbf{(x-6)^2}$	$x^2 - 12x + 36$
c	$\mathbf{(2y+10)^2}$	$4y^2 + 40y + 100$
d	$(t-8)(t+8)$	$\mathbf{t^2 - 64}$
e	$\mathbf{(x-9)(x+9)}$	$x^2 - 81$
f	$\mathbf{(7t-1)^2}$	$49t^2 - 14t + 1$

78 **a.** $25x^2 + 70x + 49 = (\mathbf{5x} + \mathbf{7})^2$
b. $100x^2 - 60x + 9 = (\mathbf{10x} - \mathbf{3})^2$
c. $64 - 9x^2 = (8 + \mathbf{3x})(8 - \mathbf{3x})$

79 **a.** $16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)^2$
b. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
c. $9x^2 - 121 = (3x - 11)(3x + 11)$

80 $A = (7x+4)(7x-4)$ $\qquad B = (3y-4)^2$
$C = (x+1)^2$ $\qquad D = (5 + 10t)(5 - 10t)$
$E = (6z+1)(6z-1)$ $\qquad F = (8 - 5x)^2$

81 $A = (x+1)^2 - 36 = (x+1-6)\,(x+1+6) = (x-5)(x+7)$
$B = 25 - (2x+3)^2 = (5+2x+3)(5-2x-3) = (2x+8)(-2x+2)$
$C = (8x-4)^2 - 9x^2 = (8x-4+3x)(8x-4-3x)$
$\quad = (11x-4)(5x-4)$
$D = 4x^2 - (x-5)^2 = (2x+x-5)(2x-x+5) = (3x-5)(x+5)$

82 $73^2 - 67^2 = (70+3)^2 - (70-3)^2$
$\quad = 70^2 + 2 \times 70 \times 3 + 9 - (70^2 - 2 \times 70 \times 3 + 9)$
$\quad = 70^2 + 2 \times 70 \times 3 + 9 - 70^2 + 2 \times 70 \times 3 - 9$
$\quad = 2 \times 2 \times 70 \times 3$
Ou bien $73^2 - 67^2 = (73 + 67)(73 - 67) = 140 \times 6$.

83 **a.** $45^2 + 2 \times 45 \times 5 + 5^2 = (45 + 5)^2 = 50^2 = 2\,500$
b. $14^2 - 2 \times 14 \times 4 + 4^2 = (14 - 4)^2 = 10^2 = 100$

84 **a.** $24^2 - 4^2 = (24 + 4)(24 - 4) = 28 \times 20 = 560$
b. $43^2 - 42^2 = (43 + 42)(43 - 42) = 85 \times 1 = 85$
c. $101^2 - 99^2 = (101 + 99)(101 - 99) = 200 \times 2 = 400$

85 **a.** Venus : $4{,}9 \times 10^{24}$ kg
Jupiter : $1{,}9 \times 10^{27}$ kg : $1\,900 \times 10^{24}$ kg
Mars : 642×10^{21} kg : $0{,}642 \times 10^{24}$ kg
Neptune : $10{,}3 \times 10^{25}$ kg : 103×10^{24} kg
Mercure : $330{,}2 \times 10^{21}$ kg : $0{,}3302 \times 10^{24}$ kg
Terre : $59{,}7 \times 10^{23}$ kg : $5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Saturne : $56{,}8 \times 10^{25}$ kg : 568×10^{24} kg
Uranus : $86{,}8 \times 10^{24}$ kg
De la plus lourde à la plus légère : Jupiter ; Saturne ; Neptune ; Uranus ; Terre ; Venus ; Mars ; Mercure
b. Somme des masses des 7 autres planètes :
$769{,}6422 \times 10^{24}$ kg. Maxime a raison.

86 **a.** • Longueur totale des arêtes :
$4(x+3) + 4(x+2) + 4 \times 9 = 8x + 56$
• Aire totale des faces :
$2 \times 9(x+3) + 2 \times 9(x+2) + 2(x+3)(x+2)$
$= 2x^2 + 46x + 102$
• Volume : $9(x+2)(x+3) = 9x^2 + 45x + 54$
b. • $9x^2 + 45x + 54$ correspond au calcul du volume, il est correct.
• $6x + 42$ correspond à la longueur des arêtes visibles. Dune a oublié les arêtes cachées.
• $2x^2 + 28x + 66$ correspond au calcul de l'aire des faces de devant, derrière, droite et gauche. Dune a oublié de calculer l'aire des faces de dessus et de dessous.

87 **a.** En prenant comme nombre de départ :

	A	**B**
3	3	3
10	80	80
–5	35	35

Les résultats sont à chaque fois les mêmes pour le programme A et le programme B.

On peut conjecturer que les programmes A et B sont identiques.

b. Nommons x le nombre de départ.

Le programme A donne :

$$(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$

Le programme B donne : $(x-2)x = x^2 - 2x$

Donc pour tout nombre x, les programmes A et B sont équivalents.

9. Vrai Faux

88 **Faux**. $6^4 = 1\,296$. $3^4 = 81$.

89 **Vrai**. $2^6 - 2^5 = 64 - 32 = 32 = 2^5$.

90 **Faux.** Exemple :

Si $a = 1$, • $(2a+3)^2 = 25$ • $4a^2 + 9 = 13$

91 **Faux.** Appelons les deux nombres a et b.

Le carré de leur différence : $(a-b)^2$.

La différence de leur carré : $a^2 - b^2$.

Ces deux expressions ne sont pas égales.

Exemple : si $a = 3$ et $b = 2$; • $(a-b)^2 = 1$ • $a^2 - b^2 = 5$

92 **Vrai.** $52 \times 54 = (53-1)(53+1) = 53^2 - 1^2$

93 **Faux.** Pour $x = 1$, $x^2 - 12x + 9 = -2$; et -2 ne peut être le carré d'un nombre.

94 **Vrai.** Pour tout nombre n positif,

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1 + 2 + 2^2) = 7 \times 2^n$$

C'est un multiple de 7.

10. Calcul mental et réfléchi

95 **a.** $10^7 = 10\,000\,000$ **b.** $10^{-6} = 0{,}000\,001$

c. $3^4 = 81$ **d.** $10^3 = 1\,000$ **e.** $2^5 = 32$

96 **a.** $(100+2)(100+1) = 10\,000 + 300 + 2 = 10\,302$

b. $18(7{,}5 - 6{,}5) = 18 \times 1 = 18$

c. $10{,}3 \times (47 + 53) = 10{,}3 \times 100 = 1\,030$

d. $38 \times (1\,000 - 2) = 38 \times 1\,000 - 38 \times 2$

$= 38\,000 - 76 = 37\,924$

97 **a.** $19^2 = 20^2 - 2 \times 1 \times 20 + 1^2 = 361$

b. $105^2 = 10\,000 + 2 \times 5 \times 100 + 5^2 = 11\,025$

c. $29 \times 31 = 30^2 - 1^2 = 899$

98 **a.** $25x^2 - 4$ **b.** $9a^2 + 12a + 4$ **c.** $16t^2 - 40t + 25$

99 **a.** 6 **b.** 1 **c.** 25

100 $51^2 - 50^2 = (51+50)(51-50) = 101$

L'aire jaune est de $101 m^2$.

11. Présenter, argumenter, communiquer

101 **a.** Il est inutile de donner l'écriture décimale (très longue) de chaque nombre. Il vaut mieux utiliser les propriétés sur les puissances.

b. $E = \dfrac{1{,}5 \times 4}{3 \times 25} \times \dfrac{10^{25-10}}{10^{-15-12}} = 0{,}08 \times 10^{15+27} = 0{,}08 \times 10^{42}$

Donc $E = 8 \times 10^{40}$.

Ce qui peut être dit à Mathis :

Il ne suffit pas d'indiquer le résultat, il faut écrire des étapes de calcul.

L'écriture scientifique d'un nombre est l'écriture de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal écrit avec **un seul chiffre autre que 0 avant la virgule**, ce qui n'est pas le cas ici avec le nombre 0,08.

102 On donne l'expression numérique :

$$A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

a. $A = 210{,}12$

b. $A = 2{,}1012 \times 10^2$

c. $A = 21\,012 \times 10^{-2}$

d. $A = 210 + \dfrac{3}{25}$

103 $\dfrac{2 \times 10^{30}}{6 \times 10^{24}} = \dfrac{1}{3} \times 10^6$

Le soleil est environ 333 333 fois plus lourd que la Terre.

104 **a.** Cédric ne doit pas généraliser une règle sous prétexte qu'elle est vraie pour un ou deux exemples.

b. n désigne un nombre entier quelconque

• $2n$ est un nombre pair

Et $(2n)^2 = 4n^2$ est un nombre pair aussi

• $2n + 1$est un nombre impair

Et $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$

C'est un nombre impair aussi.

Donc un nombre et son carré ont la même parité.

105 $A = \dfrac{3^7 \times 4^8 \times 5^4}{2^5 \times 5^{-7} \times 9^3} = \dfrac{3^7 \times 2^8 \times 2^8 \times 5^4}{2^5 \times 5^{-7} \times 3^3 \times 3^3}$

$= 3^{7-3-3} \times 2^{8+8-5} \times 5^{4+7} = 3^1 \times 2^{11} \times 5^{11}$

$= 3 \times 10^{11}$

106 B est la différence du carré de x et de 5.

C est le carré de la somme de x et 5.

D est la somme des carrés de x et de 5.

E est le produit du carré de x par 5.

F est le carré du produit de x par 5.

G est la différence de x et du carré de 5.

107 • La calculatrice d'Axel n'a pas assez de place pour afficher tous les chiffres.

Elle a arrondi le résultat (n'affichant pas les zéros inutiles). Il manque des chiffres.

• La calculatrice de Bastien affiche une écriture fractionnaire qui n'est pas la valeur exacte de $1{,}00001^2$.

• En effet :

$200\,003 = 199\,999 \times 1{,}000\,020\,000\,1 + 1 \times 10^{-10}$.

Remarque : ni Axel, ni Bastien n'ont fait d'erreur de manipulation. Ils doivent cependant apprendre à se méfier de leur calculatrice !

• Chloé a raison, car le carré de 1 est 1. Mais elle n'a pas la réponse.

• Dylan a raison. Grâce à son raisonnement, on peut écrire :

$1{,}00001^2 = (1 + 10^{-5})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 10^{-5} + 10^{-10}$

$= 1{,}0000200001$

108 Notons x la longueur du côté du carré.
Son aire est x^2.
Si l'on triple x, l'aire du carré devient : $(3x)^2 = 9x^2$.
L'aire a été multipliée par 9.
Cassandre a raison.
Si l'on augmente x de 3, l'aire du carré devient :

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

L'aire n'est pas augmentée de 9.
Lucas a tort.

109 **1.** $(x - 6)^2 - (x - 4)(x - 9)$
$= x^2 - 12x + 36 - x^2 + 13x - 36 = x$

2. a. $124\,124\,124\,118^2 - 124\,124\,124\,120 \times 124\,124\,124\,115$
$= (x - 6)^2 - (x - 4)(x - 9)$ avec $x = 124\,124\,124\,124$
Donc $124\,124\,124\,118^2 - 124\,124\,124\,120 \times 124\,124\,124\,115$
$= 124\,124\,124\,124$

b. La calculatrice affiche $1{,}241 \times 10^{11}$ c'est-à-dire 124 100 000 000. Elle affiche une erreur car, n'ayant pas assez de place pour écrire tous les chiffres, elle arrondit le résultat.

12. QCM pour s'évaluer

110 **a.** **111** **c.** **112** **b.** **113** **a.** **114** **b.** **115** **c.**
116 **a.** **117** **c.** **118** **c.** **119** **b.** **120** **b.** **121** **a.**
122 **b.** **123** **a.** **124** **b.** ; **c.** **125** **b.** ; **c.** **126** **a.** ; **b.**

13. Objectif brevet

127 **a.** $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} : \frac{8}{15} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

b. $B = \frac{6 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^2}{1{,}5 \times 10^{-4}} = \frac{6 \times 5}{1{,}5} \times 10^{-2+2+4}$
$= 20 \times 10^4 = 2 \times 10^5$

128 **a.** $A = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} : \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} : \left(\frac{8}{6} - \frac{3}{6}\right)$
$= \frac{3}{4} + \frac{5}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$

b. $B = \frac{21 \times 10^{-4} \times 500 \times (10^2)^3}{0{,}7 \times 10^8} = \frac{21 \times 500}{0{,}7} \times 10^{-4+6-8}$
$= 15\,000 \times 10^{-6} = 1{,}5 \times 10^{-2}$
L'écriture décimale de B est 0,015.
L'écriture scientifique de B est $1{,}5 \times 10^{-2}$.

129 **a.** $A = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} \times \frac{9}{4} = \frac{7}{15} - \frac{\cancel{2}}{5 \times \cancel{3}} \times \frac{3 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times 2}$
$= \frac{7}{15} - \frac{3}{10} = \frac{14}{30} - \frac{9}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

b. $B = \frac{25 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^2} = \frac{25 \times 3}{2} \times 10^{6-2-2}$
$= 37{,}5 \times 10^2 = 3{,}75 \times 10^3$
L'écriture scientifique de B est $3{,}75 \times 10^3$.
L'écriture décimale de B est 3 750.

130 **1.** $FD = 2x + 1 - (x + 3) = x - 2$
2. Aire de FECD : $FE \times FD = (2x + 1)(x - 2)$.
3. Aire de ABCD : $(2x + 1)^2$.
Aire de ABEF : $(2x + 1)(x + 3)$.
4. Aire de FECD = Aire de ABCD – Aire ABEF
$= (2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$
5. Cette égalité traduit une factorisation.

131 **1.** $AH = 4 - x$
Aire de AHIJ : $(4 - x)^2$.
L'expression représentant l'aire jaune est M.
2. $Q = (4 - x)^2 - 4 = 16 - 8x + x^2 - 4 = x^2 - 8x + 12$
Remarque : Q = M.
3. $Q = (4 - x + 2)(4 - x - 2) = (-x + 6)(-x + 2)$
4. Pour $x = 2$; $Q = 0$.
Pour $x = 2$; l'aire jaune est nulle.
Sur la figure, le point H est confondu avec le point E.

132 **a.** Pour $a = 1$ et $b = 5$; $A = \frac{1}{4}(6^2 - (-4)^2) = 5$
Pour $a = -2$ et $b = -3$; $A = \frac{1}{4}((-5)^2 - 1^2) = 6$

b. $A = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (a - b)^2]$
$= \frac{1}{4}[a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)]$
$= \frac{1}{4} 4ab = ab$. Donc Alex a raison.

14. Exercices d'approfondissement

133 Si les élèves utilisent leurs calculatrices, ils vont lire 0 comme résultat.
Or le résultat n'est pas 0. En effet :
Notons $A = 123\,456\,789\,515^2 + 123\,456\,789\,512^2$
$- (123\,456\,789\,513^2 + 123\,456\,789\,514^2)$
$A = (n + 3)^2 + n^2 - [(n + 1)^2 + (n + 2)^2]$ où $n = 123\,456\,789\,512$
Or $(n + 3)^2 + n^2 - [(n + 1)^2 + (n + 2)^2]$
$= n^2 + 6n + 9 + n^2 - (n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4)$
$= 4$
Donc A = 4.

134 Des essais et des tâtonnements ne suffiront sans doute pas pour trouver ces nombres.
On pourra utiliser un tableur pour faire une recherche organisée.
Trois autres nombres ont la même propriété :
135 : $1^1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135$
518 : $5^1 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518$
598 : $5^1 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598$

135 Les calculs peuvent être faits à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.
• Rangement selon la production de déchets en moyenne par personne :

Pays	Production par habitant (en kg)	Nombre d'habitants	Production totale (en kg)
Danemark	802	5 500 000	4 411 000 000
Chypre	770	770 000	592 900 000
Irlande	733	3 900 000	2 858 700 000
Luxembourg	701	470 000	329 470 000
France	543	62 000 000	33 666 000 000
Roumanie	382	22 000 000	8 404 000 000
Lettonie	331	2 300 000	761 300 000
Slovaquie	328	5 400 000	1 771 200 000
Pologne	320	38 000 000	12 160 000 000
Rep. Tchèque	306	10 000 000	3 060 000 000

• Rangement selon la production totale de déchets :

Pays	Production totale (en kg)
France	33 666 000 000
Pologne	12 160 000 000
Roumanie	8 404 000 000
Danemark	4 411 000 000
Rep. Tchèque	3 060 000 000
Irlande	2 858 700 000
Slovaquie	1 771 200 000
Lettonie	761 300 000
Chypre	592 900 000
Luxembourg	329 470 000

Les deux classements sont différents ; en effet le nombre d'habitants joue un grand rôle.

Deux des quatre pays en tête du premier classement (Chypre et Luxembourg) se trouvent à la fin du second classement, ce sont les deux pays parmi les 10 cités ayant le moins d'habitants.

Pour les cinq pays situés à la fin du premier classement, avec des volumes de déchets proches (compris entre 306 et 382 kg par personne), le classement est aussi bouleversé ; ainsi la Pologne et la Roumanie qui sont les pays les plus peuplés parmi ces cinq, grimpent dans le second classement. Quant à la Lettonie et la Slovaquie, ils échangent leurs positions, alors que ces deux pays ont quasi la même masse de déchets par personne, mais la Slovaquie a le double d'habitants.

Quant à la France, son grand nombre d'habitants la met désormais en tête du second classement.

136 **a.** A $= \pi(x + 1)^2 - \pi x^2$

Remarque : A $= \pi((x + 1)^2 - x^2) = (2x + 1)\pi$

On entre la formule :

=PI()*(A2 + 1)^2–PI()*A2^2

Ou bien =(2*A2 + 1)*PI()

	A	B
1	x	A
2	0	3,141592654
3	0,1	3,769911184
4	0,2	4,398229715
75	7,3	49,0088454
76	7,4	49,63716393
77	7,5	50,26548246
78	7,6	50,89380099

b. La longueur maximale du rayon x est 7,4 m.

137 **1. a.** $-1(2x - 7) = -2x + 7$

b. A $= (3x + 5)(2x - 7) - 1 \times (2x - 7)$

A $= (2x - 7)(3x + 5 - 1)$

A $= (2x - 7)(3x + 4)$

2. • B $= (5x - 9)^2 - 5x + 9$
$= (5x - 9)^2 - 1(5x - 9)$
$= (5x - 9)(5x - 9 - 1)$
$= (5x - 9)(5x - 10)$

• C $= (3x + 4)^2 - 3x - 4$
$= (3x + 4)(3x + 4 - 1)$
$= (3x + 4)(3x + 3)$

• D $= (x + 7)(3x - 1) - 3x + 1 + (3x - 1)(x + 4)$
$= (3x - 1)(x + 7 - 1 + x + 4)$
$= (3x - 1)(2x + 10)$

138 • A $= 5x + 5$
$= 5(x + 1)$

• B $= 3x - 6x^2$
$= 3x(1 - 2x)$

• C $= 3x + 2 + 2x(3x + 2)$
$= (3x + 2)(1 + 2x)$

• D $= (x + 9)(x + 6) + x + 9$
$= (x + 9)(x + 6 + 1)$
$= (x + 9)(x + 7)$

• E $= (2x - 5)^2 + 2x - 5$
$= (2x - 5)(2x - 5 + 1)$
$= (2x - 5)(2x - 4)$

139 Procédons à quelques essais :

• pour $n = 2$: $(n - 1)\, n(n + 1) + n = 8$ et $8 = 2^3$

• pour $n = 5$: $(n - 1)\, n(n + 1) + n = 125$ et $125 = 5^3$

On peut conjecturer que le résultat est n^3.

Pour un nombre entier n quelconque ($n > 1$), on a :

$(n - 1)n(n + 1) + n = n(n^2 - 1) + n = n^3 - n + n = n^3$

140 **1. a.** Si $v = 5$ m · s^{-1} P = 261 W.

b. Si $v = 10$ m · s^{-1} P = 1 586 W.

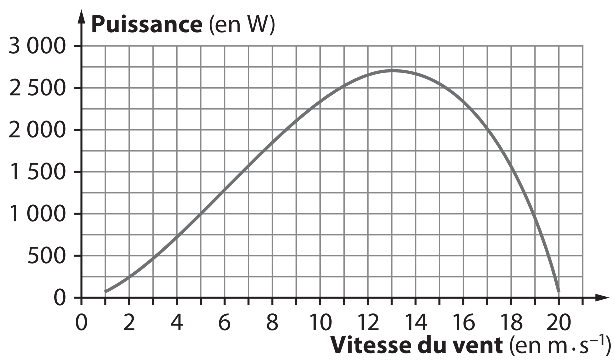
c. Si $v = 20$ m · s^{-1} P = 1 986 W.

2. a. Sur le tableur, on entre :

	A	B
1	Vitesse du vent (en m.s-1)	Puissance (en W)
2	4	=-2*A2^3+55*A2^2-210*A2+186

On obtient alors :

	A	B
1	Vitesse du vent (en m.s-1)	Puissance (en W)
2	4	98
3	5	261
4	6	474
5	7	725
6	8	1002
7	9	1293
8	10	1586
9	11	1869
10	12	2130
11	13	2357
12	14	2538
13	15	2661
14	16	2714
15	17	2685
16	18	2562
17	19	2333
18	20	1986
19	21	1509
20	22	890
21	23	117



La puissance développée par l'éolienne semble maximale pour un vent de 13 $m \cdot s^{-1}$ environ.

141 **a.** • $2^2 + 2 = 6$ et $3^2 - 3 = 6$
• $3^2 + 3 = 12$ et $4^2 - 4 = 12$
• $4^2 + 4 = 20$ et $5^2 - 5 = 20$
• $10^2 + 10 = 110$ et $11^2 - 11 = 110$

b. On peut conjecturer que pour tout nombre entier n, on a $n^2 + n = (n + 1)^2 - (n + 1)$.

Démonstration : développons le 2e membre :

$$(n + 1)^2 - (n + 1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$$

Donc l'égalité est vraie pour toutnombre entier n.

142 Les 3 âges sont 33 ans ; 16 ans et 48 ans.

On note a, b et c les âges des trois personnes.

On établit la liste des entiers successifs : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; etc.

Il est dit que l'une des personnes a plus de 31 ans et moins de 45 ans, on teste donc à partir de $a = 32$.

Par exemple, ayant choisi $a = 32$, on choisit $b = 4$, plus petite valeur positive permettant d'obtenir le carré 36 pour $a + b$; ensuite, on choisit $c = 12$ (pour avoir $b + c = 16$) ou $c = 21$ ($b + c = 25$) ou $c = 45$ ($b + c = 49$) ou $c = 60$ ($b + c = 64$) mais dans chacun de ces cas, la somme $a + c$ n'est pas le carré d'un nombre.

a	b	c	$a + b$	$b + c$	$a + c$
32	4	12	36	16	44
32	4	21	36	25	53
32	4	45	36	49	77
32	4	60	36	64	92

On poursuit la recherche, toujours avec $a = 32$, mais cette fois avec $b = 17$ (pour obtenir $a + b = 49$).

a	b	c	$a + b$	$b + c$	$a + c$
32	17	8	49	25	40
32	17	19	49	36	51
32	17	47	49	64	79
32	17	64	49	81	96

Remarque : on ne peut pas choisir $b = 32$ (pour $a + b = 64$) car les trois personnes ont des âges distincts.

On poursuit, en choisissant $b = 49$ ($a + b = 81$), puis $b = 68$ ($a + b = 100$), $b = 89$ ($a + b = 121$), et enfin $b = 112$ ($a + b = 144$).

On s'arrêtera là pour les essais avec $a = 32$.

On recommence avec $a = 33$ etc. jusqu'à $a = 44$.

Il n'y a qu'une seule solution.

a	b	c	$a + b$	$b + c$	$a + c$
33	16	48	49	64	81

15. Tâche complexe : Dénombrer des chemins

143 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Imaginer quelques chemins possibles sur des schémas.

Aide n° 2 : Quel est le nombre de chemins possibles pour une planche n'ayant que deux rangées de clous ? et pour une planche n'ayant que trois rangées de clous ?

Aide n° 3 : Comment évolue le nombre de chemins quand on ajoute une rangée de clous supplémentaire ?

2. Quelques commentaires

• On trouvera sur le site *transmath.net* une simulation à télécharger. On choisit le nombre de lancers dans la boîte de dialogue et on visualise aussitôt ces lancers.

Le professeur utilisera cette simulation au moment où il le jugera opportun.

• On peut penser que les élèves commenceront par faire quelques schémas en y indiquant des chemins possibles. Mais ce genre de schéma risque d'être rapidement illisible, même si les élèves utilisent des couleurs différentes.

• Un sondage peut être fait dans la classe après quelques minutes de réflexion individuelle : les réponses ne manqueront pas d'être variées !

Il appartiendra alors à l'enseignant de montrer – si la remarque ne vient pas des élèves eux-mêmes - les limites d'un comptage à partir de schémas. Les élèves devront comprendre qu'ils doivent trouver une démarche raisonnée pour pouvoir compter tous les chemins possibles, sans en oublier.

Il pourra ensuite être pertinent de proposer un travail par groupes : les élèves pourront ainsi échanger et mettre en œuvre une démarche d'investigation.

• Une clé de cette tâche complexe est de penser à observer ce qui se passe lorsqu'on ajoute une rangée de clous.

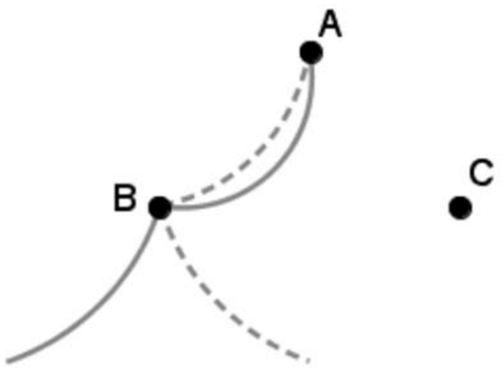
• Il n'est pas impossible que certains élèves reconnaissent dans la suite de nombres de chemins : 2, 4, 8, 16, etc. la suite des puissances de 2 : 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, etc.

• Il pourra être intéressant de demander aux élèves d'exposer leurs démarches à l'ensemble de la classe.

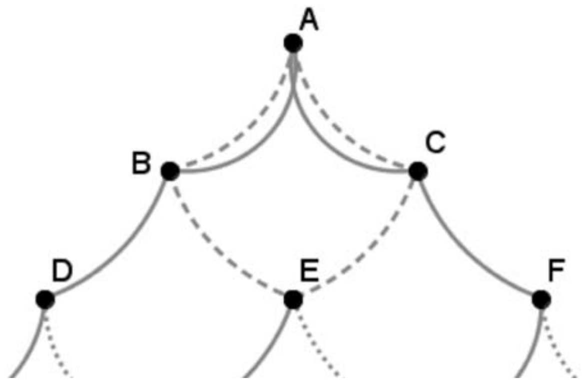
• On n'hésitera pas – même si la recherche est non aboutie - à valoriser des compétences liées à la pratique d'une démarche scientifique, comme traduire les informations, traduire la situation par un schéma, réaliser des calculs, mettre en place une démarche, présenter la démarche suivie.

3. Éléments de réponse

• Pour une planche ayant deux rangées de clous, le nombre de chemins possibles est 4 (2 chemins en utilisant le clou B, 2 autres avec le clou C).



- Pour une planche ayant trois rangées de clous :



Le nombre de chemins possibles est 8 (2 chemins utilisant le clou D, 2 chemins utilisant le clou F, 4 chemins utilisant le clou E).

Chaque clou de la 3e rangée double le nombre de chemins possibles arrivant à ce clou sur la 2e rangée, puisque la bille peut aller à droite ou à gauche de ce nouveau clou.

- Pour une planche ayant six rangées de clous, le nombre de chemins possibles est donc 2^6 soit 64 chemins.

16. En route vers la Seconde

144 **a.** $100 = 2^2 \times 5^2$ **b.** $250 = 2 \times 5^3$ **c.** $5\,000 = 2^3 \times 5^4$

d. $\dfrac{1}{8\,000} = 2^{-6} \times 5^{-3}$ **e.** $\dfrac{1}{20\,000} = 2^{-5} \times 5^{-4}$

f. $0{,}256 = 2^5 \times 5^{-3}$

145 **a.** $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

b. D'après le **a.** $\dfrac{1}{1\times 2} = 1 - \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$; etc…

Donc $A = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{98} - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100}$

$= 1 - \dfrac{1}{100}$

Donc A = 0,99

146 L'affichage du logiciel de calcul formel signifie que l'on souhaite factoriser l'expression :

$$49x^2(x-3) + 28x(x-3) + 4(x-3)$$

Justification : On remarque un facteur commun $(x - 3)$.

$49x^2(x-3) + 28x(x-3) + 4(x-3) = (x-3)(49x^2 + 28x + 4)$

On reconnaît en $49x^2 + 28x + 4$ une identité remarquable $(7x + 2)^2$.

Après ces deux étapes de factorisation, on obtient bien $(x - 3)(7x + 2)^2$.

147 **a.** $V_1 = \dfrac{5}{6}x(x + 1)$ et $V_2 = 5x^2$

b. • Dans la feuille de tableur, on entre :

	A	B	C
1	x	V1	V2
2	0	=5/6*A2*(A2+1)	=5*A2^2

On obtient alors :

	A	B	C
1	x	V1	V2
2	0	0	0
3	0,1	0,092	0,05
4	0,2	0,2	0,2
5	0,3	0,325	0,45
6	0,4	0,467	0,8
7	0,5	0,625	1,25
8	0,6	0,8	1,8
9	0,7	0,992	2,45

• Pour aller plus loin : $V_1 = V_2$

$$\frac{5}{6}x(x+1) = 5x^2$$

$$\frac{5}{6}x^2 - \frac{30}{6}x^2 + \frac{5}{6}x = 0$$

$$\frac{5}{6}x(-5x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 0{,}2$$

Donc pour $x = 0{,}2$; les deux solides ont le même volume

148 **a.** Développons le membre de gauche :

$$2(x-1)^2 + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5$$

Donc l'égalité est vraie pour tout nombre x.

b. • $(x + 1)(4 - x) = -x^2 + 3x + 4$

• $\dfrac{25}{4} - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} - x^2 + 3x - \dfrac{9}{4} = -x^2 + 3x + 4$

Donc l'égalité est vraie pour tout nombre x.

c. Pour $x = 2$; $2x + 1 + \dfrac{1}{x} = 5{,}5$ et $\dfrac{2x^2+2}{x} = 5$

Donc l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x.

Chapitre 5 Racines carrées

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

En classe de **4e**, les élèves, pour l'égalité de Pythagore sont amenés à chercher, avec leur calculatrice une valeur approchée d'un nombre dont le carré est donné. Dans ces situations, utiliser la touche $\sqrt{\ }$ est considéré comme faire une opération qu'ils ne sauraient conduire à la main, mais en aucun cas, ils n'ont eu à considérer $\sqrt{a}$ comme un nombre.

Les nombres qu'ils savent comparer et sur lesquels ils savent opérer sont les entiers naturels et relatifs, les nombres décimaux et les nombres en écriture fractionnaire.

2. Activités

Les différentes activités proposées permettent d'établir la définition d'une racine carrée et les propriétés à connaître en fin de **3e**.

Pour chacune, nous avons proposé une situation suffisamment ouverte pour stimuler la prise d'initiatives par les élèves ainsi que leur sens critique.

Les trois premières activités permettent de s'approprier la définition et d'écrire des nombres avec un radical.

- **Activité 1**

1. Le dessin suggère l'égalité de Pythagore étudiée en classe de 4e.

Comme 10 cm^2 = 1 cm^2 + 9 cm^2, Il suffit de tracer un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm et 3 cm, l'hypoténuse mesure alors $\sqrt{10}$ cm.

La question porte sur la longueur exacte du côté du carré construit sur l'hypoténuse. Certes, les élèves peuvent proposer de mesurer ce côté, ce qui leur donne une longueur approchée mais c'est l'occasion pour le professeur d'introduire ce nouveau nombre $\sqrt{10}$ avec le vocabulaire.

Avant de savoir dire la phrase du cadre « vocabulaire », il sera demandé aux élèves de la dire avec le nombre 10. Cette phrase sera reprise avec la question suivante.

2. La construction du deuxième triangle rectangle n'est pas demandée mais non interdite ! Le professeur peut voir si les élèves mesurent ou utilisent ce qui vient d'être mis en place. Selon le temps dont il dispose, il peut donner cette question à faire en devoir à la maison. Dans ce cas, lors de la séance suivante, la correction de cette question lui fournit une phase de rappel avant d'enchaîner sur les activités suivantes.

- **Activité 2**

1. Même si l'exercice précise : « mentalement », il est intéressant de faire relever tous les résultats. On ne doit pas négliger l'exercice d'écriture qu'il fournit. Les radicaux sont de nouveaux symboles pour les élèves et le professeur peut les conseiller sur la forme à donner à ce symbole.

2. Pour chaque affirmation, un débat peut s'engager et la justification de chaque réponse est ainsi apportée. Les nombres choisis permettent de donner des arguments car de simples calculs sont nécessaires, d'où là encore, la demande : « mentalement ».

Le cadre « info » porte sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$; certes la démonstration n'est pas au programme mais le vocabulaire est utile pour la suite de ce chapitre.

Avec de très bons élèves et en travail d'approfondissement, le professeur peut proposer la démonstration.

- **Activité 3**

1. Les élèves peuvent répondre mentalement, cet exercice n'est peut-être pas aussi facile qu'il peut paraître.

Le professeur pourra verbaliser les recherches, par exemple, pour le **a.** : « Quel est le nombre dont le carré est 3 ? »

2. Les démonstrations qui suivent sont délicates et le professeur pourra les mener en parallèle, au tableau, avec un exemple numérique.

- **Activité 4**

La devinette ainsi posée aux élèves peut, dans un premier temps les laisser sans réponse mais après quelques instants de recherche, le nombre négatif doit être proposé.

C'est une manière ludique de rappeler que deux nombres opposés ont le même carré.

Cette situation pourra être reprise lors de la correction d'exercices si l'un des élèves ne propose comme solution que le nombre positif.

- **Activité 5**

1. La démonstration est annoncée dans le cours comme étant l'objet de l'exercice 150 page 110, elle sera proposée au moment où le professeur le juge opportun et éventuellement seulement à certains élèves.

2. Le dialogue de **l'activité 4** est repris et là encore, c'est l'occasion d'un petit débat qui amène la conclusion.

- **Activité 6**

1. Pour faciliter le travail des élèves, le professeur peut fournir la photocopie de ce tableau à compléter.

Le professeur peut autoriser l'utilisation de la calculatrice. Il est important que les élèves émettent des conjectures sans être gênés par les calculs, notamment pour les deux dernières lignes.

Le professeur fait écrire les égalités mais fera aussi énoncer que ***la racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées*** et que ***la racine carrée d'un quotient est égale au quotient des racines carrées***. Les deux formes sont nécessaires, certains élèves retiendront plus facilement la première alors que d'autres retiendront la deuxième.

2. Les élèves peuvent proposer, comme précédemment d'expérimenter.

Pour $a = 9$ et $b = 4$, par exemple, mais pourquoi ne pas prendre $a = 9$ et $b = 16$? ou un autre triplet pythagoricien.

Les élèves concluront très facilement. Certains peuvent proposer des couples particuliers pour lesquels l'égalité est vérifiée ce qui est alors l'occasion de préciser qu'une propriété n'est vraie que si elle est toujours vraie !

- **Activité 7**

Les preuves, là encore, sont pour certains élèves difficiles ; elles ne servent donc pas à les conforter. Il est cependant important, pour d'autres d'avoir ce raisonnement.

3. Savoir-Faire

Les énoncés proposent les situations les plus fréquemment rencontrées avec les racines carrées.

Tout d'abord, **l'exercice résolu 1** propose une situation de géométrie déjà rencontrée en **4^e^** mais bien sûr, dans ce cas, on s'arrête sur la valeur exacte avant de donner une valeur approchée. Pour l'élève, cet exercice résolu lui montre bien qu'il n'est plus en **4^e^** mais en 3^e^ !

L'exercice résolu 2 porte sur les différentes écritures d'un nombre avec un radical. C'est l'occasion d'inciter les élèves à connaître les carrés parfaits, disons, au moins jusqu'à 12 ?

L'exercice résolu 3, quant à lui utilise la distributivité pour réduire et une identité remarquable pour développer.

Le savoir-faire TICE porte sur l'utilisation de la calculatrice. Chaque modèle ayant ses particularités, on ne peut que rappeler aux élèves qu'il faut apprendre à utiliser correctement cet instrument.

Pour chacun de ces savoir–faire, au moins deux exercices permettent de les remettre en œuvre.

Comme, les réponses sont données en fin de manuel, le professeur peut suggérer un entraînement personnel à ses élèves.

La page Atelier Brevet

Ce sont des exercices proposés les années précédentes aux épreuves du DNB. On retrouve dans le sommaire les différents thèmes abordés.

4. Compléments

Comme dans tous les chapitres, de nombreux exercices sont proposés.

Tous les exercices ont des nombres choisis pour que le calcul à la main ne soit pas fastidieux et ne soit pas une surcharge inutile pour l'objectif visé qui est de maîtriser les nouvelles connaissances.

L'exercice n° 103 est présenté comme **travail de groupe** mais d'autres exercices peuvent se prêter à ce type de travail, par exemple ceux du paragraphe : « Prendre des initiatives », entre autres le n° 99.

Rappelons que pour la richesse de ce type de travail, un temps de recherche individuelle est indispensable, sinon, le groupe n'a qu'une façon de faire.

La série **Vrai ou Faux** permet de tester la solidité des acquis. Le professeur doit veiller à la qualité des argumentations.

Le **calcul mental et réfléchi** avec les exercices 112 à 117 ne présente aucune difficulté particulière. Ce type d'exercices dispense les élèves d'un travail de présentation écrite des résultats d'où leur participation souvent très active.

Sur la page **Présenter, Argumenter, Communiquer**, la plupart des exercices demande une production écrite des élèves surtout pour l'exercice : **Narration de recherche**.

De plus en plus souvent, il est demandé aux élèves des traces de leurs recherches, y compris lors des épreuves au DNB. Il est donc important de les entraîner à écrire leurs idées qu'elles aient permis de trouver ou non.

La page : **Objectif Brevet** permet, nous semble-t-il, de motiver l'élève pour s'entraîner lors de la séquence sur les racines carrées ou pour réviser en fin d'année.

Les exercices d'approfondissement, non précédés du titre du paragraphe du cours, demandent de prendre des initiatives : souvent une seule question est posée mais des étapes intermédiaires sont à imaginer.

L'un d'eux estampillé « **Problème ouvert** » peut être l'objet d'un travail de groupe.

Le **défi** demande de procéder par essais erreurs, ce qui n'est pas une démarche toujours disponible chez les élèves ni même parfois chez les professeurs ! Soulignons, qu'avec les instruments de calcul modernes, comme la calculatrice et le tableur, cette méthode retrouve tout son intérêt et ne doit en rien être péjorée.

- Dans la **Tâche complexe**, les élèves – qui peuvent travailler par petits groupes – ont à identifier des grandeurs caractéristiques à partir de l'observation du fonctionnement d'un téléviseur (téléviseur 32 pouces, formats 4/3 et 16/9). Les élèves sont familiarisés avec ces expressions, mais ils auront à traduire les informations données ; la situation se révèle alors être liée à une situation géométrique. Les élèves devront mettre en place une démarche leur permettant de répondre à la question posée.
- Dans la rubrique **En route vers la Seconde**, les élèves travaillent sur plusieurs exercices qui peuvent être proposés en classe de Seconde, mais que des élèves de 3^e^ peuvent résoudre.

Dans **l'exercice 157**, les élèves ont – dans un esprit ludique – à mobiliser des connaissances relevant de plusieurs domaines.

Dans **l'exercice 158** ainsi que dans **les exercices 162 à 164**, des radicaux figurent au dénominateur ; les élèves peuvent se référer à **l'exercice résolu 2. c. page 98**, mais cela ne suffit pas. Ils découvriront dans **l'exercice 158** que l'utilisation de l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ permet aussi d'écrire un dénominateur sans radical ; ils pourront réinvestir cette connaissance dans **l'exercice 163**. Ils seront amenés à prendre des initiatives, comme par exemple dans **l'exercice 162**.

Dans **les exercices 159 à 161**, il s'agit d'élever des nombres au carré. Pas de difficulté particulière ici pour des élèves qui maîtrisent le développement des identités remarquables, hormis la réponse finale de **l'exercice 161**.

L'exercice 165 a un support géométrique ; il est l'occasion de retravailler sur la longueur de la diagonale d'un carré et sur la hauteur d'un triangle équilatéral et complète le travail fait lors **des exercices 95 et 96 page 105**.

Corrigés

1. Devinettes

• **Devinette**

En complétant le quadrillage, on voit qu'il s'agit du troisième côté d'un triangle rectangle 3, 4 et donc 5.

• **Devinette**

Quelques nombres :

$65 = (1^2 + 2^2)\,(2^2 + 3^2) = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$

$68 = (1^2 + 1^2)\,(3^2 + 5^2) = 2^2 + 8^2$

$533 = (2^2 + 3^2)\,(4^2 + 5^2) = 2^2 + 23^2 = 7^2 + 22^2$

$2\,210 = (3^2 + 5^2)(7^2 + 4^2) = 41^2 + (-23)^2 = 1^2 + 47^2$

Entre nous

Comprendre et trouver une expression qui permet de proposer d'autres nombres :

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2$

$= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2$

$(ac)^2 + (bd)^2 + 2\,abcd + (ad)^2 + (bc)^2 - 2\,abcd$

$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

ou $(ac)^2 + (bd)^2 - 2\,abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2\,abcd$

$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

Ainsi, on peut choisir par exemple : $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$ et $d = 8$.

Alors $(2^2 + 5^2)(3^2 + 8^2) = 29 \times 73 = 2\,117$ et aussi :

$2\,117 = (2 \times 3 + 5 \times 8)^2 + (2 \times 8 - 5 \times 3)^2$

d'où $2\,117 = 46^2 + 1^2$

et $2\,117 = (2 \times 3 - 5 \times 8)^2 + (2 \times 8 + 5 \times 3)^2$

d'où $2\,117 = (-34)^2 + 31^2$ ou $34^2 + 31^2$.

2. Je vérifie mes acquis

1 **Bonne réponse : c.**

2 **Bonne réponse : c.**

3 **Bonne réponse : c.**

4 **Bonne réponse : a.**

5 **Bonne réponse : b.**

6 **Bonne réponse : b.**

7 **Bonne réponse : b.**

3. Calcul mental

8 **a.** 25

b. 0,25

c. 0,0025

d. 4 900

e. 490 000

f. 2,25

9 $A = 49 + 9 = 58$

$B = 64 + 4 = 68$

$C = 16 + 9 = 25$

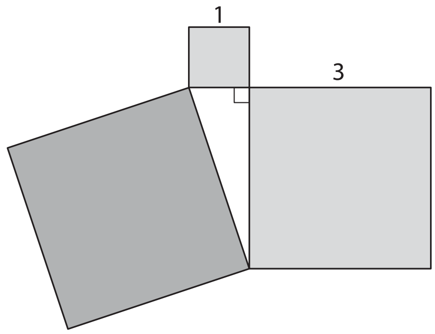
$D = -36 - 4 = -40$

4. Activités

Racine carrée d'un nombre positif

1 Construction d'un carré d'aire donnée

a.



On utilise l'égalité de Pythagore étudiée en classe de 4e.

$10\text{ cm}^2 = 1\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$.

L'hypoténuse du triangle rectangle mesure $\sqrt{10}$ cm.

L'aire du grand carré est 10 cm^2.

b. $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

$BC = \sqrt{89}$ cm

2 Comprendre l'expression « racine carrée de *a* »

1. a. $\sqrt{64} = 8$ **b.** $\sqrt{0,81} = 0,9$ **c.** $\sqrt{2500} = 50$

d. $\sqrt{0,0049} = 0,07$ **e.** $\sqrt{10^4} = 10^2$

f. $\sqrt{10^{-2}} = 10^{-1}$ **g.** $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{6}{5}$ **h.** $\sqrt{50}$

2. a. $\sqrt{0} = 0$, Vraie car $0^2 = 0$

b. $\sqrt{2}$ est égal à 1, fausse car $1^2 = 1$ et non 2

c. $\sqrt{16}$ est un nombre entier, vraie ; en effet $\sqrt{16} = 4$

d. $\sqrt{0,01}$ est un nombre décimal, vraie ; en effet $\sqrt{0,01} = 0,1$

e. $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$ est un nombre rationnel, vraie ; en effet, c'est $\dfrac{4}{7}$

f. $\sqrt{3}$ est un nombre compris entre 1 et 2, vraie ; en effet, $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$, on a donc $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ autrement dit : $1 < \sqrt{3} < 2$

g. $\sqrt{0,5}$ est un nombre compris entre 0,5 et 0,6, fausse ; en effet, $0,5^{\,2} = 0,25$ et $0,6^2 = 0,36$, or, $0,5 > 0,36$ donc $\sqrt{0,5} > \sqrt{0,36}$, soit $\sqrt{0,5} > 0,6$

h. $\sqrt{9}$ est égal à la moitié de 9 : fausse.

En effet $\sqrt{9} = 3$ alors que $9 : 2 = 4,5$.

3 Découvrir les premières propriétés

1. a. $(\sqrt{3})^2 = 3$ **b.** $\sqrt{7^2} = 7$

c. $(\sqrt{5})^2 = 5$ **d.** $\sqrt{4,7^2} = 4,7$

2. *a* désigne un nombre positif.

a. $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est *a*, donc :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

b. Par définition, $\sqrt{a^2}$ est le nombre dont le carré est a^2 et on sait aussi que a^2 est le carré du nombre *a*, donc :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif

4 Une devinette

David avait choisi le nombre –3, son carré est 9 et le double est 18.

5 Trouver des nombres inconnus

1. a. $x^2 = 81$

$x = 9$ ou $x = -9$,

Les nombres sont 9 et –9

b. $x^2 = 0{,}04$

$x = 0{,}2$ ou $x = -0{,}2$

Les nombres sont 0,2 et –0,2

c. $x^2 = \frac{4}{9}$

$x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$

Les nombres sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$

d. $x^2 = 0$

$x = 0$

Il y a un seul nombre qui est 0.

e. $x^2 = 7$

$x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

Les nombres sont $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$

f. $x^2 = 1$

$x = 1$ ou $x = -1$

Les nombres sont 1 et –1

2. Pour $x^2 = -16$, il n'y a pas de solution car un carré est un nombre positif.

Racines carrées et opérations

6 Faire des expérimentations

a.

a	b	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
9	4	6	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
16	25	20	20	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
2,25	2,56	2,4	2,4	$\frac{15}{16}$ $\frac{1{,}5}{1{,}6}$	$\frac{15}{16}$ $\frac{1{,}5}{1{,}6}$
0,04	6,25	0,5	0,5	$\frac{2}{25}$ $\frac{0{,}2}{2{,}5}$	$\frac{2}{25}$ $\frac{0{,}2}{2{,}5}$

Les conjectures que l'on peut émettre sont :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- la racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées,
- la racine carrée d'un quotient est égale au quotient des racines carrées.

b. Pour $a = 9$ et $b = 4$,

$\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ alors que $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$

Yasmina se trompe.

$\sqrt{0+1} = 1$ et $\sqrt{0} + \sqrt{1} = 1$

C'est David qui a raison.

À retenir qu'une propriété n'est vraie que si elle est toujours vraie.

7 Donner des preuves

a. $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b = ab$ et comme $\sqrt{ab}$ est le nombre positif dont le carré est ab, on en déduit que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

b. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$, $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$ or, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est le nombre positif dont le carré est $\frac{a}{b}$ donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

5. J'applique

4 Le triangle ABC est rectangle en A, donc, d'après l'égalité de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

a. $4^2 + 7^2 = BC^2$

$BC^2 = 16 + 49 = 65$

$BC = \sqrt{65}$ cm

$BC \approx 8$ cm

b. $6^2 + AC^2 = 14^2$

$AC^2 = 14^2 - 6^2 = 196 - 36 = 160$

$AC = \sqrt{160}$ cm $= 4\sqrt{10}$ cm

$AC \approx 12{,}6$ cm

c. $AB^2 + 3^2 = 8^2$

$AB^2 = 8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

$AB = \sqrt{55}$ cm

$AB \approx 7{,}4$ cm

5 a. $\pi R^2 = 225$ d'où $R^2 = \frac{225}{\pi}$

$R = \sqrt{\frac{225}{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$

b. $R \approx 8{,}5$ cm

6 Si d est la longueur de cette diagonale, l'égalité de Pythagore donne :

$d^2 = 6{,}5^2 + 6{,}5^2 = 42{,}25 \times 2 = 84{,}5$

$d = \sqrt{42{,}25 \times 2} = \sqrt{42{,}25} \times \sqrt{2} = 6{,}5\sqrt{2}$

$d = 6{,}5\sqrt{2}$ cm ou $d = \sqrt{84{,}5}$ cm

$d \approx 9{,}2$ cm

7 Dans le triangle ABC rectangle en A, l'égalité de Pythagore s'écrit :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AC^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

$AC = \sqrt{24}$ cm, or $\sqrt{24} \neq 5$

Ludo se trompe, le triangle n'est pas isocèle.

8 a. $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2}\sqrt{7} = \sqrt{4}\sqrt{7} = \sqrt{28}$

b. $3\sqrt{11} = \sqrt{3^2}\sqrt{11} = \sqrt{9}\sqrt{11} = \sqrt{99}$

c. $6\sqrt{15} = \sqrt{6^2}\sqrt{15} = \sqrt{36}\sqrt{15} = \sqrt{540}$

9 $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

Emilien a raison pour $\sqrt{50}$ et $\sqrt{32}$ mais il se trompe pour $\sqrt{24}$.

10 $7^2 \times 2 = 49 \times 2 = 98$

$7^2 \times 3 = 49 \times 3 = 147$

$7^2 \times 5 = 49 \times 5 = 245$

$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$

$\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$

11 **a.** $x = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$y = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b. $x^2 - y^2 = \sqrt{75}^2 - \sqrt{108}^2 = 75 - 108 = -33$

$x + y = 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

12 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$ ou

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 \times 2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

13 **a.** $S = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} = 9\sqrt{7} - 2 \times 2\sqrt{7}$

$= (9 - 4)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b. $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3) = \sqrt{7}^2 - 3^2 = 7 - 9 = -2$

Oscar a raison, il s'agit d'un nombre entier relatif.

14 **a.** $\sqrt{588} = \sqrt{3 \times 196} = \sqrt{3} \times \sqrt{196} = 14\sqrt{3}$

b. $A = 14\sqrt{3} - 2\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{100 \times 3}$

$= 14\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 0$

16 $-\sqrt{27} + 2\sqrt{75} = -3\sqrt{3} + 2 \times 5\sqrt{3}$

$= -3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

La réponse proposée est fausse.

$(5 - 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 4\sqrt{2}$

La réponse est exacte.

6. Atelier brevet

17 **a.** $A = \dfrac{6}{5} - \dfrac{17}{14} : \dfrac{5}{7} = \dfrac{6}{5} - \dfrac{17 \times 7}{14 \times 5} = \dfrac{6}{5} - \dfrac{17 \times 7}{7 \times 2 \times 5}$

$= \dfrac{6}{5} - \dfrac{17}{10} = \dfrac{12}{10} - \dfrac{17}{10} = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2}$

b. $B = \dfrac{8 \times 10^8 \times 1{,}6}{0{,}4 \times 10^{-3}} = \dfrac{8 \times 10^7 \times 16}{4 \times 10^{-4}}$

$B = 32 \times 10^{11}$

L'écriture scientifique de B est $3{,}2 \times 10^{12}$.

c. $(\sqrt{5} + \sqrt{10})^2 - 10\sqrt{2}$

$C = 5 + 10 + 2\sqrt{5} \times \sqrt{10} - 10\sqrt{2}$

$C = 15 + 2\sqrt{50} - 10\sqrt{2}$

$C = 15 + 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 15$

18 $\dfrac{\sqrt{32}}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, l'égalité 1 est vraie.

L'égalité 2 est fausse, mais en écrivant $\times$ au lieu de $+$, on obtient l'égalité $10^5 \times 10^{-5} = 10^0$ qui est vraie.

19 $E = \dfrac{2}{3} + \dfrac{17 \times 4}{2 \times 3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{34}{3} = \dfrac{36}{3} = 12$

$F = \dfrac{\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{16}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2 \times 3 \times 3} \times 4}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2} \times 4}{\sqrt{2}} = 12$

On a bien E = F.

7. Exercices à l'oral

Racine carrée d'un nombre positif

20 **a.** $3^2 = 9$ **b.** $5^2 = 25$ **c.** $0{,}2^2 = 0{,}04$

d. $(-2)^2 = 4$ **f.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ **g.** $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

21 **a.** $\sqrt{16} = 4$ **b.** $\sqrt{100} = 10$ **c.** $\sqrt{81} = 9$

d. $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ **e.** $\sqrt{3600} = 60$ **f.** $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

g. $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

22 **a.** 8 est la racine carrée de 64.

b. 16 est le carré de 4.

c. –7 a pour carré 49.

d. 25 a pour racine carrée 5.

e. 25 est le carré de –5.

f. 15 a pour carré 225.

23 **a.** $\sqrt{36} = 6$ **b.** $\sqrt{4} = 2$ **c.** $\sqrt{64} = 8$

d. $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ **e.** $\sqrt{40000} = 200$

24 Tous les nombres sont égaux à –1, le seul nombre positif est $e = \sqrt{81} - 8 = 9 - 8 = 1$, on peut donc dire que c'est l'intrus.

25 Sulian : $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{81} = 9$

Maëlle : $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ et $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Yuna : $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{6}{5}$ et $\sqrt{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{9}{4}$

Isaac : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$

26 **a.** $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{9}}{4} = \dfrac{3}{4}$ **c.** $\sqrt{\dfrac{121}{36}} = \dfrac{11}{6}$

d. $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ **e.** $\dfrac{7}{\sqrt{25}} = \dfrac{7}{5}$ **f.** $\sqrt{\dfrac{81}{10000}} = \dfrac{9}{100}$

27 **a.** 5 cm^2 **b.** 8,1 cm^2 **c.** 16 cm^2

28 **a.** $\left(\sqrt{40}\right)^2 = 40$ **b.** $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$

c. $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$ **d.** $\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6$

e. $\sqrt{10^2} = 10$ **f.** $\sqrt{(-5)^2} = 5$

g. $\left(\sqrt{\dfrac{5}{4}}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$ **h.** $\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{2}{3}$

29 $\sqrt{13^2} = 13$ $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$

$\left(-\sqrt{13}\right)^2 = 13$ $\left(-\sqrt{13}\right)^2 = 13$

Les nombres ne sont pas égaux, seul $-\sqrt{13^2}$ n'est pas égal aux autres.

30 $A = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ $B = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

C ne peut être réduit.

Nombres x tels que $x^2 = a$

31 Anne devrait dire : « un nombre dont le carré est 9 est 3 » car il y a aussi –3 dont le carré est 9.

Bernard se trompe, le carré d'un nombre est toujours positif, donc –16 n'est pas le carré d'un nombre.

Lisa a raison, en effet $(-5)^2 = 25$.

32 **a.** 3 et –3 **c.** 0,9 et –0,9 **d.** 0

e. $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ **f.** 1,1 et –1,1

33 **a.** 6 et – 6 **b.** 10^2 et -10^2
c. 0,3 et – 0,3 **d.** 10^{-3} et -10^{-3}

34 **a.** $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$ **b.** $\sqrt{0,4}$ et $-\sqrt{0,4}$
c. $\frac{5}{3}$ et $-\frac{5}{3}$ **d.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Racines carrées et opérations

35 **a.** $\sqrt{10}$ **b.** $\sqrt{48}$ **c.** $\sqrt{98}$ **d.** $\sqrt{18}$

36 **a.** $\sqrt{8\times2}=\sqrt{16}=4$
b. $\sqrt{3\times27}=\sqrt{3\times3\times9}=3\times3=9$
c. $\sqrt{0,2\times500}=\sqrt{100}=10$
d. $\sqrt{6\times6\times4}=6\times2=12$

37 **a.** $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{3}\times\sqrt{13}$
c. $\sqrt{5}\times\sqrt{6}$ **d.** $\sqrt{7}\times\sqrt{6}$

38 **a.** $5\sqrt{2}$ **b.** $7\sqrt{2}$ **c.** $4\sqrt{2}$
d. $6\sqrt{2}$ **e.** $12\sqrt{2}$

39 **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** 2 **c.** $\frac{1}{3}$
d. 4 **e.** $\sqrt{3}$

40 Lucas se trompe, $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=3-4=-1$

8. Exercices d'application

41 **a.** 5 cm **b.** 0,3 cm **c.** $\sqrt{5}$ cm

42 **a.** 17,8 par défaut **b.** 51,24 par défaut
c. 249 par excès **d.** 0,28 par défaut
e. 7,89 par excès

43 **a.** 8 **b.** 0,5 **c.** 300 **d.** 0,2
e. 0,4 **f.** 10^3 **g.** 10^{-1} **h.** 2×10

44

x	36	4 900	0,0064	1
$\sqrt{x}$	6	70	0,08	1

x	169	1,21	10^8	10^{-6}
$\sqrt{x}$	13	1,1	10^4	10^{-3}

45 **a.** $\sqrt{9}=3$ $\sqrt{25}=5$ $\sqrt{49}=7$
$\sqrt{81}=9$ $\sqrt{144}=12$ $\sqrt{10000}=100$
b. $\sqrt{19}\approx4,36$ $\sqrt{23}\approx4,8$ $\sqrt{59}\approx7,68$
c. $2^2+3^2=4+9=13$
$\sqrt{13}$ is the length of the third side.

46 **a.** $45=\sqrt{2025}$ **b.** $87=\sqrt{7569}$
c. $0,58=\sqrt{0,3364}$ **d.** $3,7=\sqrt{13,69}$

47 **a.** et **b.** la formule est = RACINE(A2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\sqrt{x}$	1	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449
2	x	1	2	3	4	5	6
3	x^2	1	4	9	16	25	36

H	I	J	K	L	M	N	O	P
2,646	2,828	3	3,162	3,317	3,464	3,606	3,742	3,873
7	8	9	10	11	12	13	14	15
49	64	81	100	121	144	169	196	225

c. Les nombres sont rangés dans l'ordre croissant.
d. $\sqrt{2}\approx1,414$ $\sqrt{3}\approx1,732$
e.

#NOMBRE!
–3
9

Le tableur ne peut donner de réponse sur la ligne 1 pour la racine carrée.

48 **a.** $\sqrt{24}>4$ **b.** $\sqrt{15}<4$ **c.** $\sqrt{0,35}<0,6$
a. $\sqrt{56}>7$ **b.** $\sqrt{72}<9$ **c.** $\sqrt{90}>9$

49 $(20\sqrt{7}):4=5\sqrt{7}$
Le côté du carré mesure $5\sqrt{7}$ cm
$(5\sqrt{7})^2=25\times7=175$
L'aire du carré est 175 cm²
Ou $(20\sqrt{7}:4)^2=175$

50 **a.** $0=\sqrt{0}$ **c.** $\frac{2}{5}=\sqrt{\frac{4}{25}}$ **e.** $\sqrt{16}=\sqrt{16}$
f. $0,7=\sqrt{0,49}$ **g.** $0,25=\sqrt{0,0625}$ **h.** $\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{9}{4}}$

51 **a.** $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{4}{9}$ **c.** 1 **d.** $\frac{1}{2}$ **e.** $\frac{5}{3}$

52

x	0	0,25	1	2	4	5
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$
$\frac{x}{2}$	0	0,125	0,5	1	2	2,5
$2x$	0	0,5	2	4	8	10
x^2	0	0,0625	1	4	16	25

53 **a.** $\sqrt{121}=11$, nombre entier
b. $\sqrt{15}$, nombre irrationnel
c. $\sqrt{0,64}=0,8$, nombre décimal
d. $\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}=0,2$ nombre décimal
e. $\sqrt{\frac{49}{144}}=\frac{7}{12}$, nombre rationnel non décimal
f. $\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}$, nombre décimal

54 **a.** $(\sqrt{3})^2=3$ **b.** $(\sqrt{23,56})^2=23,56$
c. $(\sqrt{9})^2=9$ **d.** $(-\sqrt{7})^2=7$
e. $(\sqrt{10^2})^2=10^2$

55 **a.** 5 **b.** 300
c. 17 **d.** 20 **e.** 3,7

56 **a.** 5 **b.** –7 **c.** –36
d. 3 **e.** $-\frac{3}{2}$ **f.** 9

Tom se trompe puisque $-\frac{3}{2}$ n'est pas un nombre entier.

57 A = 8 B ≈ –17,1 C ≈ 1,1

58 **a.** 144 **b.** 28 **c.** 20 **d.** 72

59 **a.** 9 **b.** 8 **c.** 7 **d.** 25

60 $A = 4\sqrt{2}$ $B = 12\sqrt{3}$ $C = -2\sqrt{5}$ $D = 0$

61 $A = 8 + \sqrt{2}$ $B = -6 - 3\sqrt{5}$

C ne peut être réduite $D = 4 + 2\sqrt{11}$

62 Triangle 1

$4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 17\sqrt{3}$

Triangle 2

$7\sqrt{2} + 17 + 9\sqrt{2} = 17 + 16\sqrt{2}$

63 **a.** 1 600 **b.** 63 **c.** 32 **d.** 50

e. 10 **f.** 48 **g.** 1 **f.** $\frac{3}{2}$

64 **1. c.** **2. b.** **3. c.**

65 **a.** $5^2 = 25$ $(\sqrt{11})^2 + (\sqrt{14})^2 = 11 + 14 = 25$

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc EFG est rectangle en E.

b. $(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{7})^2 = 32 + 28 = 60$

$(2\sqrt{15})^2 = 60$

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc EFG est rectangle en F.

66 **1.**

a.	b.	c.
81	0,04	10
52	8	$7 + 5\sqrt{10}$

2.

a.	b.	c.
49	0,09	5
5	1,65	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

67 $A = 14 + 7\sqrt{5}$ $B = 2\sqrt{3} - 10$ $C = 15 - 10\sqrt{2}$

68 $x = 4 - 2\sqrt{3}$ $y = 4 - 2\sqrt{3}$

Simon a raison.

69 $A = 3 + 5\sqrt{3}$ $B = 3\sqrt{2} - 2$ $C = 2\sqrt{7} - 21$

70 **a.** $3 - \sqrt{5}$

b. $\sqrt{5} - 2 + 5 - 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{5}$

c. $6 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 10 = -4 - \sqrt{5}$

d. $2 + 2\sqrt{5} - 1 + 2\sqrt{5} = 1 + 4\sqrt{5}$

71 $A = 2\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} - 1 = 2 + 5\sqrt{3}$

$B = 2\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} + 1 = 4 - \sqrt{3}$

$C = 6 + 3\sqrt{3}$

$D = (2\sqrt{3} + 3)(3\sqrt{3} - 1) = 18 - 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 3 = 15 + 7\sqrt{3}$

72 $2(3 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1) = 8 + 6\sqrt{2}$

Le périmètre mesure $8 + 6\sqrt{2}$ cm

$(3 + \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1) = 6\sqrt{2} + 3 + 4 + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} + 7$

L'aire mesure $7\sqrt{2} + 7$ cm²

73 $$v = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}} = \frac{1}{\sqrt{1650 \times 6,4 \times 10^{-11}}} \approx 3\,077$$

L'arrondi à l'unité de la vitesse est 3 077 m/s.

Nombres x tels que $x^2 = a$

74 **a.** 7 et –7 **b.** 1 et –1 **c.** 5 et –5

d. $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$ **e.** $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ **f.** 0,4 et –0,4

75 Pour avoir $y^2 + 1 = 0$, il faut que y^2 soit égal à –1, ce qui est impossible, donc Loïc se trompe.

76 **a.** 5 et –5 **b.** $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$ **c.** 0

d. 6 et –6 **e.** 9 et –9 **f.** 11 et –11

77 1,414 ne peut pas remplacer x dans $x^2 = 2$, le nombre 1,414 n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$

On peut remplacer x par $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$

78 **a.** $P = 1\,600\,\pi\,35^2 \approx 6\,157\,521$

La puissance est environ 6 158 kW

b. $1\,600\,\pi\,L^2 = 10\,000\,000$

$L^2 = 10\,000\,000 : 1\,600\,\pi$

$L \approx 45$

La longueur des pales est environ 45 m.

79 **a.** $t^2 = \frac{2 \times 10}{9,81} = \frac{20}{9,81}$

$t = \sqrt{\frac{20}{9,81}} \approx 1,4$

La pierre mettra environ 1,4 s pour tomber au fond du puit.

b. $5^2 = \frac{2p}{9,81}$

$2p = 25 \times 9,81$ $2p = 245,25$ $p = 122,625$

La falaise mesure environ 123 m.

Racines carrées et opérations

80 **a.** $\sqrt{72}$ **b.** $\sqrt{245}$ **c.** $\sqrt{252}$

d. $\sqrt{3}$ **e.** $\sqrt{2}$ **f.** $\sqrt{3}$

81 **a.** 6 **b.** 8 **c.** 5 **d.** 29

e. 5 **f.** 2 **g.** 3 **h.** 2

82 **a.** $3\sqrt{5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = \sqrt{45}$ la réponse est juste.

b. $\frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ la réponse 3 est fausse.

c. $2\sqrt{3}\sqrt{7} = 2\sqrt{21} = \sqrt{84}$ la réponse $\sqrt{336}$ est fausse.

83 **a.** $2\sqrt{3}$ **b.** $3\sqrt{3}$ **c.** $5\sqrt{3}$

d. $4\sqrt{3}$ **e.** $8\sqrt{3}$

84 **a.** $2\sqrt{5}$ **b.** $3\sqrt{5}$ **c.** $9\sqrt{5}$

d. $6\sqrt{5}$ **e.** $17\sqrt{5}$

85 **a.** $5\sqrt{2}$ **b.** $10\sqrt{2}$ **c.** $\sqrt{2}$

d. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ **e.** $\frac{2}{5}\sqrt{2}$

86 **a.** $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

b. $A = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

$B = 6\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 21\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

87 $2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 2 \times 3\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$

88 **a.** $A \approx 18,385$

b. $A = 3 \times 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$

89 $A = \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

$B = \sqrt{50} - \sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$

90 **a.** $6 + 2\sqrt{5}$ **b.** $28 - 10\sqrt{3}$

c. $11 + 6\sqrt{2}$ **d.** $60 - 14\sqrt{11}$

91 **a.** $24 + 8\sqrt{5}$ **b.** $59 - 30\sqrt{2}$

c. $37 + 20\sqrt{3}$ **d.** $34 - 24\sqrt{2}$

92 $A = -6$ $B = 2$ $C = 14$ $D = 11$

93 **a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **d.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **e.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

94 $4\,(2 + \sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3}$

Le périmètre mesure $8 + 4\sqrt{3}$ cm

$(2 + \sqrt{3}\,)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

L'aire mesure $7 + 4\sqrt{3}$ cm^2

95 **1. a.** L'égalité de Pythagore appliquée au triangle ABC rectangle en B donne :

$BA^2 + BC^2 = AC^2$

$5^2 + 5^2 = AC^2$

$AC = \sqrt{2 \times 5^2}$ cm $= 5\sqrt{2}$ cm

b. $5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$

Le périmètre est $10 + 5\sqrt{2}$ cm

2. a. $BA^2 + BC^2 = 6^2$

$BA = BC$, donc $2\,AB^2 = 36$, d'où $AB^2 = 18$

$AB = 3\sqrt{2}$ cm

b. $2 \times 3\sqrt{2} + 6 = 6 + 6\sqrt{2}$

Le périmètre est $6 + 6\sqrt{2}$ cm.

96 TI = 6 cm donc MI = 3 cm

RMI est rectangle en M, d'après l'égalité de Pythagore,

$MR^2 + MI^2 = RI^2$

$MR^2 + 3^2 = 6^2$

$MR^2 = 36 - 9 = 27$

$MR = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

97 **a.** $12 : 3 = 4$ donc il s'agit de 2 ou de -2

b. $507 \times 3 = 1\,521$ donc il s'agit de 39 ou de -39.

98 On note ℓ la largeur, la longueur est alors 3ℓ et son aire est $\ell \times 3\ell = 3\ell^2 = 27$

d'où $\ell^2 = 9$ et $\ell = 3$; $3\ell = 9$

La plate–bande mesure 3 m sur 9 m.

99 On note a le côté de ce carré.

$a^2 + a^2 = 17^2$ $2\,a^2 = 289$ et $a^2 = \frac{289}{2}$

$a = \sqrt{\frac{289}{2}} \approx 12{,}02$ comme $6 \times 2 = 12$, on peut dire que le CD peut entrer dans cette pochette.

100 Tout multiple de 4 doit avoir ses deux derniers chiffres qui forment un nombre divisible par 4.

Le chifffre qui peut remplacer * dans 376 * 6 est donc 1, 3, 5, 7, ou 9.

On procède ensuite par essais

$\sqrt{37636} = 194$ et c'est la seule solution.

101 $2 \times \pi\, 4{,}5^2$ est l'aire du disque dont l'aire est le double de celle du disque de rayon 4,5 m

Si R est son rayon, $R^2 = 40{,}5\,\pi$

et $R = \sqrt{40{,}5\pi}$ cm $\approx 11{,}28$ m

102 $4\,(\sqrt{20} + 1) = 4\sqrt{20} + 4 = 8\sqrt{5} + 4$

$2\,(\sqrt{45} - 1 + \sqrt{5} + 3) = 2\,(3\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5}) = 4 + 8\sqrt{5}$

C'est Marine qui a raison, les deux périmètres sont égaux.

103 Selon la procédure utilisée, les résultats pour SN apparaissent écrits différemment.

Quelques exemples :

$SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$

$SN = \sqrt{45}$

$SN = \sqrt{125} \times \frac{3}{5}$

$SN = \sqrt{125} - \sqrt{125} \times \frac{2}{5}$

$SN = \sqrt{20} \times \frac{5}{2} - \sqrt{20}$

Quelques procédures pour les calculs :

1. SC dans ANI (Thalès)

ES = EC – SC

SN dans ESN (Pythagore)

2. AN dans ANI (Pythagore)

SC dans ANI (Thalès)

AS dans ASC (Pythagore)

SN = AN – AS

3. SC dans ANI (Thalès)

AN dans ANI (Pythagore)

AS dans ANI (Thalès)

SN = AN – AS

4. AN dans ANI (Pythagore)

AS dans ANI (Thalès)

SN = AN – AS

5. AN dans ANI (Pythagore)

$\cos \hat{N}$ dans RNA ($= 5/\sqrt{125}$)

$\cos \hat{N}$ dans ENS ($= 3/SN$)

SN par égalisation.

9. Vrai ou Faux

104 Faux, $\sqrt{\frac{7}{20}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$, chercher la racine carrée de 20 ne consiste pas à diviser par 2.

105 Faux, 0,25 n'est pas supérieur à sa racine carrée qui est 0,5.

106 Faux, 2 et – 2 ont le même carré 4.

107 Faux, pour $x = -9$ on a $-x = 9$ et $\sqrt{-x}$ a bien un sens.

108 Faux, $\sqrt{64} : 2 = 8 : 2 = 4$, chercher la racine carrée ne revient pas à diviser par 2.

109 Vrai, $3\sqrt{10} = \sqrt{9}\,\sqrt{10} = \sqrt{90}$

110 Faux, $\sqrt{45} + \sqrt{20} \neq \sqrt{65}$

111 Vrai, $a^2 + a^2 = 2\,a^2$ et $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

10. Calcul mental et réfléchi

112 $(\sqrt{4})^2 = 4$, tous les autres sont 16

113 **a.** $\sqrt{12 + 13} = 5$ **b.** $\sqrt{3 \times 12} = 6$

c. $\sqrt{5 \times 20} = 10$ **d.** $\sqrt{3 \times 15 \times 5} = 15$

e. $\sqrt{\frac{75}{3}} = 5$ **f.** $\sqrt{50 - 1} = 7$

114 **a.** $\sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$ **b.** 3 **c.** $\sqrt{5}$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

115 **a.** $3 \times 5 - 2 \times 2 = 11$ **b.** $6 - 24 = -18$

116 **a.** $1 < \sqrt{3} < 2$ **b.** $2 < \sqrt{8} < 3$

c. $4 < \sqrt{21} < 5$ **d.** $7 < \sqrt{60} < 8$

117 $A = 2\sqrt{2}$ $B = 7\sqrt{5} - \sqrt{7}$ $C = 3$ $D = 6$

11. Présenter, Argumenter, Communiquer

118 Les diagonales se coupent en leur milieu, donc $6\sqrt{3} : 2 = 3\sqrt{3}$ et $10\sqrt{5} : 2 = 5\sqrt{5}$

L'aire du losange est égale à 4 fois celle d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $\sqrt{3}$ cm et $5\sqrt{5}$ cm.

$\dfrac{3\sqrt{3} \times 5\sqrt{5}}{2} \times 4 = 30\sqrt{15}$

L'aire du losange est donc $30\sqrt{15}$ cm^2

Dans un des petits triangles rectangles, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$AB^2 = (3\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{5})^2 = 27 + 125 = 152$

$AB = \sqrt{152} = \sqrt{4 \times 38} = 2\sqrt{38}$

$4 \times 2\sqrt{38} = 8\sqrt{38}$

Le périmètre mesure $8\sqrt{38}$ cm.

119 **a.** $A = 3\sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b. Éric vérifie que les deux expressions ont la même valeur approchée mais n'a pas vérifié pour autant qu'elles ont la même valeur exacte.

120 **a.** $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ le produit de ces deux nombres est égal à 1, donc, par définition, ces deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

b. B et C semblent ou sont égaux.

$C = \dfrac{(\sqrt{6} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{6 - 5} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{1} = B$

121 **a.** $\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$ $\sqrt{7} \times \dfrac{1}{\sqrt{7}} = 1$

b. Les nombres $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$ sont opposés l'un de l'autre.

Les nombres $\sqrt{7}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ sont inverses l'un de l'autre.

122 $AB + AC = \sqrt{325} + \sqrt{52} = 5\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 7\sqrt{13}$

$BC = \sqrt{637} = 7\sqrt{13}$

On constate que BC = BA + AC donc les points sont alignés comme le dit Lou.

123 L'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$AB + AC + BC = 2 \times 2\sqrt{13} + 2 \times 4 = 8 + 4\sqrt{13}$

Eliott : $8 + \sqrt{104} = 8 + 2\sqrt{26}$, c'est faux.

Eléna : $8 + 2\sqrt{52} = 8 + 4\sqrt{13}$, c'est juste.

Paul, ce n'est qu'une valeur approchée.

Sarah, $4(2 + \sqrt{26}) = 8 + 4\sqrt{26}$, c'est faux.

Samy, c'est juste.

Lila, $2(4 + \sqrt{52}) = 8 + 4\sqrt{13}$, c'est juste.

124 **a.** $m = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \times 16 + 2 \times 9 - 25} = 2{,}5$

On remarque que la médiane est égale à la moitié de BC, ce qui est prévisible si on a remarqué que le triangle ABC est rectangle en A, en effet, il s'agit d'un triangle de côtés 3, 4 et 5.

b. $m = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \times 25 + 2 \times 16 - 49} = \dfrac{1}{2}\sqrt{33}$

Pour vérifier la vraisemblance du résultat, on peut chercher une valeur approchée et construire la figure sur laquelle on mesure la médiane.

125 **a.** C étant un point du demi-cercle de diamètre AB, le triangle ABC est rectangle en C.

Dans le triangle ACH, rectangle en H,

$AC^2 = CH^2 + HA^2$ d'où $AC^2 = CH^2 + 1$.

Dans le triangle BCH, rectangle en H,

HB = AB – AH d'où HB = 5 cm.

$BC^2 = BH^2 + HC^2$ d'où $BC^2 = 25 + CH^2$.

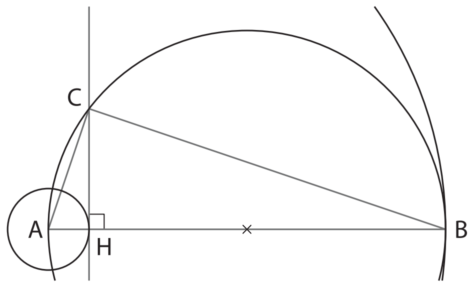
Dans le triangle ABC, rectangle en C,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ d'où $36 = CH^2 + 1 + 25 + CH^2$

Ainsi $36 = 2\,CH^2 + 26$ d'où $CH^2 = 5$.

Alors $AC^2 = 5 + 1$ soit $AC^2 = 6$ d'où $AC = \sqrt{6}$ cm.

b. Il suffit de remplacer AB = 6 cm par AB = 10 cm

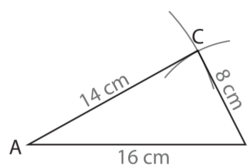


12. QCM

126 a. **127** b. **128** b. **129** b. **130** a.
131 a. **132** c. **133** b. **134** c. **135** c.
136 b. **137** c. **138** b. **139** a. b. c. **140** a. b. c.
141 a. b. c. **142** b. c.

13. Objectif brevet

143 **1. a.** *Figure à l'échelle 1/2*



b. Le côté le plus long est [AB].

$AB^2 = 16^2 = 256$

$AC^2 + BC^2 = 14^2 + 8^2 = 196 + 64 = 260$

$256 \neq 260$ ainsi $AC^2 + BC^2 \neq AB^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

2. $p = 16 + 14 + 8 = 38 \qquad \frac{p}{2} = \frac{38}{2} = 19$

$\mathcal{A} = \sqrt{19(19-16)(19-14)(19-8)} = \sqrt{3\,135}$

$\mathcal{A} \approx 56$ cm^2

L'aire de ce triangle est $\sqrt{3\,135}$ cm^2, soit environ 56 cm^2.

144 **a.** $6{,}4 \times 10^6 + 1{,}9 \times 10^6 = (6{,}4 + 1{,}9) \times 10^6 = 8{,}3 \times 10^6$

$r + h = 8{,}3 \times 10^6$ m

b. $v = \sqrt{\frac{13{,}4 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{8{,}3 \times 10^6}} = \sqrt{\frac{804}{83} \times 10^7} \approx 9842$

La vitesse de la fusée doit être environ 9 842 m/s ou $9{,}842 \times 10^3$ m/s.

145 **1.** Périmètre EFGH avec x pour longueur FG.

$2(1 + x) = 2 + 2x$

Périmètre ABCD

$4(1 + \sqrt{3}) = 4 + 4\sqrt{3}$

$2 + 2x = 4 + 4\sqrt{3}$

$2x = 2 + 4\sqrt{3}$ et $x = 1 + 2\sqrt{3}$

2. Pour $x = 4 + 2\sqrt{3}$,

Aire EFGH

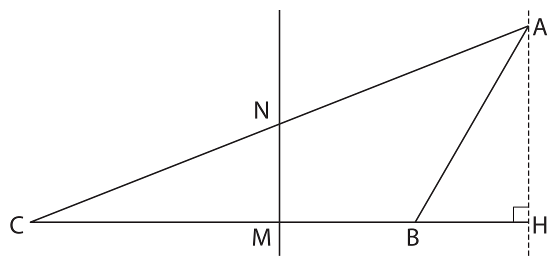
$1\,(4 + 2\sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$

Aire ABCD

$(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

Les aires sont alors bien égales.

146 **1. a.** *Figure à l'échelle 1/2*



2. a. $\widehat{ABH} = 180° - 120° = 60°$

– ABH est donc un demi-triangle équilatéral, (AH), hauteur de ce triangle est aussi médiatrice et BH = $\frac{6}{2} = 3$.

– ou BH = 6 cos 60° = 3

b. ABH étant rectangle en H, avec l'égalité de Pythagore,

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 36 - 9 = 27$

$AH = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

CH = 10 + 3 = 13

Aire du triangle ACH :

$$\frac{13 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2} = 19{,}5\sqrt{3}$$

c. Dans le triangle ACH, rectangle en H

$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 27 + 169 = 196$

AC = 14

3. a. Voir figure

b. Les droites (AC) et (CH) sont sécantes en C et les droites (MN) et (AH) sont parallèles, donc, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{MN}{AH} = \frac{CM}{CH} \qquad \frac{MN}{3\sqrt{3}} = \frac{6{,}5}{13} \qquad MN = \frac{6{,}5 \times 3\sqrt{3}}{13} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c. Aire du trapèze AHMN = Aire du triangle ACH – Aire du triangle CMN

$\frac{39\sqrt{3}}{2} - 6{,}5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} : 2 = \frac{39\sqrt{3}}{2} - \frac{39\sqrt{3}}{8} = \frac{117\sqrt{3}}{8} \approx 25$

L'aire est environ 25 cm^2

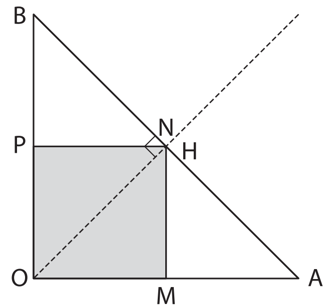
14. Exercices d'approfondissement

147 **1. a.** OMNP représente le napperon, OH est la distance de O à (AB), OH est la demi-diagonale d'un carré de côté OA = 35, d'où OH = $35\sqrt{2} : 2 = 17{,}5\sqrt{2}$

ON est la diagonale d'un carré de côté 17, d'où ON = $17\sqrt{2}$

On voit que ON < OH, on conclut que le napperon ne déborde pas du plateau.

Figure à l'échelle 1/10



b. MNRS représente le napperon carré avec RS = 17.

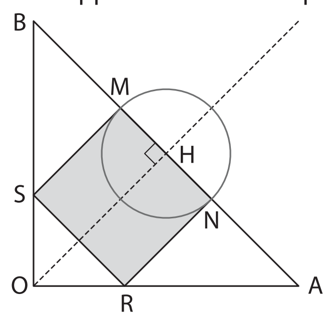
RNA est rectangle isocèle en N, donc :

RN = AN

= AH – HN

= $17{,}5\sqrt{2} - 8{,}5 \approx 16{,}24$

RS > RN donc le napperon déborde du plateau.



148 Des observations sur des essais montrent que :

– Seul un nombre dont le chiffre des unités est 5 a un carré dont le chiffre des unités est 5.

– En calculant les carrés de nombres dont le chiffre des unités est 5, on constate que les deux derniers chiffres sont toujours 25.

En effet, soit un de ces nombres, il s'écrit $d + 5$ avec d, le nombre de ses dizaines.

$(d + 5)^2 = d^2 + 10\,d + 25$

$d^2 + 10$ d est le nombre de centaines de son carré, autrement dit, le nombre $(d + 5)^2$ se termine par 25.

– Si d est le nombre de dizaines, $d = 10n$ avec n, nombre entier :

$$(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n + 1) + 25$$

On voit que le carré s'obtient en multipliant le nombre de centaines par le nombre qui le suit et en écrivant à la droite de ce produit 25.

Exemple avec le calcul du carré de 375 :

$37 \times 38 = 1\,406$ et donc le carré de 375 est $140\,625$.

– Reconnaître le carré d'un nombre :

$n\,(n+1)$ est toujours pair, ainsi, on peut dire que 23 725 n'est pas le carré d'un nombre car 7 est impair.

75625 en est-il un ? Autrement dit 756 est-il le produit de deux entiers consécutifs ?

$\sqrt{756} \approx 27{,}4$ et $756 : 27 = 28$

En effet $\sqrt{75625} = 275$t

149 **a.** $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\sqrt{50} - \sqrt{32} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$

AB = BC, ce rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

b. $(\sqrt{2})^2 = 2$

150 **1. a.** $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$

b. $x^2 - a = 0$ est équivalent à $x^2 = a$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0.$$

Ce produit est nul si l'un des facteurs est nul :

$x - \sqrt{a} = 0$, c'est-à-dire $x = \sqrt{a}$

$x + \sqrt{a} = 0$, c'est-à-dire $x = -\sqrt{a}$

Les deux nombres dont le carré est a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

2. a. $(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{a} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$

b. Chercher les nombres dont le carré est $3 - 2\sqrt{2}$ revient à résoudre $x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ où $x^2 = (1 - \sqrt{2})^2$ ou encore

$x^2 - (1 - \sqrt{2})^2 = 0$

$(x - 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}) = 0$

$x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = -1 + \sqrt{2}$

Les deux nombres dont le carré est $3 - 2\sqrt{2}$ sont $1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$.

151 **a.** Dans EFG, rectangle en F,

$EG^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \times 6^2$

Dans AEG, rectangle en E,

$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 6^2 + 2 \times 6^2 = 3 \times 6^2$

D'où $AG = 6\sqrt{3}$ avec $a = 6$ qui correspond à la longueur de l'arête.

b. $6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ cm

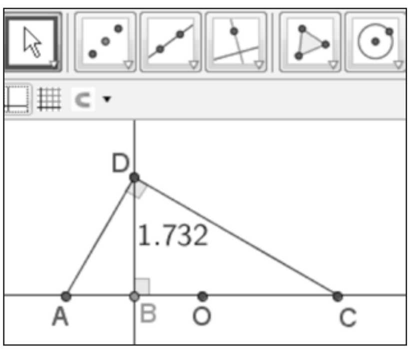
152 **a.** $(\sqrt{5} - 1)^2 + 2\,(\sqrt{5} - 1) - 4$

$$= 5 + 1 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2 - 4 = 0$$

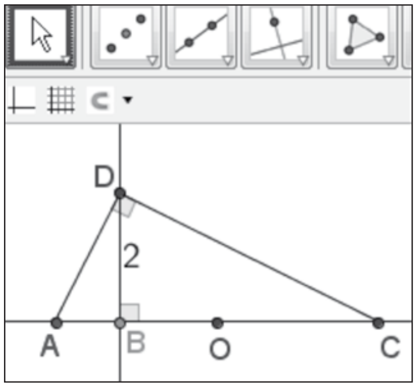
$\sqrt{5} - 1$ est bien solution de l'équation.

153 **1. a. b. c.**

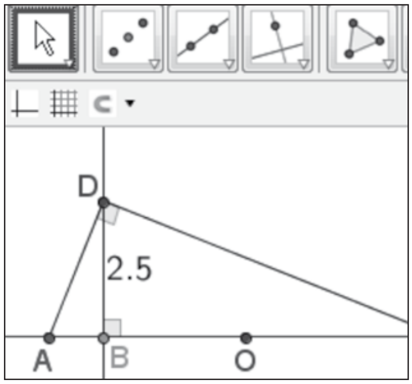
Le point D est l'intersection de la perpendiculaire en B au segment [AC] et du cercle (ou demi-cercle) de diamètre [AC].



2. • Pour BC = 4



• Pour BC = 6,25



3. BD semble être égale à la racine carrée de BC.

Dans ABD, rectangle en B :

$BD^2 = AD^2 - AB^2$

Dans BDC, rectangle en B :

$BD^2 = DC^2 - BC^2$

Ce qui donne :

$2BD^2 = AD^2 + DC^2 - AB^2 - BC^2$

or, $AD^2 + DC^2 = AC^2$ dans le triangle rectangle ACD

$2BD^2 = AC^2 - AB^2 - BC^2$

or, AC = AB + BC

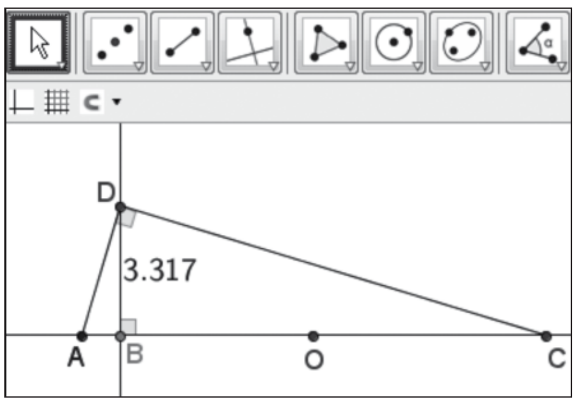
$2BD^2 = (AB + BC)^2 - AB^2 - BC^2$

$= AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC - AB^2 - BC^2 = 2\,AB \times BC$

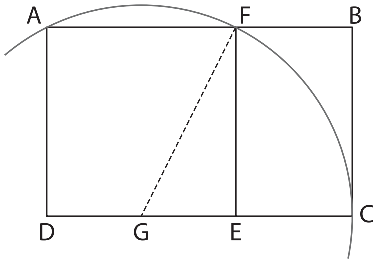
et donc $BD^2 = AB \times BC = 1 \times BC$

$BD = \sqrt{BC}$

4. On fait la figure précédente en choisissant BC = 11.



154 **1.** *Figure à l'échelle 1/2*



2. a. EFG est un triangle rectangle en E avec :

$$EF = 5 \text{ et } GE = \frac{5}{2}$$

D'après l'égalité de Pythagore

$FG^2 = GE^2 + EF^2 = \frac{25}{4} + 25 = \frac{125}{4}$

$FG = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

b. DC = DG + GC et vu que GF = GC

$DC = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}(1 + \sqrt{5})$

c. $\dfrac{\frac{5}{2}(1+\sqrt{5})}{5} = \dfrac{5(1+\sqrt{5})}{2\times 5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

155 $\frac{n}{4} + 2\sqrt{n} + 15 = n$ avec n, nombre entier.

Soit : $8\sqrt{n} - 3n = -60$

Avec un tableur, on trouve 36.

Il y a 36 chameaux dans ce troupeau.

15. Tâche complexe Changer de téléviseur

156 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Que veut dire « un téléviseur de 32 pouces » ? Qu'est-ce qui mesure 32 pouces sur l'écran du téléviseur ?

Aide n° 2 : 4/3 et 16/9 sont deux rapports ; entre quelles dimensions sont-ils établis ?

Aide n° 3 : Connaissant la longueur de la diagonale d'un écran et connaissant aussi le rapport entre la longueur et la largeur de cet écran, peut-on déterminer les dimensions de cet écran ?

2. Quelques commentaires

• On pourra, dans un premier temps, laisser les élèves réfléchir individuellement à la situation-problème.

Les élèves pourront ensuite travailler par groupes, pour échanger leurs idées, remarques ou questions.

• La situation est aisée à comprendre pour des élèves qui sont généralement familiarisés avec cet environnement ; les expressions « téléviseur de 32 pouces », « format 4/3 », « format 16/9 » sont connues (si cela n'était pas le cas, les élèves peuvent faire une recherche sur Internet). Néanmoins il n'est pas certain que la signification précise de ces expressions soit connue. Il sera donc nécessaire de leur donner du sens.

Sur différents sites (de vente en ligne par exemple) sur Internet, les élèves vont trouver que 32 pouces est la longueur de la diagonale de l'écran, mais aussi que cette diagonale mesure 80 cm ou 81 cm ou 82 cm !

Quant au format « historique » 4/3 et au format « large » 16/9, ils trouveront qu'il s'agit de rapports entre la largeur et la hauteur de l'image.

• Une clé de cette tâche complexe est de réussir, à partir de la donnée de la longueur de la diagonale d'un rectangle et du rapport entre la longueur et la largeur de ce rectangle, à trouver les deux dimensions de ce rectangle. L'égalité de Pythagore sera utilisée.

• Il est vraisemblable que des élèves voudront transformer les 32 pouces en centimètres. Là aussi une recherche sur Internet pourra être menée. Ce n'est pas nécessaire pour répondre au problème posé mais le professeur n'interviendra sur ce point qu'après la recherche.

• Les élèves peuvent répondre avec leurs connaissances de 4e. Le professeur pourra observer si ses élèves utilisent ou non leurs nouvelles connaissances sur la racine carrée.

• Différentes façons de procéder vont certainement apparaître. Il sera intéressant de demander aux élèves de présenter leurs démarches à l'ensemble de la classe.

• Toute piste de recherche, même non aboutie, sera valorisée. On cherchera également à valoriser des compétences liées à la pratique d'une démarche scientifique, comme identifier qualitativement des grandeurs caractéristiques à partir de l'observation du fonctionnement d'un objet, traduire les informations, réaliser des calculs, traduire la situation par un schéma, mettre en place une démarche, présenter sa démarche.

3. Éléments de réponse

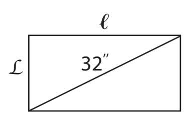
On s'en doute un peu ! La réponse est non.

Quelques façons de procéder :

a. Solution avec tableur

• L'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$$\ell^2 + \mathcal{L}^2 = 32^2$$



• Recherche des dimensions d'un écran 32 ″ au format 4/3 et au format 16/9 :

On entre :

– en cellules A3 et A15 la largeur de l'écran

– en cellule B3, la formule =A2*4/3

– en cellule C3, la formule =RACINE(A2^2+B2^2)

– en cellule B15, la formule =A15*16/9

– en cellule C15, la formule =RACINE(A15^2+B15^2)

Remarque : certains élèves créeront peut-être une colonne supplémentaire pour calculer le carré de la diagonale avant de calculer la longueur de cette diagonale. L'objectif est ici de trouver 32 ″ comme longueur de la diagonale.

	A	B	C
1	Format 4/3		
2	Largeur (en ")	Longueur (en ")	Diagonale (en ")
3	15	20	25
4	16	21,3333333333	26,6666666667
5	17	22,6666666667	28,3333333333
6	18	24	30
7	19	25,3333333333	31,6666666667
8	20	26,6666666667	33,3333333333
9			
10	19,1	25,4666666667	31,8333333333
11	19,2	25,6	32
12			
13	Format 16/9		
14	Largeur (en ")	Longueur (en ")	Diagonale (en ")
15	15	26,6666666667	30,5959329178
16	16	28,4444444444	32,635661779
17			
18	15,1	26,8444444444	30,7999058039
19	15,2	27,0222222222	31,00387869
20	15,3	27,2	31,2078515762
21	15,4	27,3777777778	31,4118244623
22	15,5	27,5555555556	31,6157973484
23	15,6	27,7333333333	31,8197702345
24	15,7	27,9111111111	32,0237431206

• La même démarche peut se faire avec les dimensions exprimées en cm.

1 pouce correspond à 2,54 cm.

$$32 \times 2{,}54 = 81{,}28$$

La diagonale du téléviseur mesure 81,28 cm.

L'objectif est ici de trouver 81,28 cm comme longueur de la diagonale.

	A	B	C
1	Format 4/3		
2	Largeur (en cm)	Longueur (en cm)	Diagonale (en cm)
3	48	64	80
4	49	65,3333333333	81,6666666667
5			
6	48,7	64,9333333333	81,1666666667
7	48,8	65,0666666667	81,3333333333
8			
9	Format 16/9		
10	Largeur (en cm)	Longueur (en cm)	Diagonale (en cm)
11	39	69,3333333333	79,5494255863
12	40	71,1111111111	81,5891544475
13			
14	39,8	70,7555555556	81,1812086753
15	39,9	70,9333333333	81,3851815614

b. Solution utilisant une situation de proportionnalité

Cette démarche utilise le fait que les dimensions d'un écran de format 4/3 sont proportionnelles à celles d'un rectangle de dimensions 4 et 3 (même chose pour un écran de format 16/9).

• Pour un format 4/3 :

$3^2 + 4^2 = 5^2$: on retrouve le triangle rectangle 3, 4, 5.

	diagonale	longueur	hauteur
	5	4	3
Pouces	32	$4 \times \dfrac{32}{5} = 25{,}6$	$3 \times \dfrac{32}{5} = 19{,}2$
Centimètres	81,28	65,024	48,768

• Pour un format 16/9 :

d désignant la longueur de la diagonale de l'écran, l'égalité de Pythagore permet d'écrire : $d^2 = 9^2 + 16^2$ soit $d^2 = 337$; ainsi $d = \sqrt{337}$.

On obtient :

	diagonale	longueur	hauteur
	$\sqrt{337}$	16	9
Pouces	32	$16 \times \dfrac{32}{\sqrt{337}} \approx 27{,}89$	$9 \times \dfrac{32}{\sqrt{337}} \approx 15{,}69$
Centimètres	81,28	≈ 70,84	≈ 39,85

c. Solution utilisant le calcul littéral

Cette démarche utilise le fait que pour un écran de format 4/3, la longueur est égale aux 4/3 de la hauteur et que pour un écran de format 16/9, la longueur est égale aux 16/9 de la hauteur (à cette occasion, les élèves remarqueront sans doute que 16/9 est le carré de 4/3).

Avec des dimensions en pouces :

• L'égalité de Pythagore permet d'écrire : $\ell^2 + \mathcal{L}^2 = 32^2$

De plus $\mathcal{L} = \dfrac{4}{3}\ell$ pour le format 4/3.

D'où $\ell^2 + \left(\dfrac{4}{3}\ell\right)^2 = 32^2$ ou $\ell^2 + \dfrac{16}{9}\ell^2 = 32^2$

soit $\dfrac{25}{9}\ell^2 = 32^2$.

Ainsi $\ell = 32 \times \dfrac{3}{5}$ soit $\ell = 19{,}2''$.

Alors $\mathcal{L} = \dfrac{4}{3} \times 19{,}2''$ soit $\mathcal{L} = 25{,}6''$.

• Pour le format 16/9 $\mathcal{L} = \dfrac{16}{9}\ell$

D'où $\ell^2 + \left(\dfrac{16}{9}\ell\right)^2 = 32^2$ ou $\ell^2 + \dfrac{256}{81}\ell^2 = 32^2$

soit $\dfrac{337}{81}\ell^2 = 32^2$. Ainsi $\ell = 32 \times \dfrac{9}{\sqrt{337}}$ soit $\ell \approx 15{,}7''$.

Alors $\mathcal{L} = \dfrac{16}{9} \times 32 \times \dfrac{9}{\sqrt{337}}$ ou $\mathcal{L} = 32 \times \dfrac{16}{\sqrt{337}}$ soit $\mathcal{L} \approx 27{,}9''$

d. Conclusion

• **Avec des dimensions en pouces :**

Un écran 32 ʺ au format 4/3 a pour hauteur 19,2ʺ et pour longueur 25,6 ʺ.

Au format 16/9, il a sa hauteur proche de 15,7ʺ et sa longueur proche de 27,9ʺ.

• **Avec des dimensions en centimètres :**

Un écran 32ʺ (soit 81,28 cm) au format 4/3 a sa hauteur proche de 48,8 cm et sa longueur proche de 65 cm.

Au format 16/9, il a sa hauteur proche de 39,9 cm et sa longueur proche de 70,8 cm.

• **Réponse :**

En pouces : $27{,}9 > 25{,}6$

En centimètres : $70{,}8 > 65$

Que ce soit en pouces ou en centimètres, on constate que le fils se trompe car le nouveau téléviseur a une longueur supérieure à celle de l'ancien et ne pourra pas être mis dans le meuble.

Remarque : La hauteur n'intervient pas dans le raisonnement.

16. En route vers la Seconde

157 **a.** 13 correspond à la 13e lettre de l'alphabet, donc M.

b. ❶ 13, donc M ❷ 1, donc A
❸ 20, donc T ❹ 8, donc H

Le mot formé est MATH.

158 **1.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

2. a. $(\sqrt{8} - \sqrt{6})(\sqrt{8} + \sqrt{6}) = 8 - 6 = 2$

b. $A = \dfrac{3(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})} = \dfrac{3(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{2}$

159 **a.** 12 **b.** 80 **c.** $11 - 6\sqrt{2}$ **d.** $14 - 8\sqrt{3}$

160 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = 3 + 5 + 2\sqrt{15} = 8 + 2\sqrt{15}$

d'où $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$.

161 **a.** $(2 - \sqrt{7})^2 = 4 + 7 - 4\sqrt{7} = 11 - 4\sqrt{7}$

b. $\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = \sqrt{7} - 2$

En effet, la réponse doit être un nombre positif.

Or $\sqrt{7} > 2$ d'où $\sqrt{7} - 2 > 0$ (alors que $2 - \sqrt{7} < 0$)

162 Si $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4{,}5}$ est vraie alors on a $\dfrac{2+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4{,}5}$

soit $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{4{,}5}$

Or $\sqrt{2} \times \sqrt{4{,}5} = \sqrt{9} = 3$ donc l'égalité est bien vraie.

163 • $\dfrac{1}{2+3\sqrt{5}} = \dfrac{41}{41(2+3\sqrt{5})}$

• $\dfrac{-2+3\sqrt{5}}{41} = \dfrac{(-2+3\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})}{41(2+3\sqrt{5})} = \dfrac{-4+45}{41(2+3\sqrt{5})}$

$= \dfrac{41}{41(2+3\sqrt{5})} = \dfrac{1}{2+3\sqrt{5}}$

On constate que les deux expressions sont celles d'un même nombre.

L'une d'elles n'a pas de radical au dénominateur.

164 **a.** Les carrés des deux nombres sont 48 et 50, donc $4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$

Les carrés sont $\dfrac{11}{5}$ et $\dfrac{13}{6}$ soit $\dfrac{66}{30}$ et $\dfrac{65}{30}$ donc :

$$\sqrt{\frac{11}{5}} > \sqrt{\frac{13}{6}}$$

Les carrés sont $\dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{6}$ et $\dfrac{19}{6}$ donc :

$$-\sqrt{\frac{10}{3}} < -\sqrt{\frac{19}{6}}$$

165 **a.** $AO = 2\sqrt{2}$, c'est la demi-diagonale d'un carré de côté 4. Dans SAO, rectangle en O,

$SO^2 = AO^2 + AS^2 = 8 + 16 = 24$

$SO = 2\sqrt{6}$

b. Chaque face latérale a une hauteur de $2\sqrt{3}$ cm et donc une aire de $4\sqrt{3}$ cm².

L'aire latérale est donc $16\sqrt{3}$ cm².

CHAPITRE 6

Équations et inéquations du premier degré

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Les notions d'équation et d'inéquation ne sont pas des compétences du socle commun et pourtant la résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'enseignement des mathématiques au collège. Dans le cadre du socle, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes par essais successifs ou par une méthode arithmétique. Ce chapitre en tient compte, tout en permettant de recourir à une méthode algébrique lorsque celle-ci est pertinente (les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, afin que le calcul littéral prenne toute sa place comme moyen d'expression, mais de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens).

En **6e**, les élèves poursuivent le travail sur les nombres entiers et décimaux, sur les opérations et leur sens, avec le vocabulaire associé. Ils placent des nombres sur une demi-droite graduée. Une initiation aux écritures littérales est faite à partir du travail sur les périmètres.

En **5e**, les élèves renforcent leurs compétences sur les différentes écritures numériques ; ils travaillent sur les enchaînements d'opérations, sur le rangement des nombres relatifs courants en écriture décimale. Lors d'activités graphiques, ils interprètent l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine.

En matière de calcul littéral, l'année de **5e** est une étape importante : initiation aux écritures littérales (utilisation et production d'expressions littérales) et à la notion d'équation, avec un travail sur égalités et inégalités vues comme assertions dont la vérité est à examiner. Les élèves apprennent à tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques. Une nouvelle signification du signe = est mise en évidence.

C'est aussi dans cette classe que les élèves étudient la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

En **4e**, les élèves renforcent leurs compétences sur les écritures numériques et littérales. Dans le domaine numérique, ils sont familiarisés avec l'usage des priorités et travaillent sur l'organisation et la gestion de programmes de calcul utilisant des parenthèses ; ils effectuent les séquences de calcul correspondantes. En calcul littéral, ils calculent la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques, ils réduisent des expressions littérales à une variable, du 1er ou du 2d degré, avec présence de parenthèses ; ils développent pas à pas des expressions de la forme $(a + b)(c + d)$ puis réduisent l'expression obtenue. Ils factorisent des expressions littérales dans le cas où le facteur commun est du type a, ax ou x^2.

En matière de résolution de problèmes, ils apprennent à mettre un problème en équation et à résoudre ce problème, l'équation obtenue étant du premier degré à une inconnue.

A chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : choix de l'inconnue, mise en équation, résolution de l'équation, interprétation du résultat.

Des situations aboutissant à une équation de la forme $ax + b = cx + d$ ($a \neq c$) permettent de montrer les limites des méthodes de résolution arithmétique ou par essais et ajustements et de faire sentir l'intérêt d'une méthode de résolution algébrique. Dans le cadre du socle commun, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

C'est aussi en **4e** que les élèves travaillent sur la comparaison de deux nombres relatifs ; en effet, on établit les propriétés suivantes : équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$), équivalence entre $a = b$ et $a - b = 0$, équivalence entre $a > b$ et $a - b > 0$. Ces propriétés sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le registre littéral. On utilise aussi le fait que les nombres $a + c$ et $b + c$, ainsi que les nombres $a - c$ et $b - c$ sont dans le même ordre que les nombres a et b, et que les nombres ac et bc sont dans le même ordre que les nombres a et b si c est un nombre strictement positif, dans l'ordre inverse si c est un nombre strictement négatif.

Enfin, de la **6e** à la **4e**, les élèves travaillent sur les figures usuelles, leurs propriétés, leurs aires, ainsi que sur les objets usuels, leurs propriétés, leurs volumes ; ces figures et objets peuvent donc servir de support à la résolution de problèmes.

2. Équations du premier degré à une inconnue

Dans **les activités 1 et 2**, les élèves sont confrontés à la résolution d'un problème de la vie courante.

L'activité 1 est l'occasion de résoudre ce problème par une méthode arithmétique liée à la réalisation d'un schéma. Les élèves sont invités à comprendre le schéma proposé, à l'interpréter puis à résoudre le problème.

Dans **l'activité 2**, les élèves sont amenés à suivre des explications permettant de résoudre ce problème par une méthode algébrique. La mise en équation du problème ainsi que les étapes de la résolution sont présentées ; le travail des élèves consiste d'une part à légitimer la mise en équation proposée, d'autre part à retrouver les règles permettant de résoudre pas à pas une équation de la forme $ax + b = cx + d$. L'interprétation du résultat doit permettre de vérifier si les réponses apportées à ces deux activités sont cohérentes.

On pourra poursuivre par l'étude du **§1 du cours** page 116, où les étapes de la résolution d'une telle équation sont explicitées, l'objectif de chacune d'elles étant précisé, et par **les exercices 14 à 21** à l'oral. Si les équations des **exercices 15 à 18** peuvent être résolues mentalement par certains élèves, d'autres auront peut-être besoin d'utiliser papier et stylo. Ces exercices sont là pour permettre aux élèves de se réapproprier la résolution d'une équation du premier degré. D'autres équations sont proposées aux **exercices 37 à 45** ainsi qu'à **l'exercice 56**.

Ces exercices pourront être précédés ou suivis, selon le choix de l'enseignant, par la résolution des **problèmes 19 à 21**, avec une méthode arithmétique ou algébrique ; ils pourront être à l'origine d'échanges entre élèves. De même, dans les exercices d'application, les **problèmes 46 à 48** ont vocation à être résolus par une méthode arithmétique mais certains élèves peuvent préférer une démarche algébrique. Après une transition par la résolution de deux problèmes issus de la géométrie (**49 et 50**) où l'inconnue est indiquée, viennent des problèmes (**51 à 55**) dont la résolution se fait suite à une mise en équation : sauf exception (n° 54), nous avons choisi des situations où celle-ci est fortement suggérée ; il pourra être intéressant de faire rechercher quelles erreurs de raisonnement ont été commises lors de l'écriture d'une équation erronée (n° 53) et de faire remarquer (n° 55) que plusieurs équations différentes peuvent traduire la même situation.

3. Équations « produit nul »

L'objectif de **l'activité 3** est d'introduire les règles d'un produit nul.

L'activité 4 lui fait suite naturellement. La comparaison des deux démarches proposées doit permettre de privilégier la propriété suivante : Les solutions de l'équation « produit nul » $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les nombres x tels que $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Elle pourra servir de référence lors d'éventuelles erreurs ultérieures.

On pourra poursuivre ce travail par l'étude du **§2.b du cours** où les élèves pourront trouver un exemple, qui a vocation à servir de référence, puis par les **exercices à l'oral 22 et 23**, avec reconnaissance d'une équation « produit nul » d'une part et résolution d'une telle équation d'autre part, puis par les **exercices 58 à 62**. Les **exercices à l'oral 24 et 25** doivent amener les élèves à réfléchir en s'interrogeant sur certains pièges à éviter.

Les **exercices 63 à 66** portent également sur la résolution d'équations « produit nul » ; ils nécessitent certaines compétences en calcul littéral, en particulier en factorisation.

4. Inéquations du premier degré à une inconnue

Les compétences des élèves à l'issue de la 4^e portent uniquement sur des inégalités, le mot « inéquation » ne figurant d'ailleurs que dans le programme de 3^e. L'objectif de **l'activité 5** est de distinguer inégalité (assertion soit vraie soit fausse) d'inéquation. L'utilisation d'un tableur permet de s'intéresser quasi exclusivement au sens, en dégageant les élèves de calculs répétitifs et fastidieux. La notion de solution d'une inéquation est introduite.

L'objectif de **l'activité 6** est de donner aux élèves une méthode algébrique de résolution d'une inéquation, en cohérence avec la méthode algébrique de résolution d'une équation et avec les règles étudiées en 4^e sur les inégalités (et rappelées lors des exercices 6 à 8 de la rubrique « Je vérifie mes acquis »). On profite de cette activité pour étudier la représentation des solutions d'une inéquation sur une droite graduée. On introduira le crochet, on explicitera son orientation et sa couleur.

Les deux exemples détaillés qui figurent au **§3.b. du cours** pourront être étudiés pas à pas.

Les exercices à l'oral 26 à 33 doivent permettre aux élèves de commencer à s'approprier la méthode de résolution algébrique d'une inéquation, de décider si un nombre est ou n'est pas solution d'une inéquation, d'associer solutions d'une inéquation et représentation de ces nombres sur une droite graduée. Ce sont aussi les objectifs des **exercices 68 à 75**.

On pourra utilement compléter ce travail par **les exercices 10 (exercice résolu) et 11** avec utilisation d'un tableur.

Une fois appropriée cette méthode de résolution d'une inéquation, on pourra complexifier la forme de l'écriture littérale des inéquations, comme dans **l'exercice résolu 2 et les exercices 7 et 8**.

La résolution de problèmes est également présente, comme dans **l'exercice à l'oral 34**, où on peut imaginer facilement une résolution sans mise en inéquation, et dans **les exercices 3 (exercice résolu) et 9**, problèmes « classiques » avec comparaison de tarifs, où on introduira la mise en inéquation, avec les différentes étapes, en tous points identiques à celles mises en place pour la mise en équation d'un problème. Les quatre **exercices 76, 77, 81 et 82**, tous issus de sujets de brevet, complètent cette étude.

5. Savoir-faire

L'exercice résolu 1 est le support de la résolution d'un problème d'arithmétique, avec exploitation de compétences en calcul littéral. Il est préférable de l'étudier une fois ces compétences réactivées. En effet, après une mise en équation de ce problème, on est amené à résoudre une équation de degré 2. Grâce à l'équivalence entre $a = b$ et $a - b = 0$ puis grâce à une factorisation, on parvient à la résolution d'une équation « produit nul ».

Les **exercices 4 à 6** permettent aux élèves de s'exercer sur ce type de problèmes.

On pourra compléter ce travail avec **l'exercice 67**.

La page **Atelier Brevet** est alimentée par deux exercices très différents. Le premier exercice guidé (**12**) a comme support un programme de calcul. Ce type de sujet est très fréquent. Si les premières questions portent sur des calculs numériques, la fin amène souvent à une généralisation et au passage au calcul littéral, avec développement, factorisation, résolution d'équation. On retrouvera ce type de problème dans la partie « Travailler avec un programme de calcul » de la page **Objectif Brevet**.

L'objectif du second exercice résolu (**13**) est de déterminer si un nombre donné est ou non solution d'une équation ou d'une inéquation donnée. Remplacer l'inconnue par le nombre proposé et observer si l'égalité ou l'inégalité est vraie ou non constitue une démarche efficace. Dans certains cas, si sa forme fait partie des formes étudiées, il est aussi possible de résoudre l'équation ou l'inéquation. On trouve ce type de question très fréquemment lors de QCM.

6. Compléments

• Les exercices de la page **Présenter, argumenter, communiquer,** dont plusieurs ont été proposés au Brevet, sont issus de domaines variés.

Présenter la démarche suivie, *présenter les résultats obtenus*, *argumenter*, *communiquer à l'aide d'un langage adapté* sont des items de la compétence 3 du socle commun de connaissances et de compétences.

Dans les **exercices 94 et 95**, on distinguera les réponses erronées des solutions correctes, mais justifiées de manière incomplète. On y travaillera aussi la qualité de la rédaction.

Dans **les exercices 96, 98 et 100**, on travaille à partir d'affirmations. Ces situations peuvent donner lieu à débat. On prendra en compte les essais, les démarches engagées, même non abouties. Les idées pertinentes, même maladroitement formulées, seront valorisées.

L'exercice 99 porte sur la résolution d'une équation de la forme $x^2 = a$ ($a \geqslant 0$), avec deux méthodes de résolution (celle étudiée au chapitre 5 ; celle liée à une factorisation de $x^2 - a$).

Dans **les exercices 96 et 101**, on pourra s'intéresser à la démarche suivie pour justifier un résultat.

La narration de recherche (exercice 102) porte sur un sujet à support géométrique simple. Il est possible que certains élèves commencent par avoir envie d'essayer de faire la figure. De cet essai peuvent naître des relations entre les longueurs des côtés des différents carrés.

• Plusieurs extraits de sujets de Brevet figurent également dans la page **QCM pour s'évaluer**. La totalité du chapitre est balayée dans ces questions de travail autonome.

• Dans la première partie de la page **Objectif Brevet,** on pourra insister sur la prise d'initiative nécessaire dès que les premières questions (où on effectue quelques calculs en suivant des consignes) ont été traitées et sur le fait – comme l'indique l'énoncé – que toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation. En effet, aucune indication n'est donnée sur la démarche à suivre. Les dernières questions de ces deux sujets peuvent en effet être traitées par une méthode par essais-erreurs ou par une méthode arithmétique ; toutefois on pourra montrer qu'une démarche utilisant une méthode algébrique a l'avantage de rassurer sur un éventuel oubli de solution.

La seconde partie de cette page porte sur des comparaisons de tarifs. Interpréter équation ou inéquation, interpréter les résultats, amène les élèves à réfléchir et à donner du sens à leurs réponses. On trouve aussi ce type de problème dans des exercices liés à une/des fonction (s) affine(s) [voir chapitre 10].

• Les situations proposées dans les **exercices d'approfondissement** sont riches et variées. Ces exercices peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Toute piste de recherche sera valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète.

La plupart de ces exercices demandent à l'élève des compétences dans différents domaines et une réflexion plus importante. Sauf exception, ils nécessitent des connaissances en calcul littéral ; ils peuvent être d'ailleurs une motivation pour certains élèves à améliorer leurs compétences en ce domaine.

Il s'agit aussi d'exercices hors socle commun pouvant néanmoins être utilisés pour valider plusieurs capacités, dans des domaines différents comme construire une figure, émettre une conjecture, proposer une procédure, faire des essais, déduire, etc.

L'exercice 121 demande une certaine autonomie pour réaliser des figures avec un logiciel de géométrie. Après cette phase de construction, vient une phase de conjecture, puis la démonstration de cette conjecture.

Les élèves commenceront sans doute par faire des essais pour résoudre la situation de **l'exercice 122** ; mais il sera sans doute nécessaire de passer à une démarche avec calcul littéral.

L'exercice 123 (**Math et ARTS**) peut être le support d'un exposé. A noter que cet exercice (comme **l'exercice 57)** peut être résolu par une méthode arithmétique et une méthode algébrique.

L'exercice 124, issu d'un sujet de brevet, commence par une assez longue partie de calcul numérique nécessitant une certaine réflexion. Puis vient une partie non évidente avec utilisation du calcul littéral.

Les exercices 125 et 126 permettent d'aller un peu plus loin dans le domaine de la résolution d'équations et d'inéquations.

Par contre, **le défi** n'est pas particulièrement difficile ; il pourra être résolu de différentes façons.

• Les élèves, qui peuvent là aussi travailler en petits groupes, pourront prendre l'initiative de faire vivre la situation développée dans la **tâche complexe,** ce qui peut être source d'observations pertinentes. Là aussi plusieurs niveaux de réponses sont envisageables.

• Dans la rubrique **En route vers la Seconde**, les élèves travailleront sur deux problèmes (**129 et 131**) choisis entre autres pour leur intérêt historique. Dans **l'exercice 131**, on pourra faire étudier les étapes pas à pas, jour après jour.

Deux autres problèmes, issus de la géométrie, seront résolus après une mise en équation ; mais peut-être certains élèves commenceront-ils par réaliser une figure conforme à l'énoncé et émettre une conjecture. Dans **l'exercice 132**, le calcul littéral se révèle un outil pertinent pour résoudre le problème posé. La copie d'écran du logiciel de calcul formel Xcas permet de surmonter certaines difficultés liées à des développements (identité remarquable) et à la résolution d'une équation du second degré.

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

On « remonte » le programme de calcul :

$10 - 1 = 9$ puis $9 \times 3 = 27$ et enfin $27 : 0{,}5 = 54$.

Le nombre à placer à l'intérieur du triangle est 54.

• Devinette

• On peut faire des essais en donnant des valeurs entières à x.

Pour $x = -2$: $x - 1 = -3$; $x + 1 = -1$; $-x = 2$; $6x = -12$.

Pour $x = -10$: $x - 1 = -11$; $x + 1 = -9$; $-x = 10$; $6x = -60$.

Pour $x = -1$: $x - 1 = -2$; $x + 1 = 0$; $-x = 1$; $6x = -6$.

Il semble que le plus grand des nombres soit $-x$.

• Une preuve : Comme x est tel que $x < 0$, alors :

• $x + 1 < 1$ • $-x > 0$ • $6x < 0$ • $x - 1 < -1$

On compare les deux nombres $x + 1$ et $-x$ (l'un est positif et l'autre peut l'être). Comme $-x > 0$ et que x est un nombre entier, alors $-x \geqslant 1$. Ainsi $-x$ est supérieur à $x + 1$. Le plus grand nombre est donc $-x$.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : c.

« Retrancher 5 » signifie « Soustraire 5 » et non « Diviser par 5 » (réponse **a.**). De plus, il ne faut pas oublier d'écrire des parenthèses, avant de multiplier par 2 (réponse **b.**).

2 Bonne réponse : c.

En effet $(x - 3)(2x + 1)$ est le produit de $(x - 3)$ par $(2x + 1)$.

a. C'est une somme (dernière opération : ajouter 2).

b. C'est une différence (dernière opération : soustraire 1).

3 Bonne réponse : a.

En effet, il s'agit d'une égalité écrite sous la forme :

$ax + b = cx + d$ (où a, b, c, d désignent des nombres).

Ici, l'inconnue est t.

b. Il ne s'agit pas qu'une équation, mais d'une égalité : les deux membres de cette égalité sont égaux à $-\dfrac{5}{6}$.

c. Il s'agit d'un produit. On peut noter l'absence du signe = indispensable pour toute équation.

4 Bonne réponse : b.

On remplace x par -4 :

$$x(2x - 1) = -4 \times (-9) = 36 \text{ et } 6(2 - x) = 6 \times 6 = 36.$$

Donc -4 est une solution de l'équation.

a. Pour $x = 2$, $x(2x - 1) = 2 \times 3 = 6$ et $6(2 - x) = 6 \times 0 = 0$; $6 \neq 0$.

c. Pour $x = -2$, $x(2x - 1) = -2 \times (-5) = 10$ et $6(2 - x) = 6 \times 4 = 24$; $10 \neq 24$.

5 Bonne réponse : a.

Chaque point rouge de la droite graduée a son abscisse inférieure ou égale à 2 (le point d'abscisse 2 est rouge).

b. Il ne faut pas oublier les points situés entre les points d'abscisse 1 et d'abscisse 2.

c. Le point d'abscisse 2 est rouge, or l'inégalité $x < 2$ indique que x est strictement inférieur à 2 et ne peut être égal à 2.

6 Bonne réponse : a.

La règle Ordre et addition permet d'ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité. En ajoutant 4 à chaque membre de l'inégalité, on obtient :

$$x - 4 + 4 < 3 + 4 \text{ soit } x < 7.$$

b. On a ajouté 4 au membre de gauche et -4 à celui de droite.

c. On a ajouté 4 au membre de gauche et divisé celui de droite par -4.

7 Bonne réponse : b.

La règle Ordre et multiplication permet de multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif en conservant le sens de l'inégalité.

En multipliant chaque membre de l'inégalité $x \leqslant 5$ par 2, on obtient :

$$2 \times x \leqslant 2 \times 5 \text{ soit } 2x \leqslant 10.$$

a. On a multiplié le membre de gauche par 2 et ajouté 2 à celui de droite.

c. Dans le cas où on multiplie les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement positif, on conserve le sens de l'inégalité.

8 Bonne réponse : b.

La règle Ordre et multiplication permet de multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité.

En multipliant chaque membre de l'inégalité $x > -4$ par -3, on obtient : $-3 \times x < -3 \times (-4)$ soit $-3x < 12$.

a. On a oublié de changer le sens de l'inégalité (on a multiplié les deux membres par (-3), nombre strictement négatif).

c. On a multiplié le membre de gauche par -3 … mais $-3 \times (-4)$ est égal à 12 et pas à 7.

3. Calcul mental

9 **a.** 2 **b.** 3,5 **c.** –2 **d.** –1,5 **e.** 0,75

4. Activités

Équations du premier degré à une inconnue

1 Résoudre un problème du premier degré

Chaque rectangle coloré correspond au prix d'un T-shirt le mercredi.

En ce qui concerne le mardi : $4 + 4 + 4 + 11{,}40 = 23{,}4$

$23{,}4 : 2 = 11{,}7$ ainsi le prix d'un T-shirt le mercredi est 11,70 €.

2 Mettre un problème en équation

a. x désigne le prix d'un T-shirt le mardi ; comme le prix d'un T-shirt a baissé de 4 € le mercredi, alors un T-shirt coûte $x - 4$ € le mercredi.

Le mardi, Tangui a acheté 3 T-shirts et il lui reste 11,40 €. Le montant de ses économies est donc $3x + 11,4$.

Le mercredi, il aurait pu acheter exactement 5 T-shirts au nouveau prix, donc le montant de ses économies est $5(x - 4)$.

Sabrina a écrit le montant des économies de Tangui de ces deux façons.

b. $3x + 11,4 = 5(x - 4)$

d'où $3x + 11,4 = 5x - 20$ après développement.

$a = 3$; $b = 11,4$; $c = 5$ et $d = -20$

c. $3x + 11,4 = 5x - 20$

On soustrait $3x$ à chaque membre.

$11,4 = 2x - 20$

On ajoute 20 à chaque membre.

$31,4 = 2x$

On divise chaque membre par 2.

$15,7 = x$

d. Le mardi, le prix d'un T-shirt est 15,70 €.

e. Ce prix est cohérent avec celui trouvé par Djibril à l'activité **1**, puisqu'il trouve 11,70 € le mercredi, soit 4 € de moins que 15,70 €, prix d'un T-shirt le mardi.

Équations « produit nul »

3 Comprendre l'obtention d'un produit nul

a. • $5 \times 0 = 0$

• $0 \times (-7,42) = 0$

• $0 \times \ldots = 0$ (on peut compléter avec n'importe quel nombre)

• $\ldots \times \ldots = 0$ (on peut compléter avec n'importe quels nombres, du moment que l'un d'eux au moins soit 0)

b. Le produit $5x$ est nul lorsque x est égal à 0.

c. Le produit $5(x - 2)$ est nul lorsque $x - 2$ est égal à 0, autrement dit pour $x = 2$.

Apolline a choisi la valeur 2 pour x.

d. • a et b désignent deux nombres relatifs.

• Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$.

• Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

e. Le produit $(x - 7,5)\ (x + 4,3)$ est nul si $x - 7,5 = 0$ ou si $x + 4,3 = 0$, autrement dit si $x = 7,5$ ou si $x = - 4,3$.

4 Résoudre une équation de la forme : $(ax + b)\ (cx + d) = 0$

a. On entre une valeur dans la cellule A2, puis dans la cellule B2 on saisit la formule =3*A2^2+9*A2–30

• On étend la plage A2 : B2 vers le bas. On remarque que $3x^2 + 9x - 30$ est égal à 0 pour deux valeurs de x : –5 et 2.

Ainsi –5 et 2 sont deux solutions de l'équation.

	A	B
1	x	3x²+9x-30
2	-6	24
3	-5	0
4	-4	-18
5	-3	-30
6	-2	-36
7	-1	-36
8	0	-30
9	1	-18
10	2	0
11	3	24
12	4	54

b. D'après Jonas, on a à résoudre deux équations :

• $x + 5 = 0$ d'où $x = -5$.

• $3x - 6 = 0$ d'où $x = 2$.

Les solutions de l'équation $(x + 5)(\,3x - 6) = 0$ sont –5 et 2.

c. La méthode de Darline nécessite d'avoir recours à un tableur, ce qui n'est pas toujours possible.

D'autre part, on peut être amené à devoir faire de nombreux essais avant de trouver les solutions.

De plus, on n'est pas sûr d'avoir trouvé toutes les solutions.

Autre inconvénient majeur : si les solutions ne sont pas des nombres entiers, cela risque d'être compliqué voire impossible de les trouver.

Par contre, la méthode de Jonas est facile à mettre en place. On se ramène à résoudre des équations du premier degré.

Inéquations du premier degré à une inconnue

5 Distinguer inégalité et inéquation

a. • $8 + 5 = 13$; $15 - 4 = 11$; $13 > 11$ donc l'inégalité est fausse.

• $-2 + 8 = 6$; $(-2) \times (-3) = 6$ donc l'inégalité est vraie.

• $-8 + 2 = -6$; $1 - 9 = -8$; $-6 < -8$ donc l'inégalité est vraie.

$-2 \times 5 = -10$; $-10 < -1$ donc l'inégalité est fausse.

b. On entre la valeur –3 dans la cellule A2, puis dans la cellule B2 on saisit la formule =2*A2–5 et dans la cellule C2 la formule =A2+1

• On étend la plage A2 : C2 vers le bas.

L'inégalité $2x - 5 < x + 1$ est vraie pour les valeurs suivantes de x :

–3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

	A	B	C
1	x	2x – 5	x + 1
2	-3	-11	-2
3	-2	-9	-1
4	-1	-7	0
5	0	-5	1
6	1	-3	2
7	2	-1	3
8	3	1	4
9	4	3	5
10	5	5	6
11	6	7	7
12	7	9	8
13	8	11	9
14	9	13	10
15	10	15	11

c. Les solutions sont :

-5 ; $-2,6$; $5,9$ et $-\frac{3}{2}$.

En effet :

• Pour $x = -5$: $2x - 5 = -15$ et $x + 1 = -4$ et $-15 < -4$.

• Pour $x = 120$: $2x - 5 = 235$ et $x + 1 = 121$ mais $235 > 121$.

• Pour $x = -2,6$: $2x - 5 = -10,2$ et $x + 1 = -1,6$ et $-10,2 < -1,6$.

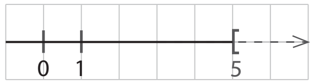
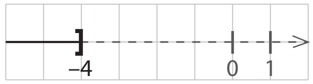
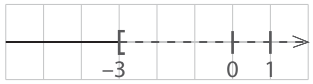
• Pour $x = 5,9$: $2x - 5 = 6,8$ et $x + 1 = 6,9$ et $6,8 < 6,9$.

• Pour $x = -\frac{3}{2}$: $2x - 5 = -8$ et $x + 1 = -\frac{1}{2}$ et $-8 < -\frac{1}{2}$.

• Pour $x = \frac{25}{4}$: $2x - 5 = \frac{15}{2}$ et $x + 1 = \frac{29}{4}$ mais $\frac{15}{2} > \frac{29}{4}$.

6 Résoudre une inéquation

a.

Inéquation	Règle utilisée	Solutions	Représentation des solutions (en rouge)
$x - 3 < 2$	On ajoute 3 à chaque membre de l'inéquation	$x < 5$	
$x + 1 \geqslant 5$	On soustrait –1 à chaque membre de l'inéquation	$x \geqslant 4$	
$3x \leqslant -12$	On divise chaque membre de l'inéquation par 3	$x \leqslant -4$	
$-2x > 6$	On divise chaque membre de l'inéquation par –2	$x < -3$	

b. $-3x + 4 > 1 - 2x$ — On ajoute $2x$ à chaque membre.

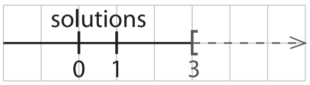
$-x + 4 > 1$ — On soustrait 4 à chaque membre.

$-x > -3$ — On divise chaque membre par –1.

$x < 3$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres strictement inférieurs à 3.

Représentation sur une droite graduée :



5. J'applique

4 On met le problème en équation.

On note n le plus petit de ces deux nombres.

Le nombre entier qui suit n est $n + 1$.

Leur produit $n(n + 1)$ doit être égal à leur somme diminuée de 1, soit $n + n + 1 - 1$.

On doit donc trouver deux nombres entiers n et $n + 1$ tels que : $n(n + 1) = 2n$.

On résout l'équation $n(n + 1) = 2n$.

Deux démarches possibles :

1. On développe le membre de gauche et on regroupe tous les termes dans ce membre de gauche :

$$n^2 + n = 2n$$
$$n^2 - n = 0$$

Puis on factorise : $n(n - 1) = 0$

0 et 1 sont les deux solutions de cette équation produit nul.

2. On regroupe tous les termes dans le membre de gauche puis on factorise.

$n(n + 1) = 2n$

$n(n + 1) - 2n = 0$

$n(n + 1 - 2) = 0$

$n(n - 1) = 0$

On retrouve l'équation précédente ; les solutions sont 0 et 1.

Retour au problème : Il y a deux réponses : d'une part les nombres 0 et 1, d'autre part les nombres 1 et 2.

5 **a.** On note x un nombre dont le carré diminué de 9 est égal à 0. Autrement dit : $x^2 - 9 = 0$.

On reconnaît une identité remarquable dans le membre de gauche et on factorise ; une expression factorisée de :

$$x^2 - 9 \text{ est } (x + 3)(x - 3).$$

Résoudre l'équation $x^2 - 9 = 0$ revient donc à résoudre l'équation $(x + 3)(x - 3) = 0$. Mathias a raison.

b. –3 et 3 sont les deux solutions de cette équation produit nul.

6 **a.** • $5^2 \times 4 - 9 = 91$. Si on choisit 5, on obtient 91.

• $(-2)^2 \times 4 - 9 = 7$. Si on choisit –2, on obtient 7.

• $0^2 \times 4 - 9 = -9$. Si on choisit 0, on obtient –9.

b. Deux démarches possibles :

1. « Remonter » le programme de calcul :

$$0 + 9 = 9 \,;\, 9 : 4 = 2{,}25.$$

Puis on cherche le(s) nombre(s) dont le carré est 2,25.

Il y a deux solutions 1,5 et –1,5.

2. Noter x un nombre de départ tel que le résultat du programme soit 0.

En appliquant le programme à ce nombre x, on obtient comme résultat $4x^2 - 9$.

Il s'agit donc de résoudre l'équation $4x^2 - 9 = 0$.

On reconnaît une identité remarquable dans le membre de gauche et on factorise ; une expression factorisée de $4x^2 - 9$ est $(2x + 3)(2x - 3)$.

Résoudre l'équation $4x^2 - 9 = 0$ revient donc à résoudre l'équation produit nul $(2x + 3)(2x - 3) = 0$.

Les solutions sont $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.

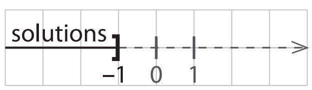
7 $4x - (2x - 1) \geqslant 3x + 2$

$4x - 2x + 1 \geqslant 3x + 2$

$2x + 1 \geqslant 3x + 2$ d'où $-1 \geqslant x$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres inférieurs ou égaux à –1.

Représentation sur une droite graduée :



8 $2(x-4) \leqslant 5-(x+1)$

Deux démarches possibles :

1. On teste pour chaque valeur indiquée si l'inégalité est vraie ou fausse.

• Pour $x = -7{,}43$: $2(x-4) = -22{,}86$ et $5-(x+1) = 11{,}43$; $-22{,}86 < 11{,}43$ donc $-7{,}43$ est solution de l'inéquation.

• Pour $x = 15{,}72$: $2(x-4) = 23{,}44$ et $5-(x+1) = -11{,}72$; $23{,}44 > -11{,}72$ donc 15,72 n'est pas solution de l'inéquation.

• Pour $x = -71{,}2$: $2(x-4) = -150{,}4$ et $5-(x+1) = 75{,}2$; $-150{,}4 < 75{,}2$ donc $-71{,}2$ est solution de l'inéquation.

• Pour $x = 3{,}99$: $2(x-4) = -0{,}02$ et $5-(x+1) = 0{,}01$; $-0{,}02 < 0{,}01$ donc 3,99 est solution de l'inéquation.

2. On résout l'inéquation.

$$2(x-4) \leqslant 5-(x+1)$$
$$2x-8 \leqslant 5-x-1$$
$$2x-8 \leqslant 4-x \qquad \text{d'où } x \leqslant 4$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres inférieurs ou égaux à 4. Par conséquent, parmi les quatre nombres proposés, –7,43 ; –71,24 et 3,99 sont solutions de l'inéquation.

Par conséquent, parmi les quatre affirmations, celles de Mara, de Mika et de Claire sont exactes. Par contre Léo s'est trompé.

9 On note x le nombre de cartouches achetées (x est un nombre entier positif).

La dépense (en €) est $17{,}3x$ sur le site A et $15 + 15{,}2x$ sur le site B. On cherche donc le nombre entier x à partir duquel $15 + 15{,}2x < 17{,}3x$. On résout cette inéquation.

On obtient : $\frac{15}{2{,}1} < x$. Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{15}{2{,}1}$. Le plus petit nombre entier supérieur à $\frac{15}{2{,}1}$ est 8. Donc on a intérêt à choisir le site B si on achète 8 cartouches ou plus.

11 **a.** Il semble que les nombres supérieurs ou égaux à 0 soient solutions de l'inéquation car pour ces valeurs de x, les résultats de la colonne B sont supérieurs à ceux de la colonne C.

	A	B	C
1	x	$5x+6$	$2-3x$
2	-5	-19	17
3	-4	-14	14
4	-3	-9	11
5	-2	-4	8
6	-1	1	5
7	0	6	2
8	1	11	-1
9	2	16	-4
10	3	21	-7
11	4	26	-10
12	5	31	-13

Il semble intéressant de vérifier s'il n'y a pas d'autres solutions entre –1 et 0.

On change les valeurs de x dans la plage A2 : A12.

	A	B	C
1	x	$5x+6$	$2-3x$
2	-1	1	5
3	-0,9	1,5	4,7
4	-0,8	2	4,4
5	-0,7	2,5	4,1
6	-0,6	3	3,8
7	-0,5	3,5	3,5
8	-0,4	4	3,2
9	-0,3	4,5	2,9
10	-0,2	5	2,6
11	-0,1	5,5	2,3
12	0	6	2

On constate que – 0,5 ; – 0,4 ; – 0,3 ; – 0,2 et – 0,1 sont aussi solutions de l'inéquation. Remarque : pour $x = -0{,}5$, on a $5x + 6 = 2 - 3x$.

Il semble que les solutions de l'inéquation $5x + 6 \geqslant 2 - 3x$ sont tous les nombres supérieurs ou égaux à – 0,5.

Pour aller plus loin : on résout l'inéquation $5x + 6 \geqslant 2 - 3x$.

On obtient $8x \geqslant -4$ soit $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

b.

	A	B	C
1	x	$2x$ -5	$30-8x$
2	-5	-15	70
3	-4	-13	62
4	-3	-11	54
5	-2	-9	46
6	-1	-7	38
7	0	-5	30
8	1	-3	22
9	2	-1	14
10	3	1	6
11	4	3	-2
12	5	5	-10

	A	B	C
1	x	$2x$ -5	$30-8x$
2	3	1	6
3	3,1	1,2	5,2
4	3,2	1,4	4,4
5	3,3	1,6	3,6
6	3,4	1,8	2,8
7	3,5	2	2
8	3,6	2,2	1,2
9	3,7	2,4	0,4
10	3,8	2,6	-0,4
11	3,9	2,8	-1,2
12	4	3	-2

Il semble que les solutions de l'inéquation $2x - 5 > 30 - 8x$ sont tous les nombres strictement supérieurs à 3,5.

Pour aller plus loin : on résout l'inéquation $2x - 5 > 30 - 8x$.

On obtient $10x > 35$ soit $x > 3{,}5$.

c. Dans ce cas, on est amené à choisir des valeurs de x comprises entre –10 et 0, car un premier essai avec des valeurs de x comprises entre –5 et 5 conduit à avoir tous les résultats de la colonne B inférieurs ou égaux à ceux de la colonne C.

	A	B	C
1	x	$4-2x$	$2x+25$
2	-10	24	5
3	-9	22	7
4	-8	20	9
5	-7	18	11
6	-6	16	13
7	-5	14	15
8	-4	12	17
9	-3	10	19
10	-2	8	21
11	-1	6	23
12	0	4	25

	A	B	C
1	x	$4-2x$	$2x+25$
2	-6	16	13
3	-5,9	15,8	13,2
4	-5,8	15,6	13,4
5	-5,7	15,4	13,6
6	-5,6	15,2	13,8
7	-5,5	15	14
8	-5,4	14,8	14,2
9	-5,3	14,6	14,4
10	-5,2	14,4	14,6
11	-5,1	14,2	14,8
12	-5	14	15

	A	B	C
1	x	$4-2x$	$2x+25$
2	-5,3	14,6	14,4
3	-5,29	14,58	14,42
4	-5,28	14,56	14,44
5	-5,27	14,54	14,46
6	-5,26	14,52	14,48
7	-5,25	14,5	14,5
8	-5,24	14,48	14,52
9	-5,23	14,46	14,54
10	-5,22	14,44	14,56
11	-5,21	14,42	14,58
12	-5,2	14,4	14,6

Il semble que les solutions de l'inéquation $4 - 2x \leqslant 2x + 25$ sont tous les nombres supérieurs ou égaux à –5,25.

Pour aller plus loin : on résout l'inéquation $4 - 2x \leqslant 2x + 25$.

On obtient $-4x \leqslant 21$ soit $x \geqslant -5{,}25$.

d. Dans ce cas, on est amené à choisir des valeurs de x comprises entre 0 et 10.

	A	B	C
1	x	$-12+x$	7 -$2x$
2	0	-12	7
3	1	-11	5
4	2	-10	3
5	3	-9	1
6	4	-8	-1
7	5	-7	-3
8	6	-6	-5
9	7	-5	-7
10	8	-4	-9
11	9	-3	-11
12	10	-2	-13

	A	B	C
1	x	$-12+x$	7 -$2x$
2	6	-6	-5
3	6,1	-5,9	-5,2
4	6,2	-5,8	-5,4
5	6,3	-5,7	-5,6
6	6,4	-5,6	-5,8
7	6,5	-5,5	-6
8	6,6	-5,4	-6,2
9	6,7	-5,3	-6,4
10	6,8	-5,2	-6,6
11	6,9	-5,1	-6,8
12	7	-5	-7

	A	B	C
1	x	$-12+x$	7 -$2x$
2	6,3	-5,7	-5,6
3	6,31	-5,69	-5,62
4	6,32	-5,68	-5,64
5	6,33	-5,67	-5,66
6	6,34	-5,66	-5,68
7	6,35	-5,65	-5,7
8	6,36	-5,64	-5,72
9	6,37	-5,63	-5,74
10	6,38	-5,62	-5,76
11	6,39	-5,61	-5,78
12	6.4	-5.6	-5.8

Il semble que tous les nombres inférieurs ou égaux à 6,33 sont solutions de l'inéquation $-12 + x < 7 - 2x$.

Pour aller plus loin : on résout l'inéquation $-12 + x < 7 - 2x$.

On obtient :

$$3x < 19 \text{ soit } x < \frac{19}{3}.$$

6. Atelier Brevet

12 **1. a.** • $1 + 1 = 2$ • $2^2 = 4$ • $4 - 1^2 = 3$
On obtient bien 3 comme résultat final.
b. • $2 + 1 = 3$ • $3^2 = 9$ • $9 - 2^2 = 5$
On obtient 5 comme résultat final.
c. Si on choisit x comme nombre de départ, on obtient comme résultats successifs :
• $x + 1$ • $(x + 1)^2$ • $(x + 1)^2 - x^2$.
On obtient $(x + 1)^2 - x^2$ comme résultat final.
2. $P = (x + 1)^2 - x^2$. On développe : $P = x^2 + 2x + 1 - x^2$
Ainsi $P = 2x + 1$.
3. On a trouvé $(x + 1)^2 - x^2$ comme résultat final si le nombre de départ est x (question **1.c.**).
A la question **2.** on a développé $(x + 1)^2 - x^2$ et on a obtenu $P = 2x + 1$.
On cherche donc la valeur de x telle que $2x + 1 = 15$.
La solution de cette équation est 7.
Donc, pour obtenir 15 comme résultat final, on doit choisir 7 comme nombre de départ.

13 **1.** On remplace x par -2 :
$$3x + 12 = 3 \times (-2) + 12 = 6.$$
$$4 - 2x = 4 - 2 \times (-2) = 8$$
$6 < 8$ donc -2 est une solution de l'inéquation :
$$3x + 12 < 4 - 2x.$$
2. L'équation $(x - 2)(2x + 1) = 0$ est une équation produit nul. Ses solutions sont 2 et $\frac{1}{2}$.
Donc -2 n'est pas solution de l'équation :
$$(x - 2)(2x + 1) = 0.$$
3. On remplace x par -2 : $x^3 + 8 = (-2)^3 + 8$
ou $x^3 + 8 = -8 + 8$ c'est-à-dire $x^3 + 8 = 0$.
Donc -2 est une solution de l'équation $x^3 + 8 = 0$.

7. Exercices à l'oral

Équations du premier degré

14 Deux démarches possibles :
1. On remplace l'inconnue par -2 dans chaque membre de l'équation et on compare les résultats.
2. On résout l'équation.
Conclusion : -2 est solution des équations **a.** et **c.**.

15 Solutions : **a.** 6 **b.** 2 **c.** 4

16 Solutions : **a.** $\frac{5}{2}$ **b.** -2 **c.** 10

17 Solutions : **a.** -3 **b.** -2 **c.** -3

18 Solutions : **a.** 4 **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** 2

19 En « remontant » le programme de calcul, on trouve que Yasmine a pensé au nombre 4.

20 $((20 \times 2 - 8) - 15) : 4 = 4{,}25$
Chaque roue coûte 4,25 €.

21 $(150 - 50) : 25 = 4$
Hugo a loué un VTT pendant 4 jours.

Équations produit nul

22 Les équations « produit nul » sont les équations **a.**, **c.** et **d.**

23 Solution (s) :
a. -1 et 3 **b.** 4 et $-\frac{1}{3}$ **c.** $-\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{2}$ **d.** -1

24 Annabelle s'est trompée. L'équation $2x = 0$ a pour solution 0 et pas -2. L'autre solution est bien 3.

25 Tom s'est trompé. Son équation n'est pas une équation « produit nul ». Il n'a pas remarqué qu'il s'agit d'une différence et non d'un produit.
En ôtant les parenthèses, on obtient $2x - 6 - x - 1 = 0$ soit $x - 7 = 0$; la solution de cette équation est 7.

Inéquations du premier degré

26 **a.** On soustrait 3 à chaque membre.
b. On ajoute 4 à chaque membre.
c. On soustrait $2x$ à chaque membre.
d. On divise chaque membre par 3. Comme 3 est un nombre positif, on conserve le sens de l'inégalité.
e. On divise chaque membre par -2. Comme -2 est un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.
f. On divise chaque membre par -4. Comme -4 est un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.
On obtient ainsi $2 > x$ autrement dit $x < 2$.

27 Deux démarches possibles :
1. On remplace l'inconnue par -3 dans chaque membre de l'inéquation et on compare les résultats.
2. On résout l'inéquation.
Conclusion : -3 est une solution des inéquations **b.** et **c.**

28 Deux démarches possibles :
1. On remplace x par chaque valeur donnée dans chaque membre de l'inéquation et on compare les résultats.
2. On résout l'inéquation.
Conclusion : -5 ; -3 et -20 sont des solutions de l'inéquation.

29 **a.** $t < 3$ **b.** $x \geqslant -5$ **c.** $x \geqslant -7$

30 **a.** $x > 0$ **b.** $y \leqslant -7$ **c.** $x > 4$

31 **a.** $x > 2$ **b.** $x \leqslant 1$ **c.** $a \leqslant 0$

32 **a.** et ❸ **b.** et ❹ **c.** et ❷ **d.** et ❶

33 On résout l'inéquation $5x + 3 \geqslant 2x + 9$.
On obtient $x \geqslant 2$.
La bonne réponse est **a**.

34 $3 \times 250 = 750$ et $4 \times 250 = 1\,000$
$750 < 910 < 1\,000$ donc les économies réalisées pourront compenser l'achat de la citerne au bout de 4 ans.

8. Exercices d'application

Équations du premier degré

35 Les équations **a., c., d.** et **e.** sont du premier degré.
En effet :
a. C'est une équation de la forme $ax + b = cx + d$ avec a, b, c et d nombres relatifs et $a \neq c$.

b. C'est une équation produit nul du second degré.

c. 3 étant un nombre différent de 0, ce produit est nul seulement si $4t-5=0$, ce qui est une équation du premier degré. C'est aussi l'équation $12t-15=0$ qui est du premier degré.

d. En ôtant les parenthèses et en réduisant, on obtient l'équation $x+1=0$ qui est du premier degré.

e. En développant le membre de droite, on obtient y^2+y et en soustrayant y^2 aux deux membres, on obtient l'équation $-4=y$ qui est du premier degré.

f. C'est une équation produit nul du second degré.

36 Deux démarches possibles :

1. On remplace l'inconnue par -3 dans chaque membre de l'équation et on compare les résultats.

C'est le plus simple ici, en particulier pour les équations **b.** et **c.**

2. On résout l'équation.

Conclusion : -3 est solution des équations **a.** et **c.**

37 Solutions : **a.** $-\frac{1}{3}$ **b.** $-\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{7}{12}$

38 Solutions : **a.** -4 **b.** $\frac{15}{2}$ **c.** 7

39 Solutions : **a.** -6 **b.** -2

40 Solutions : **a.** $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{3}{2}$

41 **a.** On obtient $4x+8=x-1$ soit $3x=-9$; la solution est -3.

b. On obtient $5x+1=3x-5$ soit $2x=-6$; la solution est -3.

c. On obtient $x-2=1$; la solution est 3.

d. L'équation a pour solution -3.

Jérôme n'a pas raison, seulement trois équations ont la même solution.

42 **a.** On obtient $8x-10=4+x$ soit $7x=14$; la solution est 2.

b. On obtient $-2x-11=3x+4$ soit $-15=5x$; la solution est -3.

c. Avec l'égalité des produits en croix, on obtient :
$10x-4=12x$ soit $-4=2x$; la solution est -2.

d. On obtient $x^2-6x+9=x^2-5x$ soit $-6x+9=-5x$ ou $-x+9=0$; la solution est 9.

Angèle a raison, les quatre solutions sont des nombres entiers relatifs.

43 ❶ On obtient $-14x+42=0$; la solution est 3.

❷ On obtient $-3x+8=-7$ soit $-3x=-15$; la solution est 5.

❸ On obtient $-14x+107=-13x-70$; la solution est 177.

44 **a.** $H=(x^2-8x+16)-x^2+10x$ ainsi $H=2x+16$

b. Résoudre l'équation $H=16$ revient à résoudre l'équation $2x+16=16$ dont la solution est 0.

45 **a.** $I=(4x^2+16x-3x-12)-(25+20x+4x^2)$
ainsi $I=-7x-37$.

b. Résoudre l'équation $I=-2$ revient à résoudre l'équation $-7x-37=-2$ dont la solution est -5.

46 **a.** $(230-80):2=75$ ainsi Martin a utilisé 75 L d'eau.

b. $230-75=155$; Léna a utilisé 155 L d'eau.

47 **a.**

$$\begin{tikzcd} 18 \arrow[r, bend left, "\times 2"] & 36 \arrow[l, bend left, ": 2"] \arrow[r, bend left, "+5"] & 41 \arrow[l, bend left, "-5"] \end{tikzcd}$$

Le nombre cherché est 18.

b.

$$\begin{tikzcd} \frac{14}{3} \arrow[r, bend left, "\times 3"] & 14 \arrow[l, bend left, ": 3"] \arrow[r, bend left, "-5"] & 9 \arrow[l, bend left, "+5"] \end{tikzcd}$$

Le nombre cherché est $\frac{14}{3}$.

48 **a.** $56:4=14$ ainsi $AE=14$ cm.

b. $(60-14\times 3):2=9$ d'où $AP=9$ cm.

49 **a.** Le périmètre du quadrilatère QUAD est $10x+2$. L'équation $10x+2=32$ a pour solution 3, donc le périmètre de QUAD est 32 cm pour $x=3$.

b. Pour $x=3$, $AU=8$ cm ; $UQ=8$ cm ; $QD=8$ cm et $DA=8$ cm. QUAD est un losange car tous ses côtés ont la même longueur.

50 La somme des angles d'un triangle est 180°. Alors :
$a+a+10+a+20=180$ soit $3a+30=180$ ou $3a=150$.
Ainsi $a=50$.

Les angles du triangle mesurent donc 50°, 60° et 70°.

51 x désignant le nombre manquant dans la ligne du bas, les nombres sur la 2^e^ ligne sont $5+x$ et $11+x$.
Alors $5+x+11+x=80$ ou $2x+16=80$. La solution est 32.

	80	
37		43
5	32	11

52 **a.** Les amis ne peuvent pas être 8 ; en effet si chacun donne 10 €, il y aura 80 €, avec 9 € en trop, donc le coût du repas serait 71 € ; mais si chacun donne 8 €, il y aura 64 € et il manquera 15 €, soit un coût de repas de 79 €. Il y a contradiction, on ne trouve pas le même montant pour le coût total du repas.

b. Le coût du repas étant le même, que chaque participant donne 10 € ou 8 €, on obtient l'équation :
$10n-9=8n+15$ dont la solution est 12. Il y a donc 12 participants au repas.

53 **1. a.** On saisit les formules =14+A2 dans la cellule B2 et =40+A2 dans la cellule C2.

b.

	A	B	C
1	Dans … an(s)	Âge de Jules	Âge de Sylvie
2	1	15	41
3	2	16	42
4	3	17	43
5	4	18	44
6	5	19	45
7	6	20	46
8	7	21	47
9	8	22	48
10	9	23	49
11	10	24	50
12	11	25	51
13	12	26	52

Donc dans 12 ans, Jules aura 26 ans et sa mère aura 52 ans, le double de 26.

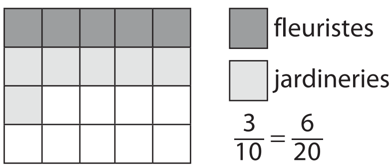
2. a. C'est l'équation ❸ qui traduit la situation.
b. La solution de l'équation $n + 40 = 28 + 2n$ est 12.
On trouve bien la même réponse qu'à la question 1.

54 On note x le nombre inconnu.
On obtient l'équation : $\frac{1+7+11+19+30+x}{6} = 3x$ c'est-à-dire $68 + x = 18x$ ou $68 = 17x$.
La solution est 4. Le nombre inconnu est donc 4.

55 **a.** L'équation ❶ est celle de Karim, l'équation ❷ celle d'Enzo et l'équation ❸ celle de Lou.
b. On résout l'une des équations.
La solution de l'équation ❶ est 671, celle de l'équation ❶ est 672 et celle de l'équation ❸ est 670.
Quelle que soit l'équation résolue, on trouve que les trois nombres sont 670 ; 671 et 672.

56 **1. a.** $\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{6}x$
b. On obtient l'équation $\frac{5}{6}x = 5$; la solution est 6.
2. a. On obtient l'équation $\frac{2}{3}x = -2$; la solution est –3.
b. On obtient l'équation $-\frac{1}{4}x = 6$; la solution est –24.

57 Deux démarches possibles :
1. Exemple de résolution par une méthode arithmétique :
On représente la production totale par un rectangle de 4 sur 5.



$\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$

Ce qui reste correspond à $\frac{9}{20}$ de la production, soit 540 000 brins. La production totale est $540\,000 \times \frac{20}{9}$ soit 1 200 000 brins.
2. Résolution par une méthode algébrique :
On note x le nombre de brins de muguet produits par ce maraîcher.
On obtient l'équation : $\frac{1}{4}x + \frac{3}{10}x + 540\,000 = x$ d'où $540\,000 = \frac{9}{20}x$.
La solution est 1 200 000.
Le maraîcher a produit 1 200 000 brins de muguet.

Équations « produit nul »

58 Solution (s) : **a.** 5 et –8 **b.** 0 et 4 **c.** $-\frac{1}{2}$

59 Solutions : **a.** $-\frac{7}{2}$ et 4 **b.** $\frac{2}{5}$ et $-\frac{3}{2}$

60 Solutions : **a.** 0 et $\frac{5}{4}$ **b.** $\frac{3}{2}$ et –4

61 **a.** $(2x - 5)(2x + 8) = 0$ **b.** $(3x + 1)(5x - 2) = 0$

62 Solutions des équations :
a. – 0,5 et 1,25 **b.** 0 et 1,6
c. 0,75 et 1,5 **d.** $\frac{8}{3}$ et –2

Victoria n'a pas raison car $\frac{8}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

63 On factorise à l'aide d'un facteur commun.
On obtient :
a. $6t(t - 3) = 0$ Solutions 0 et 3
b. $(x - 2)(3x + 5) = 0$ Solutions 2 et $-\frac{5}{3}$

64 On factorise à l'aide de la 3^e^ identité remarquable.
On obtient :
a. $(x - 3)(x + 3) = 0$ Solutions 3 et –3
b. $(2x - 1)(2x + 1) = 0$ Solutions $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$
c. $(x - 1)(x - 5) = 0$ Solutions 1 et 5

65 **a.** $E = (x^2 - 6x + 9) + (x - 2x^2 - 3 + 6x)$ ainsi :
$$E = -x^2 + x + 6$$
b. Deux démarches possibles :
1. Vérifier que si on développe le produit $(x - 3)(-x - 2)$, on obtient l'expression développée trouvée à la question **a**. C'est en effet le cas :
$(x - 3)(-x - 2) = -x^2 - 2x + 3x + 6$ c'est-à-dire $-x^2 + x + 6$.
2. Factoriser $E = (x - 3)^2 + (x - 3)(1 - 2x)$ avec $(x - 3)$ comme facteur commun.
$E = (x - 3)(x - 3 + 1 - 2x)$ c'est-à-dire $E = (x - 3)(-x - 2)$.
c. Résoudre l'équation $E = 0$ revient à résoudre l'équation produit nul $(x - 3)(-x - 2) = 0$. Les solutions sont 3 et –2.

66 **a.** $I = (7x - 3)^2 - 5^2$ ainsi $I = (7x - 3 - 5)(7x - 3 + 5)$ soit $I = (7x - 8)(7x + 2)$
b. Résoudre l'équation $I = 0$ revient à résoudre l'équation produit nul $(7x - 8)(7x + 2) = 0$.
Les solutions sont $\frac{8}{7}$ et $-\frac{2}{7}$.

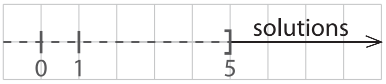
67 **1. a.** Ils ont tous les deux raison.
b. • Avec la méthode de Ninon :
L'équation $x - 1 = 3$ a pour solution 4.
L'équation $x - 1 = -3$ a pour solution –2.
• Avec la méthode de Grégory :
$(x - 1)^2 - 3^2 = (x - 1 + 3)(x - 1 - 3)$ c'est-à-dire $(x + 2)(x - 4)$.
Il doit résoudre l'équation produit nul $(x + 2)(x - 4) = 0$ dont les solutions sont –2 et 4.
2. a. Solutions $\frac{5}{2}$ et $-\frac{5}{2}$
b. Solutions 13 et 5
c. Solutions 1 et $\frac{1}{3}$

Inéquations du premier degré

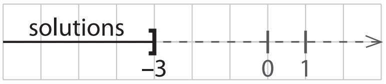
68 **1. a.** $x - 2 \geqslant -5$ **b.** $x + 3 \geqslant 0$ **c.** $-1 + x \geqslant -4$
d. $5 + x \geqslant 2$ **e.** $x + 2{,}9 \geqslant -0{,}1$
2. a. $2x \geqslant -6$ **b.** $2x - 5 \geqslant -11$ **c.** $-x \leqslant 3$
d. $-4x \leqslant 12$ **e.** $\frac{x}{3} \geqslant -1$

69 $a > 2{,}5$ d'où $-2a < -5$ et $5 - 2a < 0$.
Eléonore se trompe, $5 - 2a$ est toujours négatif.

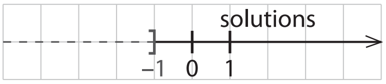
70 **a.** $x > 5$



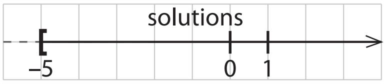
b. $y \leqslant -3$



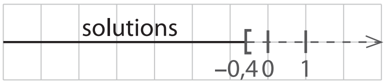
c. $x > -1$



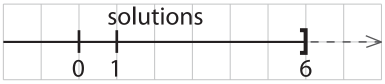
71 **a.** $t \geqslant -5$



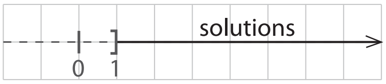
b. $x < -0{,}4$



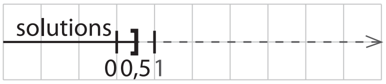
c. $x \leqslant 6$



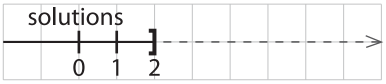
72 **a.** $x > 1$



b. $a \leqslant 0{,}5$



c. $x \leqslant 2$

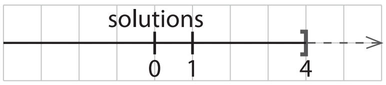


73 **a.** On teste pour les valeurs données.

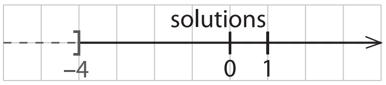
-5 ; $\frac{1}{3}$; 0 et 4 sont des solutions de l'inéquation.

b. $x \leqslant 4$ ainsi les solutions de l'inéquation sont les nombres inférieurs ou égaux à 4.

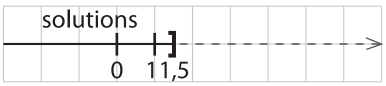
c.



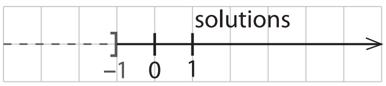
74 **a.** $x > -4$



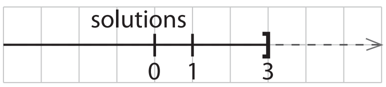
b. $x \leqslant 1{,}5$



75 **a.** $x > -1$



b. $x \leqslant 3$



76 **1. a.** Dépense totale avec le tarif A : $8x$

b. Avec le tarif B : $40 + 5x$

2. a. $5x + 40 \leqslant 8x$ d'où $40 \leqslant 3x$ et $\frac{40}{3} \leqslant x$.

Les solutions de l'inéquation $5x + 40 \leqslant 8x$ sont les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{40}{3}$.

b. Les nombres entiers qui sont solutions de cette inéquation correspondent aux nombres de séances pour lesquelles le tarif B est plus avantageux que le tarif A. Le tarif B est plus intéressant que le tarif A pour 14 séances ou plus.

77 On désigne par x le nombre d'informaticiens embauchés. x est aussi le nombre de mathématiciens embauchés.

(x est un nombre entier positif).

On traduit le problème par une inéquation :

$$15 + x \geqslant \frac{2}{3}\ (27 + x).$$

D'où $15 + x \geqslant 18 + \frac{2}{3}x$ soit $\frac{1}{3}x \geqslant 3$ ou $x \geqslant 9$.

Les solutions de cette inéquation sont les nombres supérieurs ou égaux à 9. On ne conserve que les nombres entiers supérieurs ou égaux à 9.

Il faut donc embaucher au moins 9 informaticiens et 9 mathématiciens.

Prendre des initiatives

78 Deux démarches possibles :

1. Méthode par essais – erreurs. Par exemple :

- on essaie 0 : on obtient –3 d'une part, 0 d'autre part.
- on essaie 3 : on obtient 0 d'une part, 1 d'autre part.
- on essaie 6 : on obtient 3 d'une part, 2 d'autre part.

Pour des raisons de symétrie, on peut penser à essayer 4,5 ; on obtient 1,5 dans les deux cas.

2. Méthode algébrique :

On note n le nombre cherché.

En mettant le problème en équation, on obtient l'équation :

$n - 3 = \frac{n}{3}$ soit $\frac{2n}{3} = 3$ ou $n = \frac{9}{2}$; la solution est 4,5.

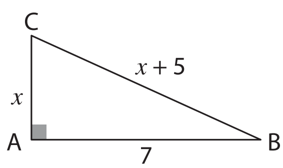
Le nombre cherché est 4,5.

79 Nombreuses réponses possibles. Par exemple :

a. $x + 1 = 0$ **b.** $(x + 4)(x - 5) = 0$ **c.** $x\,(x - 2) = 0$

d. $(2x - 1)(4x + 3) = 0$ **e.** $5x + 2 = 0$

80 La situation :



Si x désigne la longueur de [AC] (en cm), alors $BC = x + 5$.

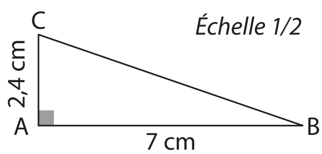
Dans le triangle rectangle ABC, l'égalité de Pythagore permet d'écrire : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Autrement dit :

$7^2 + x^2 = (x + 5)^2$ soit $49 + x^2 = x^2 + 10x + 25$ ou

$49 = 10x + 25$ c'est-à-dire $24 = 10x$.

La solution de cette équation est 2,4.

Le triangle ABC est donc rectangle en A avec : AB = 7 cm et AC = 2,4 cm. Son hypoténuse [BC] mesure 7,4 cm.



Échelle 1/2

On peut construire ce triangle ABC.

81 **a.** Réalisation de la figure.

b. Il semble que l'aire de ABCD soit strictement supérieure à celle de DCF lorsque D se trouve à plus de 2 cm de A sur le segment [AF].

c. On désigne par x la longueur AD (en cm) avec :

$$0 < x < 6.$$

Alors DF = $6 - x$.

L'aire du rectangle ABCD est $4x$.

L'aire du triangle DCF est $2(6 - x)$.

« L'aire de ABCD est strictement supérieure à celle de DCF » se traduit par l'inéquation : $4x > 2(6 - x)$.

Ainsi $4x > 12 - 2x$ ou $6x > 12$.

Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à 2.

Pour que l'aire du rectangle ABCD soit strictement supérieure à celle du triangle DCF, le point D doit se situer à plus de 2 cm de A sur le segment [AF].

82 On désigne par c la consommation de cette famille (en kWh).

Avec le tarif 1, la famille dépense $0{,}2c$ €.

Avec le tarif 2, elle dépense $30 + 0{,}12c$ €.

On compare les coûts avec les deux tarifs :

$$0{,}2c < 30 + 0{,}12c.$$

Ainsi $0{,}08c < 30$ ou $c < 375$. Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 375.

Conclusion : le tarif 1 est le plus avantageux si la famille consomme moins de 375 kWh par mois, et le tarif 2 est le plus avantageux si elle consomme plus de 375 kWh par mois. Pour une consommation de 375 kWh par mois, le montant de la dépense est le même quel que soit le tarif.

9. Vrai ou faux

83 **Faux**. En effet $2x + 3 \neq 2x - 1$ quelle que soit la valeur donnée à x.

84 **Vrai.** Elles ont comme solution $-\frac{3}{2}$.

85 **Faux.** En effet, le carré de 0 est égal à 0.

Pour aller plus loin : si n désigne le nombre cherché, il vérifie l'équation $n^2 = 2n$ ou $n(n - 2) = 0$ dont les solutions sont 2 et 0.

86 **Faux.** Si un nombre est inférieur à 5, alors son opposé est supérieur à –5.

87 **Vrai.** En effet les solutions de cette inéquation sont les nombres supérieurs ou égaux à –2. Parmi eux, il y a tous les nombres entiers positifs.

88 **Faux.** En effet BC est compris entre $210 \times 2 : 15$ et $225 \times 2 : 15$ c'est-à-dire entre 28 et 30.

29 cm est une possibilité, mais il y en a d'autres.

89 **Faux.**

Un contre-exemple : $a = 18$ et $b = 2$ alors $a - b = 16$ (et $16 > 15$).

10. Calcul mental et réfléchi

90 Solutions : **a.** 5 **b.** 6 **c.** 0,5 **d.** $-\frac{1}{6}$ **e.** 8 **f.** 0,8

91 Solution (s) : **a.** 7 et –4 **b.** –2 et $\frac{3}{2}$ **c.** 0 et 4,5 **d.** $\frac{1}{4}$ **e.** 6 et –6 **f.** $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$

92 On résout l'équation produit nul puis on teste l'équation du second degré.

a. Une solution commune : 6.

b. Deux solutions communes : $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$.

93 **a.** $x < 5$ **b.** $t < -3{,}5$ **c.** $x \leqslant 1$

d. $a \leqslant 2$ **e.** $x > 0$ **f.** $y > -1$

11. Présenter, argumenter, communiquer

94 Réécriture :

$3 \times (-4) - 4 = -16$

$5 \times (-4) + 2 = -18$

$-16 > -18$ donc pour $x = -4$, l'inégalité $3x - 4 \leqslant 5x + 2$ n'est pas vérifiée. –4 n'est donc pas solution de l'inéquation.

95 **a.** Erreur repérée : Anissa vérifie si le nombre 4 est solution de l'équation donnée, ce qui le cas ; mais comme ce n'est pas une équation du premier degré, il y a peut-être une autre solution. La démarche est à reprendre.

Rédaction correcte :

On factorise le membre de gauche : $x^2 - 4x = x(x - 4)$

On résout l'équation $x(x - 4) = 0$. Ce produit est nul dans le seul cas où $x = 0$ ou $x - 4 = 0$

$$x = 4$$

L'équation $x^2 - 4x = 0$ a deux solutions 0 et 4.

b. Il y a plusieurs erreurs :

• ligne 1 : en ôtant les parenthèses précédées du signe ⊖ dans le membre de droite, Anissa a oublié de prendre l'opposé du nombre –2.

• ligne 2 : en divisant les deux membres de l'inéquation par –2 qui est un nombre négatif, Anissa a oublié de changer le sens de l'inégalité.

• ligne 3 : en divisant 8 par –2, Anissa a trouvé 4 au lieu de –4.

Une rédaction correcte :

$2(x - 5) > 5x - (x - 2)$

$2x - 10 > 5x - x + 2$

$2x - 10 > 4x + 2$

$-10 > 2x + 2$

$-12 > 2x$

$-6 > x$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres strictement inférieurs à –6.

96 On peut commencer par faire des essais. Par exemple :

• pour $n = 1$, $n^2 - 24n + 144 = 121$.

• pour $n = 2$, $n^2 - 24n + 144 = 100$.

• pour $n = 3$, $n^2 - 24n + 144 = 81$. etc.

On peut remarquer qu'Anatole semble avoir raison pour ces premiers résultats, toutefois ils baissent progressivement.

Se peut-il qu'on trouve 0 ?

On peut poursuivre les essais et trouver que pour $n = 12$, $n^2 - 24n + 144 = 0$ ou adopter une démarche utilisant le calcul littéral.
Dans ce cas, on factorise $n^2 - 24n + 144$ à l'aide d'une identité remarquable et on obtient :

$$n^2 - 24n + 144 = (n - 12)^2$$

Or $(n - 12)^2$ peut être égal à 0 si n est égal à 12.
Donc Anatole n'a pas raison.

97 Deux démarches possibles :
1. On peut commencer par faire des essais.
On obtient assez rapidement que :
a. les dimensions du rectangle sont 26 cm et 27 cm, dont la somme est 53 cm (la moitié de 106 cm).
b. c'est impossible, car 62 (la moitié de 124) est un nombre pair et ne peut pas être la somme de deux entiers consécutifs.
2. On peut utiliser le calcul littéral.
Si on désigne par n la longueur (en cm) d'un côté du rectangle, alors l'autre côté mesure $n + 1$.
Le périmètre de ce rectangle est $4n + 2$.
a. Dire que ce périmètre est 106 cm revient à résoudre l'équation $4n + 2 = 106$. La solution est 26.
b. Lorsque le périmètre du rectangle est 124 cm, on obtient l'équation : $4n + 2 = 124$ dont la solution est 30,5.
Cette solution ne convient pas car il ne s'agit pas d'un nombre entier.
Un rectangle ne peut pas avoir un périmètre de 124 cm et deux nombres entiers consécutifs comme longueurs
Conclusion : seul le cas a. est possible.
Les côtés de ce rectangle mesurent donc 26 cm et 27 cm.
$26 \times 27 = 702$ ainsi son aire est 702 cm^2.

98 On peut tester si 0 est une solution, si –1 est une solution, mais ensuite le nombre infini de nombres à tester pose problème.
On peut alors penser à résoudre l'inéquation $-5x + 1 \leqslant 6$.
Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à –1.
Donc seuls Axel et Antoine ont raison.
En effet :

- Axel a raison car $0 \geqslant -1$.
- Antoine a raison car les nombres positifs sont tous supérieurs ou égaux à –1.
- Capucine se trompe car –1 est ***une*** solution et pas ***la*** solution.
- Étienne se trompe car les solutions sont les nombres ***supérieurs*** ou égaux à –1 et pas ***inférieurs*** ou égaux à –1.
- Agathe se trompe car les nombres négatifs supérieurs ou égaux à –1 et strictement inférieurs à 0 sont des solutions de l'inéquation, par exemple – 0,4.

99 **1.** Denis et Nina ont raison tous les deux, la démarche de Nina peut être utilisée lorsque les calculs se font mentalement.
2. a. $(2x - 7)(2x + 7) = 0$. Il y a deux solutions : 3,5 et –3,5 (démarche Denis).
b. Il y a deux solutions : 9 et –9 (démarche Nina).
c. $(4x - 1 - 3)(4x - 1 + 3) = 0$ c'est-à-dire $(4x - 4)(4x + 2) = 0$.
Il y a deux solutions : 1 et – 0,5 (démarche Denis).
d. Il y a deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ (démarche Nina).

100 **a.** Margot a raison, car pour $x = 2$, on trouve 4 comme valeur de $x^2 + x - 2$.
Léo s'est trompé de colonne ; pour $x = 4$, $x^2 + x - 2$ n'est pas égal à 4 mais à 18.
b. Il y a une autre solution : –3 puisque pour $x = -3$, on trouve 4 comme valeur de $x^2 + x - 2$.

101 C'est Myriam qui donne un argument valable.
En effet elle a trouvé une valeur de x, la valeur 0, pour laquelle $5x^2 - 10x + 2$ est différent de $7x - 4$.

102 On peut résoudre ce problème de deux façons :
1. par une démarche avec une méthode arithmétique :
Si on s'intéresse à ce qui se passe « verticalement », on remarque que la longueur du côté du carré blanc est égale au triple de celle du côté du carré vert ; « horizontalement » la somme des longueurs d'un carré vert et du carré blanc est égale à la somme des longueurs des cinq carrés bleus (soit 50 cm).
Donc 50 cm est la longueur de l'équivalent du côté de 4 carrés verts : 50 : 4 = 12,5 ainsi un carré vert a pour côté 12,5 cm.
$3 \times 12{,}5 = 37{,}5$ donc le côté du grand carré blanc est 37,5 cm.
2. par une démarche avec une méthode algébrique :
On désigne par c le côté d'un carré vert. Alors le côté du grand carré blanc est $3c$.
Le côté d'un carré bleu mesure 10 cm, donc une des dimensions du rectangle est 50 cm, mais cette dimension est aussi égale à $3c + c$. On a l'équation $4c = 50$ dont la solution est 12,5.
$3 \times 12{,}5 = 37{,}5$ ainsi le côté du grand carré blanc est 37,5 cm.

12. QCM pour s'évaluer

103 **b.** **104** **c.** **105** **a.** **106** **c.** **107** **c.** **108** **b.** **109** **b.**
110 **a.** **111** **b.** **112** **a. c.** **113** **a. b. c.** **114** **b. c.**
115 **a. b. c.** **116** **a. b.**

13. Objectif Brevet

117 **a.** • $-4 - 6 = -10$ • $(-10)^2 = 100$
On trouve bien 100 en choisissant – 4 pour nombre de départ.
b. • $15 - 6 = 9$ • $9^2 = 81$
On trouve 81 en choisissant 15 pour nombre de départ.
c. Plusieurs démarches possibles :

- On peut faire d'autres essais et trouver les nombres cherchés par hasard.

• On peut utiliser le fait que 144 est le carré de 12 et de –12, et « remonter » le programme de calcul en ajoutant 6 ; on trouve ainsi 18 et –6.

• On peut désigner par x le nombre choisi au départ.
Le résultat avec le programme de calcul est $(x - 6)^2$.
Le résultat du programme est 144 peut se traduire par :
$$(x - 6)^2 = 144.$$
Pour résoudre cette équation, on soustrait 144 à chaque membre de l'équation, puis on factorise le membre de gauche.
$$(x - 6)^2 - 144 = 0 \text{ soit } (x - 6)^2 - 12^2 = 0$$
d'où : $(x - 6 - 12)(x - 6 + 12) = 0$ c'est-à-dire $(x - 18)(x + 6) = 0$.
Les solutions de cette équation sont 18 et –6.
Donc si on choisit comme nombre de départ 18 ou –6, le résultat du programme est 144.

118 **1.** • $5 - 7 = -2$ • $(-2)^2 = 4$
On trouve bien 4 en choisissant 5 comme nombre de départ et le programme B.

2. • $-2 + 5 = 3$ • $3^2 = 9$
On trouve 9 en choisissant –2 comme nombre de départ et le programme A.

3. a. 0 est le carré de 0. Il suffit de choisir –5 comme nombre de départ pour que le résultat avec le programme A soit 0.
b. Plusieurs démarches possibles :

• On peut utiliser le fait que 9 est le carré de 3 et de –3, et « remonter » le programme de calcul en ajoutant 7. On obtient 10 et 4.

• On peut désigner par x le nombre choisi au départ.
Le résultat avec le programme de calcul B est $(x - 7)^2$.
Le résultat du programme est 9 peut se traduire par :
$$(x - 7)^2 = 9.$$
Pour résoudre cette équation, on soustrait 9 à chaque membre de l'équation, puis on factorise le membre de gauche.
$$(x - 7)^2 - 9 = 0 \text{ soit } (x - 7)^2 - 3^2 = 0$$
d'où : $(x - 7 - 3)(x - 7 + 3) = 0$ c'est-à-dire $(x - 10)(x - 4) = 0$.
Les solutions de cette équation sont 10 et 4.
Donc si on choisit comme nombre de départ 10 ou 4, le résultat est 9 avec le programme B.

4. Plusieurs démarches possibles :

• Une démarche par essais –erreurs peut être envisagée, mais elle peut de ne pas donner de résultat immédiat ; de plus on peut oublier une solution.

• Si on utilise une résolution algébrique, en désignant par x le nombre choisi au départ, on obtient $(x + 5)^2$ comme résultat avec le programme A et $(x - 7)^2$ avec le programme B.
On obtient le même résultat avec les deux programmes, donc on obtient l'égalité : $(x + 5)^2 = (x - 7)^2$.
On soustrait $(x - 7)^2$ à chaque membre de l'équation, puis on factorise le membre de gauche.
$(x + 5)^2 - (x - 7)^2 = 0$ soit $((x + 5) + (x - 7))((x + 5) - (x - 7)) = 0$ ou $(x + 5 + x - 7)(x + 5 - x + 7) = 0$ c'est-à-dire $(2x - 2) \times 12 = 0$.
La solution de cette équation est 1.
Donc si on choisit 1 comme nombre de départ, on obtient le même résultat avec les deux programmes de calcul.

119 **1. a.** Montant de la facture avec le tarif 1 : $0{,}55x$
b. Avec le tarif 2 : $10 + 0{,}35x$
2. On résout l'inéquation $0{,}55x \geqslant 0{,}35x + 10$.
On obtient $0{,}2x \geqslant 10$ soit $x \geqslant 50$.
Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à 50.
Interprétation : Pour une durée de communication mensuelle supérieure à 50 minutes, le tarif 2 est plus avantageux que le tarif 1.

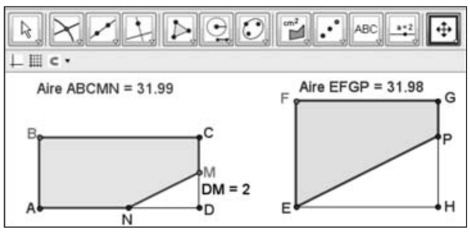
120 **a.**

Nombre de livres empruntés par an	10	30	45
Prix à payer avec la formule A (en €)	5	15	22,50
Prix à payer avec la formule B (en €)	9,50	13,50	16,50
Prix à payer avec la formule C (en €)	15,50	15,50	15,50

b. Prix à payer :
– avec la formule A : $0{,}5x$
– avec la formule B : $7{,}50 + 0{,}2x$
– avec la formule C : 15,50
c. On résout l'équation $0{,}5x = 7{,}5 + 0{,}2x$; on obtient :
$$0{,}3x = 7{,}5 \text{ soit } x = 25.$$
Cette équation a pour solution 25.
Interprétation : On paie le même prix avec les formules A ou B si on emprunte 25 livres dans l'année.

14. Exercices d'approfondissement

121 **a. et b.** Réalisation de la figure.
c. Il semble que les aires des polygones ABCMN et EFGP soient égales pour DM = 2 (l'affichage peut être approché).



d. On désigne par x la longueur DM (en cm).
On a : $0 \leqslant x \leqslant 4$.

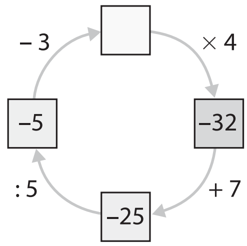
• L'aire du polygone ABCMN est égale à la différence de l'aire du rectangle ABCD et de l'aire du triangle rectangle DMN.
Aire du rectangle ABCD : 36 cm².
Aire du triangle DMN : $\dfrac{\text{DM} \times \text{DN}}{2}$ soit $\dfrac{x \times 2x}{2}$ c'est-à-dire x^2.
Ainsi l'aire du polygone ABCMN est $36 - x^2$.

• L'aire du polygone EFGP est égale à la différence de l'aire du rectangle EFGH et de l'aire du triangle rectangle EHP.
Aire du rectangle EFGH : 48 cm².

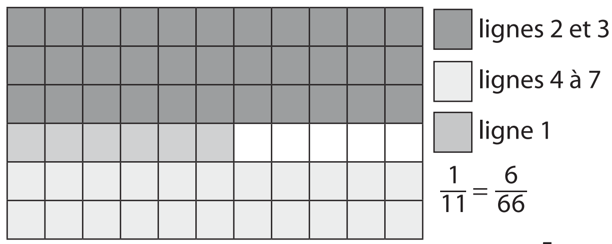
Aire du triangle EHP : $\dfrac{\text{HP} \times \text{HE}}{2}$ soit $\dfrac{2x \times 8}{2}$ c'est-à-dire $8x$.
Ainsi l'aire du polygone EFGP est $48 - 8x$.

• « Les aires des deux polygones ABCMN et EFGP sont égales » se traduit par l'équation : $36 - x^2 = 48 - 8x$.
Pour résoudre cette équation, on soustrait $48 - 8x$ aux deux membres, puis on factorise.
$(36 - x^2) - (48 - 8x) = 0$
On peut factoriser $36 - x^2$ à l'aide d'une identité remarquable : $36 - x^2 = (6 - x)(6 + x)$
On factorise $48 - 8x$ en mettant 8 en facteur.
Ainsi $48 - 8x = 8(6 - x)$. On a donc à résoudre l'équation :
$$(6 - x)(6 + x) - 8(6 - x) = 0$$
On repère un facteur commun : $(6 - x)$ qu'on met en facteur.
$(6 - x)((6 + x) - 8) = 0$ autrement dit $(6 - x)(x - 2) = 0$.
Cette équation produit nul a deux solutions 6 et 2.
Seule la solution 2 peut être retenue pour la longueur DM ($0 \leqslant x \leqslant 4$).
Conclusion : les deux polygones ABCMN et EFGP ont la même aire lorsque DM = 2 cm.

122 Deux démarches possibles :
1. Méthode par essais – erreurs.
Par exemple, si dans la case du bas :
• on essaie 0 : on obtient –5.
• on essaie 5 : on obtient –1.
• on essaie 10 : on obtient 3.
Les écarts semblent s'agrandir.
On peut alors penser à un nombre négatif :
• on essaie –5 : on obtient –9 etc.
2. Méthode algébrique :
On nomme x le nombre qui figure dans une des quatre cases, puis on suit le programme de calcul, on exprime les trois résultats en fonction de x, puis on écrit l'égalité liée au fait que le résultat final est égal au nombre choisi au départ.
Quatre possibilités :
1. départ dans la case de gauche
• x • $x - 3$ • $(x - 3) \times 4$ • $4(x - 3) + 7$ • $\dfrac{4(x-3)+7}{5}$
On obtient l'équation $\dfrac{4(x-3)+7}{5} = x$ soit $4(x - 3) + 7 = 5x$ grâce à l'égalité des produits en croix ; la solution est –5.
2. départ dans la case du haut
• x • $4x$ • $4x + 7$ • $\dfrac{4x+7}{5}$ • $\dfrac{4x+7}{5} - 3$
On obtient l'équation $\dfrac{4x+7}{5} - 3 = x$ soit $4x - 8 = 5x$ grâce à l'égalité des produits en croix ; la solution est –8.
3. départ dans la case de droite
• x • $x + 7$ • $\dfrac{x+7}{5}$ • $\dfrac{x+7}{5} - 3$ • $\left(\dfrac{x+7}{5} - 3\right) \times 4$
On obtient l'équation $\left(\dfrac{x+7}{5} - 3\right) \times 4 = x$ soit $4(x - 8) = 5x$ grâce à l'égalité des produits en croix ; la solution est –32.
4. départ dans la case du bas
• x • $\dfrac{x}{5}$ • $\dfrac{x}{5} - 3$ • $\left(\dfrac{x}{5} - 3\right) \times 4$ • $4\left(\dfrac{x}{5} - 3\right) + 7$
On obtient l'équation $4\left(\dfrac{x}{5} - 3\right) + 7 = x$ soit $4 \times \dfrac{x}{5} - 5 = x$ ou $-5 = \dfrac{x}{5}$ ainsi $x = -25$. La solution est –25.
Schéma complété :



123 Deux démarches possibles :
1. Exemple de résolution par une démarche arithmétique :
On représente la répartition des entrées de métro Guimard qui subsistent encore par un rectangle de 11 sur 6.



Les cinq entrées qui restent correspondent à $\dfrac{5}{66}$ des entrées.
Donc il subsiste encore 66 entrées Guimard aujourd'hui.
2. Démarche par une résolution algébrique :
On note x le nombre d'entrées Guimard qui existent encore aujourd'hui.
On obtient l'équation :
$$\frac{1}{11}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 5 = x \text{ d'où } 5 = \frac{5}{66}x.$$
La solution est 66.
Il reste 66 entrées Guimard encore aujourd'hui.

124 **1. a.** $11 \times (2 \times 9) = 198$ $\qquad 10^2 + 2 = 102$
b. Le professeur avait choisi les nombres 9 ; 10 et 11.
2. a. Si le professeur a choisi 6 comme 2e nombre, le 1er nombre est 5 et le 3e est 7. Leslie obtient $7 \times (2 \times 5)$ soit 70 et John obtient $6^2 + 2$ soit 38. Ils n'obtiennent pas le même résultat.
Si le professeur a choisi –7 comme 2e nombre, le 1er nombre est –8 et le 3e est –6. Leslie obtient $-6 \times (2 \times (-8))$ soit 96 et John obtient $(-7)^2 + 2$ soit 518. Ils n'obtiennent pas le même résultat.
Le professeur n'a choisi ni 6 ni –7 comme 2e nombre.
b. Si on prend pour inconnue le 2e nombre entier et qu'on l'appelle n, alors le résultat de Leslie est $(n + 1) \times (2 \times (n - 1))$ et celui de John est $n^2 + 2$.
Ils obtiennent le même résultat donc :
$$(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = n^2 + 2 \text{ soit } 2(n^2 - 1) = n^2 + 2.$$

Ainsi $2n^2 - 2 = n^2 + 2$ c'est-à-dire $n^2 = 4$.
Cette équation a deux solutions 2 et –2.
Si le professeur a choisi 2 ou –2 comme 2e nombre, Leslie et John trouvent le même résultat, ce qui se traduit par :

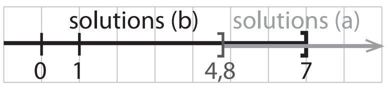
• Si le professeur a choisi les nombres 1 ; 2 et 3 alors Leslie et John trouvent 6 comme résultat.

• Si le professeur a choisi les nombres –3 ; –2 et –1 alors Leslie et John trouvent 6 également.

125 **1.** Inéquation (a) / Inéquation (b)

$5x - 8 > 16$ / $7x - 22 \leqslant 5x - 8$
$5x > 24$ / $2x \leqslant 14$
$x > \dfrac{24}{5}$ / $x \leqslant 7$

Les solutions de l'inéquation (a) sont les nombres strictement supérieurs à 4,8.
Les solutions de l'inéquation (b) sont les nombres inférieurs ou égaux à 7.
Représentation sur une droite graduée :



2. Les nombres qui sont solutions des deux inéquations à la fois sont les nombres strictement supérieurs à 4,8 et inférieurs ou égaux à 7.
Parmi eux, on trouve les nombres entiers 5 ; 6 et 7.

126 **1. a.** ❶ $1 - (x - 3)^2 = 1 - (x^2 - 6x + 9)$ soit $-x^2 + 6x - 8$
❷ $(2x - 3)^2 - (4x - 5)(x + 1) =$
$(4x^2 - 12x + 9) - (4x^2 + 4x - 5x - 5)$
soit $-11x + 14$.
❹ $3(x - 1)(3x + 5) = 9x^2 + 6x - 15$
C'est l'équation ❷ qui est du premier degré.
b. Équation ❷ : $-11x + 14 = 0$. La solution est $\dfrac{14}{11}$.
2. a. Le nombre 3 étant différent de 0, résoudre l'équation $3(x - 1)(3x + 5) = 0$ revient à résoudre l'équation :
$$(x - 1)(3x + 5) = 0.$$
b. Les solutions sont 1 et $-\dfrac{5}{3}$.
3. • Équation ❶
On reconnaît une différence de deux carrés. On obtient :
$$(1 - (x - 3))(1 + (x - 3)) \text{ soit } (-x + 4)(x - 2).$$
L'équation produit nul $(-x + 4)(x - 2) = 0$ a pour solutions 4 et 2. Donc 4 et 2 sont les solutions de l'équation ❶.
• Équation ❸
On factorise $16x^2 - 40x + 25$ à l'aide d'une identité remarquable. On obtient : $(4x - 5)^2 = 0$; la solution est $\dfrac{5}{4}$.
Donc $\dfrac{5}{4}$ (ou 1,25) est la solution de l'équation ❸.

127 Plusieurs démarches possibles :
1. par essais successifs. Par exemple :
• si Lady Agnès a 20 ans, il lui reste 80 ans à vivre, la moitié est 40 ans, mais les $\dfrac{4}{3}$ de 40 n'est pas un nombre entier.
• si Lady Agnès a 19 ans, il lui reste 81 ans à vivre, mais la moitié de 81 n'est pas un nombre entier.
• si Lady Agnès a 16 ans, il lui reste 84 ans à vivre, la moitié est 42 ans, mais $\dfrac{4}{3}$ de 42 ans = 56 ans et $56 \neq 16$. etc.
2. par une méthode algébrique :
On nomme n l'âge de Lady Agnès.
Alors : $n = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{2}(100 - n)$ d'où $6n = 4(100 - n)$.
La solution de cette équation est 40.
Donc Lady Agnès a 40 ans.

15. Tâche complexe

128 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Combien de poignées de mains sont échangées entre 4 personnes ? entre 5 personnes ? entre 6 personnes ?
Aide n° 2 : 6 poignées de mains sont échangées entre 4 personnes. Combien de **nouvelles** poignées de mains compte-t-on si une 5e personne arrive ?
Aide n° 3 : Imaginez un groupe de 100 personnes qui ont déjà échangé leurs poignées de mains. Arrive une 101e personne : de combien de poignées de mains va augmenter le nombre de poignées de mains déjà échangées ?
Aide n° 4 : Parmi les supports de travail figure un tableur. Comment utiliser ce tableur pour obtenir à la fois le nombre de personnes réunies et le nombre de poignées de mains échangées ?

2. Quelques commentaires

• On peut penser que les élèves commenceront par compter le nombre de poignées de mains échangées par 2 personnes, puis 3, puis 4, etc., et obtiendront la suite de nombres 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 etc.
En poursuivant ce comptage, les élèves vont sans doute en percevoir rapidement les limites et comprendre qu'ils doivent trouver une démarche raisonnée pour pouvoir atteindre le nombre 1 000 000.
• Une clé de cette tâche complexe est de penser à observer ce qui se passe lorsqu'une nouvelle personne arrive.
Il est indispensable que les élèves conçoivent alors un protocole expérimental pour répondre à la demande de Tony.
• A ce stade de la recherche, le recours à un tableur est nécessaire. Si le protocole d'expérimentation a été bien défini, les élèves sauront comment compléter les cellules afin de trouver le nombre de poignées de mains échangées.
• Les élèves sont alors en mesure de répondre qu'il faut réunir au moins 1 415 personnes et que 1 000 405 poignées de mains seront échangées.
L'enseignant pourra alors :
– soit accepter cette réponse ;
– soit suggérer aux élèves qu'ils viennent de formuler une conjecture et leur demander de valider cette conjecture.

3. Éléments de réponse

1. Phase d'essais.

2. Élaboration d'un protocole d'expérimentation

L'arrivée d'une nouvelle personne apporte autant de poignées de mains nouvelles que l'indique le nombre de personnes réunies avant cette arrivée.

Ainsi, n étant un nombre entier positif, le nombre de poignées de mains échangées par n personnes est le nombre de poignées de mains échangées par $n-1$ personnes augmenté du nombre de poignées de mains échangées par ces $n-1$ personnes avec la n^e personne, c'est-à-dire $n-1$.

Exemple :

Pour 4 personnes, on compte 6 poignées de mains.

Arrive une 5e personne, elle échange 4 poignées de mains avec les 4 personnes déjà présentes.

3. Recherche à l'aide d'un tableur

a. Mise en place du protocole

	A	B
1	Nombre de personnes réunies	Nombre de poignées de mains échangées
2	2	1
3	3	3
4	4	6
5	5	10
6	6	15

On entre les nombres 2 et 1 dans les cellules A2 et B2.

Le nombre de poignées de mains échangées par 3 personnes est le nombre de poignées de mains échangées par 2 personnes augmenté du nombre de poignées de mains échangées par ces 2 personnes avec la 3e personne, c'est-à-dire 2, donc dans la cellule B3, on entre la formule =B2+A2.

b. Suivi du protocole

On étend la plage A3 : B3 vers le bas, jusqu'à dépasser 1 000 000 en colonne B.

	A	B
1405	1405	986310
1406	1406	987715
1407	1407	989121
1408	1408	990528
1409	1409	991936
1410	1410	993345
1411	1411	994755
1412	1412	996166
1413	1413	997578
1414	1414	998991
1415	1415	1000405

c. Conjecture : il semble qu'il faille réunir au moins 1 415 personnes ; 1 000 405 poignées de mains seront échangées.

4. Validation de la conjecture

Le nombre de poignées de mains échangées est la somme :

$$1+2+3+\ldots.+1412+1413+1414$$

Pour calculer cette somme, on peut remarquer qu'en ajoutant le 1er et le dernier termes, le 2e et l'avant-dernier termes, etc., on trouve toujours le même résultat : 1 415.

On a ainsi (1 414 : 2) paires de nombres, soit 707 paires de nombres dont la somme est 1 415.

Et $707 \times 1\,415 = 1\,000\,405$

On peut vérifier qu'au rang précédent, on a :

$$1+2+3+\ldots.+1411+1412+1413$$

soit 706 paires de nombres dont la somme est 1 414 augmenté du « terme du milieu » qui est 707.

Et $706 \times 1\,414 + 707 = 998\,991$

5. Retour à la situation

Il faut que Tony réunisse au moins 1 415 personnes ; elles échangeront 1 000 405 poignées de mains au minimum.

4. Entre nous

Si n désigne le nombre de personnes présentes, le nombre de poignées de mains échangées est la somme des $n-1$ premiers nombres entiers.

Soit S cette somme. On l'écrit deux fois, une fois avec les nombres dans l'ordre croissant, une fois avec les nombres dans l'ordre décroissant.

$$S = 1+2+3+\ldots+n-1$$
$$S = n-1+\ldots+\ldots\ \ +\ldots\ +1$$

Puis on ajoute membre à membre :

$$2 \times S = (1+n-1)+(2+n-2)+\ldots+(n-1+1)$$

d'où $2S = n \times$ (le nombre de termes) soit $2S = n \times (n-1)$ et ainsi $S = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On cherche donc le plus petit nombre entier positif n tel que :

$\dfrac{n(n-1)}{2} \geqslant 1\,000\,000$ soit $n(n-1) \geqslant 2\,000\,000$

Or $n(n-1) = \left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

Donc résoudre l'inéquation $n(n-1) \geqslant 2\,000\,000$ revient à résoudre l'inéquation $\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 2\,000\,000{,}25$ c'est-à-dire :

soit $n-\dfrac{1}{2} \geqslant \sqrt{2\,000\,000{,}25}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1\,414{,}7$

soit $n-\dfrac{1}{2} \leqslant -\sqrt{2\,000\,000{,}25}$ c'est-à-dire $n \leqslant -1\,413{,}7$

n étant un nombre entier positif, on ne retiendra que les solutions entières supérieures ou égales à 1 415.

16. En route vers la Seconde

129 **a.** L'aire du rectangle AEFD est égale à la somme des aires du carré de côté x et des deux rectangles de côtés 5 et x, c'est-à-dire à la différence de l'aire du carré de côté $(x+5)$ et de l'aire du carré ayant deux côtés en pointillés, de côté 5.

Ainsi : $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 5^2$.

Résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revient donc à résoudre l'équation $(x+5)^2 - 5^2 = 39$ autrement dit :

$$(x+5)^2 = 39+25.$$

b. $(x+5)^2 = 39+25$ d'où $(x+5)^2 = 64$ ou $(x+5)^2 - 64 = 0$.

On reconnaît une différence de deux carrés.

Ainsi $(x + 5 - 8)(x + 5 + 8) = 0$ soit $(x - 3)(x + 13) = 0$.
Cette équation produit nul a deux solutions 3 et –13.
On rejette la solution –13, nombre négatif, x désignant une longueur.
Donc $x = 3$.

130 **a.** Dans le triangle ABC, M appartient à [AC] et N appartient à [AB] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$
d'où $\frac{x}{x+9} = \frac{4}{4+10}$.
Ainsi $\frac{x}{x+9} = \frac{4}{14}$ c'est-à-dire $\frac{x}{x+9} = \frac{2}{7}$.
b. L'égalité des produits en croix permet d'écrire :
$$7x = 2(x + 9).$$
On obtient $7x = 2x + 18$ soit $5x = 18$ d'où $x = \frac{18}{5}$.
La solution de cette équation est $\frac{18}{5}$ (ou 3,6).
D'où AN = 3,6 cm.

131 On appelle x la somme d'argent que le marchand possède au départ (unité le gros) et on écrit jour après jour les différentes étapes.

Jour	Somme en bourse	Somme dépensée	Reste
1	$2x$	1	$2x - 1$
2	$3(2x - 1)$ soit $6x - 3$	2	$6x - 5$
3	$4(6x - 5)$ soit $24x - 20$	3	$24x - 23$

Le 3^e^ jour, il lui reste 3 gros, donc on obtient l'équation $24x - 23 = 3$ ou $24x = 26$.
La solution est $\frac{13}{12}$. Le marchand avait $\frac{13}{12}$ de gros au début.
Note : En France, au début du XIII^e^ siècle, à cause de l'inflation, on ne peut plus se contenter d'un instrument de paiement aussi faible qu'un denier qui ne comporte que 0,35 g d'argent fin. Par exemple, la solde journalière des troupes engagées par le roi de France se monte à 27 370 livres soit 7,3 tonnes de numéraire comprenant 230 kg d'argent fin. On imagine donc de créer de grosses monnaies ; ainsi c'est en 1266 qu'a été créé le « gros » par Saint Louis, pour une valeur de douze deniers, donc d'un sou. Dans la première moitié du XV^e^ siècle, la France dispose de trois types d'espèces : le denier, le gros, (qui vaut de 15 à 24 deniers selon les moments) et la pièce d'or.

132 On désigne par x la longueur (en cm) du côté du carré bleu.
Le côté du carré vert mesure $x + 2$ (en cm) et celui du côté rouge mesure $x + 4$ (en cm).
Ainsi $x^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)^2 = 116$ c'est-à-dire
$3x^2 + 12x + 20 = 116$ (d'après le 1 de l'écran), ou encore $3x^2 + 12x = 96$ c'est-à-dire, après avoir divisé les deux membres par 3, $x^2 + 4x = 32$.
Les solutions de cette équation sont –8 et 4 (d'après le 2 de l'écran).
On ne conserve que la valeur positive.
Ainsi le côté du carré bleu mesure 4 cm.
Autre méthode : on note x la longueur du côté du carré vert. Alors le côté du carré bleu mesure $x - 2$ (en cm) et celui du côté rouge mesure $x + 2$ (en cm).
On a alors : $(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 116$
soit $x^2 - 4x + 4 + x^2 + x^2 + 4x + 4 = 116$ c'est-à-dire $3x^2 + 8 = 116$ ou $3x^2 = 108$ soit $x^2 = 36$.
Des deux solutions 6 et – 6, on ne retient que la solution positive.
Ainsi le côté du carré vert mesure 6 cm, alors le côté du carré bleu mesure 4 cm.

CHAPITRE 7

Systèmes d'équations

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Au collège, dès la **6e**, la notion d'équation est abordée par l'utilisation d'égalité à trous.

Une première approche de la notion de solution d'une équation est réalisée notamment à l'occasion du travail sur la notion de quotient non décimal.

En 5e, on commence à utiliser le mot « équation ». On poursuit le travail d'initiation à la résolution d'équations par référence au sens des opérations (recherche d'un nombre inconnu dans une opération).

La notion de solution d'une équation est introduite en testant à l'occasion de la résolution de problèmes si une égalité où figurent un ou deux nombres indéterminés est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques.

Le travail engagé en **5e** prépare l'étude, en classe de **4e**, de la conservation des égalités ainsi que celle de la résolution des équations.

En **4e** est aussi abordée la résolution d'un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

L'intégration des lettres et des nombres relatifs dans les expressions algébriques représente une difficulté importante pour les élèves.

Les tests d'égalité sont toujours là : le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prend tout son intérêt.

2. Système de deux équations à deux inconnues

Dès la **3e**, contrairement à la classe de **4e**, une équation peut comporter deux inconnues (généralement en **3e** x et y).

• À **l'activité 1**, le questionnement et l'utilisation d'un tableau permettent de faire découvrir à l'élève qu'une telle équation peut avoir plusieurs solutions.

L'élève fait l'apprentissage du passage de l'équation $ax + by = c$ ($b \neq 0$) à la forme réduite $y = a'x + b'$.

• **L'activité 2** complète **l'activité 1** en introduisant une deuxième équation à deux inconnues. On cherche un couple de nombres qui est solution à la fois de deux équations à deux inconnues ce qui conduit à l'introduction dans le vocabulaire de l'élève du mot « système ».

Le système d'équations peut être utilisé comme outil de résolution d'un problème concret. L'objet système d'équations est alors présenté comme un moyen de répondre à la question :

Sachant qu'une équation à deux inconnues a plusieurs solutions, peut-on trouver le couple solution (en **3e** il n'y en a qu'un) qui vérifie deux équations à deux inconnues ?

Le couple solution du système obtenu pourra être trouvé, comme dans **l'activité 3**, par tâtonnement ou en utilisant un tableur.

L'objectif de **l'activité 4** est de montrer qu'en appliquant une méthode de résolution, on peut trouver « un peu plus rapidement » le couple solution.

Certes si les méthodes par tâtonnement ou essais successifs mises en concurrence avec l'outil algébrique ont leur intérêt, l'outil algébrique connu par l'élève va le rassurer.

3. Interprétation graphique

L'activité 5 ne pourra être abordée qu'après l'étude du chapitre 10 : fonctions affines.

Dans **l'activité 5**, c'est précisément le rapprochement entre fonctions affines et équations linéaires qui semble l'enjeu de ce type de problèmes.

Cette dernière activité conforte les acquis sur les représentations graphiques des fonctions affines.

La représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est une droite.

Cette droite est formée de tous les points M(x, $ax + b$).

C'est pourquoi au **b.**, il est demandé d'écrire une expression $ax + by = c$ (avec $b \neq 0$) sous la forme $y = a'x + b'$.

Cependant la notion d'équation d'une droite n'est plus au programme.

Au **d.**, on suggère que le couple solution d'un système est obtenu en lisant les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.

Représenter graphiquement chaque couple solution par un point n'est pas facile pour tous les élèves. C'est pourquoi, il est demandé dans cette activité de faire une vérification par le calcul.

4. Savoir-faire

L'énoncé 1 « Résoudre algébriquement un système (1) » propose une méthode qui par l'intermédiaire d'une **substitution** ramène la résolution du système à la résolution d'une équation de la forme $ax + b = c$ ou $a'y + b' = c'$ (après développement et réduction des expressions écrites dans le premier membre).

Il est évident qu'il faut insister sur la définition du mot « **substitution** ».

Principe : on exprime, dans une **équation**, une inconnue en fonction de l'autre, et on reporte dans la seconde **équation**.

L'énoncé 2 « Résoudre algébriquement un système (2) » propose la méthode dite « par **addition** ».

Le but est d'obtenir une équation à une seule inconnue, que l'on sait résoudre, en ajoutant les deux égalités membre à membre.

On multiplie les équations par des nombres choisis de façon que les coefficients d'une inconnue deviennent opposés et s'éliminent ainsi par addition.On dit aussi que le système est résolu par « combinaisons linéaires ».

Pour résoudre un problème, beaucoup de solutions de l'arithmétique sont longues et difficiles à exprimer ; d'autres en revanche reposent sur des observations auxquelles on ne pense pas toujours. Il y a souvent avantage à employer des lettres pour représenter les nombres inconnus.

L'énoncé 3 « Traiter une situation conduisant à un système » montre qu'en utilisant un système de deux équations à deux inconnues la solution prend une tournure algébrique, elle ne fait appel à aucune remarque préliminaire : elle est rapide et nette.

En **3e**, il est conseillé de demander aux élèves de suivre des étapes : choix des inconnues, mise en équation, résolution d'un système et enfin retour à la situation pour permettre la maîtrise rapide de cette étape du cours.

L'assimilation du **savoir-faire 10** permettra à l'élève de vérifier rapidement l'exactitude de la solution qu'il aura trouvée à l'écrit.

5. Compléments

Dans le manuel, page 141, des « exercices à l'oral » sont proposés. Ces exercices ciblent les items du domaine de la **compétence 1** « s'exprimer à l'oral », et parfois de la **compétence 3** du socle intitulée « pratiquer une démarche scientifique ou technologique, résoudre des problèmes ». Cependant les autres domaines des **compétences 1 et 3** ne sont pas exclus.

Le calcul assisté, par une calculatrice ou un tableur, trouve naturellement sa place dans la résolution de problèmes et pour la vérification de résultats. En libérant l'élève de calculs fastidieux, il leur permet de focaliser leur attention sur l'élaboration, la mise en oeuvre et le contrôle d'une stratégie de résolution.

L'apprentissage des différentes fonctionnalités d'une calculatrice **(savoir-faire 10 page 139)** ou d'un tableur ne doit pas être laissé à la charge des élèves, il doit être intégré au cours de mathématiques.

Nous proposons ainsi des exercices siglés **B2i (n° 30 page 142 ; 44 page 143)** et d'autres exercices dans lesquels l'élève utilise la calculatrice **(exercices 36 à 38 page 142 ; exercices 41 à 43 page 143 ; exercice 96 page 149)**.

L'exercice 93 page 148 conduit à un système dont une équation est du second degré, mais en fait la résolution de ce système se ramène aisément à la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

L'exercice 85 page 148 conduit à un système de trois équations et il comporte trois inconnues.

La résolution de ce système se ramène facilement à la résolution d'une équation à une inconnue.

Corrigés

1. Devinettes

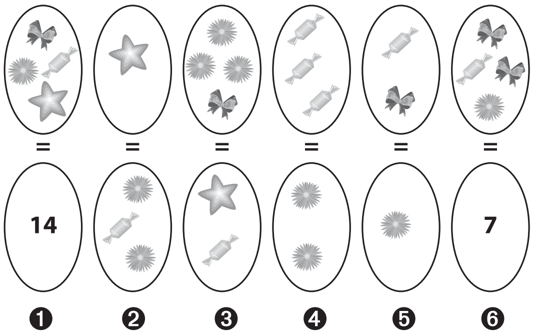
• Devinette

Les deux nombres cherchés sont 70 et 30.

• Devinette

un papillon = 1 ;   une fleur = 3 ;
une étoile = 8 ;   un bonbon = 2.

Des explications :



La colonne 4 donne : 1 fleur = **1,5 bonbon.**

La colonne 2 donne : 1 étoile = 2 fleurs + 1 bonbon soit 1 étoile = 4 **bonbons.**

La colonne 5 donne **1 bonbon + 1papillon =** 1 fleur donc 1 bonbon + 1 papillon = 1,5 bonbon
soit 1 papillon = **0,5 bonbon.**

La colonne 6 donne 2papillons + 1 fleur + 1 bonbon = 7 donc 2 ×0,5 bonbon + 1,5 ×bonbon +1 bonbon = 7 et ainsi 1 bonbon = 2

Alors un papillon vaut 1 ; une fleur vaut 3 ; une étoile vaut 8 et un bonbon vaut 2.

Les colonnes 1 et 3 permettent de faire des vérifications.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : c.

Penser à la règle de suppression des parenthèses :

$$3x - (2x + 1) = 3x - 2x - 1 = x - 1.$$

2 Bonne réponse : c.

Si $y = 1{,}5$, alors
$8y + 3 = 8 \times 1{,}5 + 3 = 15$ et $5y + 7{,}5 = 5 \times 1{,}5 + 7{,}5 = 15$

3 Bonne réponse : b.

$4x - 1 = 8x + 5$ donc $4x - 1 - 5 = 8x$
et $\quad -1 - 5 = 8x - 4x \quad -6 = 4x \quad$ et $\quad x = \dfrac{-6}{4} = -1{,}5$

4 Bonne réponse : a.

Par la fonction *f*, l'image de 0 est 1 et l'image de 1 est –1. La représentation graphique de *f* passe par les points (0 ; 1) et (1 ; –1).

5 Bonne réponse : b.

$200x + 100y = 1\,000$ donc $2x + y = 10$ et $y = 10 - 2x$

3. Calcul mental

6 **a.** 4 **b.** 7 **c.** 4 **d.** 8

7 **a.** $x = 1$; $y = 1$. **b.** $x = 0$; $y = -\dfrac{8}{7}$
c. $x = 2$; $y = \dfrac{1}{3}$

4. Activités

1 **a. Résoudre en tâtonnant** $3 \times 5 + 2 \times 1 = 17$

Non, Pauline n'a pas pu télécharger 3 films et 2 titres.

$$3 \times 5 + 10 \times 1 = 25$$

Oui, Pauline a pu télécharger 3 films et 10 titres.

b. $6 \times 5 = 30$ et $5 \times 5 = 25$

Pauline n'ayant dépensé que 25 €, elle n'a pas pu télécharger 6 films et plus. Si elle avait téléchargé 5 films alors elle n'aurait téléchargé aucun titre.

c.

Nombre de films	Prix des films	Prix total	Nombre de titres
5	25	25	0
4	20	25	5
3	15	25	10
2	10	25	15
1	5	25	20
0	0	25	25

d. Lorsqu'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.

$$5x + y = 25 \;\text{ donc }\; \cancel{5x} - \cancel{5x} + y = 25 - 5x$$
$$\text{et }\; y = 25 - 5x.$$

2 **Trouver une solution commune à chaque équation**

a. $6x + 2y = 34$

x représente le nombre de films téléchargés en juillet par Tristan et y représente le nombre de titres téléchargés par Tristan en juillet.

b. Lorsqu'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.

$$\cancel{6x} + 2y - \cancel{6x} = 34 - 6x$$
$$2y = 34 - 6x$$

Lorsqu'on divise par un même nombre (non nul) chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}y = \frac{34}{2} - \frac{6}{2}x \;\text{ soit }\; y = 17 - 3x$$

c.

	A	B	C
1	x	$25 - 5x$	$17 - 3x$
2	0	25	17
3	1	20	14
4	2	15	11
5	3	10	8
6	4	5	5
7	5	0	2

d. Si $x = 4$ alors $y = 5$ (valeurs possibles)

Pauline a téléchargé 4 films et 5 titres.

Tristan a aussi téléchargé 4 films et 5 titres.

3 Mettre en équations

a. x représente le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

En réservant leurs places dans une grande surface, ils paieraient 45 € par adulte et 30 € par enfant, pour un total de 510 €. Cette situation peut se traduire par $45x + 30y = 510$.

En réservant leurs places sur Internet, ils paieraient 27 € par adulte et 20 € par enfant, pour un total de 316 €. Cette situation peut se traduire par $27x + 20y = 316$.

Ces informations conduisent au système

$$\begin{cases} 45x+30y=510 \\ 27x+20y=316 \end{cases}$$

b. Il y a au maximum 11 adultes.

	A	B	C
1	x	$17 - 1,5x$	$15,8 - 1,35x$
2	0	17	15,8
3	1	15,5	14,45
4	2	14	13,1
5	3	12,5	11,75
6	4	11	10,4
7	5	9,5	9,05
8	6	8	7,7
9	7	6,5	6,35
10	8	5	5
11	9	3,5	3,65
12	10	2	2,3
13	11	0,5	0,95

Dans ce groupe, il y a 8 adultes et 5 enfants.

4 Utiliser une méthode algébrique

a. Lorsqu'on divise par un même nombre (non nul) chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.

$$\frac{45}{30}x + \frac{30}{30}y = \frac{510}{30} \quad \text{soit} \quad 1,5x + y = 17.$$

Lorsqu'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité :

$$\cancel{1,5x} - \cancel{1,5x} + y = 17 - 1,5x \quad \text{soit} \quad y = 17 - 1,5x.$$

b. En reportant cette expression de y dans la deuxième équation du système, on obtient :

$$27x + 20(17 - 1,5x) = 316.$$

c. Résolution de l'équation :

$27x + 340 - 30x = 316$

$-3x + 340 = 316$

$-3x + \cancel{340} - \cancel{340} = 316 - 340$

$-3x = -24$

$x = 8$

Vérification

$27 \times 8 + 20 \times (17 - 1,5 \times 8) = 216 + 20 \times 5 = 316$

La solution de cette équation est 8.

Si $x = 8$ alors $y = 17 - 1,5 \times 8 = 5$

d. Si $x = 8$ et $y = 5$ alors

$45 \times 8 + 30 \times 5 = 510$

$27 \times 8 + 20 \times 5 = 316$

Pour $x = 8$ et $y = 5$, les deux équations du système initial sont vraies.

Le couple (8 ; 5) est le couple solution du système.

5 Lire la solution d'un système avec des droites

a. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$

b. Lorsqu'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.

$$\cancel{5x} - \cancel{5x} - 3y = 2 - 5x$$
$$-3y = 2 - 5x$$

Lorsqu'on divise par un même nombre (non nul) chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.

$$\frac{\cancel{-3}}{\cancel{-3}}y = \frac{2}{-3} - \frac{5}{-3}x$$

$$y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}x \quad \text{ou} \quad y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$$

c. La droite (d_1) représente la fonction affine

$$f : x \mapsto -x + 6$$

et la droite (d_2) représente la fonction affine

$$g : x \mapsto \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Jade a remarqué que $f(6) = 0$ et $f(0) = 6$.

Jade a donc tracé la droite (d_1) qui passe par les points de coordonnées (6 ; 0) et (0 ; 6).

Jade a aussi remarqué que $g(1) = 1$ et $g(4) = 6$.

Jade a aussi tracé la droite (d_2) qui passe par les points de coordonnées (1 ; 1) et (4 ; 6).

d. Un seul point est simultanément sur les deux droites. Ses coordonnées semblent être (2,5 ; 3,5).

$2,5 + 3,5 = 6$ donc la première équation est vérifiée.

$5 \times 2,5 - 3 \times 3,5 = 12,5 - 10,5 = 2$ donc la deuxième équation est vérifiée.

(2,5 ; 3,5) est le couple solution du système.

e. Jade doit construire un rectangle de largeur 2,5 cm et de longueur 3,5 cm.

5. J'applique

4 a. $x = 7 + 3y$ ou $x = 3y + 7$

b. Dans la deuxième équation, **on remplace** x par $7 + 3y$

On obtient :

$3(7 + 3y) + 4y = 8$

$21 + 9y + 4y = 8$

$21 + 13y = 8$

$13y = -13$

$y = -1$

On remplace y par -1 dans $7 + 3y$.

On obtient $x = 7 + 3 \times (-1) = 4$

On vérifie que pour $x = 4$ et $y = -1$

$x - 3y = 4 - 3 \times (-1) = 7$

$3x + 4y = 3 \times 4 + 4 \times (-1) = 8$

Donc le couple (4 ; –1) est solution de ce système.

5 **a.** $b = 10 - 2a$.

b. Dans la première équation, **on remplace *b*** par **10 – 2*a***

On obtient :

$-5a + 3(\mathbf{10 - 2a}) = -3$

$-5a + 30 - 6a = -3$

$30 - 11a = -3$

$-11a = -33$

$a = 3$.

On remplace *a* par 3 dans **10 – 2*a***.

On obtient $b = 10 - 2 \times 3 = 4$

On vérifie que pour $a = 3$ et $b = 4$

$-5a + 3b = -5 \times 3 + 3 \times 4 = -3$

$2a + b = 2 \times 3 + 4 = 10$

Donc le couple (*a* = 3 ; *b* = 4) est solution de ce système.

6 **a.** Étape ❶ : en multipliant par – 2 chaque membre de la deuxième égalité, on obtient une nouvelle égalité :

$$-6x - 6y = 111.$$

b. Le système s'écrit $\begin{cases} 6x + 4y = 95 \\ -6x - 6y = -111 \end{cases}$

Étape ❷: par addition membre à membre, on obtient :

$6x + 4y + (-6x - 6y) = 95 - 111$

Étape ❸ : $\cancel{6x} + 4y - \cancel{6x} - 6y = -16$

$-2y = -16$

$y = 8$

Étape ❹ : on remplace y par 8 dans l'équation :

$$6x + 4y = 95.$$

$6x + 4 \times 8 = 95$ soit $6x = 63$ et $x = 10{,}5$.

Étape ❺ : on en conclut que le couple (10,5 ; 8) est la solution de ce système.

7 **a.** Étape ❶ : en multipliant par 3 chaque membre de la première égalité, on obtient une nouvelle égalité :

$$9x + 3y = 21.$$

b. Le système s'écrit $\begin{cases} 9x + 3y = 21 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

Étape ❷: par addition membre à membre, on obtient :

$$9x + 3y + (2x - 3y) = 21 + 1.$$

Étape ❸ : $9x + \cancel{3y} + 2x - \cancel{3y} = 22$

$11x = 22$

$x = 2$

Étape ❹ : on remplace x par 2 dans l'équation

$3x + y = 7$.

$3 \times 2 + y = 7$ soit $y = 1$.

Étape ❺ : on en conclut que le couple (2 ; 1) est la solution de ce système.

8 **Choix des inconnues**

On note x le nombre de pots de 500 g et y le nombre de pots de 375 g.

Mise en équation

On souhaite répartir ces 6 kg de confiture dans des pots de 500 g et des pots de 375 g donc :

$$500\,x + 375\,y = 6\,000.$$

La famille dispose de 14 pots donc $x + y = 14$.

La lecture de l'énoncé conduit au système (S)

$$\begin{cases} 500x + 375y = 6\,000 \\ x + y = 14 \end{cases}$$

Résolution du système

D'après la deuxième équation : $y = 14 - x$.

Dans la première équation, on remplace y par $14 - x$.

On obtient :

$500\,x + 375\,\mathbf{(14 - x)} = 6\,000$

$500\,x + 5\,250 - 375\,x = 6\,000$

$125\,x = 750$

$x = 6$

On remplace *x* par 6 dans 14 – *x*

On obtient $y = 14 - 6 = 8$

On vérifie que pour $x = 6$ et $y = 8$

$500x + 375y = 500 \times 6 + 375 \times 8 = 6\,000$

$x + y = 6 + 8 = 14$

Donc le couple (6 ; 8) est solution de ce système.

Retour à la situation

La famille dispose de 6 pots de 500 g et de 8 pots de 375 g.

9 **Choix des inconnues**

On note x le premier nombre et y le deuxième nombre.

Mise en équation

Émilien a ajouté le triple du premier nombre au second nombre. Il a trouvé 2.

Donc : $3\,x + y = 2$

Anissa a ajouté le premier nombre et le double du second nombre. Elle a trouvé 9.

Donc : $x + 2y = 9$

La lecture de l'énoncé conduit au système (S)

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Résolution du système

D'après la première équation : $y = 2 - 3x$

Dans la deuxième équation, on remplace y par $2 - 3\,x$

On obtient :

$x + 2(2 - 3x\mathbf{)} = 9$

$x + 4 - 6x = 9$

$-5x = 5$

$x = -1$

On remplace x par -1 dans $2 - 3x$

On obtient $y = 2 - 3 \times (-1) = 5$

On vérifie que pour $x = -1$ et $y = 5$

$3x + y = 3 \times (-1) + 5 = 2$

$x + 2y = -1 + 2 \times 5 = 9$

Donc le couple $(-1\,;5)$ est solution de ce système.
Retour à la situation
Le premier nombre est -1. Le deuxième nombre est 5.

11 **a.** Le couple solution est $(10\,;5)$.
b. Le couple solution est $\left(-\frac{13}{2}\,;\,\frac{14}{5}\right)$ ou $(-6{,}5\,;2{,}8)$.
c. Le couple solution est $\left(\frac{1\,689}{80}\,;-\frac{1}{16}\right)$.

6. Atelier Brevet

12 **a. Résolution du système**
D'après la deuxième équation : $x = 160 - 12y$.
Dans la première équation, on remplace x
par $160 - 12y$
On obtient :
$(160 - 12y) + 5\,y = 76$
$160 -12y + 5y = 76$
$-7y = 76 -160$
$-7y = -84$
$y = 12$
On remplace y par 12 dans $160 - 12y$.
On obtient $x = 160 - 12 \times 12 = 16$
On vérifie que pour $x = 16$ et $y = 12$
$x + 5y = 16 + 5\times12 = 76$
$x + 12y = 16 + 12\times12 = 160$
Donc le couple $(16\,;12)$ est solution de ce système.
b. Choix des inconnues
On note x la longueur d'une locomotive et y la longueur d'un wagon-citerne.
Mise en équation
Deux locomotives et 10 wagons-citernes mesurent 152 m de long donc : $2x + 10y = 152$.
Lorsqu'on divise par un même nombre (non nul) chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.
$$\frac{2}{2}x + \frac{10}{2}y = \frac{152}{2} \quad \text{soit} \quad x + 5y = 76$$
Une locomotive et 12 wagons –citernes mesurent 160 m de long donc $x + 12y = 160$.
La lecture de l'énoncé conduit au système (S)
$$\begin{cases} x + 5y = 76 \\ x + 12y = 160 \end{cases}$$
Ce système a été résolu au **a.**
Rappel : le couple $(16\,;12)$ est solution de ce système.
Retour à la situation
Une locomotive mesure 16 m de long.
Un wagon-citerne mesure 12 m de long.

13 **Choix des inconnues**
On note x le nombre de pièces de 20 F et y le nombre de pièces de 5 F.
Mise en équation
Il y a 43 pièces en tout donc : $x + y = 43$.
La somme totale est 500 F donc $20x + 5y = 500$.
La lecture de l'énoncé conduit au système (S)
$$\begin{cases} x + y = 43 \\ 20x + 5y = 500 \end{cases}$$
Résolution du système
D'après la première équation : $y = 43 - x$.
Dans la deuxième équation, on remplace y par $43 - x$.
On obtient :
$20x + 5(43 - x) = 500$
$20x + 215 - 5x = 500$
$15\,x + 215 = 500$
$15\,x = 285$
$x = 19$
On remplace x par 19 dans $43 - x$.
On obtient $y = 43 - 19 = 24$
On vérifie que pour $x = 19$ et $y = 24$
$x + y = 19 + 24 = 43$
$20x + 5y = 20\times19 + 5\times24 = 500$
Donc le couple (19 ; 24) est solution de ce système.
Retour à la situation
19 pièces de 20 F et 24 pièces de 5 F ont été collectées.

7. Exercices à l'oral

Systèmes d'équations

14 La première coordonnée est généralement notée x et la deuxième y.
$2\times3 - 4\times2 = -2$
Le couple $(3\,;2)$ est la solution du système.
Loïc a raison.

15 **1. a.** Les couples $(1\,;-2)$; $(3\,;-1)$ et $(5\,;0)$ sont des solutions de l'équation $x - 2y = 5$.
b. Les couples $(-2\,;2)$; $(-7\,;5)$ et $(3\,;-1)$ sont des solutions de l'équation $3x + 5y = 4$.
2. Le couple $(3\,;-1)$ est la solution du système
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$
car ce couple est solution des deux équations à la fois.

16 Si $x = -5$ et $y = 3$
$x + 2y = -5 + 2\times 3 = 1$
$2x + 3y = 2\times(-5) + 3\times3 = -1$
Le couple $(-5\,;3)$ est solution des deux équations du système donc il est la solution du système.

17 Si $x = 0{,}5$ et $y = -2$
$3x - 4y = 3\times0{,}5 - 4\times(-2) = 9{,}5$
$-5x + 3y = -5\times0{,}5 + 3\times(-2) = -8{,}5$
Le couple $(0{,}5\,;-2)$ n'est pas une solution de la deuxième équation donc il n'est pas la solution du système.

18 **a.** Si $y = 0$, on reporte cette valeur de y dans la deuxième équation, on obtient $2x = -6$ soit $x = -3$.

Le couple $(-3\,;0)$ est la solution du système

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

b. Si $x = 2$, on reporte cette valeur de x dans la deuxième équation. On obtient $10 + 2y = 0$ soit $y = -5$.

Le couple $(2\,;-5)$ est la solution du système

$$\begin{cases} x = 2 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$$

19 Mise en équation

Le périmètre du rectangle est 18 cm donc $2x + 2y = 18$.

Le périmètre du pentagone est 23 cm donc $2x + 3y = 23$.

Ces informations conduisent au système :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$$

Le couple solution du système est $(4\,;5)$ donc $y = 5$ et $x = 4$.

20 Choix des inconnues

On note x le nombre de points perdus pour un refus et y le nombre de points perdus pour une barre tombée.

Mise en équation

Le cheval de Bastienne a fait un refus et a fait tomber deux barres, pour un total de 11 points, donc $x + 2y = 11$.

Le cheval de Valentine a fait un refus et a fait tomber une barre, pour un total de 7 points, donc $x + y = 7$.

Ces informations conduisent au système

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Résolution du système

On soustrait membre à membre les deux équations et alors $y = 4$.

On remplace y par 4 dans la deuxième équation et alors $x = 3$.

On fait la vérification.

La solution du système est le couple $(3\,;4)$.

Retour à la situation

Une barre tombée coûte 4 points et un refus coûte 3 points.

21 $\begin{cases} x + y = 10{,}5 \\ x - y = 5{,}5 \end{cases}$

On ajoute membre à membre et on obtient $2x = 16$ donc $x = 8$.

On remplace x par 8 dans l'expression $x + y = 10{,}5$ donc $y = 2{,}5$.

On vérifie que $x - y = 8 - 2{,}5 = 5{,}5$.

Le couple (8 ; 2,5) est la solution du système.

22 a. a représente le nombre d'adultes et e représente le nombre d'enfants.

b. *remarque* : $7 \times 12 = 84$ et $8 \times 12 = 96$

Il y a au maximum 7 adultes.

Si $a = 0$ alors $e = 11{,}5$

si $a = 1$ alors $e = 10$

si $a = 2$ alors $e = 8{,}5$

si $a = 3$ alors $e = 7$

si $a = 4$ alors $e = 5{,}5$

si $a = 5$ alors $e = 4$

si $a = 6$ alors $e = 2{,}5$

si $a = 7$ alors $e = 1$

Composition possible du groupe :

1 adulte et 10 enfants ; 3 adultes et 7 enfants ; 5 adultes et 4 enfants ; 7 adultes et 1 enfant.

23 x représente le temps (en heures) mis par Léo pour parcourir la première partie du trajet et y représente le temps (en heures) mis par Léo pour parcourir la deuxième partie du trajet.

24 Osman a dessiné 15 polygones soit $t + q = 15$.

Osman a compté 51 sommets donc $3t + 4q = 51$.

Le système (S_2) permet de trouver le nombre de polygones de chaque sorte.

Interprétation graphique

25 a. L'équation $x + y = 5$ peut s'écrire $y = -x + 5$

L'équation $2x - y = 1$ peut s'écrire $y = 2x - 1$

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ revient à trouver les coordonnées du point d'intersection des droites (d_3) et (d_1). Les droites (d_3) et (d_1) sont sécantes au point $A(2\,;3)$.

(2 ; 3) est le couple solution du système.

b. L'équation $x + y = 5$ peut s'écrire $y = -x + 5$.

L'équation $-x + y = -3$ peut s'écrire $y = x - 3$.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = -3 \end{cases}$ revient à trouver les coordonnées du point d'intersection des droites (d_2) et (d_3). Les droites (d_2) et (d_3) sont sécantes au point $B(4\,;1)$. Donc $(4\,;1)$ est le couple solution du système.

c. L'équation $-x + y = -3$ peut s'écrire $y = x - 3$.

L'équation $2x - y = 1$ peut s'écrire $y = 2x - 1$.

Résoudre le système $\begin{cases} -x + y = -3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ revient à trouver les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2). Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes au point $C(-2\,;-5)$.

(–2 ; –5) est le couple solution du système.

2. Vérifications

a. Si $x = 2$ et $y = 3$ alors $x + y = 2 + 3 = 5$

et $2x + y = 2 \times 2 - 3 = 1$.

Donc $(2\,;3)$ est bien le couple solution du système.

b. Si $x = 4$ et $y = 1$ alors $x + y = 4 + 1 = 5$

et $-x + y = -4 + 1 = -3$.

Donc $(4\,;1)$ est bien le couple solution du système.

c. Si $x = -2$ et $y = -5$ alors $-x + y = 2 - 5 = -3$

et $2x - y = 2 \times (-2) + 5 = 1$

Donc (–2 ; –5) est bien le couple solution du système.

26 L'équation $2x + y = -4$ peut s'écrire $y = -2x - 4$.
L'équation $x - y = 1$ peut s'écrire $y = x - 1$.
Résoudre ce système revient à trouver dans un repère le point d'intersection des droites qui représentent les fonctions affines :

$$f : x \mapsto -2x - 4 \text{ et } g : x \mapsto x - 1$$

Le graphique ❷ est associé au système $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Sur le dessin on lit que le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées $(-1\,;-2)$.
Le couple solution du système est $(-1\,;-2)$.

8. Exercices d'application

Systèmes d'équations

27 Si $x = -5$ et $y = -2$
alors $3x + 2y = 3 \times (-5) + 2 \times (-2) = -19$
Le nombre manquant est -19.

28 **a.** Si $-3x + y = 4$, alors $y = 3x + 4$.
b. Si $x - 2y = 5$, alors $x = 2y + 5$.
c. Si $2x - y = -1$, alors $y = 2x + 1$.

29 **a.** $x = 2y + 4$ **b.** $y = 0,5\,x - 2$

30 **a.** S'il ya 3 enfants dans le groupe alors les adultes ont payé 90 €.
90 n'est pas un multiple de 20 donc il ne peut pas y avoir 3 enfants dans le groupe.
b. $12 \times 10 = 120$ et $13 \times 10 = 130$. Donc il ne peut pas y avoir plus de 12 enfants.
$6 \times 20 = 120$ et $7 \times 20 = 140$. Donc il ne peut pas y avoir plus de 6 adultes.
c.

		Adultes					
		1	2	3	4	5	6
ENFANT	1	30	50	70	90	110	130
	2	40	60	80	100	120	140
	3	50	70	90	110	130	150
	4	60	80	100	120	140	160
	5	70	90	110	130	150	170
	6	80	100	120	140	160	180
	7	90	110	130	150	170	190
	8	100	120	140	160	180	200
	9	110	130	150	170	190	210
	10	120	140	160	180	200	220
	11	130	150	170	190	210	230
	12	140	160	180	200	220	240

d. Il peut y avoir dans ce groupe :
2 enfants et 5 adultes ; 4 enfants et 4 adultes ; 6 enfants et 3 adultes ; 8 enfants et 2 adultes ; 10 enfants et 1 adulte.

e. x représente le nombre d'adultes et y représente le nombre d'enfants.
Les équations ❶ et ❷ traduisent cette situation.

31 **a.**

Pour \ l'égalité	$5x - 2y = 13$ est…	$3x - y = 7$ est…
$x = 4$ et $y = 5$	fausse	vraie
$x = 3$ et $y = 1$	vraie	fausse
$x = 1$ et $y = -4$	vraie	vraie
$x = -3$ et $y = 0$	fausse	fausse

b. Le système $\begin{cases} 5x - 2y = 13 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ a pour solution le couple $(1\,;-4)$.

32 **a.** Si $x = 3$ et $y = -2$
$5x - 4y = 5 \times 3 - 4 \times (-2) = 23$
$3x + 8y = 3 \times 3 + 8 \times (-2) = \mathbf{-7}$
Le couple $(3\,;-2)$ n'est pas solution de l'équation $3x + 8y = 7$ donc il n'est pas solution du système.
b. Si $x = 3$ et $y = -2$
$2x + 5y = 2 \times 3 + 5 \times (-2) = -4$
$x - 2y = 3 - 2 \times (-2) = 7$
Le couple $(3\,;-2)$ est solution des 2 équations donc il est solution du système.

33 Le couple $\left(-2\,;\dfrac{3}{2}\right)$ est solution du système.

34 **a.** Si on exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation, des fractions vont apparaître car :

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$

Avec la deuxième équation $x = 2y + 4$.
b. Si on remplace x par $2y + 4$ dans la première équation, on obtient : $3(2y + 4) - y = 2$
soit $5y + 12 = 2$ puis $5y = -10$ et encore $y = -2$.
On remplace y par -2 dans l'équation $x = 2y + 4$ et on trouve $x = 0$.
Vérification
Si $x = 0$ et $y = -2$, alors $3x - y = 3 \times 0 - (-2) = 2$
et $x - 2y = 0 - 2 \times (-2) = 4$.
Le couple $(0\,;-2)$ est solution du système $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

35 **a.** Dans la première équation $y = 6x - 17$
ou alors dans la deuxième équation $y = -3,5x + 2$.
b. • **Première méthode**
Si on exprime y en fonction de x dans la première équation alors $y = 6x - 17$.
En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :
$7x + 2\,(6x - 17) = 4$
$19x - 34 = 4$
$19x = 38$
$x = 2$

On remplace x par 2 dans $y = 6x - 17$ et on obtient $y = -5$
Le couple solution est $(2 ; -5)$.

- **Deuxième méthode :**

Si on exprime y en fonction de x dans la deuxième équation alors $y = -3{,}5\,x + 2$.
En reportant cette expression de y dans la première équation, on obtient :
$-6x + (-3{,}5x + 2) = -17$
$-9{,}5x + 2 = -17$
$-9{,}5x = -19$
$x = 2$
On remplace x par 2 dans $y = -3{,}5x + 2$ et on obtient $y = -5$
Le couple solution est (2 ; –5).

36 **a.** La première équation s'écrit $x = 3y - 17$.
En reportant cette expression de x dans la deuxième équation, on obtient :
$2(3y - 17) + 4y = 6$
$6y - 34 + 4y = 6$
$10y = 40$
$y = 4$
On remplace y par 4 dans $x = 3y - 17$ et on obtient $x = -5$.
On vérifie que, pour $x = -5$ et $y = 4$:
$x - 3y = -5 - 3\times4 = -17$ et $2x + 4y = 2\times(-5) + 4\times4 = 6$.
Donc le couple (–5 ; 4) est la solution de ce système.
b. La deuxième équation s'écrit : $b = -4a + 6$.
En reportant cette expression de **b**
dans la première équation, on obtient :
$2a + 3(-4a + 6) = -2$
$-10a + 18 = -2$
$-10a = -20$
$a = 2$
On remplace a par 2 dans $b = -4a + 6$ et on obtient $b = -2$
On vérifie que, pour $a = 2$ et $b = -2$
$2a + 3b = 2\times2 + 3\times(-2) = -2$
et $4a + b = 4\times2 - 2 = 6$
Donc le couple (2 ; –2) est la solution de ce système.

37 **a.** La première équation s'écrit $y = 3x - 9$.
En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :
$x - 4(3x - 9) = 14$
$-11x + 36 = 14$
$-11x = -22$
$x = 2$
On remplace x par 2 dans $y = 3x - 9$ et on obtient $y = -3$
On vérifie que, pour $x = 2$ et $y = -3$:
$3x - y = 3\times2 - (-3) = 9$
et $x - 4y = 2 - 4\times(-3) = 14$
Donc le couple $(2 ; -3)$ est la solution de ce système.
b. La première équation s'écrit : $y = -6x$
En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :
$4x - 3\times(-6x) = -11$
$22x = -11$
$x = -0{,}5$
On remplace x par $-0{,}5$ dans $y = -6x$ et on obtient $y = 3$
On vérifie que, pour $x = -0{,}5$ et $y = 3$:
$6x + y = 6\times(-0{,}5) + 3 = 0$
$4x - 3y = 4\times(-0{,}5) - 3\times3 = -11$
Donc le couple (–0,5 ; 3) est la solution de ce système.

38 **a.** La première équation s'écrit $q = 5p + 3$.
En reportant cette expression de q dans la deuxième équation, on obtient :
$2p - 3(5p + 3) = 4$
$-13p - 9 = 4$
$-13p = 13$
$p = -1$
On remplace p par -1 dans $q = 5p + 3$ et on obtient $q = -2$
On vérifie que, pour $p = -1$ et $q = -2$:
$5p - q = 5\times(-1) - (-2) = -3$
et $2p - 3q = 2\times(-1) - 3\times(-2) = 4$
Donc le couple $(-1 ; -2)$ est la solution de ce système.
b. La deuxième équation s'écrit : $x = 9y - 10$
En reportant cette expression de x dans la première équation, on obtient :
$0{,}2(9y - 10) + 0{,}3y = -0{,}6$
$2{,}1y = 1{,}4$
$y = \dfrac{2}{3}$
On remplace y par $\dfrac{2}{3}$ dans $x = 9y - 10$ et on obtient $x = -4$.
On vérifie que, pour $x = -4$ et $y = \dfrac{2}{3}$
$0{,}2x + 0{,}3y = 0{,}2\times(-4) + 0{,}3\times\dfrac{2}{3} = -0{,}6$
$-x + 9y = -(-4) + 9\times\dfrac{2}{3} = 10$
Donc le couple $\left(-4 ; \dfrac{2}{3}\right)$ est la solution de ce système.

39 **a.** On additionne les équations membre à membre :
$$(3x - 4y) + (5x + 4y) = 24 + 8$$
b. On trouve $8x = 32$
$x = 4$
On remplace x par 4 dans l'équation $3x - 4y = 24$.
On obtient $12 - 4y = 24$
$-4y = 12$
$y = -3$
Vérification
Si $x = 4$ et $y = -3$
$3x - 4y = 3\times4 - 4\times(-3) = 24$
$5x + 4y = 5\times4 + 4\times(-3) = 8$
Le couple $(4 ; -3)$ est solution du système.

40 **a.** On obtient le système $\begin{cases} 6x + 10y = 28 \\ -6x + 9y = 48 \end{cases}$

En additionnant membre à membre les deux équations obtenues, on obtient :
$(6x + 10y) + (-6x + 9y) = 28 + 48$ soit $19y = 76$
b. $y = 4$
On remplace y par 4 dans l'équation $3x + 5y = 14$.
On a : $3x + 5\times4 = 14$
$3x = -6$
$x = -2$
Vérification
On remplace x par –2 et y par 4 :
$3x + 5y = 3\times(-2) + 5\times4 = 14$
$-2x + 3y = -2\times(-2) + 3\times4 = 16$
Le couple (–2 ; 4) est solution du système.

41 **a.** En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :
$(4x + 5y) + (3x - 5y) = 9 + 5$
$7x = 14$
$x = 2$
On remplace x par 2 dans l'équation $4x + 5y = 9$.
Ce qui donne $8 + 5y = 9$
$5y = 1$
$y = 0{,}2$
On remplace y par 0,2 dans l'équation $3x - 5y = 5$.
Ce qui donne $3x - 5\times0{,}2 = 5$
$x = 2$
Vérification
On remplace x par 2 et y par 0,2.
$4x + 5y = 4\times2 + 5\times0{,}2 = 9$
$3x - 5y = 3\times2 - 5\times0{,}2 = 5$
La solution du système est le couple (2 ; 0,2).
b. En soustrayant membre à membre les deux équations, on obtient :
$(2x - 4y) - (2x + 6y) = -6 - 9$
$-10y = -15$ donc $y = 1{,}5$
On remplace y par 1,5 dans l'équation $2x - 4y = -6$
Ce qui donne $2x - 4\times1{,}5 = -6$
$2x = 0$ donc $x = 0$
Vérification
On remplace x par 0 et y par 1,5.
$2x - 4y = 2\times0 - 4\times1{,}5 = -6$
$2x + 6y = 2\times0 + 6\times1{,}5 = 9$
La solution du système est le couple (0 ; 1,5).

42 **a.** On multiplie chaque membre de l'équation $2x + 6y = 5$ par 3 et chaque membre de l'équation $3x - 4y = 1$ par –2.
Le système s'écrit $\begin{cases} 6x + 18y = 15 \\ -6x + 8y = -2 \end{cases}$
En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :
$(6x + 18y) + (-6x + 8y) = 15 - 2$
$26y = 13$
$y = 0{,}5$
On remplace y par 0,5 dans l'équation $2x + 6y = 5$
Ce qui donne $2x + 6\times0{,}5 = 5$
$2x = 2$
$x = 1$
Vérification
On remplace x par 1 et y par 0,5.
$2x + 6y = 2\times1 + 6\times0{,}5 = 5$
$3x - 4y = 3\times1 - 4\times0{,}5 = 1$
La solution du système est le couple (1 ; 0,5).
b. On multiplie chaque membre de l'équation $3x + 2y = -8$ par 4 et chaque membre de l'équation $4x + 5y = 1$ par –3.
Le système s'écrit $\begin{cases} 12x + 8y = -32 \\ -12x - 15y = -3 \end{cases}$
En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :
$(12x + 8y) + (-12x - 15y) = -32 - 3$
$-7y = -35$
$y = 5$
On remplace y par 5 dans l'équation $3x + 2y = -8$.
Ce qui donne $3x + 2\times5 = -8$
$3x = -18$
$x = -6$
Vérification
On remplace x par –6 et y par 5.
$3x + 2y = 3\times(-6) + 2\times5 = -8$
$4x + 5y = 4\times(-6) + 5\times5 = 1$
La solution du système est le couple (–6 ; 5).

43 **a.** On multiplie chaque membre de l'équation $x - 4y = 5$ par 2.
Le système s'écrit $\begin{cases} 4x + 8y = 2 \\ 2x - 8y = 10 \end{cases}$
En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :
$(4x + 8y) + (2x - 8y) = 2 + 10$
$6x = 12$
$x = 2$
On remplace x par 2 dans l'équation $x - 4y = 5$
Ce qui donne $2 - 4y = 5$
$-4y = 3$
$y = -\frac{3}{4}$
Vérification
On remplace x par 2 et y par $-\frac{3}{4}$.
$4x + 8y = 4\times2 + 8\times\left(-\frac{3}{4}\right) = 2$
$x - 4y = 2 - 4\times\left(-\frac{3}{4}\right) = 5$
La solution du système est le couple $\left(2 ; -\frac{3}{4}\right)$.
b. On multiplie chaque membre de l'équation $3a + 2b = 7$ par –3.
Le système s'écrit $\begin{cases} -9a - 6b = -21 \\ 4a + 6b = 1 \end{cases}$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :

$(-9a - 6b) + (4a + 6b) = -21 + 1$

$-5a = -20$

$a = 4$

On remplace a par 4 dans l'équation $3a + 2b = 7$.

Ce qui donne $3\times4 + 2b = 7$

$2b = -5$

$b = -\dfrac{5}{2}$

Vérification

On remplace a par 4 et b par $-\dfrac{5}{2}$.

$3a + 2b = 3\times4 + 2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 7$

$4a + 6b = 4\times4 + 6\times\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 1$

La solution du système est le couple $\left(a = 4\ ;\ b = -\dfrac{5}{2}\right)$.

44 **a.**

Nombre de motos à 2 roues	Nombre de motos à 3 roues	Nombre total de roues
1	26	80
2	25	79
3	24	78
4	23	77
5	22	76
6	21	75
7	20	74
8	19	73
9	18	72
10	17	71
11	16	70
12	15	69
13	14	68
14	13	67
15	12	66
16	11	65
17	10	64
18	9	63
19	8	62
20	7	61
21	6	60
22	5	59
23	4	58
24	3	57
25	2	56
26	1	55
27	0	54

1	Nombre de motos à 2 roues	nombre de motos à 3 roues	nombre total de roues
2	1	26	80
3	2	25	79
4	3	24	78
5	4	23	77
6	5	22	76
7	6	21	75
8	7	20	74
9	8	19	73
10	9	18	72
11	10	17	71
12	11	16	70
13	12	15	69
14	13	14	68
15	14	13	67
16	15	12	66
17	16	11	65
18	17	10	64
19	18	9	63
20	19	8	62
21	20	7	61
22	21	6	60
23	22	5	59
24	23	4	58
25	24	3	57
26	25	2	56
27	26	1	55
28	27	0	54

b. Il y a 27 guidons et un guidon par moto donc il y a 27 motos.

Si x est le nombre de motos à 2 roues et y le nombre de motos à 3 roues, alors $x + y = 27$ et $y = 27 - x$.

Si x représente la valeur inscrite dans la case A2 alors dans la case B2 on doit taper la valeur de y c'est à dire 27 – A2. Mais c'est une formule et donc pour le signaler on met le signe =.

On tape donc = 27 – A2.

Nombre total de roues = $2x + 3y$.

Dans C2, on doit donc taper la formule =2*A2 +3*B2

c. Il y a 59 roues au total donc il y a 22 motos à 2 roues et 5 motos à 3 roues.

45 **a.** Si une rose coûte 1,20 € et une tulipe 0,80 € alors :

- le premier bouquet doit coûter :

$$3\times1{,}20 + 8\times0{,}80 = 10\ €$$

- le deuxième bouquet doit coûter :

$$4\times1{,}20 + 4\times0{,}80 = 8\ €.$$

Une rose ne peut donc pas coûter 1,20 € et une tulipe 0,80 €.

b. x représente le prix d'une rose et y le prix d'une tulipe.

c. $4x + 4y = 10$ (E_2)

d. On doit résoudre le système $\begin{cases} 3x + 8y = 10 & (E_1) \\ 4x + 4y = 10 & (E_2) \end{cases}$

On multiplie chaque membre de l'équation (E_1) par 4 et chaque membre de l'équation (E_2) par 3.

Le système s'écrit $\begin{cases} 12x + 32y = 40 \\ 12x + 12y = 30 \end{cases}$

En soustrayant membre à membre les deux équations, on obtient :

$(12x + 32y) - (12x + 12y) = 40 - 30$

$20y = 10$

$y = 0{,}5$

On remplace y par 0,5 dans l'équation $3x + 8y = 10$.

Ce qui donne $3x + 8\times0{,}5 = 10$

$3x + 4 = 10$

$3x = 6$

$x = 2$

Vérification

Si $x = 2$ et $y = 0{,}5$

$3x + 8y = 3\times2 + 8\times0,5 = 10$

et $4x + 4y = 4\times2 + 4\times0,5 = 10$

Donc le couple (2 ; 0,5) est la solution de ce système.

e. Le prix d'une rose est 2 € et le prix d'une tulipe est 0,50 €.

Le 3e bouquet coûte 18 €.

46 **a.** La première équation s'écrit $x = -2y + 90$

En reportant cette expression de x dans la deuxième équation, on obtient :

$3(-2y + 90) + y = 195$

$-6y + 270 + y = 195$

$-5y = -75$

$y = 15$

On remplace y par15 dans l'expression $x = -2y + 90$

et on obtient $x = -2\times15 + 90 = 60$

On vérifie que,pour $x = 60$ et $y = 15$:

$x + 2y = 60 + 2\times15 = 90$ et $3x + y = 3\times60 + 15 = 195$.

Donc le couple (60 ; 15) est la solution de ce système.

b. **Choix des inconnues**

On note x la consommation (en watts) d'un néon et y la consommation (en watts) d'une lampe basse consommation.

Mise en équation

Un tube néon et 2 ampoules basse consommation consomment 90 watts donc $x + 2y = 90$.

Trois tubes néons et une ampoule basse consommation consomment 195 watts donc $3x + y = 195$.

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x+2y=90\\3x+y=195\end{cases}$$

Le système a été résolu à la question **a**.

Retour à la situation

Un néon consomme 60 watts et une lampe basse consommation consomme 15 watts.

Conseils :

Remplacer les tubes néons de 60 watts par des ampoules basse consommation de 15 watts.

Ne pas oublier d'éteindre la lumière lorsque vous quittez une pièce.

Détermination d'une fonction affine

47 $f(x) = ax + b$

a. $f(4) = 7$ signifie que si dans l'expression $ax + b$ on remplace x par 4, le résultat est 7.

Ainsi $4a + b = 7$

Remarque :

$f(4) = 7$ se lit l'image de 4 par la fonction affine f est 7.

b. $f(-2) = -11$ signifie que si dans l'expression $ax + b$ on remplace x par -2, le résultat est -11.

Ainsi $-2a + b = -11$

2. a. Les nombres a et b doivent vérifier le système :

$$\begin{cases}4a+b=7 & (E_1)\\-2a+b=-11 & (E_2)\end{cases}$$

b. Résolution du système

La deuxième équation s'écrit $b = -11 + 2a$.

En reportant cette expression de b dans la première équation, on obtient :

$4a - 11 + 2a = 7$

$6a - 11 = 7$

$6a = 18$

$a = 3$

On remplace a par 3 dans $b = -11 + 2a$

$b = -5$

On vérifie que pour $a = 3$ et $b = -5$

$4a + b = 4\times3 - 5 = 7$

$-2a + b = -2\times3 - 5 = -11$

Le couple (a = 3 ; b = –5) est la solution du système.

c. $f(x) = 3x - 5$

48 $f(x) = ax + b$

$f(3) = 1$ signifie que si dans l'expression $ax + b$ on remplace x par 3, le résultat est 1.

Ainsi $3a + b = 1$.

$f(-1) = 5$ signifie que si dans l'expression $ax + b$ on remplace x par -1, le résultat est 5.

Ainsi $-a + b = 5$

Les nombres a et b doivent vérifier le système :

$$\begin{cases}3a+b=1 & (E_1)\\-a+b=5 & (E_2)\end{cases}$$

Résolution du système

La deuxième équation s'écrit $b = a + 5$.

En reportant cette expression de b dans la première équation, on obtient :

$3a + a + 5 = 1$ soit $4a + 5 = 1$

$4a = -4$

$a = -1$

On remplace a par -1 dans $b = a + 5$.

On obtient $b = 4$.

On vérifie que pour $a = -1$ et $b = 4$

$3a + b = 3\times(-1) + 4 = 1$

$-a + b = -(-1) + 4 = 5$

Le couple ($a = -1$; $b = 4$) est la solution du système.

Ainsi $f(x) = -x + 4$.

b. $f(-2)=5$ signifie que si dans l'expression $ax + b$ on remplace x par -2, le résultat est 5.

Ainsi $-2a + b = 5$.

$f(2) = -5$ signifie que si dans l'expression $ax + b$ on remplace x par 2, le résultat est -5.

Ainsi $2a + b = -5$.

Les nombres a et b doivent vérifier le système :

$$\begin{cases}-2a+b=5 & (E_1)\\2a+b=-5 & (E_2)\end{cases}$$

Résolution du système

On ajoute membre à membre les deux équations et on obtient $(-2a + b) + (2a + b) = 5 - 5$.

$2b = 0$

$b = 0$

On remplace b par 0 dans l'équation (E_1).
On obtient $a = -2,5$.
On vérifie que pour $a = -2,5$ et $b = 0$.
$-2a + b = -2\times(-2,5) + 0 = 5$
$2a + b = 2\times(-2,5) + 0 = -5$
Le couple ($a = -2,5$; $b = 0$) est la solution du système.
Ainsi $f(x) = -2,5x$.

49 p est une fonction affine donc $p(x) = ax + b$. (a et b sont deux nombres).
L'image de 4 est 1 donc $4a + b = 1$.
L'image de 2 est $-\dfrac{1}{2}$ donc $2a + b = \dfrac{-1}{2}$.
a. Pour trouver a et b on doit résoudre le système :

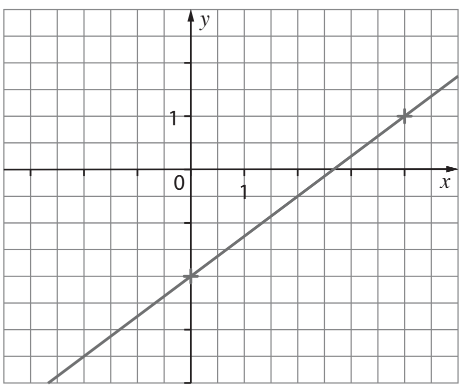
$$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ 2a + b = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

On multiplie par -1 les deux membres de la deuxième équation, on obtient le système :

$$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ -2a - b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations et on obtient $(4a + b) + (-2a - b) = 1 + \dfrac{1}{2}$.
$2a = \dfrac{3}{2}$
$a = \dfrac{3}{4}$
On remplace a par $\dfrac{3}{4}$ dans l'équation (E_1).
On obtient $4 \times \dfrac{3}{4} + b = 1$ soit $3 + b = 1$ et $b = -2$.
On vérifie que pour $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = -2$.
$4a + b = 4 \times \dfrac{3}{4} - 2 = 1$
$2a + b = 2\times \dfrac{3}{4} - 2 = -\dfrac{1}{2}$
Le couple $\left(a = \dfrac{3}{4} ; b = -2\right)$ est la solution du système.
Ainsi $p(x) = \dfrac{3}{4}x - 2$.

b. Comme $p(4) = 1$ et $p(0) = -2$, la droite qui représente la fonction p dans un repère passe par les points A(4 ; 1) et B (0 ; –2).
Ou alors $p(4) = 1$ et $p(2) = -\dfrac{1}{2}$, la droite passe par les points de A(4 ; 1) et C$\left(2 ; -\dfrac{1}{2}\right)$.



Interprétation graphique

50 **a.** Maëlle a utilisé
- $y = 4 - x$
- $y = 3x$

b. La droite rouge représente la fonction affine :

$$f : x \mapsto 4 - x$$

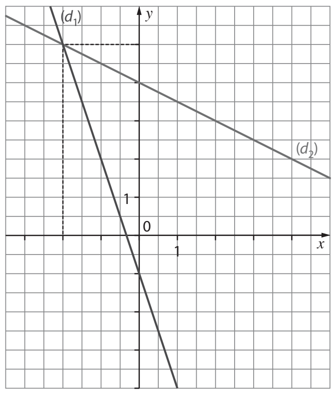
La droite noire représente la fonction affine :

$$g : x \mapsto 3x$$

b. La solution du système est donnée par le couple des coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
La solution du système est donc le couple (1 ; 3).

c. Vérification
Si $x = 1$ et $y = 3$, alors
$x + y = 1 + 3 = 4$
$3x - y = 3\times 1 - 3 = 0$

51 **a.** Dans la première équation $y = -3x - 1$.
Dans la deuxième équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$.
b. La fonction affine $f : x \mapsto -3x - 1$ est représentée par la droite (d_1) qui passe par les points A (0 ; –1) et B (–1 ; 2).
La fonction affine $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + 4$ est représentée par la droite (d_2) qui passe par les points C (0 ; 4) et D (2 ; 3).



c. La solution du système est donnée par le couple des coordonnées du point d'intersection de ces deux droites (d_1) et (d_2).
La solution du système est donc le couple (–2 ; 5).

Vérification
Si $x = -2$ et $y = 5$, alors
$-3x - y = -3\times(-2) - 5 = 1 = 4$
$x + 2y = -2 + 2\times 5 = 8$

52 **Système (S_1) :**

Ce système peut s'écrire : $\begin{cases} y = 0,5x \\ y = -2x - 5 \end{cases}$

La solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection de la droite (d_1) rouge et de la droite(d_2) bleue.
On lit (–2 ; –1).

On vérifie que ce couple est solution du système :

$$-2 - 2\times(-1) = 0 \text{ et } 2\times(-2) - 1 = -5.$$

Donc le couple (–2 ; –1) est solution du système (S_1).

Système (S_2) :

Ce système peut s'écrire : $\begin{cases} y = 0,5x \\ y = x - 2 \end{cases}$

La solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection de la droite (d_1) rouge et de la droite (d_3) verte.

On lit (4 ;2).

On vérifie que ce couple est solution du système :

$$4 - 2\times 2 = 0 \text{ et } 4 - 2 = 2.$$

Donc le couple (4 ; 2) est solution du système (S_2).

Système (S_3) :

Ce système peut s'écrire : $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$

La solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection de la droite (d_3) verte et de la droite (d_2) bleue.

On lit (–1 ; –3).

On vérifie que ce couple est solution du système :

$$-1 + 3 = 2 \text{ et } 2\times(-1) - 3 = -5$$

Donc le couple (–1 ; –3) est solution du système (S_3).

53 Travail de groupes

a. On note x le nombre de parties gagnées par Martin et y le nombre de parties perdues par Martin.

Martin a fait 20 parties se traduit par $x + y = 20$.

Si Martin gagne une partie, il gagne 3 € et s'il perd une partie, il perd 4 €.

Martin a gagné 11 € donc $3x - 4y = 11$.

Ces informations conduisent au système : $\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$

Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 20 - x$.

En reportant y dans la deuxième équation, on obtient :

$3x - 4\,(20 - x) = 11$

$3x - 80 + 4x = 11$

$7x = 91$

$x = 13$

On remplace x par 13 dans $y = 20 - x$ et on trouve $y = 7$

On vérifie que pour $x = 13$ et $y = 7$;

$13 + 7 = 20$ et $3\times 13 - 4\times 7 = 11$.

Donc le couple (13 ; 7) est le couple solution du système.

Retour à la situation

Martin a gagné 13 parties et il a perdu 7 parties.

54 Math in English

La fonction f est une fonction affine, donc $f(x) = ax + b$. (a et b sont deux nombres).

La droite passe par le point A(–2 ; 1) donc $f(-2) = 1$.

Ainsi $-2a + b = 1$.

La droite passe par le point B(2; –2) donc $f(2) = -2$.

Ainsi $2a + b = -2$.

On résout le système $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$

La première équation s'écrit $b = 1 + 2a$.

On reporte dans la deuxième équation :

$$2a + 1 + 2a = -2.$$

On trouve successivement :

$4a + 1 = -2$; $4a = -3$ soit $a = -\frac{3}{4}$.

On remplace a par $-\frac{3}{4}$ dans $b = 1 + 2a$

$b = 1 + 2\times\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

On vérifie que pour $a = -\frac{3}{4}$ et $b = -\frac{1}{2}$

$-2\times\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} = 1$ et $2\times\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} = -2$

Le couple $\left(-\frac{3}{4} ; -\frac{1}{2}\right)$ est la solution du système.

Ainsi $f(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

55 Connaître le Monde

Choix des inconnues

On note x le nombre de litres de lait bus en moyenne par un Français en un an.

On note y le nombre de litres de lait bus en moyenne par un Islandais en un an.

Mise en équation

En un an,un Islandais consomme en moyenne deux fois plus de lait qu'un Français donc $y = 2x$.

Si un Français consommait 120 litres de plus de lait par an,alors il consommerait 1,5 fois plus de lait qu'un Islandais donc $x + 120 = 1,5\,y$.

Ces informations conduisent au système : $\begin{cases} y = 2x \\ 1,5y - x = 120 \end{cases}$

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$1,5\times 2x - x = 120$

$2x = 120$

$x = 60$

On remplace x par 60 dans $y = 2x$ donc $y = 120$.

On vérifie que pour $x = 60$ et $y = 120$

$y = 2x$ car $120 = 2\times 60$.

$x + 120 = 1,5y$ car $60 + 120 = 1,5\times 120 = 180$

Le couple (60 ; 120) est la solution du système.

Retour à la situation

Un Français boit en moyenne 60 litres de lait par an.

Un Islandais boit en moyenne 120 litres de lait par an.

9. Vrai ou faux

56 Faux : le couple (3 ; –1,2) est solution de l'équation $\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y = 4$ mais (3 ; –1,2) n'est pas une solution de l'équation de l'équation $2x - 5y = 4$.

57 **Vrai**
Les deux systèmes ont le même couple solution.
Le système $\begin{cases}-3x+y=7\\4x-y=-1\end{cases}$ a pour solution (6 ; 25).
Le système $\begin{cases}5x-y=5\\-7x+2y=8\end{cases}$ a aussi pour solution (6 ; 25).

58 **Vrai**
En effet :
$4x + 2y = 2$ peut s'écrire $y = 1 - 2x$
$x - y = 8$ peut s'écrire $y = x - 8$
Pour résoudre graphiquement le système proposé, il faut tracer les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto 1 - 2x$ et $g : x \mapsto x - 8$.

10. Calcul mental et réfléchi

59 Si $x = a$ et $y = 2$ alors $4a + 10 = -2$
$4a = -12$ et $\boldsymbol{a = -3}$.

60 Si $x = -5$ et $y = b$ alors $-10 - 4b = -14$
$-4b = -4$ et $\boldsymbol{b = 1}$.

61 **a.** D'après la première équation $x = 5$.
Dans la deuxième équation, on remplace x par 5 et on trouve $y = 2$.
Vérification
Si $x = 5$ et $y = 2$ alors $x - 5 = 5 - 5 = 0$ et $x - y = 5 - 2 = 3$.
Le couple (5 ; 2) est solution du système $\begin{cases}x-5=0\\x-y=3\end{cases}$
b. Dans la première équation, on remplace x par 3 y et on obtient $4y = 12$ et $y = 3$
Comme $x = 3y$ alors $x = 3\times3 = 9$.
Vérification
Si $x = 9$ et $y = 3$ alors $x + y = 9 + 3 = 12$
et $3y = 3\times3 = 9 = x$.
Le couple (9 ; 3) est la solution du système $\begin{cases}x+y=12\\x=3y\end{cases}$
c. On multiplie par –1 les deux membres de la deuxième équation. On doit alors résoudre le système $\begin{cases}2x+3y=3\\-2x-4y=-5\end{cases}$
On obtient $(2x + 3y) + (-2x - 4y) = 3 - 5$
$-y = -2$ et $y = 2$.
On remplace y par 2 dans la première équation.
On obtient $2x + 6 = 3$
$2x = -3$
$x = -1{,}5$
On peut faire une vérification :
Si $x = -1{,}5$ et $y = 2$, alors :
$2x + 3y = 2\times(-1{,}5) + 3\times2 = 3$
$2x + 4y = 2\times(-1{,}5) + 4\times2 = 5$.
Le couple (–1,5 ; 3) est la solution du système
$$\begin{cases}2x+3y=3\\2x+4y=5\end{cases}$$

62 Si $f(0) = 4$ alors $b = 4$
Si $f(1) = 6$ alors $a + b = 6$
Ces informations conduisent à résoudre le système
$$\begin{cases}b=4\\a+b=6\end{cases}$$
On remplace b par 4 dans la deuxième équation.
On trouve $a = 2$.
La solution du système est le couple ($a = 2$; $b = 4$).
Alors $f(x) = 2x + 4$.

11. Présenter, argumenter, communiquer

63 **Soigner la rédaction**
Imperfections :
- Samir n'a pas précisé ce que représentent les inconnues x et y.
- Il aurait pu préciser le système à résoudre.
- Une vérification aurait pu être faite.
- En conclusion, Samir aurait du traiter cette situation conduisant à un système comme dans l'exercice 3 résolu de la page 138.

La solution :
Choix des inconnues
On note x le numéro de la maison d'Annita et y le numéro de la maison de son cousin.
Mise en équation
La somme de leurs numéros d'habitation est 109 donc $x + y = 109$.
La différence de ces numéros est 35 donc $x - y = 35$.
La lecture de l'énoncé conduit au système $\begin{cases}x+y=109\\x-y=35\end{cases}$
Résolution du système
Par addition membre à membre, on obtient
$2x = 144$ et $x = 72$.
On remplace x par 77 dans la deuxième équation.
$72 - y = 35$ donc $y = 37$.
On vérifie que pour $x = 72$ et $y = 37$
$x + y = 72 + 37 = 109$
$x - y = 72 - 37 = 35$
Le couple (72 ; 37) est la solution du système.
Retour à la situation
Annita habite au 72 rue de la Chance et son cousin au 35 rue de la Chance.

64 **Qui a raison ?**
La première équation du système (S_1) s'écrit $y = 13 - x$.
La deuxième équation du système (S_1) s'écrit :
$$3y = 34 - 2x \text{ soit } y = \frac{34}{3} - \frac{2}{3}x.$$
La première équation du système (S_2) s'écrit :
$$2y = 26 - 2x \text{ soit } y = 13 - x.$$
La deuxième équation du système (S_2) s'écrit aussi :
$$3y = 34 - 2x \text{ soit } y = \frac{34}{3} - \frac{2}{3}x.$$
Les systèmes (S_1) et (S_2) ont la même solution que le système $\begin{cases}y=13-x\\y=\frac{34}{3}-\frac{2}{3}x\end{cases}$ donc ils ont la même solution.
Mathis a raison.

65 Porter un regard critique

Une solution possible :

On note x le prix d'un drap et y le prix d'une housse de couette.

Mise en équation

Julie a acheté 4 draps et 2 housses de couette donc $4x + 2y = 180$.

Paul a acheté 5 draps et 3 housses de couette donc $5x + 3y = 270$.

La lecture de l'énoncé conduit au système :

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}4x+2y=180\\5x+3y=270\end{cases}$$

Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 90 - 2x$

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$5x + 3(90 - 2x) = 270$

$5x + 270 - 6x = 270$

$-x + 270 = 270$

$x = 0$

On remplace x par 0 dans $y = 90 - 2x$ et on obtient $y = 90$.

On vérifie que pour $x = 0$ et y = 90 :

$4x + 2y = 4\times0 + 2\times90 = 180$

et $5x + 3y = 5\times0 + 3\times90 = 270$.

Donc le couple (0 ; 90) est la solution du système.

Retour à la situation

Paul a payé un drap 0 € et une housse de couette 90 €.

Paul a raison de penser qu'il y a une erreur.

Autre solution

Achat de Julie :

4 draps + 2 housses de couette = 180 € (E_1).

En multipliant chaque membre de l'égalité par 1,5, on obtient une nouvelle égalité. Ainsi,

6 draps + 3 housses de couette = 270 € (E_2).

Pour 270 €, Julie aurait pu acheter 6 draps et 3 housses de couette.

Il ya donc erreur car pour 270 €, Paul a acheté seulement 5 draps et 3 housses de couette.

66 a. Choix des inconnues

On note x la puissance d'une éolienne de type A et y la puissance d'une éolienne de type B.

Mise en équation

4 éoliennes de type A et 6 éoliennes de type B ont une puissance totale de 22MW, donc $4x + 6y = 22$.

La puissance d'une éolienne de type A est supérieure de 0,5 MW à celle d'une éolienne de type B, donc $x - y = 0{,}5$.

Ces informations conduisent au système $\begin{cases}4x+6y=22\\x-y=0{,}5\end{cases}$

Résolution du système

La deuxième équation s'écrit $x = y + 0{,}5$.

En reportant cette expression de x dans la première équation, on obtient :

$4(y + 0{,}5) + 6y = 22$

$10y + 2 = 22$

$10y = 20$

$y = 2$

On remplace y par 2 dans $x = y + 0{,}5$ et on obtient $x = 2{,}5$.

Le couple (2,5 ; 2) est la solution du système.

Retour à la situation

La puissance d'une éolienne de type A est de 2,5 MW.

b. Choix des inconnues

On note x le nombre de chameaux et y le nombre de dromadaires.

Mise en équation

On compte 31 têtes donc $x + y = 31$.

On compte 54 bosses donc $2x + y = 54$

Ces informations conduisent au système $\begin{cases}x+y=31\\2x+y=54\end{cases}$

Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 31 - x$.

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$2x + 31 - x = 54$

$x + 31 = 54$

$x = 23$

On remplace x par 23 dans $y = 31 - x$ et on obtient $y = 8$.

Le couple (23 ; 8) est la solution du système.

Retour à la situation

Dans ce troupeau, il y a 23 chameaux et 8 dromadaires.

67 a. Antoine et Sophie discutent.

Sophie : « Si tu me donnes **3** cédéroms, j'en aurais autant que toi. »

Antoine : « Si tu me donnes **5** cédéroms, j'en aurais **2** fois plus que toi. »

b. Le système $\begin{cases}a-3=s+3\\a+5=2(s-5)\end{cases}$ peut s'écrire $\begin{cases}a-s=6\\a-2s=-15\end{cases}$

Si on multiplie par –1, les deux membres de la deuxième équation, on obtient le système $\begin{cases}a-s=6\\-a+2s=15\end{cases}$

Par addition membre à membre, on obtient

$(a - s) + (-a + 2s) = 6 + 15$

soit $s = 21$

On remplace s par 21 dans l'équation $a - s = 6$

On trouve $a = 27$.

Le couple (a = 27 ; s = 21) est la solution du système.

Retour à la situation

Antoine a 27 cédéroms et Sophie a 21 cédéroms.

68 Manifester sa compréhension

Question possible : Calculer la masse (en kg) du vase vide et la masse d'eau (en kg) qu'il contient.

On note x la masse du vase vide et y la masse de l'eau qu'il contient.

Cette situation peut être traduite par le système :

$$\begin{cases}x+y=6\\x-y=\mathbf{4{,}4}\end{cases}$$

Le couple solution est (5,2 ; 0,8).
Retour à la situation :
Le vase vide pèse 0,8 kg et l'eau qu'il contient pèse 5,2 kg.

69 Comprendre une représentation
Choix des inconnues
On note x le prix chemisier et y le prix d'un pantalon.
Mise en équation :
3 chemisiers et un pantalon coûtent 100 € donc
$3x + y = 100$.
Un chemisier et 2 pantalons coûtent 100 € donc
$x + 2y = 100$.
Ces informations conduisent au système $\begin{cases} 3x + y = 100 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$
Résolution du système
La première équation s'écrit : $y = 100 - 3x$.
En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient : $x + 2(100 - 3x) = 100$.
$-5x + 200 = 100$
$-5x = -100$
$x = 20$
On remplace x par 20 dans l'expression $y = 100 - 3x$.
On obtient $y = 40$.
Vérification
Si $x = 20$ et $y = 40$, alors
$3x + y = 3\times20 + 40 = 100$
$x + 2y = 20 + 2\times40 = 100$
La solution du système est le couple (20 ; 40).
Retour à la situation :
Le prix d'un chemisier est 20 €.
Remarque : il n'était pas nécessaire de trouver le prix d'un pantalon.

70 Narration de recherche
On note x la hauteur du cylindre et y la hauteur du cône.
Mise en équation
Le volume du cylindre est $15x$.
Le volume du cône est $\frac{1}{3}\times15\times y = 5y$
$\begin{cases} 15x + 5y = 58{,}5 \\ x + y = 7{,}5 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} 3x + y = 11{,}7 \\ x + y = 7{,}5 \end{cases}$
La solution du système est (2,1 ; 5,4).
Retour à la situation
La hauteur du cylindre est 2,1 cm et la hauteur du cône est 5,4 cm.

12. QCM pour s'évaluer

71 a. 72 b. 73 c. 74 c. 75 b. 76 b. 77 a. c.

78 a. b. c. 79 a. c.

13. Objectif Brevet

80 Objectif : trouver d'abord le prix d'un meuble bas et d'un meuble haut.

Démarche n° 1
Un meuble haut coûte 72 € de plus qu'un meuble bas
La première composition correspond à 4 meubles bas plus 2×72 €.
4 meubles bas coûtent 90 € ($234 - 2\times72$) et un meuble bas coûte 22,50 €.
Un meuble haut coûte alors 94,50 € (22,50 + 72)
Vérification
La deuxième composition coûte :
$$94{,}50 + 4\times22{,}50 = 162 \text{ €}.$$
Prix de la composition
La composition proposée coûte :
$$3\times94{,}50 + 2\times22{,}50 = 328{,}50 \text{ €}$$

Démarche n° 2
Choix des inconnues
On note x le prix d'un grand meuble et y le prix d'un petit meuble.
Remarque : les grands meubles sont identiques et les petits meubles sont identiques.
Mise en équation
Composition n° 1 : $2x + 2y = 234$
Composition n° 2 : $x + 3y = 162$
La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :
$$\begin{cases} 2x + 2y = 234 \\ x + 3y = 162 \end{cases}$$
La deuxième équation s'écrit $x = 162 - 3y$.
En reportant cette expression de x dans la première équation, on obtient :
$2(162 - 3y) + 2y = 234$
$324 - 6y + 2y = 234$
$-4y = 234 - 324$
$-4y = -90$
$y = 22{,}50$
On remplace y par 22,50 dans l'expression $x = 162-3y$ et on obtient $x = 94{,}50$.
On vérifie que pour $x = 94{,}50$ et $y = 22{,}50$:
$2x + 2y = 2\times94{,}50 + 2\times22{,}50 = 234$
et $x + 3y = 94{,}50 + 3\times22{,}50 = 162$
Donc le couple (94,50 ; 22,50) est le couple solution du système.
Retour à la situation :
Un grand meuble coûte 94,50 € et un petit meuble coûte 22,50 €.
Prix de la composition
La composition donnée est constituée de 3 grands meubles et de 2 petits meubles.
$$3\times94{,}50 + 2\times22{,}50 = 328{,}50$$
Le prix de la composition donnée est 328,50 €.

81 Objectif : trouver le prix d'un triangle blanc et le prix d'un triangle gris.

Choix des inconnues

On note x le prix d'un triangle blanc et y le prix d'un triangle gris.

Mise en équation

Bijou n° 1 : $4x + 4y = 11$

Bijou n° 2 : $6x + 2y = 9{,}10$

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{cases} 4x + 4y = 11 \\ 6x + 2y = 9{,}10 \end{cases}$$

Résolution du système

La deuxième équation s'écrit $y = 4{,}55 - 3x$.

En reportant cette expression de y dans la première équation, on obtient :

$4x + 4(4{,}55 - 3x) = 11$

$4x + 18{,}20 - 12x = 11$

$-8x = 11 - 18{,}20$

$-8x = -7{,}20$

$x = 0{,}90$

On remplace x par 0,9 dans l'expression $y = 4{,}55 - 3x$ et on obtient $y = 1{,}85$.

On vérifie que pour $x = 0{,}90$ et $y = 1{,}85$:

$4x + 4y = 4\times0{,}90 + 4\times1{,}85 = 11$

et $6x + 2y = 6\times0{,}9 + 2\times1{,}85 = 9{,}10$

Donc le couple (0,90 ; 1,85) est le couple solution du système.

Retour à la situation

Un triangle blanc coûte 0,90 € et un triangle gris coûte 1,85 €.

Le bijou n° 3 est constitué de 5 triangles blancs et de 3 triangles gris.

$$5\times0{,}90 + 3\times1{,}85 = 10{,}05$$

Le bijou n° 3 revient à 10,05 €.

82 **Choix des inconnues**

On note x le prix d'un kilogramme de vernis et y le prix d'un litre de cire.

Mise en équation

Pour 6 kg de vernis et 4 litres de cire, on paie 95 €, donc $6x + 4y = 95$.

Pour 3 kg de vernis et 3 litres de cire, on paie 55,50 €, donc $3x + 3y = 55{,}50$

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{cases} 6x + 4y = 95 \\ 3x + 3y = 55{,}50 \end{cases}$$

Résolution du système

La deuxième équation s'écrit $y = 18{,}5 - x$.

En reportant cette expression de y dans la première équation, on obtient :

$6x + 4(18{,}50 - x) = 95$

$6x + 74 - 4x = 95$

$2x = 95 - 74$

$2x = 21$

$x = 10{,}5$

On remplace x par 10,5 dans l'expression $y = 18{,}5 - x$ et on obtient $y = 8$.

On vérifie que pour $x = 10{,}5$ et $y = 8$:

$6x + 4y = 6\times10{,}5 + 4\times8 = 95$

et $3x + 3y = 3\times10{,}5 + 3\times8 = 55{,}5$

Donc le couple (10,5 ; 8) est le couple solution du système.

Retour à la situation :

Un kg de vernis coûte 10,50 € et un litre de cire coûte 8 €.

83 **1. C 2. C 3. B.**

84 **1. B 2. C 3. C 4. B 5. B**

14. Exercices d'approfondissement

85 On note x, y et z les rayons respectifs des cercles de centres A, B et C.

On a donc

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + z = 5 \\ y + z = 7 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = 4 - x \\ z = 5 - x \\ 4 - x + 5 - x = 7 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Le cercle de centre A a pour rayon 1 cm, celui de centre B a pour rayon 3 cm et celui de centre C a pour rayon 4 cm.

86 **Problème ouvert**

Mise en équation

Si l'on ajoute 3 au numérateur et 3 au dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$ on obtient $\frac{2}{5}$ donc $\frac{a+3}{b+3} = \frac{2}{5}$.

On a l'égalité des produits en croix donc :

$5(a + 3) = 2(b + 3)$ c'est-à-dire $5a - 2b = -9$.

Si l'on retranche 3 au numérateur et 3 au dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$ on obtient $\frac{1}{7}$ donc $\frac{a-3}{b-3} = \frac{1}{7}$.

On a l'égalité des produits en croix donc $7(a-3) = b - 3$ c'est-à-dire $7a - b = 18$.

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{cases} 5a - 2b = -9 \\ 7a - b = 18 \end{cases}$$

Résolution du système

La deuxième équation s'écrit $b = 7a - 18$.

En reportant cette expression de b dans la première équation, on obtient

$5a - 2(7a - 18) = -9$

$-9a = -45$

$a = 5$

On remplace a par 5 dans l'expression $b = 7a - 18$ et on obtient $b = 17$.

On vérifie que pour $a = 5$ et $b = 17$

$5a - 2b = 5\times5 - 2\times17 = -9$

$7a - b = 7\times5 - 17 = 18$

Donc le couple (5 ; 17) est le couple solution du système.

Retour à la situation

La fraction cherchée est la fraction $\frac{5}{17}$.

87 **Math et métier**

Choix des inconnues

On note x le nombre de camions citernes qui ont une contenance de 3 000 L et y le nombre de camions citernes qui ont une contenance de 5 000 L.

Mise en équation

Les pompiers ont utilisé 13 camions citernes, donc $x + y = 13$.

Ils ont déversé 55 000 L d'eau en utilisant x camions citernes de 3 000 L et y camions citernes de 5 000 L donc, $3\,000\,x + 5\,000\,y = 55\,000$.

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{cases} x+y=13 \\ 3\,000x+5\,000y=55\,000 \end{cases}$$

Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 13 - x$.

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$3\,000\,x + 5\,000(13 - x) = 55\,000$

$3\,000\,x + 65\,000 - 5\,000x = 55\,000$

$-2\,000\,x + 65\,000 = 55\,000$

$-2\,000\,x = -10\,000$

$x = 5$

On remplace x par 5 dans $y = 13 - x$ et on obtient $y = 8$.

On vérifie que pour $x = 5$ et $y = 8$:

$x + y = 5 + 8 = 13$.

$3\,000x + 5\,000y = 3\,000\times5 + 5\,000\times8 = 55\,000$.

Le couple (5 ; 8) est solution du système.

Retour à la situation

Les pompiers ont utilisé 5 camions-citernes de 3 000 litres et 8 camions citernes de 5 000 litres.

88 **Math et finance**

Choix des inconnues

On note x la somme placée au taux de 3,5 % et y la somme placée au taux de 4 %.

Mise en équation

Mattéo a placé 20 000 € donc $x + y = 20\,000$.

Remarque :

Augmenter un prix de 3,5 % revient à le multiplier par 1,035.

Augmenter un prix de 4 % revient à le multiplier par 1,04.

Il a placé une partie x de cette somme au taux de 3,5 % et le reste y à 4 %. Mattéo a récupéré 20 765 donc :

$$1{,}035\,x + 1{,}04\,y = 20\,765$$

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{cases} x+y=20\,000 \\ 1{,}035x+1{,}04y=20\,765 \end{cases}$$

Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 20\,000 - x$.

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$1{,}035\,x + 1{,}04(20\,000 - x) = 20\,765$

$1{,}035x + 20\,800 - 1{,}04x = 20\,765$

$-0{,}005\,x + 20\,800 = 20\,765$

$-0{,}005\,x = -35$

$x = 7\,000$

On remplace x par 7 000 dans l'expression $y = 20\,000 - x$:

$y = 20\,000 - 7\,000$ et on obtient $y = 13\,000$.

On vérifie que pour $x = 7\,000$ et $y = 13\,000$

$x + y = 7\,000 + 13\,000 = 20\,000$

$1{,}035x + 1{,}04y = 1{,}035\times7\,000 + 1{,}04\times13\,000 = 20\,765$

Donc le couple (7 000 ; 13 000) est le couple solution du système.

Retour à la situation

Mattéo a investi 7 000 € à la « Banque verte » et 13 000 € à la « Banque éco ».

89 **a. Choix des inconnues**

On note x l'âge de Mona Lisa au début de la réalisation du tableau et y l'âge de Léonard de Vinci.

Mise en équation

Au début de la réalisation du tableau, elle a 27 ans de moins que le peintre donc :

$$y - x = 27.$$

Trois ans plus tard, Le peintre est deux fois plus âgé que Mona Lisa donc : $y + 3 = 2\,(x + 3)$ soit $y - 2x = 3$.

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} y-x=27 \\ y-2x=3 \end{cases}$$

Résolution du système

On multiplie par –1, les deux membres de l'équation (2).

On obtient le système $\begin{cases} y-x=27 \\ -y+2x=-3 \end{cases}$

Par addition membre à membre on obtient :

$(y - x) + (-y + 2x) = 27 - 3$ soit $x = 24$

On remplace x par 24 dans l'égalité $y - x = 27$ alors $y = 51$.

Vérification

Si $x = 24$ et $y = 51$ alors,

$y - x = 51 - 24 = 27$ et $y - 2x = 51 - 2\times24 = 3$

La solution du système est le couple (24 ; 51)

Retour à la situation

Lorsqu'elle posa pour la première fois pour Léonard de Vinci, Mona Lisa avait 24 ans.

90 **Avec le théorème de Thalès**

a. Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en B et les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles BAC et BDE on obtient :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \text{ c'est-à-dire } \frac{40}{60} = \frac{x}{y}.$$

L'égalité des produits en croix donne $40y = 60x$ soit $y = 1{,}5x$.

Le trapèze AEDC est un trapèze d'aire 320 mm² donc $20 \times \frac{x+y}{2} = 320$ soit $10x + 10y = 320$.

La lecture de l'énoncé conduit au système (S) :

$$\begin{cases} y = 1{,}5x \\ 10x + 10y = 320 \end{cases}$$

b. Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 1{,}5x$.

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$10x + 10\times 1{,}5x = 320$

$25x = 320$

$x = 12{,}8$

On remplace x par 12,8 dans l'expression $y = 1{,}5\,x$ et on obtient $y = 19{,}2$.

On vérifie que pour $x = 12{,}8$ et $y = 19{,}2$

$1{,}5x = 1{,}5 \times 12{,}8 = 19{,}2 = y$

$10x + 10y = 10\times 12{,}8 + 10\times 19{,}2 = 320$

Donc le couple (12,8 ; 19,2) est le couple solution du système.

Retour à la situation

La base [DE] du trapèze mesure 12, 8 mm et la base [AC] du trapèze mesure 19,2 mm.

91 Division euclidienne

Choix des inconnues

On note x le plus grand des deux nombres et y le plus petit des deux nombres.

Mise en équation

Deux nombres positifs ont pour somme 241 donc :

$$x + y = 241.$$

Si on divise le plus grand par le plus petit, le quotient est 4 et le reste est 11 donc $x = 4y + 11$ et $11 < y$

La lecture de l'énoncé conduit au système $\begin{cases} x + y = 241 \\ x = 4y + 11 \end{cases}$

Résolution du système

En reportant $x = 4y + 11$ dans la première équation, on obtient :

$4y + 11 + y = 241$

$5y + 11 = 241$

$5y = 230$

$y = 46$

On remplace y par 46 dans $x = 4y + 11$ et on obtient $x = 4\times 46 + 11 = 195$.

Vérification

Si $x = 195$ et $y = 46$, alors

$x + y = 46 + 195 = 241$ et $195 = 4\times 46 + 11 = 195$

La solution du système est le couple (195 ; 46).

Retour à la situation

Les nombres positifs cherchés sont 195 et 46.

92 1 h 45 min = 1,75 h

On utilise la formule :

distance (en km) = vitesse (en km • h^{-1}) × temps (en h)

soit $d = v \times t$ ou alors $t = \dfrac{d}{v}$

a. Marie a parcouru d_1 km pendant le temps t_1 (en heures) à la vitesse de 45 km • h^{-1} et d_2 km pendant le temps t_2 (en heures) à la vitesse de 40 km • h^{-1} donc $\boldsymbol{t_1 + t_2 = 1{,}75}$ soit $\dfrac{d_1}{45} + \dfrac{d_2}{40} = 1{,}75$.

La distance parcourue est 75 km, donc $d_1 + d_2 = 75$.

Ces informations conduisent au système

$$\begin{cases} \dfrac{d_1}{45} + \dfrac{d_2}{40} = 1{,}75 \\ d_1 + d_2 = 75 \end{cases}$$

b. Méthode par substitution :

La première équation s'écrit $d_2 = 1{,}75 \times 40 - d_1 \times \dfrac{40}{45}$ soit $d_2 = 70 - \dfrac{8}{9}d_1$.

En reportant cette expression de d_2 dans la deuxième équation, on obtient :

$d_1 + 70 - \dfrac{8}{9}d_1 = 75$

$\dfrac{1}{9}d_1 + 70 = 75$

$\dfrac{1}{9}d_1 = 5$

$d_1 = 45$

On remplace d_1 par 45 dans l'égalité $d_1 + d_2 = 75$ et on obtient $d_2 = 30$.

Vérification

Si $d_1 = 45$ et $d_2 = 30$, alors :

$\dfrac{d_1}{45} + \dfrac{d_2}{40} = \dfrac{45}{45} + \dfrac{30}{40} = 1 + 0{,}75 = 1{,}75$

$d_1 + d_2 = 45 + 30 = 75$

Le couple ($d_1 = 45$; $d_2 = 30$) est solution du système.

Méthode par addition

Si on multiplie les deux membres de la première équation par –40, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{-\dfrac{40}{45}d_1 - d_2 = -70} \\ d_1 + d_2 = 75 \end{cases}$$

Par addition membre à membre, on obtient :

$$\left(\boldsymbol{-\frac{40}{45}d_1 - d_2}\right) + (d_1 + d_2) = -70 + 75$$

$\dfrac{5}{45}d_1 = 5$ donc

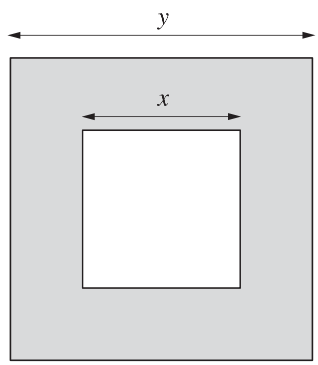
$d_1 = 45$

On remplace d_1 par 45 dans l'égalité $d_1 + d_2 = 75$ et on obtient $d_2 = 30$.

Retour à la situation

Marie a parcouru 30 km à la vitesse moyenne de 40 km • h^{-1}.

93



L'unité de longueur est le cm.

On note y la longueur du côté du grand carré et x la longueur du côté du petit carré.

Mise en équation

L'aire de la bande rose est 42 cm² donc $y^2 - x^2 = 42$.

Le périmètre extérieur mesure 12 cm de plus que le périmètre intérieur donc $4y - 4x = 12$.

La lecture de l'énoncé conduit au système

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 42 \\ 4y - 4x = 12 \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} (y+x)(y-x) = 42 \\ y - x = 3 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y+x = 14 \\ y - x = 3 \end{cases}$

Le couple (5,5 ; 8,5) est solution de ce système.

On remplace x par 6,5 et y par 8,5 dans l'expression :

$y^2 - x^2 = 8{,}5^2 - 5{,}5^2 = 42$

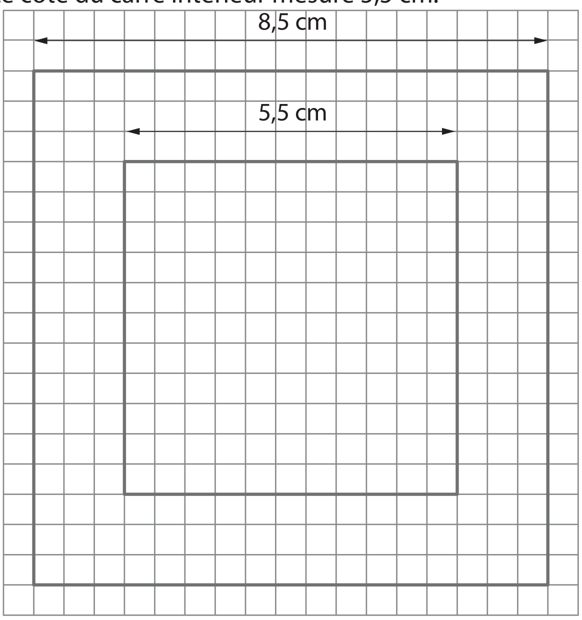
$4y - 4x = 8{,}5 - 5{,}5 = 3$

Le couple (5,5 ; 8,5) est aussi solution du système :

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 42 \\ 4y - 4x = 12 \end{cases}$$

Le côté du carré extérieur mesure 8,5 cm.

Le côté du carré intérieur mesure 5,5 cm.



15. Tâche complexe : Utiliser les résultats d'une expérience

94 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : calculer le volume de la couronne.

Aide n° 2 : cette couronne est constituée d'argent et d'or. Combien pèse 1 cm³ d'argent ? 1 cm³ d'or ?

Aide n° 3 : noter x (en cm³) le volume de l'argent et y (en cm³) le volume de l'or.

Puis écrire un système de deux équations à deux inconnues traduisant la situation proposée.

Aide n° 4 : Le prix total de la couronne est obtenu en ajoutant les prix de l'argent et de l'or qui la constituent.

2. Quelques commentaires

• La résolution de cette tâche complexe conduit les élèves à traiter une situation se traduisant par un système de deux équations à deux inconnues. Mais en plus elle amène à une révision des notions de volumes, de masses, de masses volumiques avec des changements d'unités.

• **D'abord arrive un calcul de volume.**

Le principe d'Archimède nous indique que le volume de la couronne est égal au volume d'un parallélépipède de dimensions : 120 cm × 20 cm × 0,2 cm.

• **Ensuite suit un travail sur la notion de masse volumique.**

Comme 1 000 000 cm³ d'argent pèsent 10 500 000 g et 1 000 000 cm³ d'or pèsent 19 500 000 g, on peut en déduire la masse (en g) de 1 cm³ d'argent et la masse (en g) de 1 cm³ d'or.

• **La traduction d'une situation par un système de deux équations devra être réalisée. Le système devra alors être résolu.**

Puisque les prix d'un cm³ d'argent et d'un cm³ d'or sont différents, pour trouver le prix de la couronne il est nécessaire de trouver le volume x de l'argent et le volume y de l'or qui constituent cette couronne.

Trouver les volumes de l'argent et de l'or par tâtonnement semble compliqué d'ou l'idée d'écrire un système de deux équations à deux inconnues.

La première équation traduit le fait que la couronne a un volume de 480 cm³.

La deuxième équation traduit le fait que la masse de cette couronne est de 6 300 g.

Le choix du mode de résolution de ce système est laissé à l'appréciation de l'élève.

• **Une fois les volumes d'or et d'argent connus, on va déterminer les masses puis les prix respectifs de l'argent et de l'or.**

Masse (en g) de l'argent constituant une partie de la couronne = volume (en cm³) de l'argent × masse (en g) de 1 cm³ d'argent.

Masse (en g) de l'or constituant l'autre partie de la couronne = volume (en cm³) de l'or × masse (en g) de 1 cm³ d'or.

Prix de l'argent (en €) constituant la couronne = masse de cet argent (en g) × prix (en €) d'un gramme d'argent.

Prix de l'or (en €) constituant la couronne = masse de cet or (en g) × prix (en €) d'un gramme d'or.

3. Une solution possible

Volume de la couronne

Le volume (en cm³) de la couronne est égal au volume d'eau déplacée : $120 \times 20 \times 0{,}2 = 480$

Recherche du volume de l'argent et du volume de l'or

Choix des inconnues

On note x (en cm^3) le volume de l'argent et y (en cm^3) le volume de l'or.

Mise en équation

Le volume de la couronne est 480 cm^3, donc $x + y = 480$

1 cm^3 d'or pèse 19,5 g et 1 cm^3 d'argent pèse 10,5 g, donc $10{,}5x + 19{,}5y = 6\,300$

Ces informations conduisent au système :

$$\begin{cases} x + y = 480 \\ 10{,}5x + 19{,}5y = 6\ 300 \end{cases}$$

Résolution du système

La première équation s'écrit $y = 480 - x$.

En reportant cette expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$10{,}5x + 19{,}5\,(480 - x) = 6\,300$

$10{,}5x - 19{,}5\,x + 9\,360 = 6\,300$

$-9x = -3\,060$

$x = 340$

On remplace x par 340 dans $y = 480 - x$ et on trouve $y = 140$.

Vérification

Si $x = 340$ et $y = 140$,

alors $x + y = 340 + 140 = 480$

$10{,}5x + 19{,}5y = 10{,}5 \times 340 + 19{,}5 \times 140 = 6\,300$

Le couple (340 ; 140) est la solution du système.

Retour à la situation

La couronne est constituée de 340 cm^3 d'argent et de 140 cm^3 d'or.

Prix de la couronne

1 cm^3 d'argent pèse 10,5 g et coûte 9,66 € ($10{,}5 \times 0{,}92$)

1 cm^3 d'or pèse 19,5 g et coûte 790,14 € ($19{,}5 \times 40{,}52$)

$340 \times 9{,}66 + 140 \times 790{,}14 = 113\,904$.

La valeur de la couronne est de 113 904 €.

16. En route vers la seconde

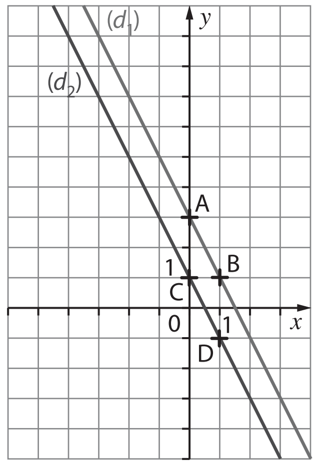
95 Système particulier (1)

a. Thomas a utilisé les expressions :

$$y = -2x + 3 \text{ et } y = -2x + 1.$$

b. La droite (d_1) est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto -2x + 3$.Cette droite passe par les points A (0 ; 3) et B (1 ; 1).

La droite (d_2) est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto -2x + 1$. Cette droite passe par les points C (0 ; 1) et D (1 ; –1).



c. Ces deux droites sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur.

Les deux droites n'ont pas de point d'intersection donc le système (S_1) n'a pas de solution.

d. $2x + y$ ne peut pas être égal à la fois à 3 et à 1 donc ce système ne peut pas avoir de solution.

96 Système particulier (2)

a. Si $x = 2$ et $y = 1$, alors

$6x - 4y = 6 \times 2 - 4 \times 1 = 8$

$-9x + 6y = -9 \times 2 + 6 \times 1 = -12$

Le couple (2 ; 1) est solution du système.

Si $x = -4$ et $y = -8$, alors

$6x - 4y = 6 \times (-4) - 4 \times (-8) = 8$

$-9x + 6y = -9 \times (-4) + 6 \times (-8) = -12$

Le couple (–4 ; –8) est solution du système.

Si $x = 0$ et $y = -2$, alors

$6x - 4y = 6 \times 0 - 4 \times (-2) = 8$

$-9x + 6y = -9 \times 0 + 6 \times (-2) = -12$

Le couple (0 ; –2) est solution du système.

Si $x = 10$ et $y = 13$,

alors $6x - 4y = 6 \times 10 - 4 \times 13 = 8$

$-9x + 6y = -9 \times 10 + 6 \times 13 = -12$

Le couple (10 ; 13) est solution du système.

Remarque : Ce système a plusieurs solutions.

b. Avec la première équation $6x - 4\,y = 8$, on obtient :

$$4y = 6x - 8 \text{ et } y = 1{,}5\,x - 2.$$

Avec la deuxième équation $-9x + 6y = -12$, on obtient :

$$6y = 9x - 12 \text{ et } y = 1{,}5\,x - 2.$$

On obtient la même expression.

c. Elle affiche « Infinité de solutions »

Oui, on est en accord avec ce qui précède car les solutions du système sont données par les couples (a ; 1,5 a –2) pour n'importe quelle valeur du nombre a.

Remarque :

Si on traçait les deux droites qui correspondent au système, ces deux droites seraient confondues. Il y aurait une infinité de points d'intersections et donc une infinité de couples solutions pour le système.

97 Avec des fractions ou des radicaux

a. Le système peut aussi s'écrire $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ 3x + 2y = 78 \end{cases}$

En reportant l'expression de y dans la deuxième équation, on obtient :

$3x + 2 \times \frac{2}{3}x = 78$

$\frac{13}{3}x = 78$

$x = 18$

On remplace x par 18 dans $y = \frac{2}{3}x$ et on trouve $y = \frac{2}{3} \times 18 = 12$.

Vérification

Si $x = 18$ et $y = 12$, alors

$\frac{x}{3} = \frac{18}{3} = 6$ et $\frac{y}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{18}{2} + \frac{12}{3} = 13$

Le couple (18 ; 12) est la solution du système.

b. Le système peut aussi s'écrire $\begin{cases} 2x - 3y = 42 \\ 3x - 2y = 48 \end{cases}$

On multiplie chaque membre de la première équation par 3 et chaque membre de la deuxième équation par 2.

On obtient le système $\begin{cases} 6x - 9y = 126 \\ 6x - 4y = 96 \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$(6x - 9y) - (6x - 4y) = 126 - 96$

$-5y = 30$

$y = -6$

On remplace y par -6 dans $2x - 3y = 42$. On obtient :

$2x - 3 \times (-6) = 42$

$2x + 18 = 42$

$2x = 24$

$x = 12$

Vérification

Si $x = 12$ et $y = -6$, alors

$2x - 3y = 2 \times 12 - 3 \times (-6) = 42$

$3x - 2y = 3 \times 12 - 2 \times (-6) = 48$

La solution du système est le couple (12 ; –6).

c. On multiplie les 2 membres de la deuxième équation par $\sqrt{3}$. On obtient le système $\begin{cases} x\sqrt{3} + y = 8 \\ x\sqrt{3} - 3y = 4\sqrt{3} \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$(x\sqrt{3} + y) - (x\sqrt{3} - 3y) = 8 - 4\sqrt{3}$

$4y = 8 - 4\sqrt{3}$

$y = 2 - \sqrt{3}$

Dans la première équation, on remplace y par $2 - \sqrt{3}$.

On obtient :

$x\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 8$

$x\sqrt{3} = 6 + \sqrt{3}$

$x = 2\sqrt{3} + 1$

Vérification

Si $x = 2\sqrt{3} + 1$ et $y = 2 - \sqrt{3}$, alors

$x\sqrt{3} + y = (2\sqrt{3} + 1) \times \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 6 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 8$

$x - y\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1 - (2 - \sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4$

La solution du système est le couple ($2\sqrt{3} + 1$; $2 - \sqrt{3}$).

98 Résolution graphique ? Résolution algébrique ?

a. La droite (d_1) représente une fonction affine

$$f : x \mapsto ax + b$$

Cette droite passe par les points A (0 ; –3) et B (4 ; 0)

L'image de 0 est –3 donc $b = -3$.

L'image de 4 est 0 donc $4a - 3 = 0$ et $a = \frac{3}{4}$

$$f : x \mapsto \frac{3}{4}x - 3.$$

La droite (d_2) représente une fonction affine

$$g : x \mapsto ax + b$$

Cette droite passe par les points C (0 ; 6) et B (6 ; 0)

L'image de 0 est 6 donc $b = 6$.

L'image de 6 est 0 donc $6a + 6 = 0$ et $a = -1$

$$g : x \mapsto -x + 6.$$

b. I(5,1 ; 0,9)

c. Le système $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 3 \\ y = -x + 6 \end{cases}$ permet de déterminer les

les valeurs exactes des coordonnées du point I.

Autre système : $\begin{cases} \frac{3}{4}x - y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

d. Si $x = \frac{36}{7}$ et $y = \frac{6}{7}$, alors :

$\frac{3}{4}x - 3 = \frac{3}{4} \times \frac{36}{7} - 3 = \frac{27}{7} - 3 = \frac{27}{7} - \frac{21}{7} = \frac{6}{7} = y$

$-x + 6 = -\frac{36}{7} + 6 = -\frac{36}{7} + \frac{42}{7} = \frac{6}{7} = y$

Le couple $\left(\frac{36}{7} ; \frac{6}{7}\right)$ est bien la solution de ce système.

CHAPITRE 8

Notion de fonction

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Les élèves ont déjà rencontré des situations dans lesquelles ils doivent repérer une grandeur en fonction d'une autre. **En 6^e**, les situations de proportionnalité font intervenir deux grandeurs dépendantes l'une de l'autre.

Dès la classe **de 5^e,** le vocabulaire *en fonction de* ou *varie en fonction de* est abordé en situation. Les élèves travaillent à la fois sur des expressions numériques et sur des expressions littérales notamment dans le domaine grandeurs et mesures.

En 4^e, le mot *fonction* est employé sans qu'une définition formelle soit donnée. Le calcul littéral amène les élèves à travailler sur des expressions où figure une lettre.

2. La notion de fonction

Ce chapitre a pour objectif de faire émerger progressivement sur des exemples issus de la vie courante la notion de fonction. Les activités proposées permettent de travailler différentes façons de définir une fonction. La notion de fonction est hors socle.

L'activité 1 aborde la fonction du point de vue graphique. Les élèves ont déjà interprété des graphiques dans des classes antérieures. C'est aussi l'occasion de revenir sur les lectures graphiques dans un repère du plan. Par lecture graphique, on associe une valeur unique à un nombre *t* donné. A ce sujet on pourra faire remarquer que les lectures ne sont que des valeurs approchées sauf dans le cas où le graphique donne une indication supplémentaire « petite croix ». La notation V (*t*) est introduite. On pourra reprendre la question **2.** en traduisant les réponses à l'aide de cette notation.

À partir d'une situation de la vie courante motivante pour les élèves représentée par un tableau de valeurs, **l'activité 2** introduit la notation A (x) et la distingue de la notation A. Les élèves se familiarisent progressivement à cette notation et la traduisent pour cette situation.

Cet exercice fait appel à l'utilisation d'un tableur-grapheur pour créer une représentation graphique. On pourra s'interroger sur la signification entre placer les points ou les joindre avec une ligne.

Les activités 3 et 4 abordent la fonction comme processus qui fait correspondre à un nombre un autre nombre. La fonction est comparée à une machine dans laquelle on entre un nombre et on obtient à la sortie un nombre. Les notions d'image et d'antécédent sont introduites.

De plus dans **l'activité 4**, nous nous interrogeons sur la nécessité d'avoir une seule image associée à un nombre pour pouvoir définir une fonction.

L'activité 5 aborde un exemple de fonction en géométrie. Cette fonction permet d'introduire la fonction constante. Cela permet ainsi de diversifier les registres de travail avec les fonctions pour créer du sens. L'utilisation de GeoGebra facilite la conjecture sur l'aire de la figure. Une fois la conjecture émise, les élèves doivent la démontrer par un calcul d'aires.

3. Les savoir-faire

Deux **exercices résolus** sont proposés. **L'exercice 1** explique comment déterminer les images et les antécédents d'un nombre par lecture graphique. Les élèves peuvent ainsi donner des valeurs exactes ou des valeurs approchées suivant les indications sur la courbe. L'animation interactive facilite la compréhension du sens de lecture.

L'exercice 2 donne deux exemples de calcul d'une image à partir d'une fonction définie par une formule.

Les exercices des rubriques **« J'applique »** permettent aux élèves de s'entraîner sur des exercices de base mêlant les graphiques, les formules et les tableaux de valeurs.

L'exercice 8, porte sur l'utilisation de la calculatrice pour contrôler ses calculs ou pour obtenir un tableau de valeurs d'une fonction donnée.

Les deux exercices de la page **Atelier Brevet** font appel à une représentation graphique de fonction. Les exemples sont issus de problèmes de la vie courante ou de la physique. Lectures graphiques et calculs d'images sont sollicités. Dans **l'exercice guidé 13,** les élèves doivent extraire plusieurs informations du graphique en utilisant les graduations des deux axes. Cet exercice est aussi pertinent car il fait référence à un raisonnement qui n'est pas directement lié à la notion de fonction.

L'exercice 14 permet un travail pluridisciplinaire car il mêle physique et mathématiques. Les élèves disposent d'un moyen de contrôler les réponses grâce au graphique et à la formule de la fonction.

7. Compléments

Un premier travail est proposé autour de l'émergence de la notion de fonction.

Le vocabulaire et les notations sont réinvestis dans des exercices d'application (exercices **à l'oral 15 à 18 puis 24 à 27**).

• Les **exercices d'application** permettent de travailler sur une fonction définie par un graphique (exercices **20 puis 30 à 34**).

Des tableaux de valeurs issus de situations concrètes ou plus mathématiques aident les élèves à s'approprier progressivement la définition d'une fonction (exercices **21 puis 35 à 38**).

De nombreux exercices de ce chapitre permettent de travailler aussi une fonction définie par une formule (exercices **22 et 23 puis 39 à 42**).

Bien que cette notion ne figure pas dans le socle commun il est possible de valoriser des compétences dans certains exercices avec le logo « **porter un regard critique** » ou d'autres figurant dans la page **Présenter, argumenter, communiquer.**

L'exercice **45 math et ARTS** peut être l'occasion d'aborder l'utilité des fonctions dans de nombreux domaines comme l'informatique, les effets spéciaux, les bruitages, l'économie, la biologie, …

• Dans la page **Objectif Brevet**, deux exercices sont proposés autour de la géométrie et des fonctions. Le premier permet de revenir sur la géométrie dans l'espace et le second sur la géométrie plane. Les élèves doivent déterminer la formule d'une fonction. Des réponses par lecture graphique de courbes données sont attendues.

En troisième, les élèves n'apprennent qu'à représenter les couples de nombres donnés par une formule ou un tableau. L'idée du caractère continu de la variable apparaît progressivement dans les courbes représentatives mais n'est pas exigible des élèves.

• Les **Exercices d'approfondissement** par leur diversité permettent d'approfondir les connaissances des élèves sur les fonctions. Les élèves doivent pratiquer une démarche scientifique pour résoudre les problèmes proposés. En effet, après avoir extrait des informations des graphiques, ils sont amenés à calculer et écrire une formule par exemple. Ils doivent donc s'approprier le problème, le modéliser en terme de fonction tout en expliquant leur démarche (exercices **73, 74, 76**).

L'exercice **75** permet de faire une synthèse sur la notion de fonction définie par une formule, un tableau et un graphique. Le graphique est obtenu à l'aide d'un tableur-grapheur.

• L'exercice 77 (**tâche complexe**) est un problème d'optimisation.

À partir d'informations à extraire de différents documents, les élèves devront observer le comportement d'une grandeur puis s'organiser afin de proposer et de structurer une solution.

• Pour faciliter la transition vers le lycée, un exercice avec le logiciel GeoGebra est proposé dans la rubrique **En route vers la seconde.** Les élèves doivent réaliser la figure, dégager une conjecture puis la démontrer. C'est de nouveau l'occasion de travailler des compétences liées à la démarche scientifique du socle commun.

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

On remarque que les nombres qui sortent de la boître sont les doubles des carrés des nombres qu'on entre. En effet :

$3^2 \times 2 = 18$

$10^2 \times 2 = 200$

$12^2 \times 2 = 288$ donc $7^2 \times 2 = 98$.

On obtient donc 98 quand on entre le nombre 7.

• Devinette

Profil 1 car au début la distance augmente régulièrement, puis la distance parcourue est moins importante car il est en montée ; après la distance augmente rapidement car il est en descente et à la fin elle augmente de nouveau régulièrement.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : a.

Il faut respecter les priorités opératoires en ajoutant les parenthèses.

2 Bonne réponse : c.

On remplace P par 70 et T par 1,75.

3 Bonne réponse : b.

On effectue le calcul $3 \times (-4)^2 - 5 \times (-4) + 2$.

4 Bonne réponse : b.

L'abscisse se lit sur l'axe horizontal et l'ordonnée sur l'axe vertical.

5 Bonne réponse : c.

Les coordonnées d'un point sont données par le couple de nombres formé par une abscisse et une ordonnée.

3. Calcul mental

6 **a.** si $t = 0$ alors $F = (5 \times 0 + 3) \times 0 + 1 = 1$

b. si $t = 1$ alors $F = (5 \times 1 + 3) \times 1 + 1 = 9$

c. si $t = -1$ alors $F = (5 \times (-1) + 3) \times (-1) + 1 = 3$

d. si $t = -2$ alors $F = (5 \times (-2) + 3) \times (-2) + 1 = 15$

e. si $t = \frac{2}{5}$ alors $F = \left(5 \times \frac{2}{5} + 3\right) \times \frac{2}{5} + 1 = 3$

f. si $t = 100$ alors $F = (5 \times 100 + 3) \times 100 + 1 = 50\,301$

7 **a.** La longueur du côté d'un carré d'aire 36 cm^2 est égale à $\sqrt{36} = 6$ cm.

b. La longueur d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés ont pour longueur 0,8 m et 1 m est 0,6 m.

4. Activités

La notion de fonction

1 Comprendre un graphique

1. a. Lors de son passage sur la ligne de départ la voiture était lancée à la vitesse de 250 km/h. Elle a mis 87,87 s pour effectuer un tour de circuit.

b. Ce graphique représente les variations de la vitesse de la voiture en fonction du temps.

2. a. Au bout de 5 s la vitesse est de 100 km/h.

Au bout de 20 s la vitesse est de 175 km/h.

Au bout de 40 s la vitesse est de 125 km/h.

Au bout de 55 s la vitesse est d'environ 52 km/h.

Au bout de 80 s la vitesse est de 100 km/h.

b. La voiture a roulé à 300 km/ h à 45 s.

La voiture a roulé à 250 km/h à 0 s, 10 s, environ 13 s, environ 42 s, environ 48 s et 87,87 s.

La voiture n'a jamais roulé à 25 km/h.

2 Comprendre un tableau

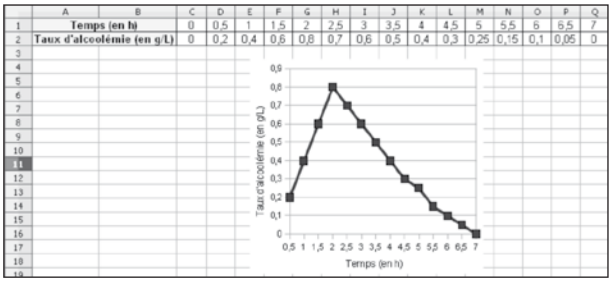
a. Le taux d'alcoolémie est le plus élevé au bout de 2 heures.

b. À chaque temps en heures correspond un unique taux d'alcoolémie en g/L. Donc ce tableau définit une fonction A qui à un temps t associe le taux d'alcoolémie.

c. A (1,5) = 0,6 signifie qu'au bout de 1 h30 le taux d'alcoolémie est de 0,6 g/L.

d. A (t) = 0,5 pour t = 3,5 h et pour t environ égal à 1,25 h (1 h15 min).

e. La personne pourra reprendre sa voiture après 3,5 heures.



Temps (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
Taux d'alcoolémie (en g/L)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05	0

3 Définir l'expression d'une fonction

a. $4 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 16 + 3 = 19 \rightarrow 19 \times 2 = 38$ donc $f(4) = 38$

b. $-4 \rightarrow (-4)^2 = 16 \rightarrow 16 + 3 = 19 \rightarrow 19 \times 2 = 38$ donc $f(-4) = 38$

c. $x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 + 3 \rightarrow (x^2 + 3) \times 2$ donc $f(x) = (x^2 + 3) \times 2$

d. $f(3) = (3^2 + 3) \times 2 = 12 \times 2 = 24$

L'image de 3 par f est 24.

$f(-5) = ((-5)^2 + 3) \times 2 = 28 \times 2 = 56$.

L'image de -5 par f est 56.

$f(7) = (7^2 + 3) \times 2 = 52 \times 2 = 104$ et

$f(-7) = ((-7)^2 + 3) \times 2 = 52 \times 2 = 104$

Les antécédents de 104 par f sont 7 et -7.

4 Porter un regard critique

a. À la note sur 20 on associe l'âge de l'élève qui a obtenu cette note. On ne définit pas une fonction car à une note il peut y avoir plusieurs âges correspondant à des élèves différents.

b. Machine de Mathis :

25 est le carré de 5 et de –5 donc à un nombre on associe deux images donc cette machine ne définit pas une fonction.

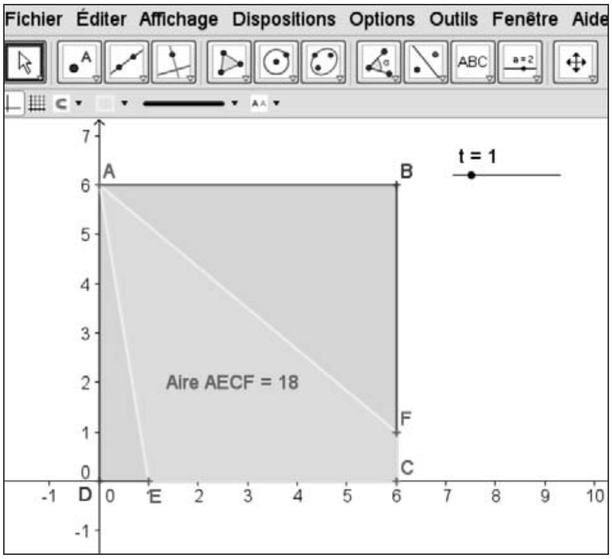
Machine de Marie :

Cette machine associe à un nombre x le nombre $(x + 1) \times (-2) - 3$. Cette machine définit bien une fonction.

5 Étudier une fonction en géométrie

a. On pose $t = DE$, le point E varie entre le point D et le point C comme DC = 6 m donc t est compris entre 0 et 6.

b. Avec le logiciel GeoGebra



c. On peut observer que l'aire du polygone AECF semble être toujours égale à 18 m^2.

d. $S(t)$ = Aire de AECF

= aire du carré ABCD – aire AED – aire ABF

$= 6^2 - 6t : 2 - 6 \times (6 - t) : 2$

$= 36 - 3t - 3(6 - t)$

$= 36 - 3t - 18 + 3t$

$= 18$

5. J'applique

3 **a.** Par lecture graphique l'image de 0 par f est 1, l'image de 2 par f est 2 et l'image de –3 par f est –2.

b. Par lecture graphique les antécédents de 1 par f sont 0 et 3 et les antécédents de –1 par f sont –2 et 4.

c. Le nombre 3 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

d. 0 a trois antécédents par la fonction f : –1 ; 3,5 et 6.

4 **a.** Par lecture graphique l'image de 0 par la fonction g est 0.

b. Par lecture graphique l'image de 2,5 par la fonction g est – 0, 5 (valeur approchée).

c. Par lecture graphique les antécédents de 0 par la fonction g sont – 4 ; –2 ; 0 et 3.

d. les antécédents de 1 par la fonction g sont –1,7 ; – 0,3 et 3,6 (valeurs approchées).

5 **a.** Par lecture graphique $h(3) = 2$; $h(2) = 2{,}5$ et $h(-2) = 2$.

b. Les antécédents de 3 par la fonction h sont –2,5 et 1.

6 **1.** $f(x) = 2(x - 3)^2$

a. $f(0) = 2(0 - 3)^2 = 2 \times 9 = 18$

b. $f(3) = 2(3 - 3)^2 = 0$

c. $f(-2) = 2(-2 - 3)^2 = 2 \times 25 = 50$

d. $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 = 2 \times \left(\frac{(-3)}{2}\right)^2 = \frac{18}{4} = 4{,}5$

2. $f(10) = 2(10 - 3)^2 = 98$ et $f(-4) = 2(-4 - 3)^2 = 98$

Donc Gaëlle a raison.

7 **a.** P (10) = 60 signifie que pour un vent ayant une vitesse de 10 m/s la puissance délivrée par une éolienne est de 60 kWh.

b. P (V) = 175 pour une vitesse V égale à 14 m/s ou 18 m/s.

9 $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ avec la calculatrice pour des nombres entiers compris entre 0 et 10 :

Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Images	1	3	15	37	69	111	163	225	297	379	471

10 $g(x) = 1 - x^2$

$g(-5{,}37) = -27{,}8369$

$g(10{,}572) = -110{,}767\,184$

$g(159{,}4) = -25\,407{,}36$

11 $h(x) = x^2 + 5x$

Images de –2 à 2 avec un pas de 0,1 :

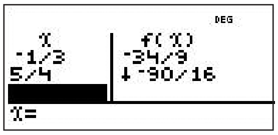
Nombres	Images
–2	–6
–1,9	–5,89
–1,8	–5,76
–1,7	–5,61
–1,6	–5,44
–1,5	–5,25
–1,4	–5,04
–1,3	–4,81
–1,2	–4,56
–1,1	–4,29

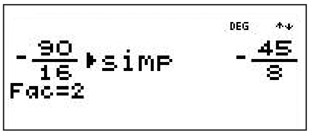
Nombres	Images
–1	–4
–0,9	–3,89
–0,8	–3,36
–0,7	–3,01
–0,6	–2,64
–0,5	–2,25
–0,4	–1,84
–0,3	–1,41
–0,2	–0,96
–0,1	–0,49

Nombres	Images
0	0
0,1	0,51
0,2	1,04
0,3	1,59
0,4	2,16
0,5	2,75
0,6	3,36
0,7	3,99
0,8	4,64
0,9	5,31

Nombres	Images
1	6
1,1	6,71
1,2	7,44
1,3	8,19
1,4	8,96
1,5	9,75
1,6	10,56
1,7	11,39
1,8	12,24
1,9	13,11
2	14

12 $k(x) = (x+1)(2x-5)$





$k\left(\frac{(-1)}{3}\right) = \frac{(-34)}{9}$ et $k\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{(-45)}{8}$

6. Atelier Brevet

13 **a.** Cinq minutes après le départ la cabine se trouve à environ 30 mètres du sol.

b. Dix minutes après le départ la cabine se trouve à environ 100 mètres du sol.

c. La durée d'un tour complet de la cabine est de 30 minutes car elle revient à 0 m du sol au bout de 30 minutes.

d. La cabine est à plus de 100 m du sol pendant environ 10 minutes.

2. $\pi \times$ diamètre $= \pi \times 134 \approx 421$

Le périmètre de la roue est d'environ 421 m.

3. $V = \frac{d}{t}$ avec $d = \pi \times 0{,}134$ km et $t = 0{,}5$ h

$V = \frac{\pi \times 0{,}134}{0{,}5}$

Ainsi $V \approx 0{,}842$ km/h

$0{,}842 < 1$ donc la cabine ne se déplace pas à plus de 1 km/h.

14 **a.** $P = 150I^2$

$P = 150 \times 7{,}5^2 = 8\,437{,}5$

L'image de 7,5 par la fonction g est 8 347,5.

b. Quand I = 5 ampères, on lit $P \approx 4\,000$ watts.

c. Un antécédent de 2 500 par la fonction g est environ 4.

7. Exercices à l'oral

Notion de fonction

15 **a.** $20 \rightarrow \frac{1}{4} \times 20 = 5 \rightarrow 5^2 = 25$

On vérifie bien qu'en entrant le nombre 5 on obtient 25.

b. $p(-12) = 9$ signifie que si on entre -12 on obtient 9 avec cette machine. On dit que l'image de -12 est 9.

$-12 \rightarrow \frac{1}{4} \times (-12) = -3 \rightarrow (-3)^2 = 9$

16 **a.** $2 \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow 4 - 5 = -1$

Si l'on entre 2 dans la machine on obtient -1.

b. $f(2) = -1$

-1 est l'image de 2 par la fonction f.

2 est l'antécédent de -1 par la fonction f.

17 **a.** $3 \times (-5) = -15$

L'image de -5 par la fonction g est -15.

$g(-5) = -15$.

b. $3 \times \ldots = 21$

L'antécédent de 21 est 7 car $21 : 3 = 7$.

$g(7) = 21$.

c. • $g(0) = 0$ • $g(-10) = 3 \times (-10) = -30$

• $g\left(\frac{7}{3}\right) = 3 \times \frac{7}{3} = 7$ • $g(2) = 6$ car $6 : 3 = 2$

• $g(100) = 300$ car $300 : 3 = 100$

• $g(-20) = -60$ car $-60 : 3 = -20$

18 **1. a.** $h(-1) = 2$ donc l'image de -1 par la fonction h est 2.

b. $h(1) = -2$ donc l'image de 1 par la fonction h est 2.

c. $h(5) = 0$ donc l'image de 5 par la fonction h est 0.

2. a. $h(0) = -2$ et $h(1) = -2$ donc deux antécédents de -2 sont 0 et 1.

b. $h(-3) = 3$ donc un antécédent de 3 est -3.

c. $h(5) = 0$ donc un antécédent de 0 est 5.

3. 3 et -1 ont pour image 2 par la fonction h.

19 **a.** À une température relevée, on associe l'altitude du lieu, on ne définit pas une fonction car à une température il peut correspondre plusieurs altitudes.

b. À une altitude relevée il correspond une seule température donc on définit bien une fonction.

Graphique, tableau, formules

20 **1. a.** Ce graphique définit une fonction T qui à l'âge du tigre associe sa taille en cm.

b. La variable de cette fonction est l'âge du tigre.

c. On lit cette variable sur l'axe des abscisses.

2. a. À deux mois la taille du tigre est d'environ 20 cm.

À 9 mois la taille du tigre est d'environ 60 cm.

b. Le tigre mesure 45 cm à environ 4 mois.

Le tigre mesure 80 cm à environ 16 mois.

3. $T(14) = 75$ signifie qu'à 14 mois le tigre mesure 75 cm.

21 **a**. L'image de 2010 par la fonction P est 67,6.

b. L'antécédent de 61,4 par la fonction P est 2 006.

c. $P(2\,008) = 68{,}4$

$P(a) = 61{,}6$ pour $a = 2\,009$.

22 **a.** $f : x \mapsto 5 + 3x$ et $f : a \mapsto 3a + 5$.

b. $f(4) = 5 + 3 \times 4 = 17$

$f(-2) = 5 + 3 \times (-2) = -1$

$f(0) = 5 + 3 \times 0 = 5$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 5 + 3 \times \frac{2}{3} = 7$

c. $(8 - 5) : 3 = 1$ Donc un antécédent de 8 est 1.

$(95 - 5) : 3 = 30$ Donc un nombre dont l'image est 95 est 30.

23 $g(x) = x^2 + 1$

a. $g(0) = 0^2 + 1 = 1$

$g(-5) = (-5)^2 + 1 = 26$

$g(8) = 8^2 + 1 = 65$

b. $g(3) = 3^2 + 1 = 10$ et $g(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$ donc 3 et -3 sont des antécédents de 10.

c. Pour calculer les antécédents de 0, on résout $x^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire $x^2 = -1$.

Cette équation n'a pas de solution donc 0 n'a pas d'antécédent.

8. Exercices d'application

Notion de fonction

24 **a.** La fonction qui à un nombre associe son opposé est : $g : x \mapsto -x$

b. $f : x \mapsto 2x$ est la fonction qui à un nombre associe son double.

$h : x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est la fonction qui à un nombre associe sa moitié.

c. $f(10) = 2 \times 10 = 20$ $g(10) = -10$

$h(10) = 10 : 2 = 5$.

d. L'antécédent de –8 par la fonction f est –4.

L'antécédent de –8 par la fonction g est 8.

L'antécédent de –8 par la fonction h est –16.

25 **a.**

En français	En langage mathématique
L'image de 2 est 5.	$f(2) = 5$
–1 est l'image de 3	$f(3) = -1$
Un antécédent de 9 est 5.	$f(5) = 9$
2 a pour antécédent –4	$f(-4) = 2$

b. $f(-3) = 4$

L'image de –3 par la fonction f est 4.

Un antécédent de 4 par la fonction f est –3.

26 **1. a.** $f : x \mapsto 3x^2$

b. $g(0) = 1$

2. $h : x \mapsto 2x - 5$

h est la fonction qui à un nombre associe le double auquel on retranche 5.

$k : t \mapsto (3t)^2$

k est la fonction qui à un nombre associe le carré du triple du nombre.

27 **a.** $f(0) = -1$ et $f(-5) = 1$.

0 est un antécédent de –1 par la fonction f.

–5 est un antécédent de 1 par la fonction f.

b. $f(2) = f(3) = f(-1) = 0$.

0 a pour antécédents par la fonction f, 2 ; 3 et –1.

28 $h(x) = 2(x - 1)^2$

x	–5	–1	0	1	5	101
$h(x)$	**72**	**8**	**2**	**0**	**32**	**20 000**

29 **a.** Les deux grandeurs sont la masse du rôti en kg et le temps de cuisson en heures.

On définit la fonction qui à une masse en kg de rôti associe une durée de cuisson en heures.

b. Les deux grandeurs sont la quantité de gazole en L et le prix à payer en €.

On définit la fonction qui à une quantité de gazole associe le prix à payer.

Avec un graphique

30 **a.** les tranches horaires possibles sont entre environ 0 h et 1,5 h et entre environ 7,6 h et 12 h.

b. La hauteur d'eau est maximale vers 10 h 30.

Julien partira à 10 h30.

31 **1.** Sur l'axe des abscisses on peut lire la durée du parcours en minutes et sur l'axe des ordonnées on peut lire la distance parcourue par le coureur en km.

2. a. Le coureur s'est arrêté car la courbe est horizontale à un moment donné.

Il s'est arrêté 10 minutes environ.

b. Au bout de 5 minutes, il a parcouru 1 km.

c. Pour parcourir 4 km il a mis 33 minutes environ.

3. a. $d(10) = 2$

$d(35) = 6$

4. $V = \dfrac{D}{T}$ avec = 6 km et T = 35 min = $\dfrac{35}{60}$ h = $\dfrac{7}{12}$ h

$V = \dfrac{6}{\dfrac{7}{12}} = 6 \times \dfrac{12}{7} = \dfrac{72}{7} \approx 10{,}3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

32 **a.** $f(2) = 1$ et $f(0) = 2$

b. $f(4) = -2$ et $f(-4) = -2$

33 **1. a.** La variable de la fonction T est l'heure.

La grandeur mesurée est la température en °C.

b. On lit la variable sur l'axe des abscisses.

La grandeur mesurée est lue sur l'axe des ordonnées.

2. a. $T(16) \approx 11{,}8$

$T(23) \approx 8$ et $T(7) \approx 10{,}9$

b. $T(18{,}8) \approx 10$ et $T(5) \approx 10$

3. À 16 heures la température était de 11,8°C.

À 23 heures la température était de 8°C.

À 7 heures la température était de 10,9°C.

À 18,8 h = 18 h48 min et à 5 heures la température était de 10°C.

34 **1. a.** On lit les images des nombres sur l'axe des ordonnées.

b. On lit les antécédents sur l'axe des abscisses.

2. $f(0{,}5) = 0$; $f(-1{,}5) = 1$ et $f(0) = 3$.

3. a. –2 n'a aucun antécédent

b. –1 a un seul antécédent qui est 1.

c. 0 a deux antécédents : 0,5 et 1,3.

d. 1 a trois antécédents : –1,5 ; 0,3 ; 1,4.

4. Xavier a raison car 3 a une infinité d'antécédents compris entre –1 et 0.

Avec un tableau

35 **a.** N (7) = 9 signifie qu'il y a 9 petites annonces qui ont 7 lignes.

b. L'image de 6 est N (6) = 15.

N (3) = 24 et N (5) = 24

3 et 5 sont les antécédents de 24.

36 **a.** $h(2) = -2$; $h(-3) = 10$; $h(5) = 10$

b. $h(-1) = 2$; $h(10) = 12$; $h(-2) = 5$.

c. Félix a confondu image et antécédent. $h(-1) = 2$.

d. $h(a) = 10$ pour $a = -3$ ou $a = 5$.

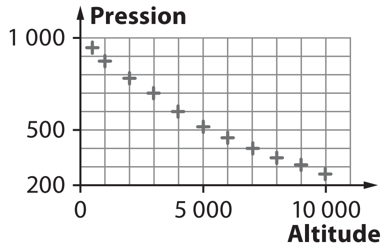
37 **a.** Une lettre de 18 g est affranchie à 0,60 €.

Une lettre de 80 g est affranchie à 1,45 €.

b. M (20) = 0,60 et M (250) = 2,40

c. Avec un timbre de 3,25 € on sait que la masse de la lettre est comprise entre 250 g et 500 g.

38 **a. et b.**



Avec une formule

39 $f(x) = -3(x-2)^2$

a. $f(5) = -3(5-2)^2 = -3 \times 3^2 = -27$

b. $f(2) = -3(2-2)^2 = -3 \times 0 = 0$

c. $f(0) = -3(0-2)^2 = -3 \times 4 = -12$

d. $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = -3\left(\dfrac{2}{3} - 2\right)^2 = -3\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 = -\dfrac{16}{3}$

40 $g : x \mapsto x(4x-1)$

a. $g(2) = 2(4 \times 2 - 1) = 2 \times 7 = 14$

b. $g(0) = 0(4 \times 0 - 1) = 0$

c. $g(-3) = -3(4 \times (-3) - 1) = -3 \times (-13) = 39$

d. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \left(4 \times \dfrac{1}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{2} \times (2-1) = \dfrac{1}{2}$

41 $h(x) = -7x$

$h(-4) = -7 \times (-4) = 28$

28 est l'image de -4, ou un antécédent de 28 est -4.
Clémence a raison.

42 $f : x \mapsto x(x+3)$

1. $f(x) = x(x+3)$

2. a. Vrai car $f(-3) = -3(-3+3) = 0$

b. Vrai car $f(7) = 7(7+3) = 70$

c. Faux car $f(2) = 2(2+3) = 10$

d. Vrai car $f(-4) = -4(-4+3) = 4$

43 **1. a.** $2^2 \times 5 + 10 = 20 + 10 = 30$. C'est exact.

b. $0{,}1^2 \times 5 + 10 = 0{,}05 + 10 = 10{,}05$.

Robin obtient 10,05.

2. a. $p(x) = x^2 \times 5 + 10$

b. $p(-1) = (-1)^2 \times 5 + 10 = 5 + 10 = 15$

$p(3) = 3^2 \times 5 + 10 = 45 + 10 = 55$

$p(0) = 0^2 \times 5 + 10 = 10$

c. $p(0{,}2) = 0{,}2^2 \times 5 + 10 = 0{,}04 \times 5 + 10 = 10{,}2$

9. Prendre des initiatives

44 On pose AM $= x$

a. Si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $f(x)$ est l'aire d'un rectangle de dimensions x et 3.

$f(x) = 3x$

b. Si $4 \leqslant x \leqslant 7$, alors $f(x)$ est la somme de l'aire du rectangle de dimensions 4 et 3 et de l'aire d'un rectangle de dimensions $(x-4)$ et 1.

$f(x) = 12 + x - 4 = 8 + x$

c. Si $7 \leqslant x \leqslant 10$, alors $f(x)$ est la somme des aires des rectangles de dimensions 3 et 4, 3 et 1, $x - 7$ et 4.

$f(x) = 12 + 3 + (x-7) \times 4 = 15 + 4x - 28 = 4x - 13$

45 x est la longueur du côté du triangle équilatéral.

$P_1(x) = 3 \times \left(4 \times \dfrac{x}{3}\right) = 4x$

$P_2(x) = 3 \times 4 \times \left(4 \times \dfrac{x}{9}\right) = \dfrac{16x}{3}$

10. Vrai ou faux

46 **Faux :** $f : x \mapsto 5 - 2(x-1)$

$f(-3) = 5 - 2(-3-1) = 5 - 2 \times (-4) = 13$

47 **Vrai :** $g(x) = 1 + x^2$

$g(5) = 1 + 5^2 = 26$ et $g(-5) = 1 + (-5)^2 = 26$

48 **Faux :** $j(x) = 3x^3 + 5$

$j(-2) = 3 \times (-2)^3 + 5 = 3 \times (-8) + 5 = -19$

donc -2 n'est pas un antécédent de 29.

49 **Vrai :** $f : t \mapsto (t+2)^2$

On cherche les antécédents de 4

$(t+2)^2 = 4$ donc $t + 2 = 2$ ou $t + 2 = -2$

$t = 0$ ou $t = -4$.

Les antécédents de 4 sont 0 et -4.

11. Calcul mental et réfléchi

50 g est définie par $g(x) = 5(3 + x)$

a. Vrai : $g(-2) = 5(3-2) = 5$

b. Vrai : $g(-3) = 5(3-3) = 0$

c. Faux : $g(0) = 5(3+0) = 15$

51 $f : x \mapsto x^2 - 5$

1. a. $f(0) = 0^2 - 5 = -5$ **b.** $f(1) = 1^2 - 5 = -4$

c. $f(-2) = (-2)^2 - 5 = -1$ **d.** $f(0{,}1) = 0{,}1^2 - 5 = -4{,}99$

e. $f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 5 = 0$

2. a. $f(3) = f(-3) = 4$

b. $f(0) = -5$

c. $f(5) = f(-5) = 20$

d. $f(2) = f(-2) = -1$

e. $f(7) = f(-7) = 49$

12. Présenter, argumenter, communiquer

52 $f : x \mapsto 3x - 1$

$f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$

53 $g(x) = \dfrac{x}{5} + 1$

1. Dans la cellule B2 on a saisi = B1/5 + 1

2. a. Vrai : l'image de 5 est 2 car $g(5) = 2$

b. Faux

$g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{5} + 1 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} + 1 = \dfrac{1}{10} + 1 = \dfrac{11}{10} = 1{,}1$

c. Vrai : $g(3) = 1{,}6$ et $8 : 5 = 1{,}6$

d. Faux : $g(0) = \dfrac{0}{5} + 1 = 1$

e. Faux : $g(-2) = \dfrac{-2}{5} + 1 = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{5}{5} = \dfrac{3}{5}$

54 **a.** C'est Jules qui a raison on lit les images sur l'axe des ordonnées et les antécédents sur l'axe des abscisses.

b. Par lecture graphique $g(3) = 3$ et $g(-1) = -3$

c. L'antécédent de 1 par la fonction g est 2.

d. $g(0) = -2$ et $g(0{,}5) = 0$

e. 4 n'a pas d'antécédent par la fonction g.

55 **a.** Ce graphique n'est pas valable, car les valeurs de x ont été portées sur l'axe des ordonnées au lieu de l'axe des abscisses et les valeurs de $f(x)$ sur l'axe des abscisses au lieu de l'axe des ordonnées.

b. Ce graphique comporte une erreur : d'après le tableau, l'image de –2 est 0 ; or sur le graphique on lit que –2 n'a pas d'image (autre argument : l'image de 0 est –2 ; confusion image-antécédent).

56 $h : x \mapsto 3(x-1)(x+5)$

Pablo a raison 0 a deux antécédents.

Le produit $(x-1)(x+5)$ s'annule pour deux valeurs $x = 1$ et $x = -5$.

57 Le graphique **b.** ne peut pas représenter une fonction car un nombre a deux images.

Les deux autres graphiques peuvent représenter une fonction car à un seul nombre est associé une seule valeur.

58

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ on calcule $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$g(x) = (x-4)^2 + 3$ on calcule $g(2) = (2-4)^2 + 3 = 7$

Les deux fonctions ne sont pas égales.

Un autre argument :

$g(x) = x^2 - 8x + 16 + 3 = x^2 - 8x + 19$ donc les deux fonctions ne sont pas égales.

59 Le réservoir est composé d'un cône et d'un cylindre. Le débit de l'eau est constant. L'eau arrive dans le cône donc la hauteur augmente très vite au début donc on peut éliminer les graphiques 3 et 4.

Puis après l'eau arrive dans le cylindre et le niveau d'eau augmente régulièrement donc on peut éliminer le graphique 1.

C'est donc le graphique 2 qui illustre le mieux l'évolution du niveau d'eau dans le temps.

13. QCM

60 **c.**	**61** **b.**	**62** **b.**
63 **a.**	**64** **c.**	**65** **c.**
66 **a.**	**67** **b. et c.**	**68** **a et b.**
69 **b et c.**	**70** **a et c.**	

14. Objectif Brevet

71 **1.** $V = B \times h$ ainsi $V = 10 \times 10{,}5 \times 14$

$V = 1470$ cm^3.

2. a. Le volume de la pyramide SABCD est :

$$\frac{1}{3} \times B \times h \text{ soit } \frac{1}{3} \times 10 \times 10{,}5 \times x = 35x.$$

Le volume de la lanterne est donc :

$$V(x) = 1470 + 35x$$

b. Pour $x = 7$, $V(7) = 1470 + 35 \times 7 = 1715$

c. On résout l'équation $1470 + 35x = 1862$

$35x = 392$

$x = 392 : 35 = 11{,}2$

Le volume de la lanterne est de 1862 cm^3 pour SO = 11,2 cm.

d. Il faut saisir dans la cellule B2 la formule :

= 1470 + 35*A2

3. a. $f(11) \approx 930$

b. Une valeur approchée de l'antécédent de 850 est 6,5.

72 **1.** Les droites (AN) et (BM) sont sécantes en C et les droites (MN) et (AB) sont parrallèles. Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{CN}{CA} = \frac{x}{80} = \frac{MN}{60}$$

$$\frac{x}{80} = \frac{MN}{60} \text{ donc } MN = \frac{60x}{80} = \frac{3x}{4}$$

2. Aire du triangle CMN : $\dfrac{CM \times MN}{2} = \dfrac{x}{2} \times \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3x^2}{8}$

3.a. Comme les deux terrains ont la même aire , donc le triangle doit avoir une aire de 1200 m^2.

Sur le graphique représentant la fonction f qui à, un nombre x associe l'aire du triangle CNM, on doit donc lire un antécédent de 1200. On trouve environ 57 .

Donc CM ≈ 57 m .

b. On doit résoudre l'équation $\dfrac{3x^2}{8} = 1\,200$

$$x^2 = \frac{1200 \times 8}{3} = \frac{9\,600}{3} = 3\,200$$

L'équation admet deux solutions une positive et l'autre négative mais comme x représente une longueur , la solution sera positive.

$x = \sqrt{3\,200}$ m

c. $MN = \dfrac{3\sqrt{3\,200}}{4} = \dfrac{3 \times 40\sqrt{2}}{4} = 30\sqrt{2}$ m

donc MN ≈ 42,4 m

4. a. $4240 : 20 = 212$

$100 : 10 = 10$

$212 \times 10 = 2\,120$

Il faudra 2 120 briquettes pour le muret.

b. 20 briquettes coûtent 35 €

$2\,120 \times 35 : 20 = 3\,710$

Le coût du muret est de 3710 €.

15. Exercices d'approfondissement

73 On souhaite réaliser un bénéfice d'au moins 100 euros.

Le bénéfice est la différence entre la recette composée du montant des formules et le coût de production.

Pour différents nombres de repas servis, on peut calculer la recette et lire le coût de production sur le graphique. On détermine ensuite le bénéfice par différence.

On peut organiser la recherche et présenter les résultats dans un tableau comme celui ci-dessous :

Nombre de repas	Recette (en €)	Coût (en €)	Bénéfice (en €)
10	120	240	-120
20	240	320	-80
30	360	330	30
35	420	340	80
37	444	340	**104**
40	480	350	**130**
50	600	425	**175**
55	660	500	**160**
57	684	550	**134**
60	720	650	70
70	840	1200	-360

Conclusion : Vincent peut réaliser un bénéfice d'au moins 100 € ; pour cela il doit servir entre 37 et 57 repas.

Remarque : cette conclusion est donnée avec la précision permise par le graphique.

74 Sur le graphique, la vitesse diminue quand la voiture est dans un virage.

Le circuit contient donc trois virages.

On peut donc éliminer les circuits A et E.

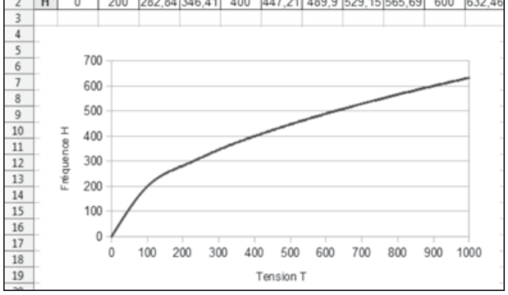
On peut éliminer le circuit C, car les trois virages sont à peu près identiques ; or sur le graphique, on remarque que la vitesse de la voiture a beaucoup baissé lors du 2e virage.

On peut éliminer ensuite le circuit D en s'intéressant aux lignes droites ; en effet la 3e ligne droite de ce circuit est nettement plus courte que la 2e, ce qui n'est pas le cas sur le graphique. Par contre cela correspond bien au circuit B, avec une 3e ligne droite légèrement plus longue que la 2e.

Conclusion : la voiture évoluait sur le circuit B.

75 **1. 2.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	T	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	H	0	200	282,84	346,41	400	447,21	489,9	529,15	565,69	600	632,46



En cellule B2, on a entré la formule =20*RACINE(B1).

3. a. • Pour un « la » de fréquence 440 Hz il faut appliquer une tension de 490 N environ.

• On résout $20\sqrt{T} = 440$ donc $\sqrt{T} = 440 : 20 = 22$

Donc $T = 22^2 = 484$ N

b. • Si T = 900 alors la fréquence est de 600 Hz.

La fréquence maximale est de 600 Hz.

• $20\sqrt{900} = 20 \times 30 = 600$

76 On peut observer :

• Étape 1 : le fait d'ajouter un 3e point aligné avec les deux premiers, amène à tracer deux nouveaux segments de longueur 2 ; la longueur du tracé est $2 + 2 \times 2$

• Étape 2 : le fait d'ajouter un 4e point aligné avec les trois premiers, amène à tracer deux nouveaux segments de longueur 3 ; la longueur du tracé est $2 + 2 \times 2 + 2 \times 3$.

On peut poursuivre les calculs jusqu'à trouver une somme de 870.

On peut aussi concevoir une méthode de résolution. On peut conjecturer, *n* désignant un nombre entier, qu'à l'étape $n - 1$, la longueur du tracé sera :

$2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + 2 \times n$ (avec $n + 1$ points alignés).

On cherche alors pour quelle valeur de *n*,

$$2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + 2 \times n = 870$$

c'est-à-dire $2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 870$

ou encore $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 435$.

On peut faire la recherche à l'aide d'une calculatrice ou plutôt d'un tableur pour ne pas risquer d'oubli.

En cellule B2, on entre la formule =A2+B1 et on étend vers le bas. On obtient :

	A	B
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55

19	19	190
20	20	210
21	21	231
22	22	253
23	23	276
24	24	300
25	25	325
26	26	351
27	27	378
28	28	406
29	29	435

Ainsi pour $n = 29$, le tracé mesure 870 cm.

Conclusion : On sera à l'étape 28, où 30 points sont alignés.

16. Tâche complexe : Optimiser la recette

77 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Peut-on déterminer combien de consoles seront vendues en France en moyenne par semaine si on augmente de 2 € le prix de vente d'une console ? Peut-on calculer alors le bénéfice ?

Et si on diminue de 2 € le prix de vente d'une console ?

Aide n° 2 : Faire quelques essais, selon qu'on augmente ou diminue de 2 € le prix de vente une fois, deux fois, etc. et calculer le bénéfice total réalisé dans chaque cas.

Aide n° 3 : Utiliser un tableur pour visualiser :

• le nombre de consoles vendues,

• le bénéfice réalisé par console ou le prix de vente d'une console,

• le bénéfice total,
en fonction du nombre d'augmentations ou de diminutions de 2 € du prix de vente d'une console.

2. Quelques commentaires

• Cette tâche complexe doit être abordée en plusieurs étapes. Les élèves doivent commencer dans un premier temps par prélever toutes les informations et les organiser.

• La notion de fonction n'étant pas au socle, on cherchera à valoriser toute compétence liée à la démarche scientifique : extraire des informations, réaliser des calculs, raisonner, structurer une solution, présenter sa démarche. L'écriture de la formule du bénéfice en fonction du nombre d'augmentations ou de diminutions n'est pas un objectif à atteindre dans le cadre du socle commun pour tous les élèves. Il nous semble donc intéressant de dégager quelques indicateurs de réussite comme ceux cités ci-dessus.

• On peut penser que les élèves commenceront par calculer le bénéfice réalisé par console avant l'étude de marché, puis feront quelques essais après augmentation ou diminution des tarifs.

• Après un temps de recherche individuelle, il peut être intéressant de proposer un moment collectif d'échanges, où les élèves pourront exposer ce qu'ils ont compris de la situation, poser des questions, débattre. En particulier, ils peuvent être gênés par le fait que les nombres de consoles indiqués sont une moyenne des ventes par magasin. On pourra alors évoquer l'intérêt de tenir compte de ces moyennes dans une étude de marché.

• Une clé de cette tâche complexe est de se rendre compte de la nécessité de travailler sur l'ensemble de la chaîne de magasins et non pas sur un magasin en particulier. Lors de ce moment collectif, on dira – si nécessaire – qu'on s'intéresse à la totalité des magasins de la chaîne.

• Une autre clé est de comprendre qu'il faut tenir compte de deux grandeurs : le nombre de consoles et le prix de vente de ces consoles (ou le bénéfice réalisé par console). Les élèves doivent réussir à les déterminer en fonction du nombre d'augmentations ou de diminutions de 2 € du prix de vente.

• Les élèves devront organiser leur recherche. Ils auront à observer le comportement d'une grandeur. Après quelques essais, à la main ou à la calculatrice, les élèves remarqueront sans doute dans un premier temps que le bénéfice total baisse au fur et à mesure que le nombre d'augmentations de 2 € augmente et que ce bénéfice augmente au fur et à mesure que le nombre de diminutions de 2 € augmente. Trouveront-ils ainsi un bénéfice maximal ? Le tableur trouve ici son utilité pour envisager un grand nombre de situations. Il sera pertinent de laisser les élèves libres de l'utiliser.

• Il est possible que certains élèves se dirigent vers une démarche utilisant le calcul littéral. S'ils peuvent exprimer le bénéfice total en fonction du nombre n d'augmentations ou de diminutions de 2 € du prix de vente d'une console, ils ne disposent pas de méthode algébrique leur permettant de déterminer une valeur maximale. Un recours à un tableur sera là aussi nécessaire. On pourra évoquer le fait que ce nombre n est un nombre entier positif.

• Lors d'un moment collectif, les élèves pourront exposer leurs différentes démarches. L'intérêt de pouvoir visualiser une fonction de différentes façons (tableau, graphique, formule) pourra être dégagé.

On pourra aussi aborder l'intérêt de réaliser des études de marché dans certains secteurs économiques. Les mathématiques sont ici un outil d'aide à la prise de décision et de développement de stratégies commerciales.

• Un travail de rédaction et de présentation d'une solution ordonnée et structurée pourra être ensuite demandé.

3. Éléments de réponse

• 78 + 48 + 67 + 173 + 182 + 46 + 84 + 42+ 240 + 81 + 91 + 68 = 1 200

1 200 consoles sont vendues en moyenne par semaine par la chaîne de magasins.

• Quelques essais

a. Avant l'étude de marché :

105 – 25 = 80

Le bénéfice par console est de 80 €.

80 × 1 200 = 96 000 €

Si la console est vendue 105 €, 1 200 consoles sont vendues par semaine et le bénéfice est de 96 000 €.

b. En cas d'augmentation :

• 82 × 1 150 = 94 300 €

Si la console est vendue 107 €, 1 150 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera de 94 300 €.

• 84 × 1 100 = 92 400 €

Si la console est vendue 109 €, 1 100 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera de 92 400 €.

c. En cas de diminution :

• 78 × 1 250 = 97 500 €

Si la console est vendue 103 €, 1 250 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera de 97 500 €.

• 76 × 1 300 = 98 800 €

Si la console est vendue 101 €, 1 300 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera de 98 800 €.

Il semble, au vu de ces essais, que lorsqu'on augmente le prix de vente d'une console, le bénéfice total diminue et que lorsqu'on diminue le prix de vente d'une console, le bénéfice total augmente.

• Avec un tableur

a. Cas où on augmente le prix de vente d'une console.

Exemple de tableau

	A	B	C	D
1	Nombre d'augmentations de 2 €	Nombre de consoles vendues	Bénéfice par console	Bénéfice total
2		1 200	80	96 000
3	1	1 150	82	94 300
4	2	1 100	84	92 400
5	3	1 050	86	90 300
6	4	1 000	88	88 000
7	5	950	90	85 500
8	6	900	92	82 800
9	7	850	94	79 900
10	8	800	96	76 800
11	9	750	98	73 500
12	10	700	100	70 000
13	11	650	102	66 300
14	12	600	104	62 400
15	13	550	106	58 300
16	14	500	108	54 000
17	15	450	110	49 500
18	16	400	112	44 800
19	17	350	114	39 900
20	18	300	116	34 800
21	19	250	118	29 500
22	20	200	120	24 000
23	21	150	122	18 300
24	22	100	124	12 400
25	23	50	126	6 300
26	24	0	128	0

On entre 1 200 et 80 dans les cellules B2 et C2, puis la formule = B2*C2 dans la cellule D2.

On entre les formules = B2–50 en B3 et = C2+2 en C3.

On étend ces formules vers le bas.

On remarque que le bénéfice total ne cesse de baisser.

b. Cas où on diminue le prix de vente d'une console

Exemple de tableau

	A	B	C	D
1	Nombre de diminutions de 2 €	Nombre de consoles vendues	Bénéfice par console	Bénéfice total
2		1 200	80	96 000
3	1	1 250	78	97 500
4	2	1 300	76	98 800
5	3	1 350	74	99 900
6	4	1 400	72	100 800
7	5	1 450	70	101 500
8	6	1 500	68	102 000
9	7	1 550	66	102 300
10	**8**	**1 600**	**64**	**102 400**
11	9	1 650	62	102 300
12	10	1 700	60	102 000
13	11	1 750	58	101 500
14	12	1 800	56	100 800
15	13	1 850	54	99 900
16	14	1 900	52	98 800
17	15	1 950	50	97 500
18	16	2 000	48	96 000
19	17	2 050	46	94 300
20	18	2 100	44	92 400
35	33	2 850	14	39 900
36	34	2 900	12	34 800
37	35	2 950	10	29 500
38	36	3 000	8	24 000
39	37	3 050	6	18 300
40	38	3 100	4	12 400
41	39	3 150	2	6 300
42	40	3 200	0	0

On entre 1 200 et 80 dans les cellules B2 et C2, puis la formule = B2*C2 dans la cellule D2.

On entre les formules = B2+50 en B3 et = C2–2 en C3.

On étend ces formules vers le bas.

On remarque que le bénéfice total atteint une valeur maximale lorsqu'on procède à une diminution du prix de vente de 16 € par console (8 réductions de 2 €).

$$105 - 16 = 89$$

Conclusion : Le bénéfice est le plus grand possible lorsque le prix de vente d'une console est 89 €.

4. Entre nous

a. On désigne par n le nombre d'augmentations de 2 € du prix de vente.

Le nombre de consoles vendues est : $1\,200 - 50n$.

$105 + 2n - 25 = 80 + 2n$

Le bénéfice réalisé par console est : $80 + 2\,n$

Le bénéfice total est donné par la fonction f telle que :

$$f(n) = (1\,200 - 50n)(80 + 2n)$$

soit $f(n) = -100n^2 - 1\,600n + 96\,000$

On a aussi $f(n) = -100(n + 8)^2 + 102\,400$

n étant un nombre entier positif, on note que plus n augmente, plus $f(n)$ diminue.

b. On désigne par n le nombre de diminutions de 2 € du prix de vente.

Le nombre de consoles vendues est : $1\,200 + 50n$.

$105 - 2n - 25 = 80 - 2n$

Le bénéfice réalisé par console est : $80 - 2n$

Le bénéfice total est donné par la fonction g telle que :

$g(n) = (1\,200 + 50n)(80 - 2n)$

soit $g(n) = -100n^2 + 1\,600n + 96\,000$

On a aussi $g(n) = -100(n - 8)^2 + 102\,400$

Dans ce cas, le maximum est atteint pour $n = 8$ et ce maximum est 102 400 €.

17. En route vers la Seconde

78 **a.** Soit x le nombre de jours et $f(x)$ le nombre d'habitants à compter du 1er novembre 2011.

$f(x) = 7\,000\,000\,000 + 402\,000x - 170\,000x$

$f(x) = 7\,000\,000\,000 + 232\,000x$

b. Entre le 1er novembre 2011 et le 1er janvier 2020, il s'écoule :

- deux mois (30 et 31 jours) en 2011
- huit années (6 de 365 jours et 2 de 366 jours)

soit $30 + 31 + 365 \times 6 + 366 \times 2 = 2\,983$ jours.

On calcule l'image de 2 983 par la fonction f :

$f(2\,983) = 7\,000\,000\,000 + 232\,000 \times 2\,983$

Ainsi $f(2\,983) = 7\,692\,056\,000$.

On peut estimer la population mondiale à 7 692 056 000 habitants, soit environ 7,7 milliards d'habitants, au 1er janvier 2020.

c. Entre le 1er novembre 2011 et le 1er janvier 2030, il s'écoule :

- deux mois (30 et 31 jours) en 2011
- dix-huit années (13 de 365 jours et 5 de 366 jours)

soit $30 + 31 + 365 \times 13 + 366 \times 5 = 6\,636$ jours.

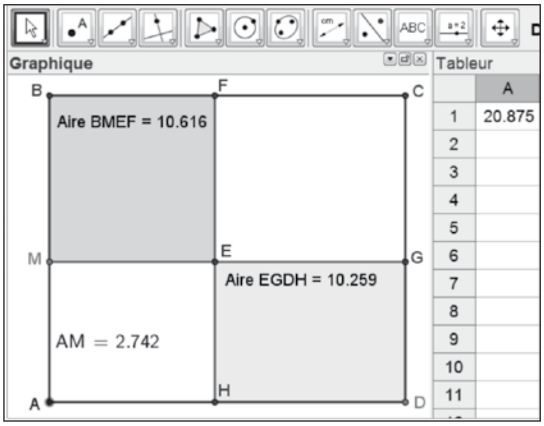
Si l'ONU a utilisé le modèle de la fonction f, on doit avoir $f(6\,636)$ proche de 10,1 milliards.

Or $f(6\,636) = 7\,000\,000\,000 + 232\,000 \times 6\,636$

Ainsi $f(6\,636) = 8\,539\,552\,000$.

Ce résultat est différent de 10,1 milliards, donc l'ONU n'a pas utilisé le modèle de cette fonction.

79 **1.**



Après avoir réalisé la figure, on fait afficher la longueur AM, l'aire du carré BMEF et celle du rectangle EGDH.

Dans la fenêtre Tableur, on affiche la somme de ces deux aires en cellule A1.

En déplaçant le point M sur le segment [AB], on conjecture que la somme des deux aires est minimale lorsque M est à environ 2,74 cm de A.

2. a. $BM = AB - AM$ d'où $BM = 6 - x$.

Aire du carré BMEF $= BM^2 = (6 - x)^2$.

BMEF étant un carré, BF = BM.

$DH = AD - AH = 7 - (6 - x)$ d'où $DH = 1 + x$

Aire du rectangle DHEG $= HE \times DH = x \times (1 + x)$

Par conséquent : $\mathscr{A} = (6 - x)^2 + x\,(1 + x)$

Ainsi $\mathscr{A} = 36 - 12x + x^2 + x + x^2$ soit $\mathscr{A} = 2x^2 - 11x + 36$.

b. Pour montrer que $A\,(x) = 2\,(x - 2{,}75)^2 + 20{,}875$

on développe l'expression de droite :

$2\,(x - 2{,}75)^2 + 20{,}875$

$= 2\,(x^2 - 5{,}5x + 7{,}5625) + 20{,}875$

$= 2x^2 - 11x + 15{,}125 + 20{,}875$

$= 2x^2 - 11x + 36$

Donc $A\,(x) = 2\,(x - 2{,}75)^2 + 20{,}875$

c. Comme l'expression est la somme de deux valeurs positives, l'aire est minimale quand l'expression élevée au carré est minimale c'est-à-dire quand l'expression dans les parenthèses est égale à 0.

$$x - 2{,}75 = 0 \text{ pour } x = 2{,}75$$

On retrouve bien la valeur trouvée dans la conjecture à la question **1.**

CHAPITRE 9 Notion de fonction

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

En classe de **3e**, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité par une synthèse d'un apprentissage commencé à l'école primaire.

En **6e**, l'élève a appris à :

• reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté :
– utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal,
– utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal,
– passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »),
– utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient,
• appliquer un taux de pourcentage.
• calculer des durées, calculer des horaires.

En **5e**, l'élève a appris à :

• compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité, en particulier déterminer une quatrième proportionnelle,
• reconnaître si un tableau complet de nombres est ou non un tableau de proportionnalité,
• mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants :
– comparer des proportions,
– utiliser un pourcentage.
• *calculer un pourcentage,*
• utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin,
• calculer l'échelle d'une carte ou d'un dessin,
• calculer des durées, des horaires.

En **4e**, l'élève a appris à :

• déterminer une quatrième proportionnelle en utilisant notamment les égalités des « produits en croix »,
• utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine,
• déterminer le pourcentage relatif à un caractère d'un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus,
• calculer des distances parcourues, des vitesses moyennes et des durées de parcours en utilisant l'égalité $d = vt$,
• changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).

Remarque : la notion de **fonction**, notion nouvelle en **3e** a été définie dans le chapitre 8 précédent.

2. Synthèse sur la proportionnalité

• **L'activité 1** permet de reprendre contact avec la proportionnalité.

L'analyse d'un tableau de nombres permet ainsi un pronostic quant à la proportionnalité et une certitude quant à la non-proportionnalité.

Parmi les arguments avancés pour affirmer ici la proportionnalité, il est souhaitable, conformément au programme, de mettre l'accent sur le coefficient multiplicateur de la première ligne vers la seconde qui est un nombre décimal.

La signification de ce coefficient devant être formulé par les élèves.

Enfin cette activité permet à travers la formulation « On multiplie par… pour passer de la 1re à la 2e ligne » de mettre en avant le processus qui caractérisera la fonction linéaire introduite au cours de l'activité 3.

Après avoir étudié le **§ 1. a. du cours** on peut proposer ensuite les exercices **15**, **16** et **32**.

• **L'activité 2** permet de répertorier les techniques (retour à l'unité, linéarité, additivité et « produits en croix ») connues des élèves pour calculer une quatrième proportionnelle.

Les exercices **15** à **18**, **34** à **36, 64** et **81** permettent de réinvestir, avec des degrés croissants de difficulté, les différentes méthodes dégagées au cours de cette activité.

• **Remarque :** la caractérisation d'une situation de proportionnalité dans un graphique qui a été testée lors de l'**exercice 2** de « **Je vérifie mes acquis** » sera réinvestie dans l'activité 5 au moment de l'étude de la représentation graphique d'une fonction linéaire.

3. Fonction linéaire

• L'objectif de **l'activité 3** est d'introduire la fonction linéaire.

Conformément au programme, l'utilisation d'un tableau de proportionnalité permet de mettre en place le fait que le processus de correspondance est décrit par une formulation du type « je multiplie par *a* ».

Cette formulation est reliée à $x \mapsto ax$.

À l'occasion de cette activité on met aussi en avant le fait que toute situation de proportionnalité « on multiplie par *a* » peut être modélisée par la fonction linéaire $x \mapsto ax$.

Enfin on utilise les termes propres aux fonctions (images, antécédents).

On pourra poursuivre par l'étude du **§ 2. a du cours** puis avec les exercices **19**, **24**, **37**, **38** et **39** qui traitent plus particulièrement de la définition et de la reconnaissance d'une fonction linéaire.

Les deux exemples détaillés de l'**exercice résolu 1,** qui met en avant le calcul d'une image ou d'un antécédent, pourront être étudiés pas à pas avant de proposer par exemple les exercices **6**, **7**, **20** et **21**.

• **L'activité 4** fait suite naturellement.

Les objectifs de cette activité sont multiples. A savoir :
– mettre en avant que toute fonction linéaire peut se traduire par une situation de proportionnalité ;
– déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image ;
– mettre en évidence, sur des exemples génériques, les propriétés de linéarité et d'additivité des fonctions linéaires.
On pourra poursuivre par l'étude des **§ 2.b** et **2.c du cours** puis avec les exercices **22**, **23**, **43**, **45**, **46 47** et **73**.

• *C*omme le demande le programme l'**activité 5** permet d'établir le fait qu' augmenter de 8 % c'est multiplier par 1,08 et que diminuer de 8 % c'est multiplier par 0,92.

Ce travail est en lien direct avec les fonctions linéaires.

On pourra poursuivre par l'étude du **§ 2.d du cours** puis avec les exercices **25**, **26**,**56** et **57**.

4. Représentation graphique d'une fonction linéaire

• À l'issue de la 4e les élèves ont appris à caractériser, dans le plan muni d'un repère, la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine.

L'activité 6 s'appuie donc sur cette connaissance pour mettre en évidence, sur un exemple, le fait que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.

Cette activité particulièrement riche dont les points de départ sont un tableau de proportionnalité et le processus « on multiplie par *a* » va permettre d'établir à travers un exemple plusieurs nouvelles notions. A savoir :

• la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine (cette propriété admise dans le cas général est précisée dans le cadre « Info »).

• Dans un repère, (*d*) est la droite représentative de la fonction linéaire $x \mapsto ax$.
– Si $y = ax$, alors le point M de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à la droite (*d*).
– Réciproquement, si le point M$(x\,;\,y)$ appartient à la droite (*d*), alors $y = ax$.

• Le premier objectif de **l'activité 7** est d'amener les élèves à mettre en place différentes méthodes pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Le second objectif est de montrer l'influence du coefficient directeur. Il s'agit d'arriver à trois conclusions :
– si le coefficient est positif alors la droite « monte » ;
– si le coefficient est négatif alors la droite « descend » ;
– plus le coefficient directeur augmente plus la droite « se redresse ».
Enfin le dernier objectif est de savoir lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire.

Une suite possible peut consister à vidéo-projeter des droites qui passent par l'origine à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et de demander aux élèves de lire les coefficients.

Le **§ 3 du cours** ainsi que les **exercices résolus 2 et 4** permettront de consolider les notions qui ont été dégagées lors de cette activité.

Ainsi l'**exercice résolu 2** présente deux méthodes différentes pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire.

L'exercice résolu 4 permet de faire le lien entre formule et graphique. En effet il s'agit ici de déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire, soit à l'aide de la donnée d'un nombre non nul et de son image, soit à l'aide de la représentation graphique.

5. Grandeurs composées

• L'objectif de **l'activité 8** est de présenter aux élèves une grandeur produit : l'énergie.

Les élèves doivent comprendre le lien entre la forme de l'unité et les opérations qui relient les grandeurs non composées.

Une grandeur produit est définie par le produit de deux grandeurs : l'énergie électrique en kWh s'obtient en multipliant la puissance en kW par une durée en h.

Cette activité permet aussi d'effectuer, comme le programme l'exige, les premiers changements d'unités sur des grandeurs produits.

Enfin, le fait que pour une puissance donnée, la fonction qui permet de définir l'énergie en fonction du temps soit linéaire est mis en avant.

Après avoir étudié avec soin **l'exemple 1 du § 4. a. du cours** qui présente l'aire comme une grandeur produit on pourra proposer les **exercices 63, 65 et 76**.

• **L'activité 9** met en scène une grandeur quotient qui est normalement familière aux élèves : la vitesse.

Ici aussi les élèves doivent comprendre le lien entre la forme de l'unité et les opérations. Une grandeur quotient est définie par le quotient de deux grandeurs : une vitesse en km/h s'obtient en divisant une distance en km par une durée en h.

De plus cette activité est l'occasion d'évoquer les limitations de vitesse fixées par le code de la route et d'effectuer des changements d'unité de vitesse.

Après avoir terminé l'étude du **§ 4. du cours** on pourra proposer l'étude de l'**exercice résolu 5** puis les exercices **13**, **30**, **31**, **60, 61** et **62**.

6. Savoir-faire

• **L'exercice résolu 1** est consacré au calcul d'une image et d'un antécédent. La correction propose deux méthodes.

La première, mise en œuvre dans le cadre général des fonctions, sera utilisée pour les fonctions affines, puis au Lycée. A savoir :

– pour calculer l'image d'un nombre on remplace « x » par ce nombre et l'on calcule ;

– pour calculer l'antécédent d'un nombre on résout une équation.

La deuxième, propre aux fonctions linéaire, s'appuie sur un tableau de proportionnalité et sur le processus « on multiplie par a ». Les **exercices 6, 7**, **40** et **42** permettent aux élèves de s'exercer sur ce type de problèmes.

• Comme nous l'avons déjà dit **l'exercice résolu 2** est consacré au tracé de la représentation graphique d'une fonction linéaire. Les **exercices 8, 9 et 53** permettent aux élèves de s'exercer à ce savoir-faire.

On pourra compléter ce travail avec **les exercices 50 à 52** qui mettent en jeu des situations de la vie courante.

• **L'exercice résolu 3** *e*st consacré à la lecture graphique d'images et d'antécédents. Les exercices **10, 11 et 48** permettent à l'élève de travailler ce savoir-faire.

• **L'exercice résolu 4** propose de déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de :

– la donnée d'un nombre non nul et de son image ;

– sa représentation graphique.

Les exercices **11, 12, 43, 44, 48 et 49** permettent de travailler ces savoir-faire.

• À ce stade on peut proposer les exercices **50 à 52, 98 et 99** qui demandent de mobiliser à travers des situations plus complexes et issues de la vie courante les 4 premiers savoir-faire.

• **L'exercice résolu 5** *e*st consacré aux changements d'unités dans le cadre de la grandeur quotient qu'est la masse volumique.

Les exercices **13, 30, 31, 60 à 36** permettent de prolonger ce travail.

• L'exercice de la page **Atelier Brevet** qui s'appuie sur l'égalité U = R × I est une synthèse assez complète du chapitre**.** En effet après avoir mis en évidence un tableau de proportionnalité (question 1), le lien est fait avec la fonction linéaire qui modélise la situation (question 2).

La question 3 est consacrée à la construction de la représentation graphique de la fonction linéaire.

Enfin la question 4 est consacrée à la détermination d'un antécédent par lecture graphique puis par le calcul.

7. Compléments

• Les exercices de la page **Présenter, argumenter, communiquer** sont issus de domaines variés.

Présenter la démarche suivie, présenter les résultats obtenus à l'aide d'un langage adapté, argumenter, communiquer à l'aide d'un langage adapté sont des items de la compétence 3 du socle commun de connaissances et de compétences.

Dans les **exercices 77 et 78**, l'élève doit dans un premier temps comprendre la démarche adoptée pour pouvoir rédiger une solution cohérente.

Dans **l'exercice 79**, on travaille à partir d'affirmations. Cette situation doit donner lieu à débat.

On prendra en compte les contre-exemples, les démarches engagées, même non abouties. Les idées pertinentes, même maladroitement formulées, seront valorisées.

L'exercice 80 qui peut-être traité à l'oral porte sur l'interprétation d'une représentation graphique.

Pour pouvoir répondre aux exercices **81** et **82** les élèves doivent, dans un premier temps, comprendre la situation puis prendre un minimum d'initiative. On veillera donc à proposer des aides adaptées aux élèves qui sont en grande difficulté.

La narration de recherche (exercice 83) porte sur un sujet à support géométrique à priori simple. Certains élèves ne verront peut-être pas que la distance parcourue autour du cercle est proportionnelle à l'angle au centre.

Lors de la correction il peut-être intéressant de projeter le fichier **ch9n83** disponible sur le site compagnon.

• **L'exercice 61** *(***Maths et Arts)** qui propose l'étude de l'acheminement de l'eau à partir du Pont du Gard peut être le support d'un exposé.

• Les exercices **41, 59 et 101** font appel au tableur et peuvent être l'occasion d'une séance en salle informatique.

• La première partie de la page **Objectif Brevet** qui aborde les relations entre distance, durée et vitesse moyenne, pourra être l'occasion de revenir sur les unités de durées qui ne sont pas toujours maîtrisées en fin de collège.

• Les situations proposées dans les **exercices d'approfondissement** *s*ont riches et variées. Ces exercices peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Toute piste de recherche sera valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète.

Ces exercices demandent à l'élève des compétences dans différents domaines et une réflexion plus importante. Ils sont tous tirés d'une situation « réelle » et ils peuvent donc être une source de motivations nouvelles pour certains élèves.

• Dans la rubrique **En route vers la Seconde**, les élèves travailleront sur trois problèmes. **L'exercice 109**, fait intervenir à la fois les notions d'algèbre et la connaissance des racines carrées.

L'exercice 110 est un problème de partage proportionnel qui demande aux élèves une prise d'initiative.

L'exercice 111 mêle fonction linéaire et géométrie (Théorème de Thalès, périmètre d'un carré) et l'on pourra utiliser à cette occasion le fichier **ch9n111** disponible sur le site compagnon.

Corrigés

1. Devinettes

Devinette

Le parcours qui correspond à Anne est le parcours vert.

Devinette

Cas où Louise achète chaque jour un seul article.

Louise a intérêt à acheter le 20 juin l'article à 80 €, le 21 juin l'article à 120 € et le 22 juin l'article à 50 €.

La somme totale dépensée par Louise sera alors

182,80 €.

- Solution avec un tableur

	A	B	C	D	E	F	G
1	Prix de l'article acheté le 20	50	50	80	80	120	120
2	Somme payée le 20	50	50	80	80	120	120
3	Réduction pour le 21	20	20	32	32	48	48
4	Prix de l'article acheté le 21	80	120	50	120	50	80
5	Somme payée le 21	60	100	18	88	2	32
6	Réduction pour le 22	24	40	7,2	35,2	0,8	12,8
7	Prix de l'article acheté le 22	120	80	120	50	80	50
8	Somme payée le 22	96	40	112,8	14,8	79,2	37,2
9	Somme totale payée	206	190	210,8	182,8	201,2	189,2

- Solution algébrique

Soient x le prix (en €) de l'article acheté le 20 juin, y le prix (en €) de l'article acheté le 21 et z le prix (en €) de l'article acheté le 22.

La somme totale S payée par Louise est alors

$S = x + y - 0{,}4x + z - 0{,}4(y - 0{,}4x)$ soit

$S = x + y - 0{,}4x + z - 0{,}4y + 0{,}16x$

$S = 0{,}76x + 0{,}6y + z$ cette expression est minimale lorsque $x = 80$; $y = 120$ et $z = 50$.

Cas où Louise achète le même jour deux articles

Louise a alors intérêt à acheter le 20 juin par exemple les articles à 120 € et 50 €. Elle aura alors pour le lendemain un bon d'achat de 68 €.

$$\left(\frac{40}{100} \times (120 + 50) = 68\right)$$

Elle payera donc le dernier article 12 € (80 – 68 = 12).

La somme totale dépensée par Louise sera alors **182 €**.

(120 + 50 + 12 = 192)

2. Je vérifie mes acquis

1 **Bonne réponse : b.**

$\frac{0,4}{1} = 0{,}4$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$ et $\frac{3,2}{8} = 0{,}4$ donc le coefficient de proportionnalité de la première ligne vers la deuxième est 0,4. Ce qui signifie que le prix de 1 kg est 0,40 €.

2 **Bonne réponse : b.**

Dans un graphique une situation de proportionnalité est représentée par des points alignés avec l'origine.

3 **Bonne réponse : c.**

$40 \times \frac{8}{100} = 3{,}2$ donc l'augmentation est de 3,20 €.

$40 + 3{,}2 = 43{,}2$ donc nouveau prix est 43,20 €.

4 **Bonne réponse : b.**

1 h 30 min = 1,5 h et $v = \frac{d}{t} = \frac{27,3}{1,5} = 18{,}2$.

Donc sa vitesse moyenne est 18,2 km/h.

5 **Bonne réponse : c.**

$f(9) = 9 - 7 = 2$. Donc l'antécédent de 2 est 9.

3. Calcul mental

6 **a.** 7,5 kg **b.** 9 kg **c.** 3,5 kg

7 **a.** 24 min **b.** 8 h 32 min

c. 3 h 45 min **d.** 1 h 33 min

8 **a.** 12 min **b.** 5 kg

c. 0,48 L **d.** 90 €

4. Activités

1 **a.** Tableau 1 : $\frac{3}{5} = 0{,}6$ et $\frac{11}{20} = 0{,}55$ donc ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Tableau 2 : $\frac{14}{10} = \frac{42}{30} = \frac{84}{60} = \frac{126}{90} = \frac{420}{300} = 1{,}4$.

donc ce tableau est un tableau de proportionnalité.

b. « On multiplie par 1,4 pour passer de la 1re ligne à la 2e ligne ». Cela signifie qu'en 1 seconde on télécharge 1,4 Mo.

2 **1.a.** $\frac{45\,000}{40} = 1\,125$ donc 1 125 m^3 d'eau ont été pompés en un jour.

b. $3 \times 1\,125 = 3\,375$ et $7 \times 1\,125 = 7\,875$ donc il a été pompé 3 375 m^3 en 3 jours et 7 875 m^3 en 7 jours.

c. • $1\,125 \times 10 = 11\,250$;

- $3 + 7 = 10$ et $3\,375 + 7\,875 = 11\,250$;
- $\frac{40}{4} = 10$ et $\frac{45\,000}{4} = 11250$.

Donc en 10 jours il a été pompé 11 250 m^3.

b. L'égalité des produits en croix permet d'écrire

$45\,000 \times x = 7\,200 \times 40$ soit $x = \frac{7\,200 \times 40}{45\,000} = 6{,}4$.

Il faudra 6,4 jours pour vider à nouveau la poche.

3 **a.**

Durée t en heures	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
Distance d parcourue en km	0	400	800	1 200	1 600	2 400	3 200	4 000

b. $d = 800t$

c. • $f(2{,}25) = 800 \times 2{,}25 = 1\,800$. Donc l'image de 2,25 est 1 800.

- $f(t) = 3\,000$ se traduit par $800t = 3\,000$ d'où

$t = \frac{3\,000}{800} = 3{,}75$. Donc l'antécédent de 3 000 est 3,75.

- 2,25 h = 2 h 15 min et 3,75 h = 3 h 45 min.

En 2 h 15 min la vague parcourt 1 800 km.

Cette vague parcourt 3 000 km en 3 h 45 min.

d. $f(-5) = 800 \times (-5) = -4\,000$ et $f(48) = 800 \times 48 = 38\,400$.

Ces résultats n'ont pas de sens pour la vague.

En effet :

pour $f(-5) = -4\,000$: une durée est toujours positive ;
pour $f(48) = 38\,400$: l'océan pacifique s'étend d'Est en Ouest sur environ 6 000 km et la vague ne peut donc pas parcourir 38 400 km.

4 **a.** • $g(7) = 8 \times 7 = 56$ donc l'image de 7 est 56.

• $g(x) = 42$ se traduit par $8x = 42$ et donc $x = \dfrac{42}{8} = 5{,}25$.
L'antécédent de 42 est 5,25.

b. De l'eau coule régulièrement d'un robinet ; il s'écoule 8 litres en 1 min.

g est la fonction qui à la durée t, en minutes, associe la quantité d'eau en litres.

2. Amélie a raison. Elle peut procéder de deux façons.

• En utilisant ce tableau ce proportionnalité (le coefficient de la première ligne vers la seconde est $\dfrac{3}{4}$ ou 0,75).

x	4	
$h(x)$	3	

• En déterminant l'expression de $h(x)$.

h est une fonction linéaire donc $h(x) = ax$.

$h(4) = 3$ donc $a \times 4 = 3$ d'où $a = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ et $h(x) = 0{,}75x$.

3. Posons $f(x) = ax$.

a. L'égalité est vraie, en effet : $f(1) = a \times 1 = a$.

b. L'égalité est vraie, en effet :

$$f(7+3) = a(7+3) = a \times 7 + a \times 3 = f(7) + f(3).$$

c. L'égalité est vraie, en effet :

$$f(7-3) = a(7-3) = a \times 7 - a \times 3 = f(7) - f(3).$$

d. L'égalité est fausse, en effet :

$f(7 \times 3) = a(7 \times 3) = a \times 7 \times 3 = 21a$ et

$f(7) \times f(3) = a \times 7 \times a \times 3 = 21a^2$.

Or pour $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a $21a \neq 21a^2$

e. L'égalité est vraie, en effet :

$f(7 \times 3) = a(7 \times 3) = a \times 7 \times 3 = 21a$ et

$7 \times f(3) = 7 \times (a \times 3) = 21\,a$.

f. L'égalité est vraie, en effet :

$$\frac{1}{8}\,f(16) = \frac{1}{8} \times (a \times 16) = a \times 2 = f(2).$$

5 **a. Problème 1 :**

$15\,000 \times \dfrac{8}{100} = 1\,200$ donc il y avait 1 200 centenaires de plus en 2010.

$15\,000 + 1\,200 = 16\,200$ donc il y avait 16 200 centenaires en 2010.

Problème 2 :

$$100\,\% - 8\,\% = 92\,\%.$$

La population de 2010 représente 92 % de la population de 2007. En notant x la population de 2007 on obtient :

$$\frac{92}{100} = \frac{644\,000}{x} \text{ et donc } x = \frac{644\,000 \times 100}{92} = 700\,000.$$

Il y avait 700 000 agriculteurs en 2007.

b. $x \times \dfrac{8}{100} = x \times 0{,}08 = 0{,}08x$ donc la population a augmenté de $0{,}08x$.

$x + 0{,}08x = 1{,}08x$ donc la population après l'augmentation est $1{,}08x$.

c. La population a diminué de $0{,}08x$ et la nouvelle population est $x - 0{,}08x$ soit $0{,}92x$.

6 **a.**

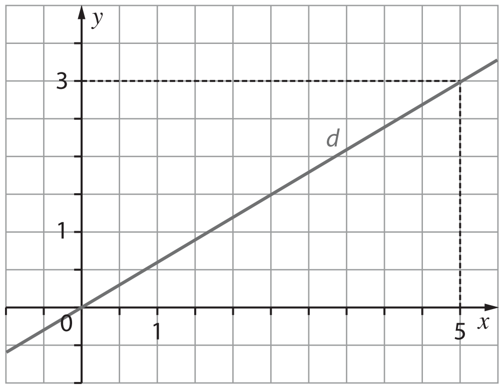
x	0	1	5	–2	–2,5	–10
$y = f(x)$	0	0,6	3	–1,2	–1,5	–6

On multiplie par 0,6

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.

b. $y = 0{,}6x$.

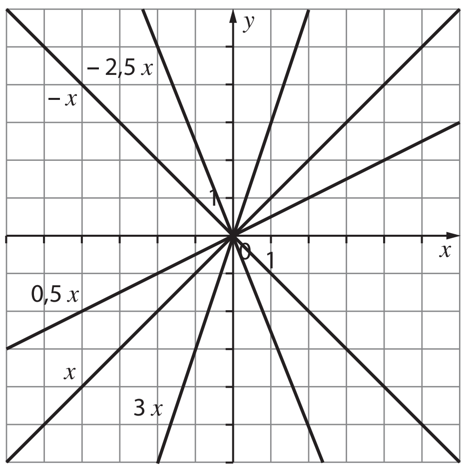
c. Dans un repère un tableau de proportionnalité est représenté par des points alignés avec l'origine du repère donc tous les points sont alignés avec l'origine. Il suffit de placer un seul point.



d. $-7{,}8 = 0{,}6x$ donc $x = \dfrac{-7{,}8}{0{,}6} = -13$ donc l'abscisse de M est –13.

e. Colas a raison. En effet $f(1\,050) = 630$, d'où $y_N = f(x_N)$. Donc N appartient à (d).

7 **1.a.**



b. Lorsque le coefficient est positif la droite « monte » et lorsque le coefficient est négatif la droite « descend ».

2. Les fonctions sont de la forme $x \mapsto ax$.

• Droite rouge : $f(1) = 2$ d'où $a = \dfrac{2}{1} = 2$.

Donc la fonction f représentée est définie par

$$f(x) = 2x.$$

• Droite bleue : $g(3) = 2$ d'où $a = \dfrac{2}{3}$.

Donc la fonction g représentée est définie par

$$g(x) = \dfrac{2}{3}x.$$

• Droite noire : $h(5) = -4$ d'où $a = \dfrac{-4}{5} = -0{,}8$.

Donc la fonction h représentée est définie par

$$h(x) = -0{,}8x.$$

• Droite verte : $i(2) = -3$ d'où $a = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5$.

Donc la fonction i représentée est définie par

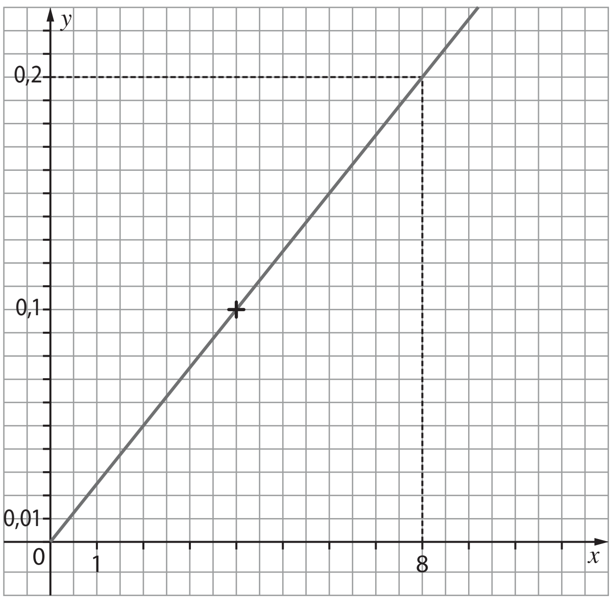
$$i(x) = -1{,}5x.$$

8 **a.** On dit que l'énergie électrique est une grandeur produit car elle s'obtient en effectuant le produit d'une puissance par une durée.

b. 25 W = 0,025 kW donc $E(t) = 0{,}025t$. Cette situation est modélisée par la fonction linéaire de coefficient 0,025.

$$E(4) = 0{,}025 \times 4 = 0{,}1.$$

La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine et par le point de coordonnées (4 ; 0,1)



c. 20 minutes = $\dfrac{20}{60}h = \dfrac{1}{3}h$ et $E = 0{,}6 \times \dfrac{1}{3} = 0{,}2$.

Donc l'éolienne a produit 0,2 kWh en 20 minutes.

On lit sur le graphique précédent que la lampe peut fonctionner pendant 8 heures avec cette énergie.

5 **a.** 1 h 30 min = 1,5 h.

$$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{139}{1{,}5} \approx 92{,}7.$$

Rayan n'a pas respecté les limitations de vitesse.

En effet sur route nationale la vitesse est limitée à 90 km/h voire à moins sur certains passages.

b. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{70}{20} = 3{,}5.$

La vitesse du cycliste est 3,5 m • s^{-1}.

$$3{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \dfrac{3{,}5\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \dfrac{3{,}5\ \text{m} \times 3\,600}{1\ \text{s} \times 3\,600}$$

$$= \dfrac{12\,600\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = \dfrac{12{,}6}{1} \times \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}6\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

c. L'égalité $v = \dfrac{d}{t}$ devient ici $v(t) = \dfrac{100}{t}$ et v n'est pas une fonction linéaire. En effet $v(1) = 100$ et $v(2) = 0{,}5$. Lorsque t est multiplié par 2 la vitesse n'est pas multipliée par 2.

5. J'applique

6 **a.** $f(-3) = 4{,}5 \times (-3) = -13{,}5$.

Donc l'image de -3 est $-13{,}5$.

b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 36$, c'est-à-dire tel que $-4{,}5x = 36$.

Ainsi : $x = \dfrac{36}{-4{,}5} = -8$.

L'antécédent de 36 est -8.

7 **a.** On cherche un nombre x tel que $g(x) = -8$, c'est-à-dire tel que $-1{,}6x = -8$.

Ainsi : $x = \dfrac{-8}{-1{,}6} = 5$.

L'antécédent de -8 est 5.

b. $g(9) = -1{,}6 \times 9 = -14{,}4$.

8 **a.** • (d) passe par l'origine du repère.

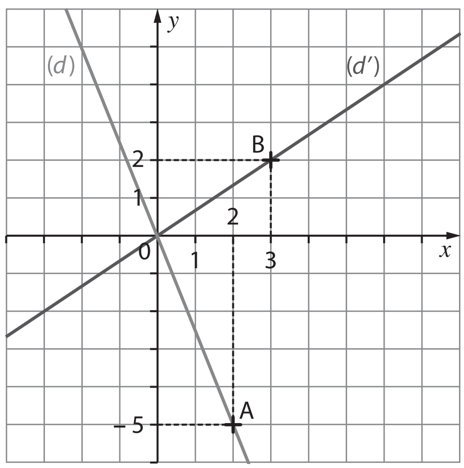
• $f(2) = -5$ donc (d) passe par le point A(2 ; –5).

Donc (d) est la droite (OA).

b. • (d') passe par l'origine du repère.

• $g(3) = 2$ donc (d') passe par le point B(3 ; 2).

Donc (d') est la droite (OB).



9 **a.** • h est une fonction linéaire donc sa représentation graphique (d) passe par l'origine.

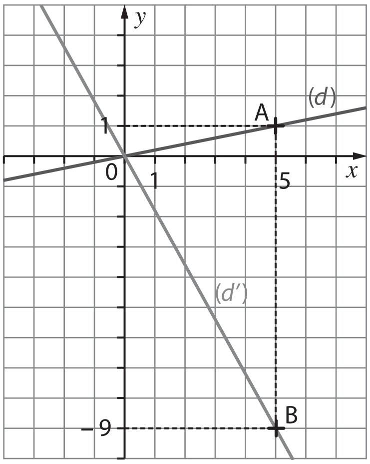
• $h(5) = 1$ donc (d) passe par le point A(5 ; 1).

Donc (d) est la droite (OA).

b. • La représentation graphique (d') de la fonction g passe par l'origine du repère.

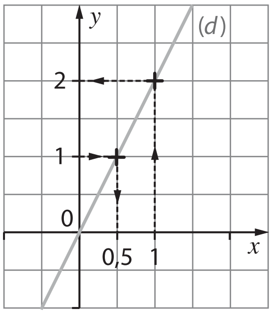
• $g(5) = -9$ donc (d') passe par le point B(5 ; –9).

Donc (d') est la droite (OB).



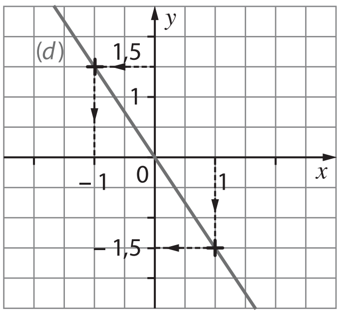
10 **a.** L'image de 1 est 2.

b. L'antécédent de 1 est 0,5.



11 **a.** $g(1) = -1{,}5$.

b. L'antécédent de 1,5 est –1.



12 **a.** f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$.

L'égalité $f(-21) = -6$ se traduit par :

$$a \times (-21) = -6.$$

Ainsi : $a = \dfrac{-6}{-21} = \dfrac{2}{7}$ et f est la fonction linéaire définie par $f(x) = \dfrac{2}{7}x$.

b. g est une fonction linéaire donc $g(x) = ax$.

Sur le graphique, on lit $g(1) = -3$.

Cette égalité se traduit par $a \times 1 = -3$ et donc $a = -3$.

Ainsi g est la fonction linéaire définie par $g(x) = -3x$.

13 **a.** c s'exprime en g/cm^3 ou encore en g $\cdot$ cm^{-3}.

b. 1,5 L = 1,5 dm^3 = 1 500 cm^3 et 0,012 kg = 12 g.

Donc $c = \dfrac{12\text{ g}}{1\,500\text{ cm}^3} = 0{,}008$ g/cm^3.

6. Atelier Brevet

14 **1.a.** $\dfrac{3}{0{,}02} = \dfrac{4{,}5}{0{,}03} = \dfrac{6}{0{,}04} = \dfrac{12}{0{,}08} = 150.$

On passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par 150 donc ce tableau est un tableau de proportionnalité.

b. Le coefficient de proportionnalité est 150.

c. $0{,}07 \times 150 = 10{,}5$.

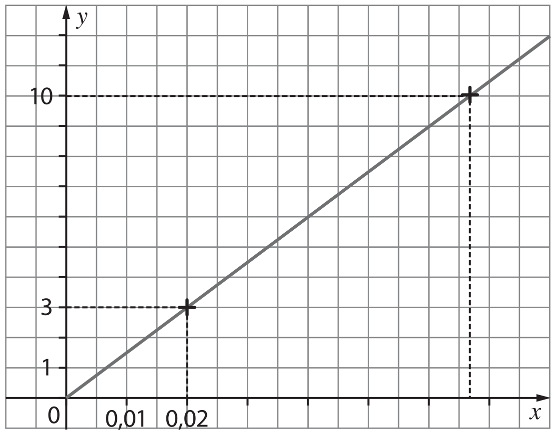
Donc pour une intensité de 0,07 ampère la tension est 10,5 volts.

Autre méthode : $0{,}07 = 0{,}03 + 0{,}04$ et $4{,}5 + 6 = 10{,}5$.

2. f est la fonction linéaire de coefficient 150 donc

$$f(I) = 150I.$$

3. La représentation graphique de f est une droite qui passe par l'origine et par le point (0,02 ; 3).



4. Graphiquement on lit que pour U = 10 volts l'intensité est environ de 0,067 ampères.

Par le cacul :

$$150I = 10 \text{ donc } I = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}$$

La valeur exacte de l'intensité quand U = 10 volts est $\dfrac{1}{15}$ ampère.

7. Exercices à l'oral

Synthèse sur la proportionnalité

15 **a.** 7,50 € **b.** 3,50 €

16 **1.** 0,15 m

2. a. 0,9 m **b.** 1,2 m **c.** 2,7 m

17 **a.** 500 kJ **b.** 2 500 kJ

18 **a.** 8 **b.** 4,2

19 Pour les valeurs du tableau on a $f(x) = 2{,}5x$.

Donc f peut-être la fonction linéaire de coefficient 2,5.

20 **a.** On calcule l'image de 3,5.

b. On calcule l'antécédent de 10.

21 **a.** 42 **b.** 4 **c.** –4,8 **d.** 50

22 **a.** 1,5 **b.** 6 **c.** 25

23 $a = \frac{12}{100} = 0{,}12$ et $f(x) = 0{,}12x$

24 **a.** Oui , $a = 0{,}5$ **b.** Non **c.** Oui , $a = -1$

d. Non **e.** Non **f.** Oui , $a = \frac{1}{4}$

25 **a.** 1,4 **b.** 0,7 **c.** 2 **d.** 0,5

26 L'affirmation est fausse.

En effet si un article coûte initialement 100 €.

Son prix après augmentation est 120 € et après diminution il est de 96 €.

Le prix a finalement diminué de 4 %.

Représentation graphique

27 **a.** Non **b.** Oui $a = 0{,}5$ **c.** Non

28 **a.** Le tarif n'est pas proportionnel à la durée.

En effet le graphique n'est pas constitué de points alignés avec l'origine.

b. Pour moins de 4 heures de communication vous payez 10 € de l'heure.

Après la quatrième heure de communication toutes vos communications supplémentaires sont gratuites.

29 **a.** L'affirmation est fausse.

En effet : $f(9) = f(1{,}5 \times 6) = 1{,}5 \times f(6) = 1{,}5 \times 9 = 13{,}5$.

Donc l'image de 9 est 13,5.

b. L'affirmation est vraie, en effet :

$f(18) = f(3 \times 6) = 3 \times f(6) = 3 \times 9 = 27$.

c. L'affirmation est vraie, en effet :

$f(2) = f\left(\frac{1}{3} \times 6\right) = \frac{1}{3} \times f(6) = \frac{1}{3} \times 9 = 3$.

$f(2) = 3$ donc $B(2\,;3) \in (d)$.

Autre solution : $f(x) = 1{,}5x$.

a. $f(9) = 1{,}5 \times 9 = 13{,}5$.

b. $f(18) = 1{,}5 \times 18 = 27$.

c. $f(2) = 1{,}5 \times 2 = 3$ donc $B(2\,;3) \in (d)$.

Grandeurs composés

30 **a.** 100 min $= \frac{100}{60}$ h $= \frac{5}{3}$ h

donc : $v = \frac{d}{t} = \frac{50}{\frac{5}{3}} = 50 \times \frac{3}{5} = 30$.

La vitesse moyenne du cycliste est 30 km/h.

b. $t = \frac{d}{v} = \frac{45}{30} = 1{,}5$. Donc à cette vitesse il aurait mis 1,5 h ou 1 h 30 min pour parcourir 45 km.

31 **a.** 10 m/s = 600 m/min **b.** 0,3 km/min = 5 m/s

c. 500 m/min = 30 km/h **d.** 60 km/h = 1 000 m/min

8. Exercices d'application

Synthèse sur la proportionnalité

32 $\frac{0{,}6}{30} = \frac{0{,}9}{45} = \frac{1{,}2}{60} = \frac{2}{100} = \frac{3{,}6}{180} = 0{,}02$ donc la quantité d'eau est proportionnelle à la durée.

En une minute il s'écoule 0,02 L.

33 **a.** $\frac{9{,}36}{3} = 3{,}12$ donc 1 m pèse 3,32 kg.

b. $x = 2{,}5 \times 3{,}12 = 7{,}8$ et $y = \frac{19{,}5}{3{,}12} = 6{,}25$.

34 • $12 \times 4 = 48$ et $12^2 = 144$.

Le périmètre du terrain carré est 48 m son aire est 144 m^2.

$$2 \times (18 + 15) = 66 \text{ et } 18 \times 15 = 270.$$

Le périmètre du terrain rectangulaire est 66 m son aire est 270 m^2.

• $\frac{960}{48} = 20$ donc 1 m de clôture coûte 20 €.

$66 \times 20 = 1\,320$ donc le devis pour la clôture du terrain rectangulaire sera de 1 320 €.

• $\frac{504}{144} = 3{,}5$ donc 1 m^2 de gazon coûte 3,50 €.

$270 \times 3{,}5 = 945$ donc le devis pour le gazon du terrain rectangulaire sera de 945 €.

35 **a.** 1 cm représente 100 km donc 3,8 cm représentent 380 km.

Dans la réalité il y a 380 km entre Munich et Vienne.

b. 1 cm représente 100 km et 100 km = 10 000 000 cm.

Donc l'échelle de cette carte est $\frac{1}{10\,000\,000}$.

36 **a.** 1,5 L = 150 cL = 6×25 cL.

Donc pour 1,5 L d'ananas il faudra 6×15 cL soit 90 cL de grenadine.

• 15 cL + 35 cL + 25 cL = 75 cL = 0,75 L.

On peut dresser ce tableau de proportionnalité

Jus d'orange (en L)	0,35	x
Cocktail (en L)	0,75	6

$x = \frac{0{,}35 \times 6}{0{,}75} = 2{,}8$ donc pour 6 L de ce cocktail on doit prévoir 2,8 L de jus d'orange.

Fonctions linéaires

37 **a.** $\frac{14}{12} \neq \frac{17}{15}$ (en effet $15 \times 14 \neq 12 \times 17$).

Donc on n'obtient pas $f(x)$ en multipliant x par un même nombre et f n'est pas une fonction linéaire.

b. $\frac{30}{4} = \frac{75}{10} = 7{,}5$ donc on obtient $f(x)$ en multipliant x par 7,5 et f peut-être la fonction linéaire de coefficient 7,5.

38 • $P_1(x) = 3x - x = 2x$. On peut associer au programme P_1 la fonction linéaire de coefficient 2.

• $P_2(x) = \frac{1}{2}x$. On peut associer au programme P_3 la fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$.

• $P_3(x) = 8x^2$. On ne peut pas associer au programme P_3 une fonction linéaire.

• $P_4(x) = (x + 4) \times 7 - 28 = 7x + 28 - 28 = 7x$. On peut associer au programme P_4 la fonction linéaire de coefficient 7.

39 $g(4) = -14 = -3{,}5 \times 4$ et $g(-10) = 35 = -3{,}5 \times (-10)$

Donc la fonction g peut-être la fonction linéaire de coefficient $-3{,}5$ et dans ce cas $g(x) = -3{,}5x$.

40

x	−3	0	2,5	−5	0,25
$f(x)$	−8,4	0	7	−14	0,7

41 **a.** Cellule B3 : =4*B2 Cellule B1 : =B2/4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Antécédent de x	-0,625	-0,25	0,35	0,75	1,4	1,75	2,825
2	Nombre x	-2,5	-1	1,4	3	5,6	7	11,3
3	Image de x	-10	-4	5,6	12	22,4	28	45,2

b.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Antécédent de x	2	0,8	-1,12	-2,4	-4,48	-5,6	-9,04
2	Nombre x	-2,5	-1	1,4	3	5,6	7	11,3
3	Image de x	3,125	1,25	-1,75	-3,75	-7	-8,75	-14,125

42 **a.** $g\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = 6$ donc l'image de $\frac{9}{2}$ est 6.

b. $g(x) = 5$ se traduit par $\frac{4}{3}x = 5$.

Donc $x = 5 \times \frac{3}{4} = 3{,}75$. L'antécédent de 5 est 3,75.

43 **a.** $f(x) = 30x$ **b.** $f(x) = -0{,}8x$

44 • $f(x) = \frac{5}{6}x$ • $g(x) = -\frac{2}{7}x$ • $h(x) = 7{,}5x$

45 **a.** $h(20) = h(4 \times 5) = 4 \times h(5) = 4 \times 9 = 36$

b. $h(2{,}5) = h\left(\frac{1}{2} \times 5\right) = \frac{1}{2} \times h(5) = \frac{1}{2} \times 9 = 4{,}5$

c. $h(17{,}5) = h(20 - 2{,}5) = h(20) - h(2{,}5) = 36 - 4{,}5 = 31{,}5$

46 **a.** Le prix, en €,est proportionnel à la masse, en kg , le coefficient de proportionnalité est 12.

Donc f est la fonction linéaire de coefficient 12.

b.

Masse x	0	1	2,5	3	1,6
Prix $f(x)$	0	12	30	36	19,2

c. $f(5) = 60$ signifie que le prix de 5 kg de fromage est 60 €.

47 **1.** On peut construire le tableau de proportionnalité ci-dessous.

Distance en m	1 680	2 030	**2 800**
Note	12	**14,5**	20

a. Lou a eu 14,5/20.

b. Pour avoir 20/20 il faut parcourir 2800 m.

2. a. $\frac{12}{1\,680} = \frac{1}{140}$ donc $f(d) = \frac{1}{140} \times d$.

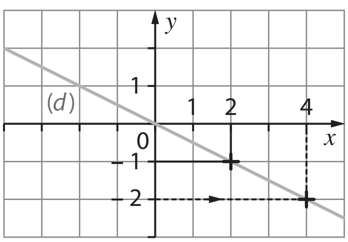
f est la fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{140}$.

b. $f(2030) = 14{,}5$ et $f(2800) = 20$.

Représentation graphique

48 **1.** La représentation graphique de f est une droite qui passe par l'origine donc f est une fonction linéaire.

2.



a. L'image de 2 est – 1 (trajet en noir).

b. L'antécédent de −2 est 4 (trajet en pointillé).

3. $f(x) = -0{,}5x$.

49 **a.** $f(-4) = -3$ donc $a = \frac{-3}{-4} = 0{,}75$.

$f(2) = 0{,}75 \times 2 = 1{,}5$.

Le résultat est cohérent avec la lecture graphique.

b. $f(-3) = 2$ donc $a = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$.

$f(2) = -\frac{2}{3} \times 2 = -\frac{4}{3}$

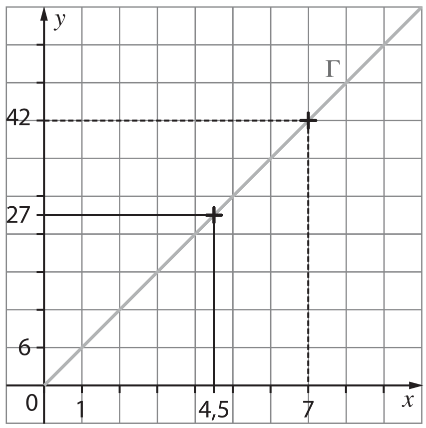
Le résultat est cohérent avec la lecture graphique.

50 **1.**

Surface (en ha)	8	1	5	**9**
Masse de blé (en t)	**48**	**6**	**30**	54

2. a. $r(x) = 6x$

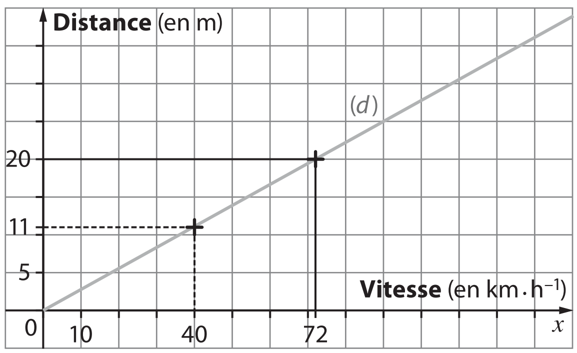
b.



L'image de 7 est 42 (trajet en pointillés). L'antécédent de 27 est 4,5(trajet en noir).

Avec 7 hectares on récolte 42 tonnes. Pour récolter 27 tonnes il faut 4,5 hectares.

51 **a.**



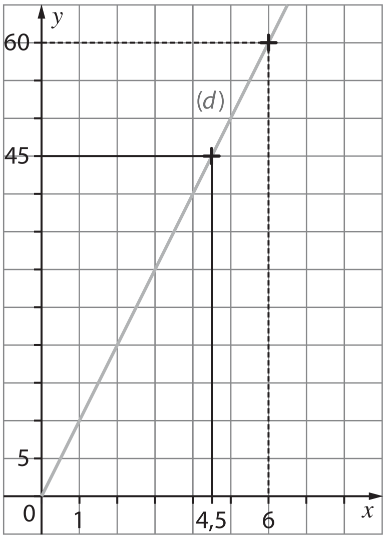
b. La distance de réaction est environ 11 m (tracé en pointillés).

c. La distance de réaction est supérieure à 20 m à partir de 72 km·h^{-1} (tracé en noir).

52 **1.** $A(x) = 12x - \frac{4x}{2} = 10x$.

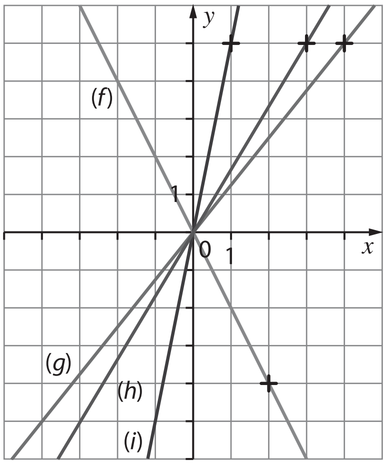
2. A est la fonction linéaire de coefficient 10.

3.

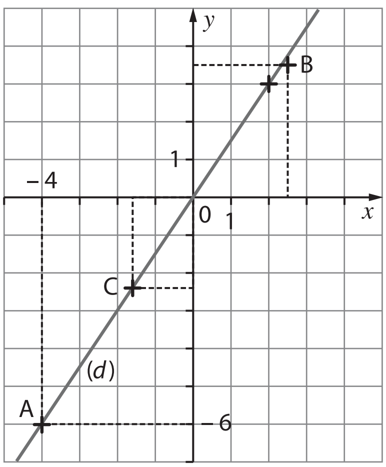


4. a. A(6) = 60 (tracé en pointillés).
b. La valeur de x pour laquelle A(x) = 45 est 4,5 (tracé en noir).

53



54 a.



2. a. Les points A et C appartiennent à (d).

b. $f(-4) = 1{,}5 \times (-4) = -6 = y_A$

donc A appartient à (d).

$f(2{,}5) = 1{,}5 \times 2{,}5 = 3{,}75 \neq y_B$

donc B n'appartient pas à (d).

$f(-1{,}6) = 1{,}5 \times (-1{,}6) = -2{,}4 = y_C$

donc C appartient à (d).

55 a. f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$.
L'égalité $f(12) = 9$ se traduit par $a \times 12 = 9$.
Ainsi : $a = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$ et f est la fonction linéaire définie par $f(x) = 0{,}75x$.

b. • $f(10) = 0{,}75 \times 10 = 7{,}5$ donc l'ordonnée de D est 7,5.
• L'abscisse x de E vérifie $f(x) = 30$ soit

$$0{,}75x = 30 \text{ d'où } x = \frac{30}{0{,}75} = 40.$$

L'abscisse de E est 40.

Calculs avec des pourcentages

56 a. $y = 1{,}04x$
b. $1{,}04 \times 50 = 52$ donc le DVD coutera 52 €.
c. $y = 468$ donc $1{,}04x = 468$ d'où $x = \dfrac{468}{1{,}04} = 450$.
Le téléviseur coûtait 450 €.

57 1. Il faut multiplier par 0,6.

2. a. $\dfrac{180}{0{,}6} = 300$ donc à 10 h on a injecté 300 g de pénicilline.
b. $180 \times 0{,}6 = 108$ donc à 12 h 108 g de pénicille seront encore actifs.

58 Après un an :

Option 1 : $1{,}04 \times 1\,000 = 1\,040$
donc avec l'option 1 on aura au bout d'un an 1 040 \$.

Option 2 : $10 + 1{,}03 \times 1\,000 = 1\,040$
donc avec l'option 2 on aura aussi au bout d'un an 1 040 \$.

• Après deux ans :

$$1{,}04 \times 1\,040 = 1\,081{,}6$$

donc avec l'option 1 on aura au bout de deux ans 1 081,6 \$.

$$1{,}03 \times 1\,040 = 1\,071{,}2$$

donc avec l'option 2 on aura au bout de deux ans 1 071,2 \$.
Pour un an les deux options sont équivalentes.
Pour deux ans l'option 1 est plus intéressante.

59

	A	B	C	D
1	Année	Appartement 1	Appartement 2	Appartement 3
2	2012	400	480	640
3	2013	410	492	656
4	2014	420,25	504,3	672,4
5	2015	430,76	516,91	689,21

a. On a saisi dans la cellule B2 = A3/1,025 et dans la cellule B4 = A3*1,025.
b. En étirant la ligne 5 vers le bas on voit qu'à partir de 2041 les loyers seront au moins deux fois plus élevés qu'en 2012.

	A	B	C	D
1	Année	Appartement 1	Appartement 2	Appartement 3
2	2012	400	480	640
3	2013	410	492	656
4	2014	420,25	504,3	672,4
5	2015	430,76	516,91	689,21
6	2016	441,53	529,83	706,44
7	2017	452,56	543,08	724,1
8	2018	463,88	556,65	742,2
9	2019	475,47	570,57	760,76
10	2020	487,36	584,83	779,78
11	2021	499,55	599,45	799,27
12	2022	512,03	614,44	819,25
13	2023	524,83	629,8	839,74
14	2024	537,96	645,55	860,73
15	2025	551,4	661,69	882,25
16	2026	565,19	678,23	904,3
17	2027	579,32	695,18	926,91
18	2028	593,8	712,56	950,08
19	2029	608,65	730,38	973,84
20	2030	623,86	748,64	998,18
21	2031	639,46	767,35	1023,14
22	2032	655,45	786,54	1048,71
23	2033	671,83	806,2	1074,93
24	2034	688,63	826,35	1101,81
25	2035	705,84	847,01	1129,35
26	2036	723,49	868,19	1157,58
27	2037	741,58	889,89	1186,52
28	2038	760,12	912,14	1216,19
29	2039	779,12	934,94	1246,59
30	2040	798,6	958,32	1277,76
31	2041	818,56	982,28	1309,7

Grandeurs composés

60 **a.** $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{110}{50} = 2{,}2$ donc la voiture parcourt 110 km en 2,2 h ou 2 h 12 min.

b. 1 h 15 min = 1,25 h.

c. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{5}{1{,}25} = 4$ donc sa vitesse moyenne est 4 km/h.

61 **a.** • $4{,}5\text{ m/s} = \dfrac{4{,}5\text{ m}}{1\text{ s}} = \dfrac{4{,}5 \times 3\,600\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = \dfrac{16\,200\text{ m}}{1\text{h}}$

$$= \dfrac{16{,}2\text{ km}}{1\text{h}} = 16{,}2\text{ km/h}$$

Donc 4,5 m/s = 16,2 km/h.

• $28\text{ m/s} = \dfrac{28\text{ m}}{1\text{ s}} = \dfrac{28 \times 3\,600\text{ m}}{3600\text{ s}} = \dfrac{100\,800\text{ m}}{1\text{h}}$

$$= \dfrac{100{,}8\text{ km}}{1\text{h}} = 100{,}8\text{ km/h}$$

Donc 28 m/s = 100,8 km/h.

b. $72\text{ km/h} = \dfrac{72\text{ km}}{1\text{h}} = \dfrac{72\,000\text{m}}{3600\text{ s}} = \dfrac{20\text{ m}}{1\text{ s}} = 20\text{ m/s}$

Donc 72 km/h = 20 m/s.

62 **1.** $1\,620\text{ m}^3\text{/h} = \dfrac{1\,620\text{ m}^3}{1\text{h}} = \dfrac{1\,620\,000\text{ L}}{3\,600\text{ s}} = 450\text{ L/s}.$

$1\,620\text{ m}^3\text{/h} = \dfrac{1\,620\text{ m}^3}{1\text{h}} = \dfrac{1\,620\text{ m}^3 \times 24}{24\text{ h}} = 38\,880\text{ m}^3\text{/jour}.$

2.a. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{50}{25} = 2$ donc la vitesse moyenne de l'eau était 2 km/h.

b. On peut dresser ce tableau de proportionnalité :

Distance en m	2 000	275
Durée en *s*	3 600	495

L'eau met 495 s ou 8 min 15 s pour parcourir les 275 m.

63 **a.** $420 \times 5\,800 = 2\,436\,000$ donc le trafic est de 2 436 000 passagers fois kilomètre.

b. $\dfrac{343\,200}{1\,100} = 312$ donc il y avait 312 personnes sur ce vol.

c. 1 200 000 = 0,001 2 milliard.

$\dfrac{4{,}8}{0{,}001\,2} = 4\,000$ donc la distance moyenne parcourue par un passager était 4 000 km.

Prendre des initiatives

64 **a.** et **b.**

• Calcul des aires en carreaux

Figure 1 : 7 Figure 2 : 7,5

Figure 3 : 6 Figure 4 : 8

• $\dfrac{36}{6} = \dfrac{42}{7} = \dfrac{48}{8} = 6$ donc on a utilisé 36 pots pour la figure 3 , 42 pots pour la figure 1 et 48 pour la figure 4.

• Pour peindre un carreau il faut 6 pots donc pour peindre les 7,5 carreaux de la figure 2 il faut $7{,}5 \times 6$ pots soit 45 pots.

65 **a.** 45 min = 0,75 h

$E = P \times t = 400 \times 0{,}75 = 300$

L'énergie fournie par Voecler est 300 Wh.

$E = 24 \times t = 300$ donc

$t = \dfrac{300}{24} = 12{,}5$ donc on pourrait faire fonctionner un moteur de 24 watts pendant 12,5 h ou 12 h 30 min.

b. $300\text{ Wh} = 300 \times 3{,}6\text{ kJ} = 1\,080\text{ kJ}$.

L'énergie fournie par Voecler correspond à 1 080 kJ.

$\dfrac{1\,080}{480} = 2{,}25$ et $2{,}25 \times 100 = 225$ donc l'énergie fournie par Voecler correspond à 225 g de pates absorbées.

9. Vrai ou faux

66 L'affirmation est fausse.

En effet, supposons que l'altitude de départ est 400 m. Notons t la durée de marche et h l'altitude correspondante.

Si ces deux grandeurs sont proportionnelles il existe un nombre a tel que $h = a \times t$.

Soit pour $t = 0$, $300 = a \times 0$.

Or cette dernière égalité est impossible.

Donc l'altitude n'est pas proportionnelle à la durée de la marche.

67 L'affirmation est fausse.

En effet, si f est une fonction linéaire elle est de la forme

$$f(x) = ax \text{ et on a } f(0) = a \times 0 = 0 \neq 7.$$

68 L'affirmation est vraie.

En effet, si f est une fonction linéaire $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax$ et on a :

$$f(7 \times 4) = a(7 \times 4) = 7 \times (a \times 4) = 7f(4).$$

69 L'affirmation est fausse.

En effet, par exemple si f est la fonction linéaire telle que $f(x) = 2x$.

- $f(7 + 4) = f(11) = 2 \times 11 = 22$
- $7 + f(4) = 7 + 2 \times 4 = 15$

Donc $f(7 + 4) \neq 7 + f(4)$.

70 L'affirmation est fausse.

En effet, si le prix initial est 100 €.

Le prix après l'augmentation de 40 % est 140 €.

Le prix après l'augmentation de 60 % est 224 €.

Et $2 \times 100 \neq 224$.

71 L'affirmation est fausse.

En effet, soit f la fonction linéaire dont la représentation graphique (d) passe par M(–78 ; 91).

$f(x) = ax$ avec $a = \dfrac{91}{-78} = -\dfrac{7}{6}$ donc $f(x) = -\dfrac{7}{6}x$

$f(90) = -\dfrac{7}{6} \times 90 = -105$ et $-105 \neq -108$ donc N n'appartient pas à (d).

Autre solution le tableau si dessous n'est pas un tableau de proportionnalité.

x	–78	90
$f(x)$	91	–108

72 L'affirmation est vraie.

En effet,

$$18\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{18\ \text{km}}{1\text{h}} = \frac{18\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = \frac{5\ \text{m}}{1\ \text{s}} = 5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

10. Calcul mental et réfléchi

73

1. a. $f(7) = 3$ **b.** $f(14) = 6$ **c.** $f(84) = 36$ **d.** $f(56) = 24$

2. a. 700 **b.** 630

74 **a.** 200 € **b.** 120 €

75 25 %

76 **a.** 1 440 tours/h et 24 tours/min.

b. 18 kWh et 0,3 kWmin.

11. Présenter, argumenter, communiquer

77 **a.** $f(-6) = -3 \times (-6) = 18$ donc l'image de –6 est 18.

b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 63$ c'est-à-dire tel que $-3x = 63$.

Ainsi : $x = \dfrac{63}{-3} = -21$.

L'antécédent de 63 est – 21.

78 $3 + 4 + 5 = 12$ il y a eu au total 12 jours d'occupation d'une personne.

$\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ donc Ahmed doit payer $\dfrac{1}{4}$ de la somme totale et Brian doit en payer $\dfrac{1}{3}$.

- $\dfrac{720}{4} = 180$ et $\dfrac{720}{3} = 240$ donc Ahmed doit payer 180 € et Brian doit payer 240 €
- Cathy doit payer la somme restante soit 300 €.

$$720 - (180 + 240) = 720 - 420 = 300.$$

79 Rama a raison. Effet supposons qu'elles parcourent une distance de 25 km à la vitesse moyenne de 25 km$\cdot$h^{-1}, la durée de la ballade est alors 1 heure.

Si elles augmentent leur vitesse moyenne de 20 % leur vitesse moyenne sera 30 km/h et la nouvelle durée de la ballade sera $\dfrac{25}{30}\text{h} = \dfrac{5}{6}\text{h}$.

$1\text{h} - \dfrac{5}{6}\text{h} = \dfrac{1}{6}\text{h}$ donc la durée de la ballade aura diminué de $\dfrac{1}{6}\text{h}$. Comme $\dfrac{\frac{1}{6}}{1} \times 100 \approx 16{,}67\,\%$ la durée de la ballade aura diminué uniquement de 16,67 %.

80 **a.** f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique doit passer par l'origine et ce n'est pas le cas ici.

b. Le coefficient de f est négatif donc sa représentation graphique doit « descendre » et ce n'est pas le cas ici.

81 $\dfrac{255}{300} = 0{,}85$ donc Louise a changé 1 € contre 0,85 £.

On peut donc convertir les prix à Paris en £.

	Blouson	Jean	Pull
Prix à Paris en €	140 €	100 €	40 €
Prix à Paris en £	119 £	85 £	34 £
Prix à Londres en £	126 £	80 £	30 £

Louise a intérêt à acheter le jean et le pull à Londres.

82 • Calcul de la vitesse moyenne v de Jérémy en km$\cdot$h^{-1} :

1 min 30 s = 1,5 min

$$v = \frac{1{,}2\ \text{km}}{1{,}5\ \text{min}} = \frac{0{,}8\ \text{km}}{1\ \text{min}} = \frac{0{,}8\ \text{km} \times 60}{1\ \text{min} \times 60} = \frac{48\ \text{km}}{1\ \text{h}}$$

Donc $v = 48$ km$\cdot$h^{-1}.

Si Jérémy a conservé une allure totalement régulière il a respecté les limitations de vitesse.

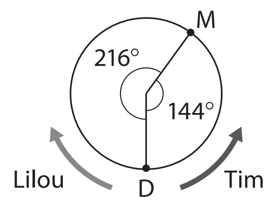
Mais ceci est très improbable car au démarage sa vitesse est nulle et de plus il a du être obligé par moments de ralentir. Et dans ce cas il a roulé , par moments, à plus de 50 km$\cdot$h^{-1} soit plus vite que la limite autorisée en ville.

• Calcul de la vitesse moyenne v' de Florence en km$\cdot$h^{-1} :

$$v' = \frac{15\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{15\ \text{m} \times 3\,600}{3\,600\ \text{s}} = \frac{54\,000\ \text{m}}{1\ \text{h}} = \frac{54\ \text{km}}{1\ \text{h}}$$

Donc $v' = 54$ km$\cdot$h^{-1} et Florence est en infraction car elle a roulé au-dessus de la limite autorisée en ville qui est de 50 km$\cdot$h^{-1}.

83 **a.**



b. Tim aura effectué 2 tours et Lilou 3.

12. QCM pour s'évaluer

84 **b.** **85** **a.** **86** **c.** **87** **b.** **88** **b.** **89** **c.**
90 **c.** **91** **a.** **92** **a.**, **b.** et **c.** **93** **a.** et **c.**
94 **a.**, **b.** et **c.**

13. Objectif Brevet

95 **a.** 34 km/h

b. $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{17}{20} = 0,85$

Le Ferry Vogues met 0,85 h soit 51 min pour faire la traversée. Son arrivée est donc prévue à 6 h 51 min.

96 24 km/h

97 **a.** $d = v \times t = 300\,000 \times \dfrac{1}{75} = 4\,000.$

Il y a 4 000 km entre la terre et le satellite.

b. 8 min 30 s = 510 s.

$d = v \times t = 300\,000 \times 510 = 153\,000\,000$

$d = 1,53 \times 10^8$ km

Donc $1,53 \times 10^8$ km nous sépare du soleil.

98 **1.** $\dfrac{41}{115} \approx 0,36 = 36\,\%$ donc l'eau utilisée pour les WC représente environ 36 % de la consommation journalière d'une personne.

2. • $\dfrac{60}{100} \times 115 = 69$ donc les besoins journaliers en eau de pluie pour une personne sont de 69 L.

• $4 \times 69 \times 365 = 100\,740$ donc les besoins en eau de pluie, pour une année , pour une famille de 4 personnes sont de 100 740 L soit 100,740 m^3 soit environ 100 m^3.

3. a. 250 €

b. P est une fonction linéaire donc P(x) est de la forme ax.

P(100) = 250 donc $a \times 100 = 250$ et $a = 2,5$.

D'où P(x) = 2,5x.

99 **a.** 600 €

b. La représentation graphique du coût en fonction du volume transporté est une droite qui passe par l'origine donc le coût est proportionnel au volume.

c. $g(x) = 30x$

2. a. 10 h 00 + 2 h 30 min + 80 min + 1 h 45 min
= 13 h 155 min = 15 h 35 min

Mr Dubois arrive au chantier à 15 h 35 min.

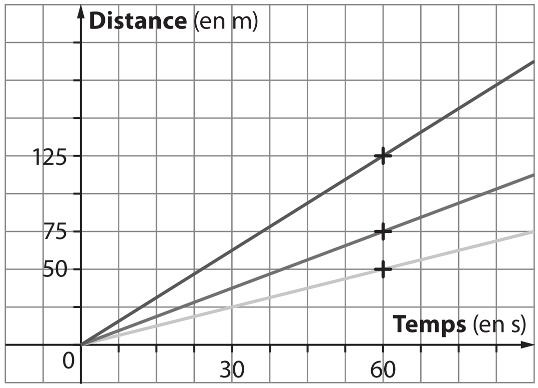
b. 6 h 30 min = 6,5 h

$$v = \frac{d}{t} = \frac{442}{6,5} = 68$$

Donc le camion a roulé à la vitesse moyenne de 68 km/h.

14. Exercices d'approfondissement

100 On a marqué sur le graphique les trois points qui ont permis de construire la demi-droite (en noir) correspondant à une personne qui reste immobile sur le tapis.



101 Avec un tableur il semble qu'Ulysse parcourra moins de 100 km et qu'il n'arrivera jamais au bout de son voyage.

	A	B	C
1	Jour	Distance parcourue ce jour là	Distance totale parcourue
2	1	10,0000000	10,0000000
3	2	9,0000000	19,0000000
4	3	8,1000000	27,1000000
5	4	7,2900000	34,3900000
6	5	6,5610000	40,9510000
202	201	0,0000000	99,9999999
203	202	0,0000000	99,9999999
204	203	0,0000000	99,9999999
205	204	0,0000000	100,0000000
206	205	0,0000000	100,0000000
207	206	0,0000000	100,0000000
208	207	0,0000000	100,0000000
907	906	0,0000000	100,0000000
908	907	0,0000000	100,0000000
909	908	0,0000000	100,0000000
910	909	0,0000000	100,0000000
911	910	0,0000000	100,0000000
912	911	0,0000000	100,0000000
913	912	0,0000000	100,0000000
914	913	0,0000000	100,0000000
915	914	0,0000000	100,0000000

102 **a.** $2,5 \times 8 \times 1,8 = 36$ donc le volume de la piscine est 36 m^3.

b. 25 L/min = 25×60 L/h = 1500 L/h = 1,5 m^3/h.

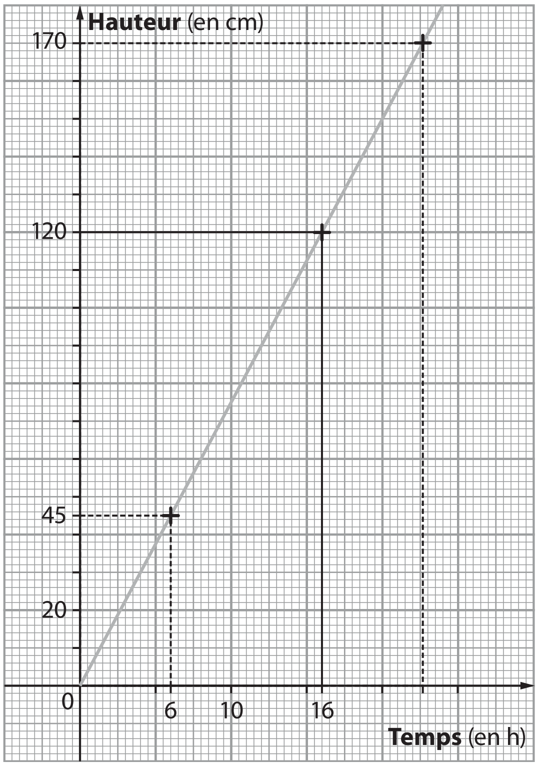
Donc le debit de la pompe est 1,5 m^3/h.

c. Le volume V d'eau, en m^3, débité par la pompe pour une durée t, en heures, est 1,5t.

Le volume V d'eau contenu dans la piscine pour une hauteur h, en cm, est alors $V = 2,5 \times 8 \times \dfrac{h}{100} = 0,2\ h$.

De l'égalité 0,2 h = 1,5t on tire $h = \dfrac{1,5t}{0,2} = 7,5t$.

Donc $h(t) = 7,5t$.



d. L'image de 6 est 45 (trajet en pointillés) et l'antécédent de 120 est 16 (trajet en noir).

Au bout de 6 h la hauteur d'eau est de 45 cm.

La hauteur d'eau sera de 120 cm au bout de 16 h.

e. Sur le graphique : on lit que la piscine est remplie au bout d'environ 22,7 h.

Par le calcul : 1,70 m = 170 m.

$$7{,}5t = 170 \text{ donc } t = \frac{170}{7{,}5} = \frac{68}{3} = 22 + \frac{2}{3}$$

La piscine est remplie au bout de 22 h et $\frac{2}{3}$ h soit au bout de 22 h 40 min.

103 **a.** Le prix hors taxes est $\frac{1}{1{,}055} \times x$ et donc

$$p(x) = \frac{1{,}196}{1{,}055}x.$$

b. $p(33{,}76) = \frac{1{,}196}{1{,}055} \times 33{,}76 = 38{,}272.$

Après l'augmentation il a payé environ 38,27 €

104 **1.** $n(x) = 1{,}07^2 \times x = 1{,}1449x$

2.a. $\frac{321}{1{,}1449} \approx 280$ donc il y avait environ 280 phoques en 2009.

b. $1{,}1449 \times 321 \approx 368$ donc il y aura environ 368 phoques en 2013.

105 Notons x la population de 1950. La population actuelle est $0{,}32x$ $(1 - 0{,}68 = 0{,}32)$.

Pour revenir à la population de 1950 il faut multiplier la population actuelle par $\frac{1}{0{,}32}$ soit 3,125.

La population actuelle doit donc augmenter de 212,5 % (312,5 % – 100 % = 212,5 %).

106 D'après ce premier tableau le pourcentage dont a été réduit le côté est compris entre 7 % et 8 %.

	A	B	C	D
1	Pourcentage de réduction de la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie le volume	Pourcentage de réduction du volume
2	1	0,99	0,970299	2,9701
3	2	0,98	0,941192	5,8808
4	3	0,97	0,912673	8,7327
5	4	0,96	0,884736	11,5264
6	5	0,95	0,857375	14,2625
7	6	0,94	0,830584	16,9416
8	7	0,93	0,804357	19,5643
9	8	0,92	0,778688	22,1312

On a saisi :

B2 = 1-A2/100 ; C2 = B2*B2*B2 ; C2 = (1-C2)*100

• En modifiant les cellules A2 et A3 puis en étirant la formule on obtient ce nouveau tableau.

	A	B	C	D
1	Pourcentage de réduction de la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie le volume	Pourcentage de réduction du volume
2	7	0,93	0,804357	19,5643
3	7,1	0,929	0,801765089	19,8234911
4	7,2	0,928	0,799178752	20,0821248

• D'après ce second tableau le pourcentage dont a été réduit le côté est compris entre 7,1 % et 7,2 %.

• En modifiant les cellules A2 et A3 puis en étirant la formule on obtient ce dernier tableau.

	A	B	C	D
1	Pourcentage de réduction de la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie le volume	Pourcentage de réduction du volume
2	7,1	0,929	0,801765089	19,8234911
3	7,11	0,9289	0,801506205	19,84937954
4	7,12	0,9288	0,801247376	19,87526241
5	7,13	0,9287	0,800988603	19,90113971
6	7,14	0,9286	0,800729886	19,92701143
7	7,15	0,9285	0,800471224	19,95287759
8	7,16	0,9284	0,800212618	19,97873817
9	7,17	0,9283	0,799954068	20,00459318

L'arrondi au centième du pourcentage dont a été réduit son côté est 7,17 %.

107 • 50 % + 100 % = 150 % et $\frac{150}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour les sports représenteront 60 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 5 % + 100 % = 105 % et $\frac{105}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{21}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour le cinéma représenteront 21 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 5 % + 100 % = 105 % et $\frac{105}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{31{,}5}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour la musique représenteront 31,5 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

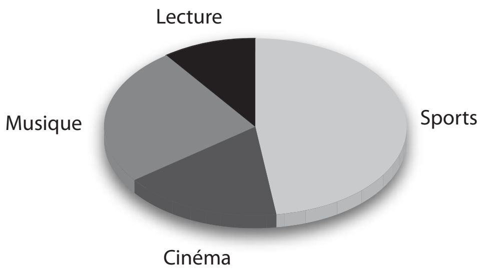
• 25 % + 100 % = 125 % et $\frac{125}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{12{,}5}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour la lecture représenteront 12,5 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 60 % + 21 % + 31,5 % + 12,5 % = 125 % donc l'année prochaine les dépenses pour les loisirs représenteront 125 % des dépenses de cette année.

• On peut donc construire ce tableau de proportionnalité :

	Sports	Cinéma	Musique	Lecture	Total
Pourcentage	60	21	31,5	12,5	125
Angle en degré	172,8	60,48	90,72	36	360

D'où ce diagramme circulaire :



15. Tâche complexe : Optimiser ses dépenses énergétiques

107 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Peut-on calculer l'aire de la maison ?

Aide n° 2 : Calculer les besoins énergétiques annuels (en kWh) pour cette maison, puis calculer le coût de ces besoins avec EDF.

Aide n° 3 : Peut-on déterminer une valeur approximative du nombre total d'heures d'ensoleillement annuel dans notre région ?

Aide n° 4 : Peut-on déterminer l'aire des panneaux solaires qu'il faudra acquérir pour subvenir aux besoins énergétiques de cette maison ?

2. Quelques commentaires

• Si la situation-problème est aisée à comprendre, il en est tout autrement des documents, en particulier des documents 1 et 3 où de nombreuses informations sont données (vocabulaire, données chiffrées, etc.). L'élève aura à faire de nombreux allers-retours entre ces différents documents. Il faudra prendre du temps pour les analyser et comprendre toutes les informations.

• On pourra dans un premier temps mettre les élèves en situation de recherche et les laisser réfléchir individuellement. Sans doute certains élèves s'intéresseront d'emblée au document 4 pour repérer la zone dans laquelle se trouve leur région.

• On pourra orienter les élèves vers le document 3 où la première information peut déclencher la nécessité de calculer en premier lieu l'aire de la maison (si utile, on pourra expliquer ce qu'est une maison de plain-pied). Les élèves pourront ensuite calculer les besoins énergétiques annuels (en kWh) pour cette maison.

• À ce stade, on pourra faire travailler les élèves en groupes, afin d'échanger idées et questions. Il faut que les élèves conçoivent un protocole de résolution de ce problème.

• La résolution de cette tâche complexe conduit les élèves à élaborer des stratégies différentes, notamment dans l'ordre des différentes étapes. Par exemple, ils s'engageront vraisemblablement soit dans le calcul du coût annuel des besoins énergétiques avec EDF, soit dans le calcul du coût des panneaux solaires.

• Le calcul du coût des panneaux solaires demande de la réflexion et se fait en quatre étapes :

1. On détermine une valeur approximative du nombre moyen d'heures d'ensoleillement journalier pour la région dans laquelle on se trouve à l'aide du document 4 (on pourra fixer comme valeur le centre de la classe correspondant à la région ou la valeur exacte si on la connaît ; on peut choisir 8 pour les régions de la dernière zone).

2. On en déduit aisément le nombre total d'heures d'ensoleillement annuel dans la région.

3. Arrive alors le calcul de la surface nécessaire de panneaux solaires. On utilise alors les informations du document 1. En procédant par étapes, on détermine d'abord la production annuelle (en kWh) par panneau de 1 m^2, puis la surface à équiper en panneaux solaires.

A noter que la fourchette donnée « entre 15 et 17 % » à propos du rendement peut donner lieu à débat au sein des groupes : prend-on la valeur haute ? la basse ? la valeur centrale ?

4. On peut enfin calculer le coût des panneaux solaires.

• Comment ensuite utiliser ce résultat pour aider Paul à prendre sa décision ? Sans doute en déterminant au bout de combien d'années l'installation sera rentable. On connaît le coût annuel des besoins énergétiques avec EDF ou on le calcule alors.

$$\frac{\text{Coût des panneaux solaires}}{\text{Coût annuel des besoins énergétiques avec EDF}}$$

Il est alors possible d'envisager de calculer le quotient :
dont le résultat indiquera le nombre minimum d'années nécessaires pour que les économies réalisées compensent l'achat des panneaux solaires.

• Au moment de conclure, les élèves s'interrogeront sans doute pour savoir si cela vaut la peine que Paul engage une telle dépense, en particulier s'ils sont dans une région bénéficiant d'un petit nombre d'heures d'ensoleillement.

• En séance plénière, les élèves présenteront leurs démarches, leurs calculs et formuleront leur conclusion. Il est possible que les avis divergent ! Certains pourront faire remarquer que l'on n'a pas tenu compte d'éventuelles aides de l'état ni des possibles évolutions des tarifs chez EDF.

Toutes ces compétences liées à la pratique d'une démarche scientifique seront valorisées.

• Un prolongement possible est de reprendre individuellement cette situation en choisissant une région située dans une autre zone, voire en effectuant la recherche pour toutes les zones. Un tableur sera alors fort utile.

3. Éléments de réponse

• Calcul de l'aire A de la maison :

$$A = 16 \times 8 - 2 \times 4 = 120$$

Donc l'aire de la maison est 120 m^2.

• Calcul des besoins énergétiques annuels :

$$120 \times 110 = 13\,200$$

Donc la maison de Paul consommera chaque année 13 200 kWh.

• Calcul du coût énergétique annuel avec EDF :

$$13\,200 \times 0{,}12 = 1\,584$$

Donc Paul payera chaque année 1 584 € avec EDF.

Les calculs qui suivent dépendent de la région.

Exemple avec une maison située dans la zone « 5,5 à 6,2 h » :

• Valeur approximative du nombre moyen d'heures d'ensoleillement journalier :

Si on choisit le centre de la classe, c'est 5,85 h.

• Nombre total d'heures d'ensoleillement annuel dans la région : $5{,}85 \text{ h} \times 365 = 2\,135{,}25 \text{ h}$

• Production annuelle (en kWh) par panneau de 1 m² :

Si on choisit le rendement maximum de 17 %, on obtient :

$$P = 1 \text{ kW} \times 2\,135{,}25 \text{ h} \times 0{,}17 \quad \text{soit} \quad P = 362{,}9925 \text{ kWh}$$

• Surface à équiper en panneaux solaires :

$$13\,200 : 362{,}9925 \approx 36{,}36$$

Paul a besoin d'équiper en panneaux solaires une surface d'environ 36,36 m² pour couvrir les besoins énergétiques de sa maison.

• Coût des panneaux solaires :

$$600 \text{ €} \times \frac{13\,200}{362{,}9925} \approx 21\,819 \text{ €}$$

Le montant de la dépense de Paul est 21 819 € (à 1 € près).

• **Conclusion**

$$\frac{21819}{1584} \approx 13{,}8$$

L'installation de Paul sera rentable au bout de 14 ans (en considérant que Paul ne reçoit aucune aide de l'état et que les tarifs chez EDF n'évoluent pas).

On peut conseiller à Paul de procéder à cette installation s'il est prêt à faire sa dépense de 13 200 € actuellement et à attendre 14 ans pour ne plus avoir de facture d'électricité.

Réponses pour toutes les zones

Avec un rendement maximum

	A	B	C	D	E	F	G
1		< 4,8 h	4,8 à 5,5 h	5,5 à 6,2 h	6,2 à 6,9 h	6,9 à 7,6 h	> 7,6 h
2	Centre des classes	2,4	5,15	5,85	6,55	7,25	8
3	Nombre d'heures d'ensoleillement annuel	876	1 879,75	2 135,25	2 390,75	2 646,25	2 920
4	Production annuelle maximum (en kWh) par panneau de 1 m²	148,92	319,5575	362,9925	406,4275	449,8625	496,4
5	Surface à équiper en panneaux solaires (en m²)	88,64	41,31	36,36	32,48	29,34	26,59
6	Coût des panneaux solaires (en €)	53 183	24 784	21 819	19 487	17 605	15 955
7	Nombre d'années pour rembourser l'investissement	33,6	15,6	13,8	12,3	11,1	10,1

Avec un rendement minimum

	A	B	C	D	E	F	G
1		< 4,8 h	4,8 à 5,5 h	5,5 à 6,2 h	6,2 à 6,9 h	6,9 à 7,6 h	> 7,6 h
2	Centre des classes	2,4	5,15	5,85	6,55	7,25	8
3	Nombre d'heures d'ensoleillement annuel	876	1 879,75	2 135,25	2 390,75	2 646,25	2 920
4	Production annuelle minimum (en kWh) par panneau de 1 m²	131,4	281,9625	320,2875	358,6125	396,9375	438
5	Surface à équiper en panneaux solaires (en m²)	100,46	46,81	41,21	36,81	33,25	30,14
6	Coût des panneaux solaires (en €)	60 274	28 089	24 728	22 085	19 953	18 082
7	Nombre d'années pour rembourser l'investissement	38,1	17,7	15,6	13,9	12,6	11,4

16. En route vers la Seconde

109 **a.** $f(x) = x - (2x - 7) - 3(x - 4) + (6x - 19)$

$f(x) = x - 2x + 7 - 3x + 12 + 6x - 19$

$f(x) = 2x.$

Donc f est la fonction linéaire de coefficient 2.

b. $f(x) = (3x + 4)^2 - (3x - 4)^2$

$f(x) = 9x^2 + 24x + 16 - (9x^2 - 24x + 16)$

$f(x) = 9x^2 + 24x + 16 - 9x^2 + 24x - 16$

$f(x) = 48x$

Donc f est la fonction linéaire de coefficient 48.

c. $f(x) = (x\sqrt{3} - \sqrt{8})(x\sqrt{3} + \sqrt{8}) - (3x - 4)(x + 2)$

$f(x) = 3x^2 - 8 - (3x^2 + 6x - 4x - 8)$

$f(x) = 3x^2 - 8 - 3x^2 - 6x + 4x + 8$

$f(x) = -2x$

Donc f est la fonction linéaire de coefficient –2.

110 7 + 10 + 11 +12 = 40 donc la somme des âges des quatre enfants est 40.

$\frac{80}{40} = 2$ donc une année correspondra à 2 €.

$7 \times 2 = 14$; $10 \times 2 = 20$; $11 \times 2 = 22$ et $12 \times 2 = 24$ donc le père doit donner 14 € à l'enfant qui a 7 ans ;

20 € à l'enfant qui a 10 ans ; 22 € à l'enfant qui a 11 ans et 24 € à l'enfant qui a 12 ans.

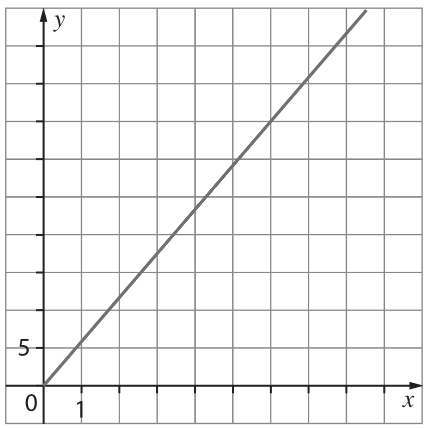
111 Les droites (BG) et (CD) sont sécantes en A et les droites (BC) et (GD) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{GD} \quad \text{soit} \quad \frac{5}{8} = \frac{5}{8} = \frac{x}{GD}$$

$$\text{et donc } GD = \frac{8}{5}x = 1{,}6\,x.$$

Le périmètre, en cm, de EFGD est 4GD soit $4 \times 1{,}6x$ ou encore $6{,}4x$.

Donc $f(x) = 6{,}4x$.



Remarque : l'inégalité triangulaire appliquée au triangle ABC permet d'affirmer que x est compris entre 0 et 10.

CHAPITRE 10 Fonctions affines

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

La notion de fonctions affines apparaît en classe de **3e** dans les programmes de collège. L'ensemble de l'étude des fonctions affines ne relève pas du socle, cependant l'étude de ce type de fonctions, *via* certaines situations proposées, permettra néanmoins de valider des compétences, capacités voire attitudes relevant quant à elles, du socle.

Dès **l'école élémentaire**, les élèves sont confrontés à des situations relevant de la proportionnalité. L'étude la proportionnalité est une étude pyramidale qui se poursuit sur l'ensemble des cycles du collège.

Ainsi en classe de **3e**, l'étude de la proportionnalité amorcée à l'école primaire, est complétée par les fonctions linéaires et affines : les premières sont liées à la proportionnalité, quant aux secondes, lorsqu'elles ne sont pas linéaires, il est attendu de sensibiliser les élèves à des situations de non proportionnalité et pourtant ayant des propriétés similaires aux premières.

En classe de **3e** est également abordée pour la première fois la notion de fonction. Les fonctions affines viendront conclure l'étude des fonctions et des fonctions linéaires.

À noter également que l'étude des fonctions affines permettra de réinvestir la notion d'équations abordées en classe de **5e** , étudiées en **4e** et prolongées en **3e** notamment par les équations produits et les systèmes d'équations qui pourront le cas échéant être utiles pour déterminer une fonction affine.

À noter également que ce chapitre permettra de revenir de façon naturelle sur le calcul littéral et les programmes de calculs. Quelques exercices ne manqueront pas de revenir sur ces notions importantes du collège exploitées en classe de seconde avec l'algorithmique.

2. Notion de fonctions affines

L'activité 1 se propose de faire le point sur les différents types de situations tant par un tableau de valeurs que par la représentation graphique mais également par l'expression des différentes fonctions étudiées.

Cela permettra de constater qu'un nouveau type de fonction émerge par une situation de non proportionnalité mais dont la représentation graphique fait apparaître une droite ne passant par l'origine du repère.

L'activité 2 permet ainsi de définir une fonction affine par son expression caractéristique.

À noter que cette activité permet de montrer aux élèves que les fonctions constantes et linéaires s'avèrent être des cas particuliers des fonctions affines.

Cette activité a également pour objectif de déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.

Les exercices à l'oral 13 à 19 pourront être abordés immédiatement suite à ces deux activités.

3. Proportionnalité des accroissements

L'enjeu de **l'activité 3** est de faire apparaître et démontrer la proportionnalité des accroissements pour une fonction affine. L'usage d'un tableur s'avère très performant dans cette activité.

Les exercices à l'oral 20 à 22 pourront suivre cette activité.

4. Représentation graphique d'une fonction affine

L'activité 4 doit permettre aux élèves de s'approprier la représentation graphique d'une fonction affine en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction linéaire associée.

Les exercices à l'oral 23 à 25 pourront succéder à cette activité.

L'activité 5 permettra aux élèves de confronter deux méthodes pour représenter graphiquement une fonction affine donnée.

5. Les savoir – faire

• Les trois **exercices résolus** proposés sont complémentaires.

Le premier exercice permet de faire le point sur calcul d'une image et calcul d'un antécédent.

L'animation interactive permettra de montrer les étapes successives qui permettent de calculer l'image d'un nombre et l'antécédent d'un nombre par une même fonction affine donnée. L'idée essentielle est de bien distinguer ces deux calculs.

Le deuxième exercice consiste à tracer la représentation graphique d'une fonction affine.

L'animation interactive permet aux élèves de confronter les deux méthodes de construction abordées dans l'activité 4, chaque étape de construction étant bien détaillée.

Le troisième exercice résolu propose de déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.

Le déroulé de l'animation interactive permet aux élèves de s'approprier les différentes étapes menant à l'expression de la fonction affine recherchée.

Les exercices des rubriques « **J'applique** » permettent de consolider ces apprentissages. **L'exercice 10** propose de s'intéresser au cas particulier de la fonction constante dont l'étude peut être très brève.

• La page **Atelier Brevet** propose l'étude d'un problème complet donné au DNB.

6. Compléments

Les exercices d'application ou d'approfondissement ont pour vocation de travailler les trois attendus concernant l'étude des fonctions affines :

– reconnaître une fonction affine et faire des calculs d'images et d'antécédents

– utiliser la propriété des accroissements

– représenter graphiquement une telle fonction ou exploiter la représentation graphique d'une fonction affine.

Les situations proposées sont diverses et certaines d'entre elles permettent de montrer que des situations concrètes mènent à l'étude de fonctions affines (**exercices 33, 34, 58 ,72 et 73**).

La partie **Prendre des initiatives** peut être la source d'échanges au sein de la classe en portant un regard critique sur une méthode de construction proposée (**exercice 57**). **L'exercice 58** peut être riche d'interactivité entre élèves après une recherche en groupe. La situation est simple et pourtant la résolution nécessite méthode et réflexion. Un enjeu de cet exercice est également de reconnaître sur un graphique s'il correspond à une fonction ou pas.

Dans la partie **Présenter, argumenter, communiquer**, l'accent est mis sur la rigueur de la démarche et de son explicitation. La rédaction s'avère essentielle. Ainsi l'esprit critique, le traitement de l'information ainsi que lecture graphique ou exploitation d'un début de travail sont mis en exergue.

La narration de recherche est particulièrement dense et permet de retravailler l'image d'un nombre et déterminer une fonction affine à partir de deux nombres et de leurs images.

Les questions proposées en **travail autonome** permettent aux élèves de faire leur bilan personnel, avec renvoi au cours ou aux exercices résolus en cas de non réussite.

Dans la page **Objectif Brevet**, on trouve trois énoncés récents, permettant, à l'aide de conseils ou en autonomie, de retravailler les principales notions abordées dans le chapitre. Les situations proposées sont tant dans le domaine numérique que celui de la géométrie.

Les **exercices d'approfondissement** proposés sont plus riches et demandent à l'élève une réflexion plus importante lors d'une ou plusieurs étape(s) de leur résolution. Ils peuvent être l'occasion de travaux collectifs : **l'exercice 90** s'y prête tout particulièrement. Toute piste de recherche sera alors valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète de l'exercice.

L'exercice 94 incitera à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique et permettra de réinvestir le théorème de Thalès. La conjecture dégagée par le logiciel sera ensuite démontrée par résolution d'une équation mais également par une lecture graphique.

Dans la **tâche complexe**, les élèves doivent extraire des informations de deux documents. La situation proposée relève de la cryptographie : il s'agit d'un chiffrement affine.

Dans la rubrique **En route vers la seconde**, le premier exercice est un QCM permettant de revenir sur les notions d'image, d'antécédent par une fonction affine donnée. Le second exercice, beaucoup plus technique, mettra l'accent sur la maîtrise du calcul littéral (double distributivité, identités remarquables et réduction d'expressions littérales) .

L'exercice 100, quant à lui, relève du programme de calcul. L'utilisation du calcul littéral est nécessaire pour conclure.

Le dernier exercice est délicat : les fonctions f et g n'étant pas données dans l'énoncé, les élèves devront bien interpréter les données de l'énoncé pour les expliciter dès la première question.

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

Réponse : on obtient 8 388 605 donc la réponse est non.

Trois possibilités :

– à la main : très long !

– à la calculatrice, plus rapide mais . . .

– au tableur : bien plus rapide, permet d'introduire la fonction « \$ »

On obtient alors (ci contre) :

	A	B
1	5	13
2	13	29
3	29	61
4	61	125
5	125	253
6	253	509
7	509	1021
8	1021	2045
9	2045	4093
10	4093	8189
11	8189	16381
12	16381	32765
13	32765	65533
14	65533	131069
15	131069	262141
16	262141	524285
17	524285	1048573
18	1048573	2097149
19	2097149	4194301
20	4194301	8388605

• Devinette

Entre nous : il s'agit d'une équation dite diophantienne. Les autres solutions sont $x = 3 + 35k$ et $y = -4 - 47k$ avec k entier relatif. Ainsi pour $k = 1$, $x = 38$ et $y = -51$ sont également solutions.

2. Je vérifie mes acquis :

1 Le produit de x par 5 est $5x$, la somme de -7 et de ce produit est donc $5x + (-7)$ d'où la réponse **b.**

2 Réponse **b.** périmètre : $2(x + 3) + 2\times8 = 2x + 22$

3 Réponse **b.** pour $x = -1$ on lit $y = 2$

4 Réponse **c.** On lit l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de l'axe des abscisses.

5 Réponse **b.**

6 Réponse **c.** on calcule $\dfrac{8}{-12} = -\dfrac{2}{3}$

3. Calcul mental

7 **a.** 4,5 **b.** –1,5 **c.** 10,5 **d.** 15 **e.** 2,5

8 **a.** 35 **b.** –85 **c.** 13 **d.** –3 **e.** 20,2

9 **a.** –2,5 **b.** –0,4 **c.** 24 **d.** 20

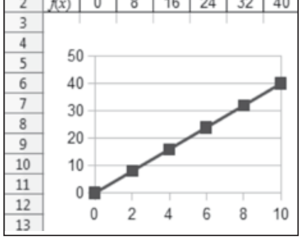
4. Activités

Fonctions affines

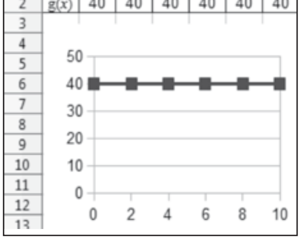
1 Reconnaître un tableau de proportionnalité

a. b.

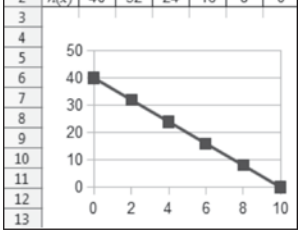
	A	B	C	D	E	F	G
1	x	0	2	4	6	8	10
2	$f(x)$	0	8	16	24	32	40



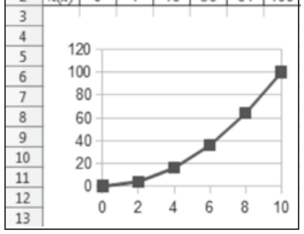
	A	B	C	D	E	F	G
1	x	0	2	4	6	8	10
2	$g(x)$	40	40	40	40	40	40



	A	B	C	D	E	F	G
1	x	0	2	4	6	8	10
2	$h(x)$	40	32	24	16	8	0



	A	B	C	D	E	F	G
1	x	0	2	4	6	8	10
2	$k(x)$	0	4	16	36	64	100



c. Seul pour f on a une situation de proportionnalité, les points étant alignés avec l'origine du repère.

Le tableau est un tableau de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité pour obtenir les nombres de la 2e ligne à partir de ceux de la 1e est 4.

d. $f(x) = 4x$ $g(x) = 40$

$h(x) = 40 - 4x = -4x + 40$ $k(x) = x^2$

seule $f(x)$ est de la forme ax.

2 Reconnaître une fonction affine

1. a. Oui avec $a = 4$ et $b = 0$

b. Oui avec $a = 0$ et $b = 40$

c. Oui avec $a = -4$ et $b = 40$

d. Non à cause de x^2.

2. a. Image de 7 par h : $h(7) = 40 - 4 \times 7 = 12$

$h(-9) = 40 - 4 \times (-9) = 76$.

b. L'antécédent de 32 par h est 2 : on résout $40 - 4x = 32$ on obtient $x = (32 - 40) : (-4) = 2$

l'antécédent de 50 par h est – 2,5 : on résout $40 - 4x = 50$ on obtient $x = (50 - 40) : (-4) = -2{,}5$

c. L'image de 7 revient à calculer la longueur du segment de 40 cm auquel on a retiré 4 segments de longueur 7 cm. Pour l'image de –9 pas d'interprétation géométrique, un segment ne peut avoir une longueur négative ! Pour déterminer l'antécédent de 32 il s'agit de déterminer la longueur des 4 segments qui enlevés à 40 cm permettent d'obtenir un segment de 32 cm. Pour cela on retire 4 segments de longueur 2 cm au segment de 40 cm. Pas d'interprétation géométrique pour l'antécédent de 50 (le périmètre maximal étant 40 cm).

3 Proportionnalité des accroissements

1. a.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x1	0	4	-2	5	-6	10	1	0,1
2	x2	1	5	0	8	-3	5	-4	0,8
3	f(x1)	3	11	-1	13	-9	23	5	3,2
4	f(x2)	5	13	3	19	-3	13	-5	4,6
5	x2-x1	1	1	2	3	3	-5	-5	0,7
6	f(x2)-f(x1)	2	2	4	6	6	-10	-10	1,4

b. « Il semble que $f(x_2) - f(x_1) = 2\times(x_2 - x_1)$ »

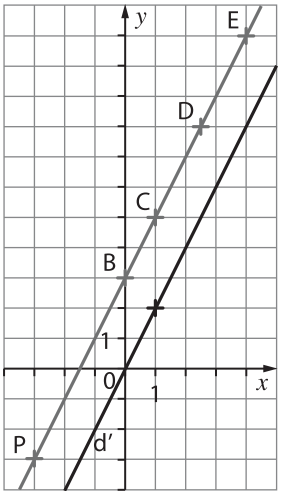
c. $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$

$= ax_2 - ax_1 + b - b$

$= ax_2 - ax_1 = a\times(x_2 - x_1)$

4 Représentation graphique d'une fonction affine

1. a. b.



1. b.

Point	P	B	C	D	E
Abscisse x	–3	0	1	2,5	4
Ordonnée $2x + 3$	–3	3	5	8	11

Conjecture : les points P, B, C, D et E semblent alignés.

2. a. Elles sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à l'axe (Ox).

b. OB = $y_B - 0 = 3$ et MM' = $y_M - y_{M'} = 2x + 3 - 2x = 3$

c. OB = MM' donc le quadrilatère (non croisé) OBMM' a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

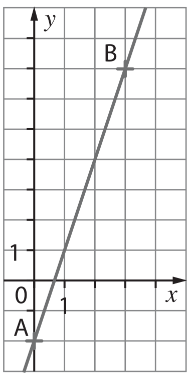
d. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles d'où (BM) et (d') parallèles.

e. On en déduit que la représentation graphique de *f* est la droite parallèle à la droite (d') passant par *B*.

5 Tracer la droite représentant une fonction affine

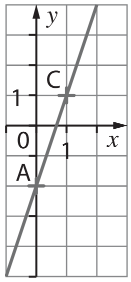
1. a. La méthode de Jeanne :

$f(0) = 3\times0 - 2 = -2$ et $f(3) = 3\times3 - 2 = 7$ donc Jeanne trace la droite qui passe par les points de coordonnées A(0 ; –2) et B(3 ; 7).

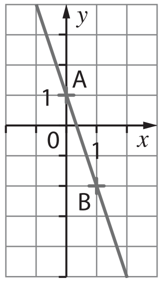


b. La méthode de Farid :

Farid place le point A(0 ; –2) qui correspond à l'ordonnée à l'origine. Ensuite il se sert du coefficient directeur qui est + 3, ainsi en partant du point A, il « se déplace de 1 » en abscisse « vers la droite » et « monte » en ordonnée de 3 ce qui lui permet d'obtenir le point C(1 ; 1) point de la droite.



2. On place le point A(0 ; 1) qui correspond à l'ordonnée à l'origine. En partant du point A on se « déplace de 1 vers la droite » et on « descend de – 3 », le coefficient directeur étant –3. Ainsi on obtient le point B(1 ; –2) point de la représentation graphique de la fonction *f*.



5. J'applique

4 **a.** $f(-2) = -3\times(-2) + 7 = 13$

b. Résoudre $-3x + 7 = 10$ et on obtient $x = -1$

5 **a.** $g(-4) = \frac{1}{2}\times(-4) + 3 = 1$

b. $\frac{1}{2}x + 3 = 0$ donc $x = -6$

c. $g(8) = 7$

c. Résoudre $\frac{1}{2}x + 3 = 9$ et on obtient $x = 12$

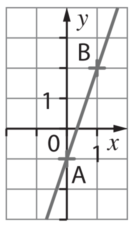
6 **a.** $h(-5) = 7$

b. Résoudre l'équation $5 - 0{,}4x = 1$ et on obtient $x = 10$

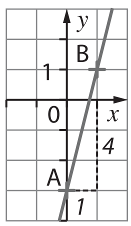
7 **a.**

x	0	–1,5	2	0,2	–8,5	–1,6
k(x)	–4	–19	16	–2	–89	–20

8 **a.** On place le point A(0 ; –1) correspondant à l'ordonnée à l'origine et on peut placer le point B(1 ;2) qui est également point de la droite (d).



9 **a.**



10 Sonia a raison. En effet $f(x) = ax + b$ avec :

$$a = \frac{f(1) - f(-5)}{1 - (-5)} = \frac{2 - 2}{6} = 0$$

Donc f est bien constante.

11 $g(x) = ax + b$.
Déterminons a :

$$a = \frac{g(0) - g(-2)}{0 - (-2)} = \frac{4 - 10}{2} = -3$$

donc $g(x) = -3x + b$
Calculons b : $g(0) = 4$ se traduit par $4 = -3 \times 0 + b$ soit $b = 4$
d'où $g(x) = -3x + 4$

6. Atelier Brevet

12 **a. Partie 1**

1. Pour 7 séances :
Formule A : 7×18 € = 126 €
Formule B : 165 € car le prix est de 165 € pour 10 séances donc également pour 7 séances.
Formule C : 70 € + 140 €, en effet prix de la cotisation annuelle de 70 € à laquelle s'ajoute 140 € pour 10 séances donc pour 7 séances soit un coût total de 210 €.
2. Pour 20 séances :
Formule A : 20×18 € = 360 €
Formule B : 2×165 € = 330 € car le prix est de 165 € pour 10 séances.
Formule C : 70 € + 2×140 € = 350 €, en effet prix de la cotisation annuelle de 70 € à laquelle s'ajoute 140 € pour 10 séances donc 280 € pour 20 séances.
La formule la plus avantageuse est donc la formule B.

Partie 2

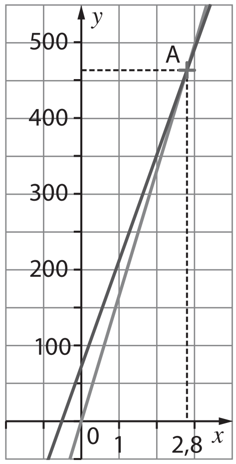
1.

	1 carte	2 cartes	5 cartes
Formule B	165 €	330 €	825 €
Formule C	210 €	350 €	770 €

2. a. Pour la formule B, le prix payé pour x cartes est de $165x$.
b. Pour la formule C, le prix payé pour x cartes est de $140x + 70$.
c. $140x + 70 \leqslant 165x$
$70 \leqslant 165x - 140x$
$70 \leqslant 25x$
$\frac{70}{25} \leqslant x$
$2{,}8 \leqslant x$
d. La formule C devient donc avantageuse à partir de 3 cartes achetées.

Partie 3

1. Graphiquement la formule C est plus avantageuse que la formule B lorsque la droite représentant la fonction g est en dessous de la droite représentant la fonction f. Les deux droites se coupent au point d'abcisse 2,8. Donc la formule C devient avantageuse à partir de 3 cartes.



7. Exercices à l'oral

13 **1. a.** $x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+3} 2x + 3$.
b. Pour calculer l'image d'un nombre par f, on commence par multiplier ce nombre par 2 puis on ajoute 3.
2. a. Pour calculer l'image d'un nombre par g, on soustrait 9 à ce nombre.
b. Pour calculer l'image d'un nombre par h, on commence par multiplier ce nombre par -5 puis on ajoute 4.
c. Pour calculer l'image d'un nombre par i, on commence par multiplier ce nombre par $\frac{5}{2}$ puis on ajoute 1.

14 **a.** $a = 1$; $b = 3$ **b.** $a = 3$; $b = -2$
c. $a = -1$; $b = 5$ **d.** $a = 5$; $b = 0$
e. $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$ **f.** $a = 0$; $b = -11$

15 f et h sont affines non linéaires et non constantes, g est linaire et k est constante. Il a raison.

16 La fonction n'est pas affine à cause du x^2.

17 **a.** On calcule l'image de -1 par f.
b. On détermine l'antécédent par f de 7.
c. On calcule l'image par f de 2.

18 **1. b.** **2. a.** **3. c.** **4.b.**

19 $p(n) = 0{,}05n + 5$
2. a et b. $p(400) = 25$: le prix payé pour 400 CDR
$p(n) = 15$ donc $n = 200$, le nombre de CD-R commandés pour un montant de 15 €.

20 **1.** $13 - 12 = 1$ donc $f(13) - f(12) = 4 \times 1 = 4$.
2. a. $f(11) - f(9) = 2 \times 4 = 8$
b. $f(2\,013) - f(2\,014) = -1 \times 4 = -4$
c. $f(5) - f(-5) = (5 - (-5)) \times 4 = 10 \times 4 = 40$

21 **1. a.** $2 \times 3 = 6$ donc $g(x)$ augmente de 6 quand x augmente de 3.
b. $2 \times (-5) = -10$ donc $g(x)$ diminue de 10 quand x diminue de 5.
2. $-3 \times 3 = -9$ donc $g(x)$ diminue de 9 quand x augmente de 3.
$-3 \times (-5) = 15$ donc $g(x)$ augmente de 15 quand x diminue de 5.

22 On calcule $\frac{30-22}{5-3} = 4$, le prix d'une place est donc de 4 €, le prix de la carte est alors $22 - 3\times4 = 10$ €.

23 Réponse **b.** : c'est la seule droite représentée.

24 **1.** f_3 est linéaire : sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

f_1 est constante : sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

2. a. Image de 1 pour f_1 : 2 ; par f_2 : 1 et par f_3 : 3.

b. Antécédent de 3 par f_2 : 0 ; par f_3 : 1. 3 n'a pas d'antécédent par f_1.

25 **a.** vrai **b.** faux **c.** vrai **d.** vrai **e.** faux

8. Exercices d'application

26 $f_3(x)$

27 **a.** $P_1(x) = x^2 + 1$ $P_2(x) = \frac{x}{3} - 8$

$P_3(x) = \frac{x+6}{2} - 3 = \frac{x}{2}$

$P_4(x) = 2(x-3) - 2x = -6$

b. P_1 n'est pas une fonction affine.

P_2 est une fonction affine.

P_3 est une fonction affine, elle est même linéaire.

P_4 est une fonction affine constante.

28 **a.** $a = 2$; $b = -7$ **b.** $a = -3$; $b = 1$

c. $a = 0$; $b = 5$ **d.** $a = \frac{1}{4}$; $b = 0$

e. $a = 5$; $b = -5$ **f.** $a = -\frac{2}{3}$; $b = 5$

29 **1. a.** $5\times3 - 4 = 11$; l'image de 3 est 11.

b. On résout $5x - 4 = -1$ et on obtient $x = \frac{3}{5}$

L'antécédent de –1 est $\frac{3}{5}$ (ou 0,6).

c. $f(-2) = 5\times(-2) - 4 = -14$

2. a. $2{,}5\times(-2) - 1 = -6$; l'image de –2 est –6.

b. On résout l'équation : $2{,}5x - 1 = -3{,}5$ et on obtient $x = -1$. L'antécédent de –3,5 est –1.

c. $g(0) = 2{,}5\times0 - 1 = -1$

30 **a.** La formule à saisir dans la cellule B2 est –2*B1+6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2,4	-1,5	-0,6	2,4	3,7	4,55	11,3
2	$f(x)$	10,8	9	7,2	1,2	-1,4	-3,1	-16,6

b. Marion a tort en effet en regardant la colonne B, on calcule $-\frac{1}{2}\times10{,}8 - 6 = -11{,}4 \neq -2{,}4$.

31

x	0	– 5	10	– 2,5	1	5
$0{,}4x - 4$	– 4	– 6	0	– 5	– 3,6	– 2

32 **1.** Le triangle OAB est isocèle en O donc ses angles à la base sont égaux.

Dans un triangle la somme des angles est égale à 180° d'où $m(x) = 180° - 2x$. Antoine a raison.

2. a. • $m(15) = 180 - 2\times15 = 150$; l'image de 15 est 150.

• Antécédent de 60 : on résout l'équation : $180 - 2x = 60$ donc $x = 60$.

L'antécédent de 60 est 60.

b. • Lorsque l'angle $\widehat{OAB}$ mesure 15°, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 150°.

• Lorsque l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 60°, l'angle $\widehat{OAB}$ mesure 60° (le triangle OAB est alors équilatéral).

33 **1.** $C(x) = 40x + 900$

2. a. $C(120) = 40\times120 + 900 = 5\,700$ € c'est le coût pour une toiture de 120 m^2.

$40x + 900 = 4\,500$ donc $x = (4\,500 - 900) : 40 = 90$ m^2.

Avec un budget de 4 500 € on peut refaire une toiture de 90 m^2.

34 **a.** Il gagne $240\times0{,}02 = 4{,}8$ \$ en plus.

b. Il gagne $50\times0{,}02 = 1$ \$ en moins.

35 **a.** $f(5) - f(2) = 13 - 7 = 6$

b. $f(5) - f(2) = (5-2)a = 3a$ donc $a = 2$

$2\times5 + b = 13$ donc $b = 3$

36 **a.** $a = \frac{3-5}{10-2} = -\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{4}\times2 + b = 5$ donc $b = \frac{11}{2}$

b. $a = \frac{3-5}{5-(-1)} = -\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}\times(-1) + b = 5$ donc $b = \frac{14}{3}$

37 **1.** C'est exact. $g(4) = -2 + 5 = 3$

2. $g(2) - g(3) = -2(2-3)$ donc $g(2) = 2 + 5 = 7$

On détermine de la même façon :

$g(7) = -3$ $g(1) = 9$ $g(-3) = 17$

38 **1.** g est une fonction affine, donc $g(x) = ax + b$.

On peut calculer a : $a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

a. Si x augmente de 3 alors $g(x)$ augmente de 1,5.

b. Si x diminue de 4 alors $g(x)$ diminue de 2.

2. a. Si x augmente de 3 alors $g(x)$ diminue de 15.

b. Si x diminue de 4 alors $g(x)$ augmente de 20.

39 **a.** La première chose à faire est ce que propose Maxime, à savoir déterminer la valeur de a. Ceci étant fait, on peut ensuite déterminer la valeur de b, on peut appliquer aussi bien ce que proposent Fleur et Jordy.

b. $a = \frac{-1-4}{3-(-2)} = -1$

Calcul de Fleur : $-1\times(-2) + b = 4$ d'où $b = 2$

Calcul de Jordy : $-1\times3 + b = -1$ d'où $b = 2$

Fleur et Jordy trouvent bien le même valeur de b.

Donc $f(x) = -x + 2$

40 $f(x) = -2x + 3$

41 $f(x) = -x + 5$

42 $f(x) = -2$

43 $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

44 **a.** $b = f(0) = 5$

$f(5) - f(3) = a\times(5-3)$ d'où $a\times(5-3) = 8$

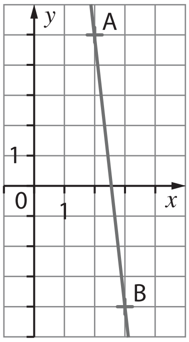
b. $f(x) = 4x + 5$

45 **a.** Image de 3 : –1 **b.** –1

46 **a.** –1 **b.** 2 **c.** $f(x) = 2x - 1$

d. $f(2) = 2\times2 - 1 = 3$. La droite (d) passe bien par le point de coordonnées (2 ; 3)

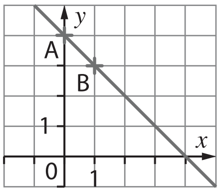
47 **a.**

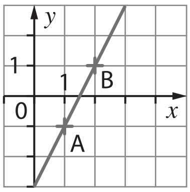


b. On calcule $= \dfrac{5-(-4)}{2-3} = -9$

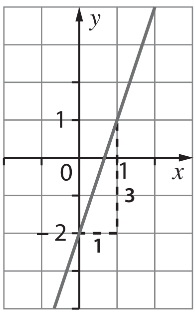
c. $f(x) = -9x + b$. Pour déterminer b on choisit par exemple le point A(2;5). On a donc $5 = -9 \times 2 + b$ donc $b = 23$ donc $f(x) = -9x + 23$

48 **a.**

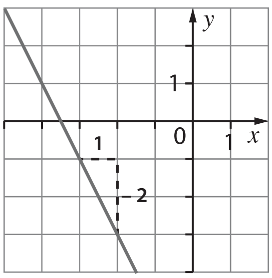




49 **a.** On peut choisir le point de coordonnées (0 ; –2).

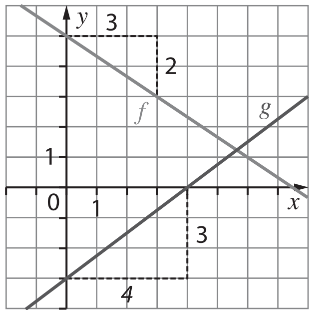


b. On peut choisir le point de coordonnées (–3 ; –1).

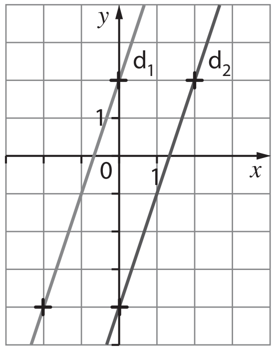


50 **1.** Elle a placé le point de coordonnées (0 ; –2) qui correspond à l'ordonnée à l'origine et ensuite elle se sert du coefficient directeur qui est $\frac{1}{3}$ pour construire un deuxième point de la droite en partant du premier. Pour cela elle « se décale » de 3 vers la droite et « monte » de 1.

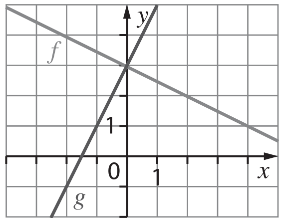
2. a. et **b.**



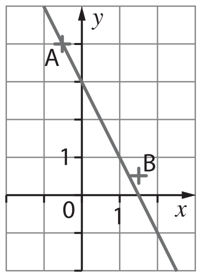
51



52



53 **a. b.**

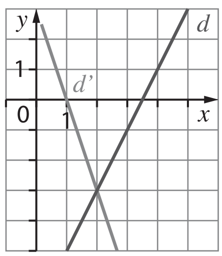


A est sur la droite, on a bien $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = 4$

B n'est pas sur la droite, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -3 + 3 = 0 \neq \dfrac{1}{2}$.

c. $f(1\,243{,}25) = -2\,483{,}5$ donc Allan a raison.

54 **a.**



b. Le point d'intersection de (d) et (d') a pour coordonnées (2 ; – 3)

c. Il faut résoudre l'équation :

$2x - 7 = -3x + 3$

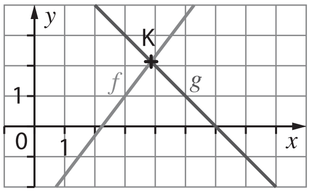
$2x + 3x = 3 + 7$

$5x = 10$

$x = 2$

de plus $f(2) = g(2) = -3$ donc on retrouve le résultat de la question **b.**

55



b. On lit approximativement K (3,8 ; 2,1)

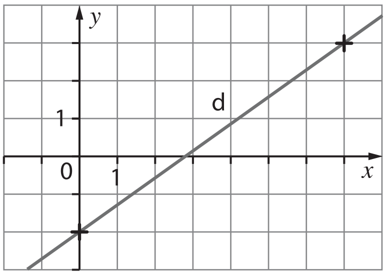
c. $\frac{4}{3}x - 3 = -x + 6$ donc $x = \frac{27}{7}$ et $g\left(\frac{27}{7}\right) = -\frac{27}{7} + 6 = \frac{15}{7}$ d'où K $\left(\frac{27}{7} ; \frac{15}{7}\right)$.

56 L'ordonnée à l'origine est 2. On utilise l'un des points de la droite et on obtient $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

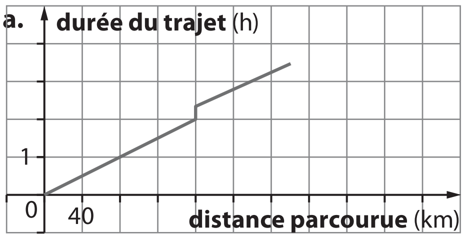
57 **a.** $f(0) = -2$ mais $f(3) = \frac{1}{7}$: problème de valeur approchée pour ce point.

b. il vaut mieux calculer $f(7) = 3$

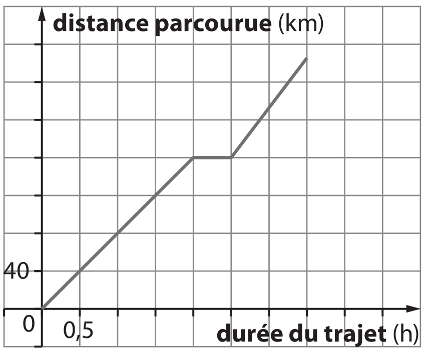
c.



58 **1. a.**



b.



c. Le premier graphique ne représente pas une fonction car pour $x = 160$, il y a une infinité de valeurs de y possibles.

9. Vrai ou faux

59 Faux. La fonction affine constante f définie par $f(x) = 1$ convient.

60 Vrai. Toutes sont de la forme $x \mapsto ax + b$

61 $4 \times 2 - 6 = 2$ donc vrai.

62 Vrai, les coefficients directeurs sont égaux.

10. Calcul mental et réfléchi

63 **a.** $f(0) = -9$ **b.** $f(-1) = -13$ **c.** $f(-0{,}5) = -11$

d. $f\left(\frac{3}{4}\right) = -6$ **e.** $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -19$ **f.** $f(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - 9$

64 **a.** 0 **b.** 2,5 **c.** – 5 **d.** 2 **e.** –0,5 **f.** 4

65 **a.** 3 **b.** 0 **c.** 2

66 $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

11. Présenter, argumenter, communiquer

67 **a.** $f(-4) = -3 \times (-4) + 2 = 12 + 2 = 14$

donc l'image de –4 par f est 14.

b. $f(x) = 71$ donc $-3x + 2 = 71$ donc $-3x = 71 - 2$

$-3x = 69$ soit $x = 69 : (-3) = -23$

donc l'antécédent de 71 par f est –23.

68 Supposons que $f(x) = ax + b$, comme $f(0) = 3$ on a $b = 3$. De plus $f(1) = 5$, donc on a $a = 2$, donc $f(x) = 2x + 3$. Calculons $f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$, c'est juste. De plus $f(10) = 2 \times 10 + 3 = 23$ qui est vrai également donc Lucie a raison.

69 Lola s'est trompée : l'ordonnée à l'origine est 2 et non –2.

Fred s'est trompé car la représentation de f car en partant de l'ordonnée à l'origine, on doit décaler de 5 vers la droite et descendre de 4, or il a fait le contraire pour placer son 2nd point.

70 **a.** $2x + 2y = 30$ donc $y = -x + 15$

b. D'après la question **a.** la fonction qui a x associe y est affine et non linéaire donc Pierre a raison et Cindy a tort.

71 On complète en précisant alors que $b = 0$ donc $f(x) = ax$ donc f est linéaire.

72 **1. a.** $f(n) = 15n$

b. $g(n) = 30$

c. $h(n) = 50 - 12n$

2. Noé a raison, elles sont toutes affines et il y a des cas particuliers. f est linéaire et g est constante.

73 **1. a.** Au départ, la distance est nulle. On lit l'ordonnée à l'origine.

b. • On cherche l'antécédent de 20 : on lit l'abscisse du point du segment bleu d'ordonnée 20.

• On cherche l'antécédent de 10 : on lit l'abscisse du point du segment bleu d'ordonnée 10.

C. On lit l'image de 200, c'est-à-dire l'ordonnée du point du segment bleu d'abscisse 200 : on obtient la contenance du réservoir après 200 km.

Pour obtenir la quantité d'essence utilisée, on soustrait la valeur lue à la contenance du réservoir au départ.

2. a. Au départ, le réservoir contient 50 L.

b. • Max a parcouru environ 420 km lorsqu'il lui reste 20 L dans le réservoir.

• Max a parcouru environ 550 km lorsqu'il lui reste 10 L dans le réservoir.

c. L'image de 200 est environ 35.

50 – 35 = 15 ainsi Max a utilisé environ 15 L d'essence après 200 km.

74 **a.** $f(2) = -2 \times 2 + 5 = 1$ et $f(1) = -2 \times 1 + 5 = 3$.

On obtient donc le schéma :

$$\boxed{2} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \boxed{1} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \boxed{3}$$

b. On a $g(3) = 1$ et $g(1) = 2$.

Posons $g(x) = ax + b$, on a alors :

$$a = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

donc $g(x) = -\frac{1}{2}x + b$

$g(3) = 1$ donc :

$$1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 + b \text{ donc } b = \frac{5}{2} \text{ d'où } g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

12. QCM pour s'évaluer

75 **b.**	**76** **b.**	**77** **c.**	**78** **a.**
79 **c.**	**80** **b.**	**81** **c.**	**82** **a.**
83 **c.**	**84** **a. b. c**	**85** **b. c.**	**86** **a. c.**

13. Objectif Brevet

87 **1.**

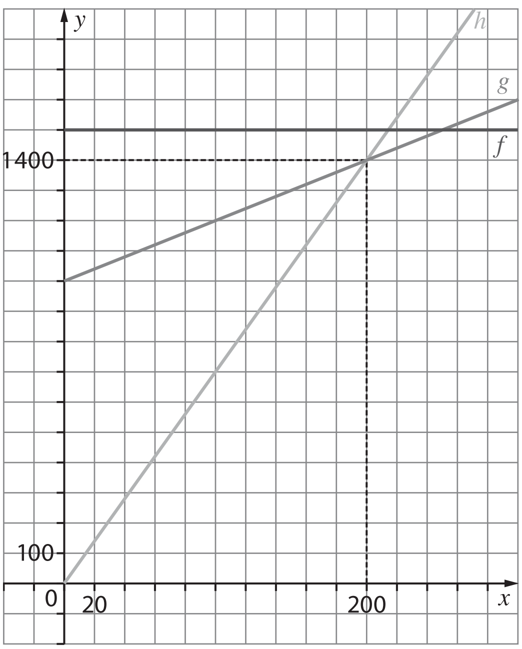
	Salaire de Félix	Salaire de Gaëlle	Salaire de Henry
Mois de janvier	1500	1520	1820
Mois de février	1500	1360	1260
Mois de mars	1500	1400	1400

2. Le salaire de Félix : 1 500.

Le salaire de Gaelle : 1 000 + 2x.

Le salaire de Henry : 7x.

3.



4. Le point d'intersection des représentations graphiques de *h* et *g* a pour abscisse 200.

La représentation graphique de *h* est au-dessus de celle de *g* à partir de 200 boîtiers, le salaire de Henry est supérieur à celui de Gaëlle.

5. En avril, Félix et Gaëlle ont eu le même salaire.

On résout $f(x) = g(x)$ et on obtient $x = 250$.

Félix a donc fabriqué 250 boîtiers.

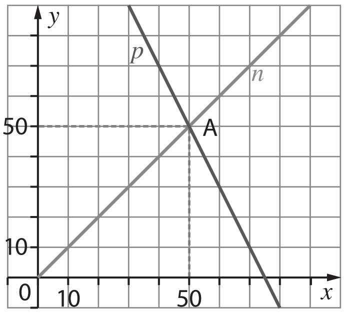
6. Les trois représentations graphiques ne sont pas concourantes, donc les trois salaires ne peuvent être identiques.

88 **1.** 50 secondes après son départ, le nageur se trouve à 50 m de A.

La pirogue se trouve à :

150 m – 2m/s × 50 secondes = 50 m du point A.

2. a.



b. Graphiquement, les deux droites se coupent au point A(50 ; 50) : ils se croisent 50 secondes après leur départ.

89 **1. a.** x varie entre 0 et 5.

b. Aire du triangle PTM :

PTM est un triangle rectangle en P. Son aire est égale à :

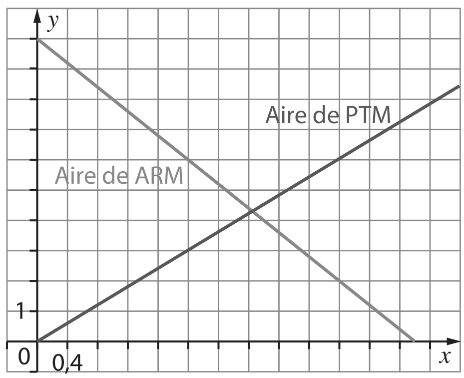
$$\frac{\text{TP} \times \text{PM}}{2} = \frac{3 \times x}{2} = 1{,}5x$$

Aire du triangle ARM :

ARM est un triangle rectangle en A. Son aire est égale à :

$$\frac{\text{AR} \times \text{AM}}{2} = 2(5 - x) = 10 - 2x$$

2. a.



b. Cette affirmation est fausse : seule la première fonction est linéaire, la seconde est une fonction affine non linéaire (sa représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère).

3. a. Graphiquement les aires sont égales pour $x \approx 2{,}9$ cm : on lit graphiquement l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

b. On résout l'équation $1{,}5x = 10 - 2x$ soit $3{,}5x = 10$ ce qui donne $x = \frac{10}{3{,}5} = \frac{20}{7}$.

14. Exercices d'approfondissement

90 Une démarche possible :

a. A 8 h du matin, Roméo a parcouru 8 km.

Si $f(x)$ est la distance (en km) parcourue par Roméo et $g(x)$ la distance (en km) parcourue par Juliette en fonction de la durée x (en h) qui s'est écoulée depuis 8 h du matin, on a :

$$f(x) = 4x + 8 \text{ et } g(x) = 16x$$

b. On résout l'équation $f(x) = g(x)$; on obtient $x = \frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ h = 40 min donc Juliette rejoint Roméo à 8 h 40 min.

$16 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3}$ ainsi ils seront à environ 10,7 km de la maison des Capulet.

Une autre démarche peut consister en une représentation graphiquedes distances parcourues par Roméo et par Juliette en fonction de la durée qui s'est écoulée depuis 6 h (ou depuis 8 h), puis en une lecture graphique des coordonnées du point d'intersection des deux segments.

91 **a.** Le tarif non adhérent est le premier tableau qui est un tableau de proportionnalité donc le tarif adhérent est le second tableau.

b. Déterminons le tarif adhérent $f(x) = ax + b$ avec :

$$a = \frac{(f(50) - f(10))}{(50 - 10)} = \frac{(13{,}50 - 10{,}70)}{(50 - 10)} = 0{,}07$$

et $f(10) = 10{,}70$ donc $10 \times 0{,}07 + b = 10{,}70$ donc $b = 10$.

Donc $f(x) = 0{,}07x + 10$.

Déterminons le tarif non adhérent qui correspond au premier tableau on obtient $g(x) = 0{,}1x$.

On résout l'inéquation $0{,}07x + 10 < 0{,}1x$.

On obtient $x > \frac{1\,000}{3}$. Or$x > \frac{1\,000}{3} \approx 3\,333{,}33$

donc à partir de 334 photos le tarif adhérent devient intéressant.

92 **a.** L'ordonnée à l'origine est 16 000 donc :

$$f(x) = ax + 16\,000$$

on a $f(7) = 7600$ donc $a \times 7 + 16000 = 7600$ donc $a = -1200$.

Le coefficient directeur de la droite est –1 200 ; cela signifie que la valeur de la voiture perd 1 200 \$ par an.

Donc $f(x) = -1200x + 16\,000$.

b. En 2020 la voiture a 10 ans donc sa valeur est de :

$$-1\,200 \times 10 + 16\,000 = 4\,000 \text{ \$}.$$

93 **a.** $f : d_7$ $g : d_4$ $h : d_2$ $k : d_1$ $l : d_5$ $m : d_6$

b. La droite (d_3) n'a pas été nommée. Elle est associée à la fonction définie par : $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$.

94 **c.** Il semble que AM = 7,5 cm.

d. Calculons AC. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on a alors :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \text{ d'où } AC = 15 \text{ cm}.$$

ABCD est un rectangle donc ses diagonales sont de même longueur donc BD = 15 cm.

On utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABC les droites (MN) et (BC) étant parallèles on a $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{AB}$ donc :

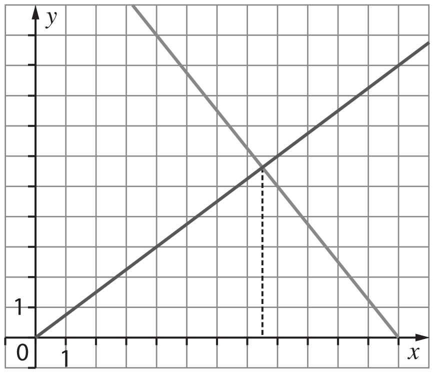
$$MN = (12 - x) \times \frac{15}{12} \text{ donc } MN = -\frac{5}{4}x + 15.$$

On utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABD les droites (MP) et (BD) étant parallèles on a : $\frac{AP}{AD} = \frac{AM}{AB}$

donc $\frac{AP}{9} = \frac{x}{12}$ d'où $AP = \frac{3}{4}x$.

Les segments [MN] et [AP] ont la même longueur se traduit par : $\frac{3}{4}x = -\frac{5}{4}x + 15$. La solution est 7,5.

Les segments [MN] et [AP] ont donc la même longueur lorsque AM = 7,5 cm.



f. Les deux fonctions données correspondent l'une à la distance AP, l'autre à la distance MN.

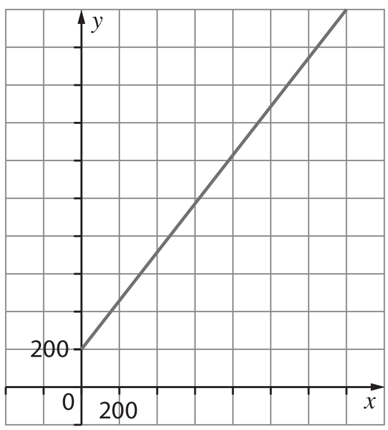
L'abscisse du point d'intersection des deux droites est la solution du problème ; on retrouve donc graphiquement que les distances MN et AP sont égales pour $x = 7{,}5$.

95 **a.** La masse totale est $1{,}5x + 200$.

b. on résout $1{,}5x + 200 = 2\,300$ on obtient $x = 1\,400$, on doit mettre 1 400 cm^3 de lessive

c. On représente graphiquement la fonction f définie par :

$$x \mapsto 1{,}5x + 200.$$



d. Un paquet de lessive dont la masse totale est 2 300 g contient 1 400 cm^3 de lessive (voir question **b.**).

Le volume d'un cube d'arête x est x^3.

À l'aide du tableur, on entre des valeurs de x et on fait calculer x^3.

On essaie d'approcher la valeur de x telle que x^3 soit proche de 1 400.

On obtient

	A	B	C	D
1	x	11	11,1	11,2
2	x^3	1331	1367,631	1404,928

Ainsi un paquet cubique de lessive dont la masse totale est 2 300 g a une arête de longueur 11,1 cm (à 1 mm près).

96 Un défi.

On a :

$$\frac{578-407}{65-46}=9 \text{ et } \frac{780-578}{87-65}=\frac{101}{11}$$

Ces deux rapports sont différents donc les points ne peuvent être alignés.

15. Tâche complexe : Crypter et décrypter

97 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Quels renseignements donne Allen dans son courriel sur sa façon de crypter le code de sa carte bancaire ?

Aide n° 2 : Par la fonction affine qu'utilise Allen, quelle est l'image de 3 ? quelle est l'image de 7 ?

Aide n° 3 : Trouver l'expression de la fonction affine f qui crypte les données sachant que :

$$f(3) = 17 \text{ et } f(7) = 33.$$

Aide n° 4 : Le codage du premier nombre est 37. Quel est le nombre qui a pour image 37 par la fonction f ?

2. Quelques commentaires

• Le contexte retenu pour cette tâche complexe est à la fois familier aux élèves, qui ont déjà certainement codé et décodé des suites de nombres ou de lettres, et nouveau, car ici on substitue un nombre à un autre nombre et car le cryptage a été fait à l'aide d'une fonction affine.

Les élèves ont donc ici à suivre un protocole, dans un contexte nouveau. La notion de fonction n'étant pas au socle commun, on valorisera toute compétence liée à la pratique d'une démarche scientifique, comme extraire des informations des deux documents, traduire une information en langage mathématique, raisonner, déduire, mettre en œuvre une démarche d'investigation.

On pourra notamment encourager les élèves qui auront trouvé rapidement le 3e chiffre du code (3).

• Une clé de cette tâche complexe est de réussir à traduire : « Je le crypterai avec une fonction affine. 3 deviendra 17 et 7 deviendra 33 ».

Une autre clé est d'interpréter les quatre nombres donnés par Allen dans son SMS comme étant les images des nombres du code de sa carte bancaire.

• Cette tâche complexe se fait donc en plusieurs étapes. Une fois les informations comprises vient le moment de réaliser des calculs, en deux temps :

– déterminer l'expression de la fonction affine utilisée par Allen pour crypter son code de carte bancaire, sachant que 3 a pour image 17 et que 7 a pour image 33.

– rechercher les antécédents par cette fonction des nombres transmis par Allen dans son SMS, afin de retrouver le code d'origine.

• *Remarque :* dans cette seconde phase, les élèves peuvent également déterminer les images des dix chiffres par la fonction affine trouvée (en effet toute carte bancaire est munie d'un code secret constitué de quatre chiffres). L'utilisation d'un tableur ou un usage pertinent de la calculatrice peut alors s'avérer utile afin de gagner du temps. Il suffit alors aux élèves de lire les chiffres qui ont pour images 37 ; 9 ; 17 et 29.

3. Éléments de réponse

Posons f la fonction affine telle que :

$f(3) = 17$ et $f(7) = 33$.

On a $f(x) = ax + b$ avec $a = \dfrac{33-17}{7-3} = 4$ (en utilisant la proportionnalité des accroissements).

On a alors $f(x) = 4x + b$.

En utilisant par exemple $f(3) = 17$, on obtient :

$17 = 4 \times 3 + b$ soit $b = 5$ donc $f(x) = 4x + 5$.

On résout ensuite les équations $4x + 5 = 37$; $4x + 5 = 9$; $4x + 5 = 17$ et $4x + 5 = 29$ pour trouver le code de la carte bancaire d'Allen.

On trouve comme code : 8 – 1 – 3 – 6

Remarque : dans le cas où les élèves cherchent les images des dix chiffres à l'aide d'un tableur, on obtient alors le tableau de valeurs ci-dessous (on pourra dans ce cas valoriser le réinvestissement de certaines fonctionnalités du tableur comme le remplissage automatique de la première ligne ou l'entrée de la formule =4*B1+5 dans la cellule B2 avec copie vers la droite).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$f(x)$	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41

Par lecture de ce tableau de valeurs, on retrouve que l'image de 3 est 17 et que l'image de 7 est 33.

On trouve aussi que le nombre qui a pour image 37 est 8, que celui qui a pour image 9 est 1, que celui qui a pour image 17 est 3 (ce qui était déjà donné par le courriel de Allen) et enfin que le nombre qui a pour image 29 est 6.

La démarche avec la calculatrice (*cf* page 157 du manuel) est de même nature.

98 **1.** –2 **2.** 3 **3.** B(–1 ; 5) **4.** $-\dfrac{1}{2}$ **5.** E(0 ; 3)

99 **a.** $f(x) = 16$ $a = 0$ $b = 16$

b. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - (4x^2 + 28x + 49) = -40x - 40$

$a = b = -40$

c. $f(x) = (x\sqrt{2})^2 - 1 - 2(x^2 - 10x + 25) = 20x - 51$

$a = 20$ $b = -51$

100 **a.**

	A	B
1	1	25
2	5	25
3	8	25
4	10	25
5	248	25

Conjecture : on obtient toujours 25.

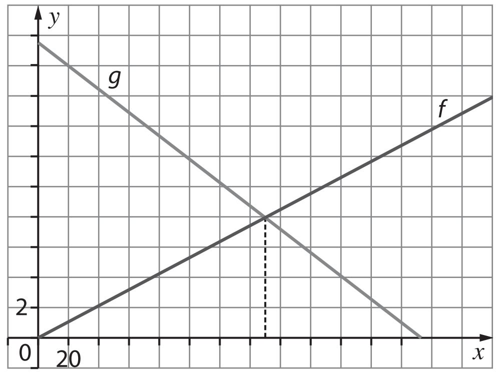
b. $x^2 - (x + 5)(x - 5) = x^2 - (x^2 - 25) = 25$

La fonction de Zoé est une fonction affine constante.

101 **1.** Éric : $f(x) = \dfrac{5{,}2x}{100} = 0{,}052\,x$

Paola : $g(x) = \dfrac{7{,}8(250 - x)}{100} = -\,0{,}078x + 19{,}5$

2.



On trace les deux droites et on lit l'abscisse de leur point d'intersection qui est 150.

3. On résout $0{,}052x = -\,0{,}078x + 19{,}5$ on trouve $x = 150$.

CHAPITRE 11

Triangles rectangles. Trigonométrie

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

• En classe de **6e**, les élèves ont vu ce qu'était un triangle rectangle. Ils ont reproduit ou construit des figures simples sur papier et à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

• En classe de **5e**, les élèves ont étudié la propriété de la somme des angles d'un triangle. Ils l'ont appliquée au cas particulier du triangle rectangle le caractérisant donc par l'existence de deux angles aigus complémentaires.

• En classe de **4e**, les élèves ont appris à caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore. Ils ont calculé la longueur d'un côté à partir de celles des deux autres côtés.

Dans le cadre du socle commun, on ne distingue pas le théorème de Pythagore de sa réciproque ni de sa contraposée.

On considère que l'égalité de Pythagore caractérise la propriété d'être rectangle.

– Toutes les compétences citées précédemment font partie des exigibles du socle commun. Les propriétés qui suivent n'en font pas partie.

• En classe de **4e**, le triangle rectangle a été caractérisé par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle. Les points appartenant à un cercle de diamètre donné sont caractérisés par la propriété de l'angle droit.

• En classe de **4e**, les élèves ont utilisé, dans un triangle rectangle, la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs de ses côtés. Ils ont utilisé la calculatrice : pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné, pour déterminer une valeur approchée de la mesure d'un angle aigu dont on connaît le cosinus.

2. Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

• Les buts de **l'activité 1** sont :

– rappeler ce qu'est le cosinus d'un angle aigu,

– amener les élèves à formuler des conjectures concernant deux autres quotients.

Au **d.**, les élèves devront reconnaître le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$. L'aide du logiciel de géométrie dynamique permet de rappeler que ce quotient ne dépend pas des longueurs AB et BC mais uniquement de l'angle $\widehat{ABC}$.

Au **e.**, Ils pourront constater que les quotients $\frac{AC}{BC}$ et $\frac{AC}{AB}$ ne semblent pas dépendre des longueurs AC, BC et AB mais uniquement de l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle rectangle ABC.

• Dans **l'activité 2**, on démontre les conjectures faites à **l'activité 1**. On définit le sinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle. Nous ne revenons pas sur l'égalité permettant de définir le cosinus d'un angle aigu puisqu'elle a été vue en classe de 4e. Des longueurs étant positives et l'hypoténuse étant le plus long côté d'un triangle rectangle, on peut remarquer que le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1. Le côté adjacent à un angle aigu peut être plus court ou plus long que son côté opposé. La tangente d'un angle aigu est donc un nombre positif qui peut être inférieur ou supérieur à 1.

• Dans **l'activité 3**, on utilise un sinus pour calculer une longueur. C'est l'occasion de revenir sur l'utilisation de la calculatrice. On insistera sur l'importance du réglage en mode degré (voir **exercice résolu 1 p. 213**). Au **c.**, pour déterminer la longueur BC, on peut utiliser le cosinus de l'angle $\widehat{BCA}$ ou le théorème de Pythagore à partir de l'arrondi de la longueur AB obtenu à la question **b.**. On peut faire remarquer qu'avec le cosinus, on évite l'utilisation d'une valeur approchée.

• Dans **l'activité 4**, à partir de la donnée de deux longueurs, on détermine une mesure d'angle. Les élèves ne sont pas guidés et doivent trouver une démarche pour résoudre le problème. Certains auront peut-être l'idée d'utiliser le théorème de Pythagore puis le cosinus. D'autres utiliseront peut-être le cosinus puis les angles complémentaires. Ce sera alors l'occasion de remarquer que l'utilisation du sinus permet d'obtenir directement le résultat. On expliquera aussi l'utilisation de la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de l'angle aigu dont on connaît le sinus.

L'activité 5 propose des exemples d'utilisation de la trigonométrie. Au **1.**, on établit le lien entre la pente d'une route et son angle d'élévation par rapport à l'horizontale. Au **2.**, la démarche n'est pas guidée. Les élèves doivent faire preuve d'initiative. La donné de la pente permet de déterminer une valeur approchée de l'angle d'élévation de la route. À partir de celle-ci, on pourra calculer une valeur approchée du dénivelé entre les deux cols et ainsi obtenir l'altitude demandée. La précision de l'arrondi de la mesure de l'angle est importante pour l'obtention du résultat final. On pourra le faire remarquer en comparant les résultats trouvés par les élèves. L'altitude du col du Galibier est d'environ 2 642 m. La valeur approchée de la mesure de l'angle doit être prise au centième près.

• Dans **l'activité 6**, les élèves doivent effectuer des constructions. Ces problèmes de constructions permettent de comprendre le lien entre un angle aigu et son cosinus, son sinus ou sa tangente. L'unité de longueur choisie pourra être le cm ou une ouverture de compas prise au hasard. Cette activité est aussi l'occasion de comprendre pourquoi un sinus ne peut pas être supérieur à 1 alors qu'une tangente peut l'être.

3. Deux formules de trigonométrie

• Conformément aux commentaires du programme, **l'activité 7** propose les démonstrations des formules :

$$\cos^2\hat{a} + \sin^2\hat{a} = 1 \text{ et } \tan\hat{a} = \frac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}}$$

Au **c.**, on utilise les notations $(\cos^2\hat{a})^2$ et $(\sin^2\hat{a})^2$ pour que les élèves comprennent qu'il s'agit du carré de $\cos^2\hat{a}$ et du carré de $\sin^2\hat{a}$. On introduira, à ce moment-là, les notations $\cos^2\hat{a}$ et $\sin^2\hat{a}$ pour désigner ces carrés.

4. Savoir-faire

• Nous avons choisi de commencer par l'utilisation de la calculatrice puisque c'est indispensable pour la suite. On détaille, dans **l'exercice résolu 1**, le fonctionnement de deux modèles de calculatrices fréquemment utilisés au collège. Dans la rubrique « **J'applique** », les **exercices 2 et 3** permettent de vérifier que les élèves utilisent correctement leur calculatrice.

• Dans **l'exercice résolu 4**, on propose de calculer des longueurs. Au **a.**, on connaît la mesure d'un angle aigu et la longueur de l'hypoténuse. On cherche la longueur du côté opposé à l'angle connu. On utilisera donc le sinus. La démarche est analogue à celle de **l'activité 3**. La longueur cherchée se trouve ici au numérateur. On passe de « $\sin 28° = \frac{AC}{6}$ » à « $AC = 6 \times \sin 28°$ » en multipliant chaque membre de l'égalité par 6. Au **b.**, on connaît la mesure d'un angle aigu et la longueur de son côté opposé. On cherche la longueur du côté adjacent à l'angle connu. On utilisera donc la tangente. La longueur cherchée se trouve ici au dénominateur. On passe de « $\tan 49° = \frac{1,2}{FG}$ » à « $FG = \frac{1,2}{\tan 49°}$ » en deux étapes. Tout d'abord, on multiplie chaque membre de l'égalité par FG et on obtient « $FG \times \tan 49° = 1,2$ ». Ensuite, on divise chaque membre de l'égalité par $\tan 49°$.

Dans la rubrique « **J'applique** », les **exercices 7, 8 et 9** proposent des calculs de longueurs. Dans **l'exercice 9**, il faudra utiliser les valeurs exactes des longueurs AE et CE pour calculer le périmètre du triangle ACE. On ne prend la calculatrice, que pour obtenir une valeur approchée du périmètre.

• Dans **l'exercice résolu 5**, on propose de déterminer des angles. On connaît la longueur de l'hypoténuse ainsi que celle d'un des côtés de l'angle droit. Pour déterminer l'angle entre les deux côtés de longueurs connues, on utilise le cosinus. Il faut faire remarquer que l'utilisation d'une valeur approchée du cosinus peut entraîner une erreur sur la mesure de l'angle. En effet, en prenant 0,4 au lieu de $\frac{2,9}{6}$, la calculatrice affiche : Arccos (0,4 66.421182152

On a donc une erreur de plus de 6° sur la mesure de l'angle. Il est donc important d'utiliser la valeur exacte du cosinus de l'angle cherché, soit ici, $\frac{2,9}{6}$. Dans la rubrique « **J'applique** », les **exercices 10 et 11**, proposent des situations du même type. Dans **l'exercice 11**, les élèves devront extraire de l'énoncé les informations nécessaires à la résolution du problème.

• Dans **l'exercice résolu 6**, on propose d'utiliser les formules de trigonométrie démontrées à **l'activité 7**. À partir du cosinus de l'angle, on peut déterminer son sinus et sa tangente. Dans la rubrique « **J'applique** », **l'exercice 12** propose de déterminer le cosinus et la tangente d'un angle aigu connaissant son sinus.

5. Compléments

• La connaissance et l'utilisation des relations trigonométriques dans un triangle rectangle ne font pas partie du socle commun de 3e. C'est pourquoi peu d'exercices sont estampillés « socle » dans ce chapitre. On peut néanmoins évaluer des capacités inscrites dans la compétence 3. (voir tableau pages 8 à 11)

• Dans les exercices à l'oral, la rubrique « **Triangle rectangle** » permet de vérifier rapidement que les élèves connaissent le vocabulaire du triangle rectangle. Ensuite, dans la rubrique « **Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu** », on vérifie la connaissance des relations trigonométrique. Puis, il s'agit d'être capable de choisir la relation à utiliser et enfin de savoir l'utiliser.

• La rubrique « **Triangle rectangle** » des exercices d'application permet de faire le point sur les propriétés vues dans les classes précédentes.

Dans la rubrique « **Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu** », on trouve tout d'abord des exercices permettant de vérifier la connaissance du vocabulaire et des relations trigonométriques dans un triangle rectangle. On retrouve également des exercices de constructions (analogues à **l'activité 6**), puis des calculs de longueurs et de mesures d'angles.

Les **exercices 50 à 53** proposent des exemples issus de situations concrètes. Dans la rubrique « Prendre des initiatives », on trouve des exercices dans lesquels les élèves ne sont pas guidés. Ils doivent eux-mêmes trouver la démarche à suivre pour obtenir la réponse à la question posée.

• Les exercices de la rubrique « **Présenter, argumenter, communiquer** » permettent de travailler la compétence 1 : maîtrise de la langue française.

Ils permettent aussi d'évaluer certaines capacités de la compétence 3 : raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique (**70, 71, 73**) ; présenter la démarche suivis, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté (**69, 74, 75**).

• Des exercices proposés au DNB (ou des extraits) se trouvent dans J'applique : dans **l'Atelier brevet** p. 216 ; n° **11** p. 215 ; n° **13** et **14** ; n° **87** à **91** et dans **Objectif brevet** p. 223 ; n° **95** p 224.

• Les exercices n° **89** à **91** p. 223 et le n° **94** p. 224 proposent des situations à partir de figures de l'espace.

• Pour la **tâche complexe**, les élèves pourront travailler par petits groupes. Elle permet clairement d'évaluer une des capacités de la compétence 3 : « **Rechercher, extraire et organiser l'information utile** ».

Chaque groupe pourra rendre compte du résultat de ses recherches.

On pourra alors évaluer la capacité « **Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté** ».

• Dans la rubrique « **En route vers la Seconde** », deux exercices sont proposés. L'un plus général et l'autre issu d'une situation concrète.

Corrigés

1. Devinettes

Devinette

Indice : Le cosinus de 60° est égal à 0,5.

En notant x la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle, on a $\cos 60° = \frac{250}{x}$. Donc $x = \frac{250}{0,5} = 500$ m.

En notant h la hauteur de la falaise, dans le triangle rectangle représenté, le théorème de Pythagore permet d'écrire $500^2 = 250^2 + h^2$.

Donc $h^2 = 500^2 - 250^2$ et $h = \sqrt{187\,500}$.

Avec la calculatrice, on trouve $h \approx 433$ m.

Devinette

Indice : Quelle est la nature du triangle formé par les maisons d'Alex, de Ben et de Célia?

$500^2 = 250\,000$; $300^2 = 90\,000$ et $400^2 = 160\,000$.

$160\,000 + 90\,000 = 250\,000$.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de dire que le triangle ABC formé par les maisons d'Alex, de Ben et de Célia est rectangle en C. Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse. La maison d'Olivier se situe donc au milieu du segment joignant les maisons d'Alex et de Ben. AB = 500 m donc AB : 2 = 250 m.

Olivier habite à 250 m de chez ses amis.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : b.

L'hypoténuse est le côté [EC] et le côté opposé à $\widehat{RCE}$ est [RE].

2 Bonne réponse : a.

Le point C appartient au cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABC est rectangle en C donc la réponse **a.** est exacte.

$61 + 28 \neq 90$ donc la réponse **b.** est fausse.

$13,5^2 \neq 8,2^2 + 10,7^2$ donc la réponse **c.** est fausse.

3 Bonne réponse : c.

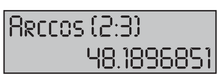
Les triangles ADE et ABC forment une configuration de Thalès donc les longueurs des côtés du triangle ADE (AD, AE et DE) sont proportionnelles à celles des côtés du triangle ABC (AC, AB et BC).

4 Bonne réponse : b.

Le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle par la longueur de l'hypoténuse.

5 Bonne réponse : a.

Dans le triangle ABC rectangle en C, $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$ c'est-à-dire $\frac{2}{3}$. La calculatrice doit être en mode degré, on trouve alors $\widehat{BAC} \approx 48°$.



6 Bonne réponse : c.

Dans le triangle MNP rectangle en M, $\cos \widehat{MPN} = \frac{MP}{NP}$, c'est-à-dire $\cos 30° = \frac{2}{NP}$.

On a donc $NP \times \cos 30° = 2$ d'où $NP = \frac{2}{\cos 30°}$.

3. Calcul mental

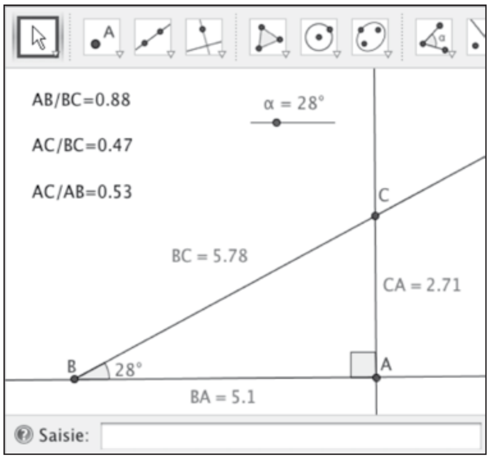
7 **a.** complémentaires
b. ni l'un ni l'autre
c. supplémentaires
d. complémentaires
e. complémentaires

4. Activités

Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

1 Conjecturer avec un logiciel

a. b. c. d.



$\frac{AB}{BC}$ correspond au cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

e. Lorsque l'on déplace le point A, les rapports affichés ne changent pas. On peut donc penser qu'ils ne dépendent que de l'angle $\widehat{ABC}$.

2 Démontrer les conjectures

a. Les points B, A et A' sont alignés de même que les points B, C et C'. Les droites (AC) et (A'C') sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB), elles sont donc parallèles.

Les triangles ABC et A'BC' forment donc une configuration de Thalès.

b. Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{AC}{A'C'}$$

c. On sait que $\frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$, donc $BC \times A'C' = AC \times BC'$.

Par conséquent, $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'}$. Ainsi le rapport $\frac{AC}{BC}$ ne dépend que de l'angle $\widehat{ABC}$ ».

d. On sait que $\frac{BA}{BA'} = \frac{AC}{A'C'}$,

donc $BA \times A'C' = AC \times BA'$. Par conséquent, $\frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'}$.

3 Calculer des longueurs

a. Dans le triangle ABC rectangle en B, $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC}$,

c'est-à-dire $\sin 75° = \dfrac{AB}{3{,}2}$.

On a donc $AB = 3{,}2 \times \sin 75°$.

b.

Avec la calculatrice, on trouve $AB \approx 3{,}09$ m.

Dans le triangle ABC rectangle en B,

- Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$AC^2 = BC^2 + AB^2$, c'est-à-dire $3{,}2^2 \approx BC^2 + 3{,}09^2$.

Ainsi, $BC^2 \approx 3{,}2^2 - 3{,}09^2$.

D'où $BC \approx \sqrt{0{,}6919}$.

Avec la calculatrice, en arrondissant au centimètre, on trouve $BC \approx 0{,}83$ m.

- $\cos \widehat{BCA} = \dfrac{BC}{AC}$, c'est-à-dire $\cos 75° = \dfrac{BC}{3{,}2}$.

On a donc $BC = 3{,}2 \times \cos 75°$.

Avec la calculatrice, en arrondissant au centimètre, on trouve $BC \approx 0{,}83$ m.

4 Déterminer un angle

Dans le triangle rectangle, le sinus de l'angle cherché est égal à $\dfrac{9}{40}$ soit 0,225.

Avec la calculatrice, on trouve que l'angle entre la rampe et l'horizontale mesurait environ 13°.

5 Utiliser la trigonométrie

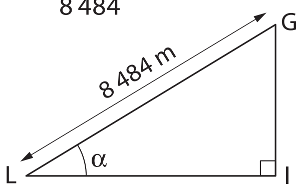
1. a. La pente de la route est égale au quotient du côté opposé à l'angle α par son côté adjacent. Elle correspond donc à la tangente de l'angle α.

b. Pour une pente de 15 %, on a : $\tan \alpha = 0{,}15$.

Avec la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 8{,}5$ °.

2. Dans le triangle GLI rectangle en I, $\sin \alpha = \dfrac{GI}{LG}$

c'est-à-dire $\sin \alpha = \dfrac{GI}{8\,484}$.



Donc $GI = 8\,484 \times \sin \alpha$.

D'autre part, $\tan \alpha = 6{,}9$ %.

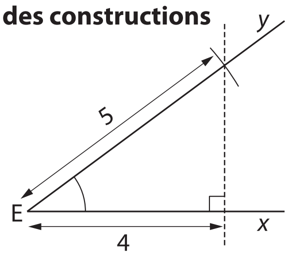
Avec la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3{,}95°$.

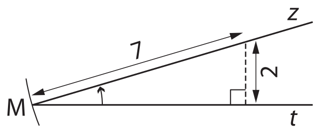
Ainsi $GI \approx 8\,484 \times \sin 3{,}95°$. Soit $GI \approx 584$ m.

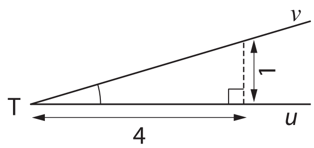
$2\,058 + 584 = 2\,642$. L'altitude de col du Galibier est d'environ 2 642 m.

6 Effectuer des constructions

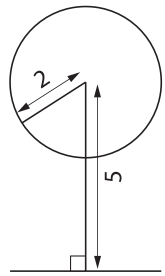
a.



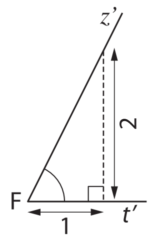




b. Il n'est pas possible de construire un angle aigu ayant pour sinus $\dfrac{5}{2}$ car si le côté opposé à l'angle mesure 5, l'hypoténuse ne peut pas mesurer 2.



c. Il est possible de construire un angle aigu ayant pour tangente 2. Il suffit que la longueur de son côté opposé soit égale au double de la longueur de son côté adjacent.



Deux formules de trigonométrie

7 Établir des relations entre cosinus, sinus, tangente

a. Dans le triangle ABC rectangle en A,

$\cos \hat{a} = \dfrac{AB}{BC}$, $\sin \hat{a} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\tan \hat{a} = \dfrac{AC}{AB}$.

b. Dans le triangle ABC rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

c. $$(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Or, d'après **b.**, $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

donc $(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = 1$.

d. $$\frac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}} = \frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB}.$$

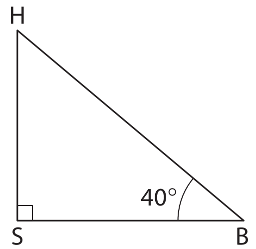
et comme $\tan \hat{a} = \dfrac{AC}{AB}$, on a $\tan \hat{a} = \dfrac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}}$.

5. J'applique

2 **a.** 0,27 **b.** 8,98 **c.** 0,78 **d.** 0,78 **e.** 2,33

3 **a.** 71° **b.** 48° **c.** 50°

7 Dans le triangle HSB rectangle en S : $\sin\widehat{SBH} = \dfrac{SH}{HB}$, c'est-à-dire $\sin 40° = \dfrac{SH}{3}$.



Donc $SH = 3 \times \sin 40°$.

Avec la calculatrice, on trouve $SH \approx 1{,}93$ m.

8 **a.** Dans le triangle KAP rectangle en A :

$\sin\widehat{APK} = \dfrac{KA}{KP}$ c'est-à-dire $\sin 35° = \dfrac{KA}{8{,}6}$.

Donc $KA = 8{,}6 \times \sin 35°$.

Avec la calculatrice, on trouve $KA \approx 4{,}9$ cm.

b. $\cos\widehat{APK} = \dfrac{AP}{KP}$ c'est-à-dire $\cos 35° = \dfrac{AP}{8{,}6}$.

Donc $AP = 8{,}6 \times \cos 35°$.

Avec la calculatrice, on trouve $AP \approx 7$ cm.

9 Dans le triangle ACE rectangle en C :

$\sin\widehat{CEA} = \dfrac{AC}{AE}$ c'est-à-dire $\sin 29° = \dfrac{3{,}7}{AE}$.

Donc $AE \times \sin 29° = 3{,}7$ et $AE = \dfrac{3{,}7}{\sin 29°}$.

$\tan\widehat{CEA} = \dfrac{AC}{CE}$ c'est-à-dire $\tan 29° = \dfrac{3{,}7}{CE}$.

Donc $CE \times \tan 29° = 3{,}7$ et $CE = \dfrac{3{,}7}{\tan 29°}$.

Le périmètre du triangle ACE est égal à AC + AE + CE.

Il est donc exactement égal à :

$$3{,}7 + \frac{3{,}7}{\sin 29°} + \frac{3{,}7}{\tan 29°}.$$

Avec la calculatrice, on trouve environ 18,006 cm

Le périmètre est strictement supérieur à 18, c'est Manon qui a raison.

10 Dans le triangle RST rectangle en R :

$\tan\widehat{RST} = \dfrac{RT}{RS}$ c'est-à-dire $\tan\widehat{RST} = \dfrac{5{,}1}{7{,}2}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{RST} \approx 35°$.

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc $\widehat{RTS} = 90° - \widehat{RST}$.

Ainsi $\widehat{RTS} \approx 90° - 35°$ c'est-à-dire $\widehat{RTS} \approx 55°$.

11 $BM = BC : 2 = AD : 2 = 3$ m.

Dans le triangle SBM rectangle en M :

$\tan\widehat{SBM} = \dfrac{SM}{BM}$ c'est-à-dire $\tan\widehat{SBM} = \dfrac{1{,}8}{3} = 0{,}6$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{SBM} \approx 31°$.

12 On sait que $\cos^2\hat{a} + \sin^2\hat{a} = 1$, donc :

$$\cos^2\hat{a} + 0{,}28^2 = 1.$$

On a donc $\cos^2\hat{a} = 1 - 0{,}28^2 = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$

Puisque $\cos^2\hat{a} > 0$, on en déduit que :

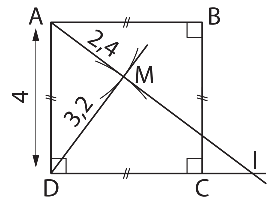
$\cos\hat{a} = \sqrt{0{,}9216}$ c'est-à-dire $\cos\hat{a} = 0{,}96$.

On sait que $\tan\hat{a} = \dfrac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}}$, donc : $\tan\hat{a} = \dfrac{0{,}28}{0{,}96}$

c'est-à-dire $\tan\hat{a} = \dfrac{7}{24}$.

6. Atelier Brevet

13 **1.**



2. $AM^2 = 2{,}4^2 = 5{,}76$

$DM^2 = 3{,}2^2 = 10{,}24$

$AD^2 = 4^2 = 16$

$5{,}76 + 10{,}24 = 16$, on a donc $AM^2 + DM^2 = AD^2$.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de dire que le triangle AMD est rectangle en M.

3. Dans le triangle AMD rectangle en M :

$$\tan\widehat{DAM} = \frac{DM}{AM},$$

c'est-à-dire $\tan\widehat{DAM} = \dfrac{3{,}2}{2{,}4} = \dfrac{4}{3}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{DAM} \approx 53°$.

4. Dans le triangle ADI rectangle en D :

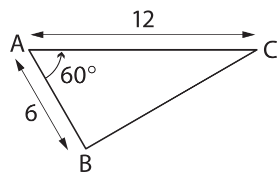
$$\tan\widehat{DAI} = \frac{DI}{AD}, \text{ c'est-à-dire : } \tan\widehat{DAI} = \frac{DI}{4}.$$

On a donc $DI = 4 \times \tan\widehat{DAI}$.

Or $\widehat{DAI} = \widehat{DAM}$ et d'après **3.** $\tan\widehat{DAM} = \dfrac{4}{3}$.

Donc $DI = 4 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3}$, d'où $DI \approx 5{,}3$ cm.

14 **1.**



2. $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$. D'après la formule d'Al-Kashi, on a donc $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \dfrac{1}{2}$.

Et par suite $BC^2 = AC^2 + AB^2 - AC \times AB$.

C'est-à-dire $BC^2 = 12^2 + 6^2 - 12 \times 6$

$BC^2 = 144 + 36 - 72$

$BC^2 = 108$.

3. $AB^2 = 6^2 = 36$

D'après **2.**, $BC^2 = 108$

$AC^2 = 12^2 = 144$

$36 + 108 = 144$, on a donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de dire que le triangle ABC est rectangle en B.

7. Exercices à l'oral

Triangle rectangle

15 **1. a.** [DG] est l'hypoténuse du triangle rectangle DRG.

b. Pour l'angle $\widehat{GDR}$, [GR] est le côté opposé et [DR] est le côté adjacent.

2. L'angle $\widehat{RGD}$ a [RG] pour côté adjacent et [DR] pour côté opposé.

16 **a.** [MP] **b.** [ML] **c.** [ML].

Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

17 **a.** $\frac{UO}{UI}$ **b.** $\frac{OI}{UI}$ **c.** $\frac{OI}{UO}$

18 **a.** $\cos\widehat{OVL}$ **b.** $\tan\widehat{OVL}$ **c.** $\sin\widehat{OVL}$

19 **1.** Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$AC^2 = BC^2 + AB^2$, c'est-à-dire $AC^2 = 3^2 + 4^2$.
Ainsi, $AC^2 = 9 + 16 = 25$.
D'où $AC = \sqrt{25}$ et AC = 5 dm.

2. a. $\cos\widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$ donc $\cos\widehat{ACB} = 0{,}8$.

b. $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$ donc $\sin\widehat{ACB} = 0{,}6$.

c. $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ donc $\tan\widehat{ACB} = 0{,}75$.

20 **1.** $GP^2 = 5^2 = 25$
$GR^2 = 12^2 = 144$
$PR^2 = 13^2 = 169$
$25 + 144 = 169$, on a donc $GP^2 + GR^2 = PR^2$.
La réciproque du théorème de Pythagore permet de dire que le triangle PGR est rectangle en G.

2. a. $\cos\widehat{GPR} = \frac{GP}{PR} = \frac{5}{13}$.

b. $\sin\widehat{GPR} = \frac{GR}{PR} = \frac{12}{13}$.

c. $\tan\widehat{GPR} = \frac{GR}{GP} = \frac{12}{5}$.

21 **a.** Dans le triangle BAC : $\cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$.

Dans le triangle HAC : $\cos\widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$.

b. Dans le triangle BAC : $\sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$.

Dans le triangle HAC : $\sin\widehat{BAC} = \frac{HC}{AC}$.

c. Dans le triangle BAC : $\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$.

Dans le triangle HAC : $\tan\widehat{BAC} = \frac{HC}{AH}$.

22 **a.** Il est préférable d'utiliser le cosinus.
b. Il est préférable d'utiliser la tangente.

23 **1.** La réponse exacte est **b.** $AB = 5 \times \sin 40°$.

2. La réponse exacte est **c.** $EF = \frac{8}{\tan 25°}$.

24 **a.** $\cos 66° = \frac{AB}{12}$ donc $AB = 12 \times \cos 66°$.

b. $\tan 57° = \frac{5}{AB}$ donc $AB = \frac{5}{\tan 57°}$.

25 **a.** $\sin\widehat{ABC} = \frac{4}{14}$. **b.** $\tan\widehat{ABC} = \frac{5}{2}$.

Deux formules de trigonométrie

26 **a.** On sait que $\cos^2\widehat{ABC} + \sin^2\widehat{ABC} = 1$, donc :

$$0{,}8^2 + \sin^2\widehat{ABC} = 1.$$

On a donc : $\sin^2\widehat{ABC} = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.
Puisque $\sin\widehat{ABC} > 0$, on en déduit que :
$\sin\widehat{ABC} = \sqrt{0{,}36}$ c'est-à-dire $\sin\widehat{ABC} = 0{,}6$.

b. On sait que $\tan\widehat{ABC} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}}$,

donc : $\tan\widehat{ABC} = \frac{0{,}6}{0{,}8}$ c'est-à-dire $\tan\widehat{ABC} = \frac{3}{4}$.

27 On sait que $\tan\hat{a} = \frac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}}$, donc : $\tan\hat{a} = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}}$

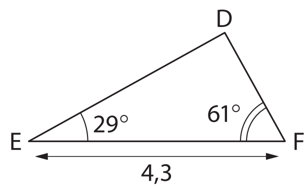
c'est-à-dire $\tan\hat{a} = \frac{15}{8}$.

8. Exercices d'application

Triangle rectangle

28 **1. a.** [AC] **b.** [AB] **c.** [AB]
2. a. $\widehat{BCH}$ **b.** $\widehat{CBH}$

29



$29° + 61° = 90°$
Le triangle DEF a deux angles aigus complémentaires, donc il est rectangle.

30 **a.** $\widehat{MPN} = 90° - 45° = 45°$.

b. $\widehat{MPN} = \widehat{MNP} = 45°$ donc le triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

31 **a.** Dans le triangle AEL rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$EL^2 = AE^2 + AL^2,$$

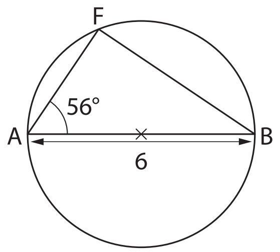
c'est-à-dire $EL^2 = 2{,}4^2 + 7^2$.
Ainsi, $EL^2 = 5{,}76 + 49 = 54{,}76$.
D'où $EL = \sqrt{54{,}76}$ et EL = 7,4 cm.

b. Le triangle AEL est rectangle en A donc son cercle circonscrit est le cercle de diamètre [EL].
Le centre du cercle circonscrit à ce triangle est donc le milieu de [EL] et son rayon est la moitié de 7,4 cm soit 3,7 cm.

32 **a.** $AT^2 = 5{,}7^2 = 32{,}49$
$TU^2 = 7{,}6^2 = 57{,}76$

$AU^2 = 9{,}5^2 = 90{,}25$
$32{,}49 + 57{,}76 = 90{,}25$
on a donc $AT^2 + TU^2 = AU^2$.
La réciproque du théorème de Pythagore permet de dire que le triangle ATU est rectangle en T.
b. Dans le triangle AOU rectangle en O, le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$$AU^2 = AO^2 + OU^2,$$
c'est-à-dire $9{,}5^2 = AO^2 + 8{,}1^2$.
Ainsi, $AO^2 = 9{,}5^2 - 8{,}1^2$.
D'où $AO = \sqrt{24{,}64}$.
Avec la calculatrice, en arrondissant au mm, on trouve
$$AO \approx 5 \text{ cm}.$$

33



Le point F appartient au cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABF est rectangle en F.
Les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{BAF}$ sont donc complémentaires.
Ainsi $\widehat{ABF} = 90° - 56° = 34°$.

Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

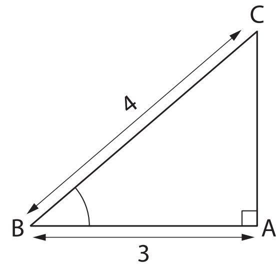
34 L'hypoténuse est [BI].
Le côté adjacent à l'angle $\widehat{TBI}$ est [TB].
Le côté opposé à l'angle $\widehat{TBI}$ est [TI].
Donc $\cos \widehat{TBI} = \dfrac{TB}{BI}$, $\sin \widehat{TBI} = \dfrac{TI}{BI}$ et $\tan \widehat{TBI} = \dfrac{TI}{TB}$,

35 Dans le triangle DOR rectangle en O,
a. $\sin \widehat{RDO} = \dfrac{OR}{DR}$ **b.** $\cos \widehat{RDO} = \dfrac{OD}{DR}$
c. $\tan \widehat{DRO} = \dfrac{OD}{OR}$ **d.** $\tan \widehat{RDO} = \dfrac{OR}{OD}$

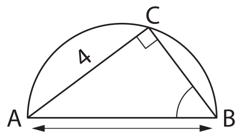
36 **a.** Dans le triangle TOC rectangle en T, le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$$OC^2 = TO^2 + TC^2,$$
c'est-à-dire $7{,}5^2 = TO^2 + 6^2$.
Ainsi, $TO^2 = 7{,}5^2 - 6^2 = 20{,}25$.
D'où $TO = \sqrt{20{,}25}$.
Avec la calculatrice, on trouve TO = 4,5 cm.
b. $\cos \widehat{TOC} = \dfrac{TO}{OC} = \dfrac{4{,}5}{7{,}5} = \dfrac{3}{5}$,
$\sin \widehat{TOC} = \dfrac{TC}{OC} = \dfrac{6}{7{,}5} = \dfrac{4}{5}$,
$\tan \widehat{TOC} = \dfrac{TC}{TO} = \dfrac{6}{4{,}5} = \dfrac{4}{3}$.

37 **a.** Dans le triangle 3.
b. Dans le triangle 1.
c. Dans le triangle 2.

38

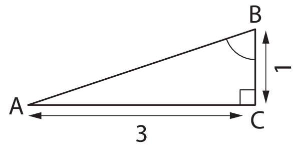


39



40 Impossible

41

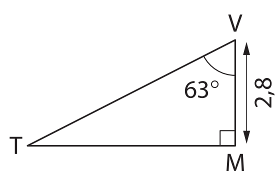


42 **1. a.** [AD] est le côté opposé à l'angle $\widehat{AND}$.
b. Dans le triangle ADN rectangle en D :
$\sin \widehat{AND} = \dfrac{DA}{AN}$ c'est-à-dire $\sin 35° = \dfrac{DA}{12}$.
Donc $DA = 12 \times \sin 35°$.
Avec la calculatrice, on trouve DA ≈ 6,88 m.
2. a. [ND] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{AND}$.
b. Dans le triangle ADN rectangle en D :
$\cos \widehat{AND} = \dfrac{DN}{AN}$ c'est-à-dire $\cos 35° = \dfrac{ND}{12}$.
Donc $ND = 12 \times \cos 35°$.
Avec la calculatrice, on trouve ND ≈ 9,83 m.

43 **a.** Dans le triangle VEN rectangle en V :
$\tan \widehat{VEN} = \dfrac{VE}{VN}$ c'est-à-dire $\tan 29° = \dfrac{VE}{5{,}8}$.
Donc $VE = 5{,}8 \times \tan 29°$.
Avec la calculatrice, on trouve VE ≈ 3,2 cm.
b. $\cos \widehat{VNE} = \dfrac{VN}{EN}$ c'est-à-dire $\cos 29° = \dfrac{5{,}8}{EN}$.
Donc $EN \times \cos 29° = 5{,}8$ et $EN = \dfrac{5{,}8}{\cos 29°}$.
Avec la calculatrice, on trouve EN ≈ 6,6 cm.

44 **a.** Dans le triangle ABC rectangle en C :
$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ c'est-à-dire $\tan 36° = \dfrac{3{,}5}{AC}$.
Donc $AC \times \tan 36° = 3{,}5$ et $AC = \dfrac{3{,}5}{\tan 36°}$.
Avec la calculatrice, on trouve AC ≈ 4,82 m.
b. L'aire de ABC est égale à $\dfrac{AC \times BC}{2}$.
$$\dfrac{4{,}82 \times 3{,}5}{2} = 8{,}435.$$
L'aire de ABC est donc environ égale à 8,4 m^2.

45 **a.**



b. Dans le triangle MTV rectangle en M :

$\cos\widehat{TVM} = \dfrac{MV}{VT}$ c'est-à-dire $\cos 63° = \dfrac{2,8}{VT}$.

Donc $VT \times \cos 63° = 2,8$ et $VT = \dfrac{2,8}{\cos 63°}$.

Avec la calculatrice, on trouve $VT \approx 6,2$ cm.

c. $\tan\widehat{TVM} = \dfrac{MT}{MV}$ c'est-à-dire $\tan 63° = \dfrac{MT}{2,8}$.

Donc $MT = 2,8 \times \tan 63°$.

Avec la calculatrice, on trouve $MT \approx 5,5$ cm.

$MT + MV + VT \approx 5,5 + 2,8 + 6,2$

Le périmètre du triangle MTV est environ égal à 14,5 cm.

46 **a.** Les angles $\widehat{DNJ}$ et $\widehat{ANG}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{DNJ} = \widehat{ANG}$.

b. Dans le triangle NDJ rectangle en D :

$\sin\widehat{DNJ} = \dfrac{DJ}{NJ}$.

Dans le triangle ANG rectangle en A :

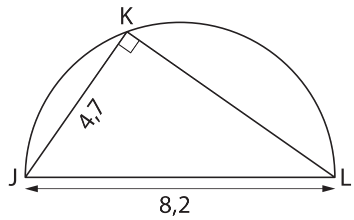
$\sin\widehat{ANG} = \dfrac{AG}{GN}$.

c. $\widehat{DNJ} = \widehat{ANG}$ donc $\sin\widehat{DNJ} = \sin\widehat{ANG}$.

D'où $\dfrac{DJ}{NJ} = \dfrac{AG}{GN}$ et par suite $\dfrac{DJ}{7} = \dfrac{2}{5}$.

d. $DJ = \dfrac{2 \times 7}{5} = \dfrac{14}{5}$ d'où $DJ = 2,8$ cm.

47 **a.**



b. [JK] est le côté opposé à l'angle $\widehat{KLJ}$.

c. Dans le triangle JKL rectangle en K :

$\sin\widehat{KLJ} = \dfrac{JK}{JL}$ c'est-à-dire $\sin\widehat{KLJ} = \dfrac{4,7}{8,2}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{KLJ} \approx 35°$.

d. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc $\widehat{KJL} = 90° - \widehat{KLJ}$.

Ainsi $\widehat{KJL} \approx 90° - 35°$ c'est-à-dire $\widehat{KJL} \approx 55°$.

48 Aucune information ne permet de dire que le triangle MIR est isocèle.

Dans le triangle MRI rectangle en I :

$\cos\widehat{IMR} = \dfrac{MI}{MR}$ c'est-à-dire $\cos\widehat{IMR} = 0,72$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{IMR} \approx 44°$.

C'est donc Niky qui a raison.

49 Dans le triangle SRT rectangle en R :

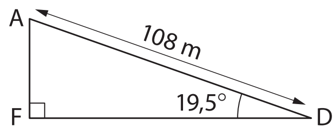
$\tan\widehat{RST} = \dfrac{RT}{RS}$, c'est-à-dire $\tan\widehat{RST} = \dfrac{5,6}{3,4}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{RST} \approx 59°$.

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc $\widehat{RTS} = 90° - \widehat{RST}$.

Ainsi $\widehat{RTS} \approx 90° - 59°$ c'est-à-dire $\widehat{RTS} \approx 31°$.

50



Dans le triangle AFD rectangle en F :

$\sin\widehat{FDA} = \dfrac{AF}{AD}$ c'est-à-dire $\sin 19,5° = \dfrac{AF}{108}$

donc $AF = 108 \times \sin 19,5°$.

Avec la calculatrice, on trouve $AF \approx 36$ m.

La différence d'altitude entre les deux gares est d'environ 36 m.

51 Dans le triangle HOP rectangle en P :

$\tan\widehat{HOP} = \dfrac{HP}{PO}$ c'est-à-dire $\tan 83,1° = \dfrac{HP}{100}$

donc $HP = 100 \times \tan 83,1°$.

Avec la calculatrice, on trouve $HP \approx 826,36$ m.

$HP + 1,65 \approx 828$.

La tour a une hauteur d'environ 828 m.

52 **a.** Dans le triangle TSC rectangle en S :

$\sin\widehat{STC} = \dfrac{CS}{TC}$ c'est-à-dire $\sin\widehat{STC} = \dfrac{35}{40}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{STC} \approx 61°$.

b. C'est faux, si l'angle $\widehat{STC}$ mesurait 30,5°, on aurait $\sin 30,5° = \dfrac{CS}{40}$ et donc $CS = 40 \times \sin 30,5°$

Avec la calculatrice, on trouve $CS \approx 20,3$ m ce qui n'est pas égal à la moitié de 35 m.

53 Dans le triangle CIP rectangle en P :

$\tan\widehat{ICP} = \dfrac{IP}{PC}$ c'est-à-dire $\tan 25° = \dfrac{IP}{4,5}$.

Donc $IP = 4,5 \times \tan 25°$.

$\cos\widehat{ICP} = \dfrac{PC}{CI}$ c'est-à-dire $\cos 25° = \dfrac{4,5}{CI}$.

Donc $CI \times \cos 25° = 4,5$ et $CI = \dfrac{4,5}{\cos 25°}$.

$IP + CI = 4,5 \times \tan 25° + \dfrac{4,5}{\cos 25°}$.

Avec la calculatrice, on trouve $IP + CI \approx 7,1$.

L'arbre avait une hauteur d'environ 7,1 m.

54 **a.** On sait que $\left(\cos\widehat{ABC}\right)^2 + \left(\sin\widehat{ACB}\right)^2 = 1$, on a donc :

$\left(\cos\widehat{ACB}\right)^2 = 1 - 0,936^2 = 0,123904$.

Puisque $\cos\widehat{ACB} > 0$, on a $\cos\widehat{ACB} = \sqrt{0,123904}$

et donc $\cos\widehat{ACB} = 0,352$.

b. On sait que $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{\sin\widehat{ACB}}{\cos\widehat{ACB}}$, donc :

$\tan\widehat{ACB} = \dfrac{0,936}{0,352}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\tan\widehat{ACB} \approx 2,659$.

55 On sait que $\cos^2\widehat{MNP} + \sin^2\widehat{MNP} = 1$

donc : $\left(\dfrac{21}{29}\right)^2 + \sin^2\widehat{MNP} = 1$. On a donc :

$$\sin^2\widehat{MNP} = 1 - \left(\dfrac{21}{29}\right)^2 = 1 - \dfrac{441}{841} = \dfrac{400}{841}.$$

Puisque $\sin\widehat{MNP} > 0$, on en déduit que :

$\sin\widehat{MNP} = \sqrt{\dfrac{400}{841}}$ c'est-à-dire $\sin\widehat{MNP} = \dfrac{20}{29}$.

On sait que $\tan\widehat{MNP} = \dfrac{\sin\widehat{MNP}}{\cos\widehat{MNP}}$, donc :

$\tan\widehat{MNP} = \dfrac{\frac{20}{29}}{\frac{21}{29}}$ c'est-à-dire $\tan\widehat{MNP} = \dfrac{20}{21}$.

56 1re méthode :

On sait que : $\cos^2\hat{a} + \sin^2\hat{a} = 1$

donc $\left(\dfrac{12}{37}\right)^2 + \sin^2\hat{a} = 1$. On a donc :

$$\sin^2\hat{a} = 1 - \left(\dfrac{12}{37}\right)^2 = 1 - \dfrac{144}{1369} = \dfrac{1225}{1369}.$$

Puisque $\sin\hat{a} > 0$, on en déduit que :

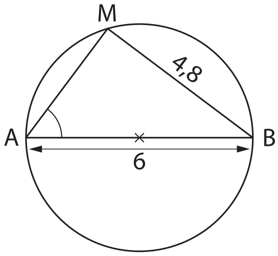
$\sin\hat{a} = \sqrt{\dfrac{1225}{1369}}$ c'est-à-dire $\sin\hat{a} = \dfrac{35}{37}$.

2e méthode :

On sait que $\tan\hat{a} = \dfrac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}}$, donc $\sin\hat{a} = \cos\hat{a} \times \tan\hat{a}$

c'est-à-dire $\sin\hat{a} = \dfrac{12}{37} \times \dfrac{35}{12} = \dfrac{35}{37}$.

57

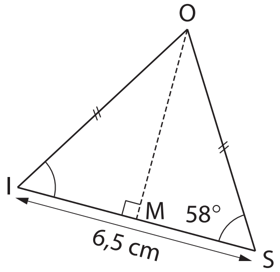


Le point M appartient au cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M.

$\sin\widehat{BAM} = \dfrac{BM}{AB}$ c'est-à-dire $\sin\widehat{BAM} = \dfrac{4,8}{6} = 0,8$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{BAM} \approx 53°$.

58



En notant M le pied de la hauteur issue de O, le triangle ISO étant isocèle en O, le point M est le milieu de [IS]. Donc MS = 6,5 : 2 = 3,25 cm.

Dans le triangle OMS rectangle en M :

$\tan\widehat{MSO} = \dfrac{MO}{MS}$ c'est-à-dire $\tan 58° = \dfrac{MO}{3,25}$.

Donc $MO = 3,25 \times \tan 58°$.

L'aire du triangle ISO est égale à $\dfrac{3,25 \times \tan 58° \times 6,5}{2}$

c'est-à-dire à soit $10,5625 \times \tan 58°$.

Avec la calculatrice, on trouve aire ≈ 16,9 cm².

59 . $\widehat{BAD} = \widehat{JAD}$. Dans le triangle JAD rectangle en J :

$\tan\widehat{BAD} = \dfrac{JD}{AJ}$ c'est-à-dire $\tan\widehat{BAD} = \dfrac{5,4}{3,1}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{BAD} \approx 60,1°$.

$\widehat{CDA} = \widehat{JDA}$. Les angles $\widehat{JAD}$ et $\widehat{JDA}$ sont complémentaires donc $\widehat{CDA} = 90° - \widehat{BAD}$.

Donc $\widehat{CDA} \approx 90° - 60,1°$ d'où $\widehat{CDA} \approx 29,9°$.

Dans le triangle JAD rectangle en J, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :

$AD^2 = AJ^2 + JD^2$, c'est-à-dire $AD^2 = 3,1^2 + 5,4^2$.

Ainsi, $AD^2 = 38,77$.

D'où $AD = \sqrt{38,77}$.

Avec la calculatrice, on trouve AD ≈ 6,23 m.

$BC = AD - \dfrac{0,25}{\tan\widehat{BAD}} - \dfrac{0,25}{\tan\widehat{CDA}}$.

Donc $BC \approx 6,23 - \dfrac{0,25}{\tan 60,1°} - \dfrac{0,25}{\tan 29,9°}$.

Avec la calculatrice, on trouve BC ≈ 5,65 m.

60 Dans le triangle ABO rectangle en B : $\tan\widehat{AOB} = \dfrac{AB}{BO}$

c'est-à-dire $\tan 24° = \dfrac{AB}{15}$.

Donc $AB = 15 \times \tan 24°$.

Dans le triangle CBO rectangle en B : $\tan\widehat{COB} = \dfrac{CB}{BO}$,

c'est-à-dire $\tan 53° = \dfrac{CB}{15}$.

Donc $CB = 15 \times \tan 53°$.

$CA = 15 \times \tan 24° + 15 \times \tan 53°$.

Avec la calculatrice, on trouve CA ≈ 26,6 m.

9. Vrai ou faux ?

61 Vrai. Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des rapports de longueurs donc des nombres positifs. L'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle donc ces nombres sont inférieurs à 1.

62 Faux. Le côté opposé à l'angle aigu peut être plus long que son côté adjacent donc la tangente d'un angle aigu peut être supérieure à 1.

63 Vrai. Le côté adjacent à l'angle $\hat{a}$ est le côté opposé à l'angle complémentaire.

64 Vrai. Dans le triangle VOF rectangle en O :

$\tan 49° = \dfrac{5,9}{VO}$ donc $VO \times \tan 49° = 5,9$

et donc $VO = \dfrac{5,9}{\tan 49°}$.

65 Faux. $\cos\widehat{OFV} = \dfrac{5,9}{VF}$ donc $VF \times \cos\widehat{OFV} = 5,9$

et $VF = \dfrac{5,9}{\cos 41°}$.

66 Faux. En effet si le triangle était rectangle en J, on aurait $\tan 28° = \dfrac{12,5}{23,5}$.

Or $\tan 28° \approx 0,5317$ et $\dfrac{12,5}{23,5} \approx 0,5319$.

10. Calcul mental et réfléchi

67 **a.** $0{,}4 = \frac{AB}{7}$ donc $AB = 7 \times 0{,}4 = 2{,}8$.

b. $0{,}5 = \frac{AC}{8}$ donc $AC = 8 \times 0{,}5 = 4$.

c. $0{,}4 = \frac{3{,}2}{BC}$ donc $BC = \frac{3{,}2}{0{,}4} = 8$.

68 $\tan \widehat{ACB} = \frac{5}{8} = 0{,}625$ donc $\widehat{ACB} \approx 32°$.

$\tan \widehat{BAC} = \frac{8}{5} = 1{,}6$ donc $\widehat{BAC} \approx 58°$.

11. Présenter, argumenter, communiquer

69 Dans le triangle ABC rectangle en B :

$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$ donc $\sin 21° = \frac{BC}{7}$.

Donc $BC = 7 \times \sin 21°$.

Avec la calculatrice, on trouve $BC \approx 2{,}5$ cm.

70 $58° + 32° = 90°$. Le triangle ABC a deux angles aigus complémentaires donc un angle droit. On peut donc utiliser la trigonométrie dans ce triangle.

$ED^2 = 4{,}4^2 = 19{,}36$

$FD^2 = 2{,}8^2 = 7{,}84$

$EF^2 = 5{,}2^2 = 27{,}04$

$19{,}36 + 7{,}84 = 27{,}2$

Donc $ED^2 + FD^2 \neq EF^2$ et [EF] est le plus long côté. La contraposée du théorème de Pythagore permet de dire que le triangle EFD n'est pas rectangle. On ne peut donc pas utiliser la trigonométrie dans ce triangle.

Le point J appartient au cercle de diamètre [GH] donc le triangle JGH est rectangle en J. On peut utiliser la trigonométrie dans ce triangle.

C'est donc Lucie qui a raison.

71 On connaît la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{ESP}$ et celle de son côté adjacent. On peut donc déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ESP}$ en utilisant sa tangente.

Dans le triangle ESP rectangle en E :

$\tan \widehat{ESP} = \frac{EP}{SE}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{ESP} = \frac{3{,}7}{2{,}9}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ESP} \approx 52°$.

72 Puisque $\tan \hat{a} = \frac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}}$, on a donc :

$$1 + \tan^2 \hat{a} = 1 + \frac{\sin^2 \hat{a}}{\cos^2 \hat{a}} = \frac{\cos^2 \hat{a} + \sin^2 \hat{a}}{\cos^2 \hat{a}}.$$

Et comme $\cos^2 \hat{a} + \sin^2 \hat{a} = 1$, on a donc :

$$1 + \tan^2 \hat{a} = \frac{1}{\cos^2 \hat{a}}.$$

73 **a.** Élise n'a pas refermé la parenthèse après 27.

b. Le résultat affiché correspond au sinus de $27° \times 3{,}1$ soit au sinus de 83,7°.

c. Élise aurait dû taper : sin 27) × 3.1 EXE ou 3.1 × sin 27 EXE.

74 Dans le triangle ABC rectangle en A :

$\tan \widehat{CBA} = \frac{AC}{AB}$ c'est-à-dire $\tan 40° = \frac{AC}{7}$.

Donc $AC = 7 \times \tan 40°$.

Dans le triangle ADC rectangle en C :

$\cos \widehat{DAC} = \frac{AC}{AD}$ c'est-à-dire $\cos 40° = \frac{7 \times \tan 40°}{AD}$.

Donc $AD \times \cos 40° = 7 \times \tan 40°$ et $AD = \frac{7 \times \tan 40°}{\cos 40°}$.

Cyril a raison.

75 Dans le triangle DEF rectangle en E :

$\tan \widehat{EFD} = \frac{ED}{EF}$ c'est-à-dire $\tan 70° = \frac{ED}{30}$.

Donc $ED = 30 \times \tan 70°$.

Dans le triangle CEF rectangle en E :

$\tan \widehat{EFC} = \frac{CE}{EF}$ c'est-à-dire $\tan 50° = \frac{CE}{30}$.

Donc $CE = 30 \times \tan 50°$.

$DC = ED - CE = 30 \times \tan 70° - 30 \times \tan 50°$.

Avec la calculatrice, on trouve $DC \approx 46{,}7$ m.

En nageant à la vitesse de 2,5 km/h, Juliette parcourt 2 500 m en 60 min. En 2 minutes, elle parcourt donc 2 500 : 30 soit environ 83 m.

Elle a moins de 47 m à parcourir donc Juliette pourra gagner son pari.

12. QCM pour s'évaluer

76 **b.** **77** **c.** **78** **c.** **79** **b.** **80** **a.** **81** **a.**
82 **c.** **83** **c.** **84** **a. b. c.** **85** **a. c.** **86** **a. b.**

13. Objectif Brevet

87 **a.** Dans le triangle ABI rectangle en I :

$\tan \widehat{IBA} = \frac{AI}{BI}$ c'est-à-dire $\tan 48° = \frac{AI}{3{,}6}$.

Donc $AI = 3{,}6 \times \tan 48°$.

Avec la calculatrice, on trouve $AI \approx 3{,}99$ m.

b. Les angles $\widehat{IBA}$ et $\widehat{AKJ}$ sont deux angles correspondants formés par les droites (KJ) et (BI) coupées par la sécante (AB). Les droites (KJ) et (BI) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AI) donc elles sont parallèles. Par suite, les angles $\widehat{IBA}$ et $\widehat{AKJ}$ ont la même mesure.

C'est-à-dire $\widehat{AKJ} = 48°$.

Dans le triangle AKJ rectangle en J :

$\tan \widehat{AKJ} = \frac{AJ}{KJ}$ c'est-à-dire $\tan 48° = \frac{AJ}{1}$.

Donc $AJ = 1 \times \tan 48°$.

Avec la calculatrice, on trouve $AJ \approx 1{,}12$ m.

c. $IJ = AI - AJ$ donc $IJ \approx 3{,}99 - 1{,}12$

c'est-à-dire $IJ \approx 2{,}87$ m.

$IJ > 1{,}75$ m, Eddy peut donc se tenir debout sans se cogner la tête.

88 **a.** $RF = SF - SR$ donc $RF = 18 - 1{,}5 = 16{,}5$ m

b. Dans le triangle FRP rectangle en R :

$\tan \widehat{FPR} = \frac{RF}{RP}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{FPR} = \frac{16{,}5}{10}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{FPR} \approx 59°$.

c. Dans le triangle FRP rectangle en R, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :

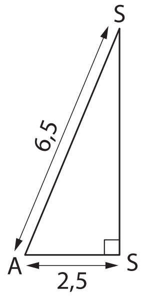
$PF^2 = RF^2 + RP^2$, c'est-à-dire $PF^2 = 16{,}5^2 + 10^2$.

Ainsi, $PF^2 = 372{,}25$. D'où $PF = \sqrt{372{,}25}$.

Avec la calculatrice, on trouve $PF \approx 19{,}3$ m.

$19{,}3 < 25$ donc l'échelle est assez longue pour atteindre la fenêtre.

89 **a.** Le triangle SAO est rectangle en O.



b. Dans le triangle SAO rectangle en O, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :

$SA^2 = OA^2 + SO^2$, c'est-à-dire $6{,}5^2 = 2{,}5^2 + SO^2$.

Ainsi, $SO^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 36$.

D'où SO = 6 cm.

c. Volume $\mathcal{V}$ de la bougie $= \dfrac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times SO$

Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 2{,}5^2 \times 6 = 12{,}5 \times \pi$.

Avec la calculatrice, on trouve $\mathcal{V} \approx 39{,}3$ cm^3.

d. Dans le triangle SAO rectangle en O :

$\sin \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{SA}$ c'est-à-dire $\sin \widehat{ASO} = \dfrac{2{,}5}{6{,}5}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ASO} \approx 23°$.

90 **1.** Dans le triangle DAB rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :

$BD^2 = AD^2 + AB^2$, c'est-à-dire $50^2 = AD^2 + 40^2$.

Ainsi, $AD^2 = 50^2 - 40^2 = 900$.

D'où AD = 30 cm.

2. Volume $\mathcal{V}$ de la pyramide $= \dfrac{1}{3} \times AD \times AB \times SO$

Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 30 \times 40 \times 81$.

C'est-à-dire $\mathcal{V} = 32\,400$ cm^3.

3. a. Dans le triangle DAB rectangle en A, [AO] est la médiane relative à l'hypoténuse [BD].

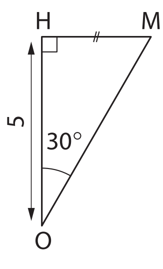
Donc OA = BD : 2 d'où OA = 50 : 2 = 25 cm.

Dans le triangle SAO rectangle en O :

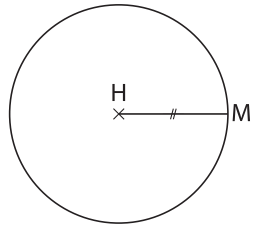
$\tan \widehat{SAO} = \dfrac{SO}{OA}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{SAO} = \dfrac{81}{25} = 3{,}24$

b. Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{SAO} \approx 73°$.

91 **a.**



b.



c. Dans le triangle HOM rectangle en H :

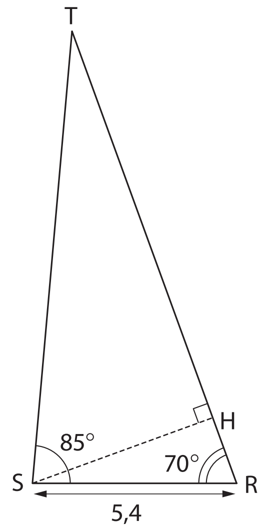
$\tan \widehat{HOM} = \dfrac{HM}{OH}$ c'est-à-dire $\tan 30° = \dfrac{HM}{5}$.

Donc $HM = 5 \times \tan 30°$.

Avec la calculatrice, on trouve $HM \approx 2{,}9$ cm.

14. Exercices d'approfondissement

92 **a.** *À l'échelle 1/2.*



b. On appelle H le pied de la hauteur issue de S.

Dans le triangle SHR rectangle en H :

$\sin \widehat{SRH} = \dfrac{SH}{SR}$ c'est-à-dire $\sin 70° = \dfrac{SH}{5{,}4}$.

Donc $SH = 5{,}4 \times \sin 70°$.

$\cos \widehat{SRH} = \dfrac{HR}{SR}$ c'est-à-dire $\cos 70° = \dfrac{HR}{5{,}4}$.

Donc $HR = 5{,}4 \times \cos 70°$.

Les angles $\widehat{SRH}$ et $\widehat{RSH}$ sont complémentaires donc :

$\widehat{RSH} = 90° - 70° = 20°$.

Par suite $\widehat{HST} = 85° - 20° = 65°$.

Dans le triangle SHT rectangle en H :

$\tan \widehat{HST} = \dfrac{TH}{SH}$ c'est-à-dire $\tan 65° = \dfrac{TH}{5{,}4 \times \sin 70°}$.

Donc $TH = 5{,}4 \times \sin 70° \times \tan 65°$.

$\cos \widehat{HST} = \dfrac{SH}{ST}$ c'est-à-dire $\cos 65° = \dfrac{5{,}4 \times \sin 70°}{ST}$.

Donc $ST \times \cos 65° = 5{,}4 \times \sin 70°$ et donc :

$$ST = \frac{5{,}4 \times \sin 70°}{\cos 65°}.$$

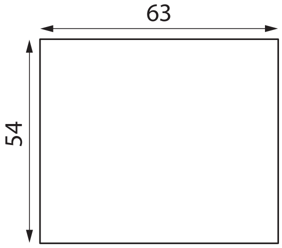
Avec la calculatrice, on trouve $ST \approx 12$ cm.

RT = TH + HR c'est-à-dire

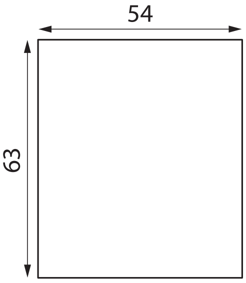
$RT = 5{,}4 \times \sin 70° \times \tan 65° + 5{,}4 \times \cos 70°$.

Avec la calculatrice, on trouve $RT \approx 12{,}7$ cm

93 Le pan de toiture est un rectangle de 13 m sur L m.
$\cos 24° = \dfrac{4,8}{L}$ donc $L \times \cos 24° = 4,8$ et $L = \dfrac{4,8}{\cos 24°}$.
Avec la calculatrice, on trouve $L \approx 5,25$ m.
En disposant les panneaux de la façon suivante :



$13 : 0,63 \approx 20,6$ et $5,25 : 0,54 \approx 9,7$.
Le propriétaire peut donc installer 20 rangées de 9 panneaux soit 180 panneaux.
En disposant les panneaux de la façon suivante :



$13 : 0,54 \approx 24,1$ et $5,25 : 0,63 \approx 8,3$.
Le propriétaire peut donc installer 24 rangées de 8 panneaux soit 192 panneaux.
Il pourra donc installer plus de panneaux en les disposant de cette façon.

94 **a.** Dans le triangle ABD rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :

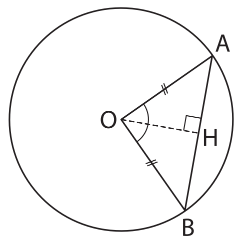
$$BD^2 = AB^2 + AD^2,$$

c'est-à-dire $BD^2 = 35,4^2 + 35,4^2$.
Ainsi, $BD^2 = 2\,506,32$.
D'où $BD = \sqrt{2\,506,32}$.
Avec la calculatrice, on trouve $BD \approx 50,1$ m.
b. $BO = BD : 2$ donc $BO \approx 25$ m.
Dans le triangle SBO rectangle en O :
$\tan \widehat{SBO} = \dfrac{SO}{BO}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{SBO} \approx \dfrac{21,6}{25}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{SBO} \approx 41°$.
c. Les angles $\widehat{SBO}$ et $\widehat{BSO}$ sont complémentaires donc $\widehat{BSO} \approx 90° - 41°$ soit $\widehat{BSO} \approx 49°$.
Le triangle BSD est isocèle en S donc [SO) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BSD}$.
Donc $\widehat{BSD} = 2 \times \widehat{BSO}$.
D'où $\widehat{BSD} \approx 98°$.

95 Dans le triangle ABC rectangle en C, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, c'est-à-dire $30^2 = 25^2 + BC^2$.
Ainsi, $BC^2 = 30^2 - 25^2 = 275$.
D'où $BC = \sqrt{275}$.
Avec la calculatrice, on trouve $BC \approx 16,58$ cm.
Dans le triangle ACD rectangle en C :
$\tan \widehat{CAD} = \dfrac{CD}{AC}$ c'est-à-dire $\tan 49° = \dfrac{CD}{25}$.
Donc $CD = 25 \times \tan 49°$.
Avec la calculatrice, on trouve $CD \approx 28,76$ cm.
$BD = BC + CD$.
Donc $BD \approx 16,58 + 28,76$ soit $BD \approx 45,3$ cm.

96 En notant $\hat{a}$ l'angle d'élévation de cette route, on a $\sin \hat{a} = \dfrac{406 - 343}{415}$ soit $\sin \hat{a} = \dfrac{63}{415}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\hat{a} \approx 8,7°$.
$\hat{a} > 8,5°$ donc cette partie de route n'est pas conforme à la législation française.

97 **a.**

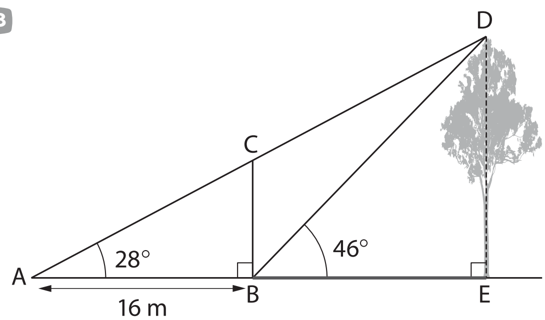


Dans le triangle AOB isocèle en O, on appelle H le pied de la hauteur issue de O.
H est aussi le milieu de [AB] et [OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.
Dans le triangle AOH rectangle en H :
$\sin \widehat{AOB} = \dfrac{AH}{OA}$ c'est-à-dire $\sin \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{AH}{5}$.
Donc $AH = 5 \times \sin \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$ et comme $AB = 2 \times AH$,
on a $AB = 10 \times \sin \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

b.

angle	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
corde en cm	0	0,9	1,7	2,6	3,4	4,2	5	5,7	6,4	7,1	7,7	8,2	8,7	9,1	9,4	9,7	9,8	10	10

98



Dans le triangle ABC rectangle en B :
$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$ c'est-à-dire $\tan 28° = \dfrac{BC}{16}$.
Donc $BC = 16 \times \tan 28°$.
On note x la largeur de la rivière, $x = BE$.
Dans le triangle BED rectangle en E :
$\tan \widehat{EBD} = \dfrac{DE}{BE}$ c'est-à-dire $\tan 46° = \dfrac{DE}{x}$.

Donc DE = $x \times \tan 46°$.

Les droites (CB) et (DE) sont perpendiculaires à une même droite (AE) donc elles sont parallèles.

Les points A, C, D et A, B, E sont alignés. Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{DE}$ c'est-à-dire $\frac{16}{16+x} = \frac{16 \tan 28°}{x \tan 46°}$.

D'après l'égalité des produits en croix, on a donc :

$16x \tan 46° = 16 \tan 28°(16 + x)$

donc : $x \tan 46° = 16 \times \tan 28° + x \tan 28°$

donc : $x \tan 46° - x \tan 28° = 16 \times \tan 28°$

donc : $x (\tan 46° - \tan 28°) = 16 \times \tan 28°$

donc : $x = \frac{16 \times \tan 28°}{\tan 46° - \tan 28°}$

Avec la calculatrice, on trouve $x \approx 16{,}8$ m.

La largeur de la rivière est d'environ 17 m.

15. Tâche complexe : Lire les informations utiles

99 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : De quelle information aurait-on besoin pour répondre à la question posée ? Comment l'acquérir ?

Aide n° 2 : A quelle distance de la ligne de but se trouve le ballon ?

Aide n° 3 : Faire un schéma de la situation en ne conservant que quelques éléments du document 2 (ballon, ligne de but, but).

Aide n° 4 : La mesure d'angle cherchée est la différence entre deux mesures d'angles aigus de triangles rectangles ; lesquels ?

2. Quelques commentaires

• Les relations trigonométriques sont des connaissances hors socle ; on cherchera néanmoins à valoriser des compétences liées à la pratique d'une démarche scientifique comme analyser un schéma technique et en extraire les informations utiles, réaliser une construction géométrique, concevoir un programme de calcul (ici pour déterminer la mesure d'un angle), utiliser une calculatrice, présenter sa démarche même sans aboutir à une démarche experte.

• Une clé de cette tâche complexe est de repérer l'angle dont on cherche à savoir s'il mesure plus ou moins de 20° sur le schéma du document 2, où de très nombreuses informations sont données : position du ballon mais aussi lignes principales et dimensions d'une partie d'un terrain de football (surface de réparation, surface de but, point de pénalty, ligne de but, but).

Une autre clé est de mettre en place un programme, une procédure, permettant de déterminer la mesure de cet angle ; les élèves devront alors extraire des informations données celles qui sont importantes pour la résolution du problème.

• On pourra dans un premier temps mettre les élèves en situation de recherche et les laisser réfléchir individuellement. Il faudra prendre du temps pour l'analyse du document 2. Ensuite les élèves pourront travailler par groupes pour échanger leurs idées, remarques ou questions. Il sera peut-être nécessaire de faire expliquer par des élèves connaisseurs les différents éléments du schéma (vocabulaire lié aux termes techniques des différentes lignes et surfaces de la partie du terrain de football ici représentée) afin que tous, pratiquants ou totalement ignorants du monde footballistique, s'accordent sur les dénominations habituellement utilisées.

• Il est possible que des élèves aient l'idée de mesurer l'angle sur le document 2 (mesure comprise entre 15° et 20°). Si cette démarche relève ici d'une intéressante prise d'initiative, on fera remarquer qu'il n'est pas dit que ce schéma respecte les vraies longueurs (remarque pouvant d'ailleurs être faite par des élèves).

Des élèves peuvent avoir l'idée de réaliser ce schéma à une certaine échelle ($\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{200}$ par exemple) et peut-être ensuite de mesurer l'angle sur cette figure.

D'autres se satisferont sans doute d'un schéma à main levée.

Un point pourra être fait, où les élèves indiqueront leur direction de recherche. On pourra valoriser toute démarche liée à la réalisation d'une figure, tout en suggérant de bien lire le titre de cette tâche : il est sans aucun doute pertinent de réfléchir aux informations utiles avant de se lancer dans la construction d'une figure extraite ; la trigonométrie ne s'utilisant que dans des triangles rectangles, il sera nécessaire de rechercher des triangles rectangles sur la figure.

On attend que la recherche soit organisée ; toute conjecture sur la mesure de l'angle par mesurage ou par affichage sur une figure réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie sera valorisée ; elle devra être ensuite validée.

• Une mise au propre individuelle pourra suivre la recherche collective.

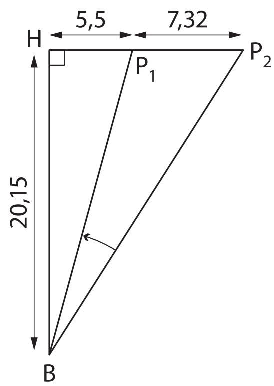
3. Éléments de réponse

• **Distance du ballon à la ligne de but**

$$11 \text{ m} + 9{,}15 \text{ m} = 20{,}15 \text{ m}$$

Le ballon est à 20,15 m de la ligne de but.

• **Réalisation d'une figure**



Sur la figure ci-contre :

• B désigne l'emplacement du ballon.

• P_1 et P_2 les emplacements des montants verticaux du but.

• H le pied de la perpendiculaire à la ligne de but passant par B.

• **Détermination de la mesure de l'angle P_1BP_2**

• Dans le triangle BHP_1 rectangle en H, on a :

$$\tan\widehat{HBP_1} = \frac{HP_1}{BH} \text{ soit } \tan\widehat{HBP_1} = \frac{5{,}5}{20{,}15}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $\widehat{HBP_1} \approx 15{,}3°$

• Dans le triangle BHP_2 rectangle en H, on a :

$$HP_2 = 5{,}50 + 7{,}32 = 12{,}82 \text{ m}$$

$$\tan\widehat{HBP_2} = \frac{HP_2}{BH} \quad \text{soit} \quad \tan HBP_2 = \frac{12{,}82}{20{,}15}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $\widehat{HBP_2} \approx 32{,}5°$

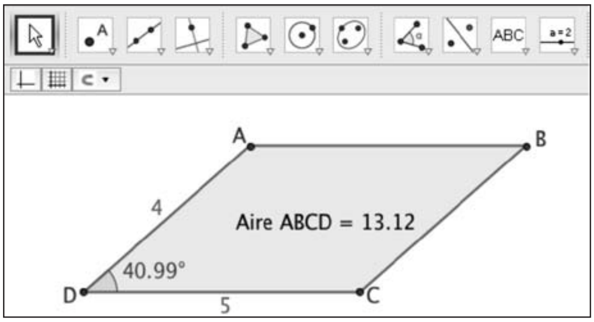
• $\widehat{P_1BP_2} = \widehat{HBP_2} - \widehat{HBP_1}$ ainsi $\widehat{P_1BP_2} \approx 17{,}2°$.

Michel Platini voit le but néerlandais sous un angle de 17,2° (valeur arrondie à 0,1°).

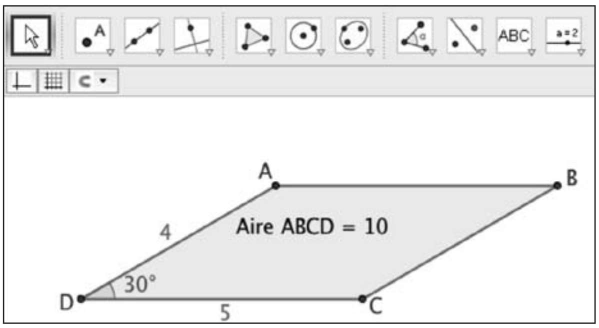
Le commentateur avait donc raison.

16. En route vers la seconde

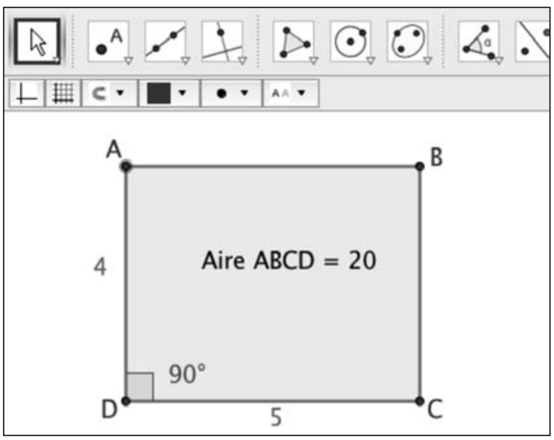
100 **1. a.**



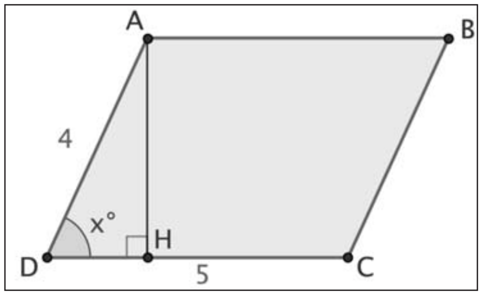
b. L'aire de ABCD est égale à 10 cm² lorsque $\widehat{ADC} = 30°$.



L'aire de ABCD est maximale lorsque $\widehat{ADC} = 90°$.



2. a.



L'aire de ABCD est égale à AH×DC.

Dans le triangle AHD rectangle en H :

$$\sin\widehat{ADC} = \frac{AH}{AD}$$

c'est-à-dire $\sin x = \dfrac{AH}{4}$.

Donc $AH = 4 \sin x$.

L'aire de ABCD est donc égale à $5 \times 4 \sin x$.

C'est-à-dire $20 \sin x$.

b. $20 \sin x = 10$ lorsque $\sin x = \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire lorsque :

$$x = 30°.$$

L'aire est maximale lorsque $\sin x = 1$ c'est-à-dire lorsque :

$$x = 90°.$$

c. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. Lorsque l'aire est maximale, ABCD est donc un rectangle.

101 **1.** Lorsque le vérin et la benne sont perpendiculaires, ils forment un triangle rectangle avec le châssis du camion.

Dans ce triangle rectangle, $\cos\hat{a} = \dfrac{5{,}9}{6{,}3}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\hat{a} \approx 20{,}5°$.

Cet angle ne permet pas un vidage complet de la benne.

2. a. On appelle H le pied de la hauteur issue de B' dans le triangle AB'C.

Donc $h = B'H$.

Dans le triangle B'HA rectangle en H :

$\sin\widehat{HAB'} = \dfrac{B'H}{B'A}$ c'est-à-dire $\sin 45° = \dfrac{h}{5{,}9}$ donc :

$$h = 5{,}9 \times \sin 45°.$$

Avec la calculatrice, on trouve $h \approx 4{,}17$ m.

b. Dans le triangle B'HA rectangle en H, $\widehat{HAB'} = 45°$ donc $\widehat{HB'A}$ mesure aussi 45°.

Par conséquent ce triangle est aussi isocèle en H et donc :

$$AH = h.$$

$CH = CA - AH$ donc $CH = 6{,}30 - h$.

$CH \approx 6{,}30 - 4{,}17$ soit $CH \approx 2{,}13$ m.

Dans le triangle CB'H rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité :

$$B'C^2 = B'H^2 + CH^2,$$

c'est-à-dire $B'C^2 \approx 4{,}17^2 + 2{,}13^2$.

Ainsi, $B'C^2 \approx 21{,}9258$.

D'où $B'C \approx \sqrt{21{,}9258}$.

Avec la calculatrice, on trouve $B'C \approx 4{,}68$ m.

CHAPITRE 12

Configuration de Thalès Agrandissement-réduction

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Le théorème de Thalès est vu pour la première fois en classe de **4^e^** dans le cadre des triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux demi-droites de même origine, l'idée étant que les élèves connaissent et utilisent la proportionnalité des longueurs pour les côtés de deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux demi-droites de même origine.

Cette notion n'est pas exigible au socle en classe de **4e** mais le devient en classe de **3e** uniquement pour ces configurations précises. L'étude du théorème de Thalès dans toute sa généralité ainsi que sa réciproque sont étudiés mais ne relevent pas du socle en classe de **3e**.

Agrandissement-réduction selon les programmes en vigueur, est à rapprocher de l'étude du théorème de Thalès. Une première approche est menée en **4e** où les élèves découvrent que sous l'effet d'agrandissement ou de réduction, les angles sont conservés (et donc la perpendicularité), le parallélisme est conservé et qu'il y a proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celle de la figure obtenue. Un coefficient *k* d'agrandissement et de réduction est alors mis en exergue. Ces notions traitées en classe de **4e** ne relèvent pas du socle à ce niveau mais deviennent exigibles pour le socle en classe de **3e** où elles sont à nouveau étudiées et complétées par les effets des agrandissements et des réductions sur les aires et les volumes (au socle également en ce qui concerne les aires du carré, du rectangle, du triangle et du disque, ainsi que les volumes du parallélépipède rectangle, du cylindre et de la sphère).

Le rapport *k* d'agrandissement ou de réduction sera alors utilisé de façon naturelle tant pour les longueurs que pour les aires et les volumes.

2. Je vérifie mes acquis

Ce premier QCM permet de tester les connaissances des élèves sur la configuration de Thalès **(ex1-2-3)** dans un triangle et sur le rapport d'agrandissement et de réduction **(ex4-5)** étudiées en **4e**.

Des exercices propres aux connaissances de **4e** sont proposés dans ce chapitre afin de répondre aux éventuels besoins en remédiation.

3. Le théorème de Thalès et sa réciproque

L'activité 1 se propose d'étudier le théorème de Thalès propre à la classe de **3e** en se ramenant à une configuration connue *via* la symétrie centrale. La conjecture émise par les élèves sera favorisée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. La démonstration s'en suivra par l'utilisation du théorème de Thalès dans un triangle et les propriétés de la symétrie centrale.

La reconnaissance des configurations de Thalès ainsi que l'écriture des bons rapports sont les premiers résultats attendus : **les exercices à l'oral 13 à 17** peuvent faire suite à cette activité.

L'activité 2 s'intéresse à la contraposée du théorème de Thalès. Le débat proposé sera repris dans **l'exercice à l'oral 18** qui pourra alors consolider cette utilisation du théorème de Thalès.

L'activité 3 insiste sur l'importance de l'ordre des points pour prouver que deux droites peuvent être parallèles. En effet l'égalité de deux rapports ne suffit pas à l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès. **L'activité 4** viendra renforcer l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès. **Les exercices à l'oral 19 et 20** peuvent parfaitement être envisagés suite à ces deux activités.

4. Agrandissement-réduction

L'activité 5 permettra de refaire le point sur les connaissances antérieures des élèves sur les effets des agrandissements et des réductions sur les longueurs et les angles et de conjecturer leurs effets sur les aires.

Les exercices à l'oral 22 à 24 pourront suivre cette activité.

L'activité 6 s'intéresse aux effets des agrandissements et des réductions sur les volumes, ce qui est nouveau en classe de **3e**.

L'exercice 25 à l'oral peut naturellement être traité suite à cette dernière activité.

5. Les savoir-faire

Les trois **exercices résolus** proposés sont complémentaires.

L'exercice résolu 1 permet de faire le point sur l'utilisation du théorème de Thalès avec la nouvelle configuration vue en **3e**.

L'animation interactive montre les étapes successives qui permettent de calculer une longueur manquante.

L'exercice résolu 2 consiste à utiliser la conséquence du théorème de Thalès pour démonter que deux droites ne sont pas parallèles. L'animation interactive permet d'insister sur l'importance de traiter séparément les deux calculs afin d'en comparer les résultats et d'en conclure quant au non parallélisme des droites.

L'exercice résolu 3 propose de démonter que deux droites sont parallèles par l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès.

Le déroulé de l'animation interactive permet aux élèves de s'approprier les différentes étapes menant à la conclusion attendue.

Les exercices des rubriques « **J'applique** » permettent de consolider ces apprentissages. **Les exercices 4 et 6** relèvent du socle : les configurations proposées sont celles étudiées en classe de **4e**.

La rubrique « **savoir faire TICE** » propose aux élèves le moyen de conjecturer la position relative de deux droites à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. La démonstration se fait par l'utilisation successive du théorème de Thalès et de sa réciproque.

L'exercice 10 est dans le même esprit tant dans la conjecture que dans sa démonstration.

La page **Atelier Brevet** propose l'étude d'un premier exercice du DNB sur l'utilisation du théorème de Thalès dans une configuration de type **4e**, avec une originalité : au lieu d'écrire des réponses à des questions posées, il s'agit ici d'écrire des questions pour lesquelles on a les réponses.

L'exercice suivant est un problème complet donné au DNB. Cet exercice guidé permet de faire un bilan sur les effets d'une réduction sur les volumes.

6. Compléments

Les **exercices d'application** ou **d'approfondissement** ont pour vocation de travailler les trois grandes rubriques de ce chapitre :
– le théorème de Thalès
– sa réciproque
– les agrandissements-réductions.

Les situations proposées sont diverses et certaines d'entre elles s'appuient sur des situations concrètes ou font référence à l'histoire des arts.

La partie **Prendre des initiatives** peut être la source d'échanges au sein de la classe notamment pour les « **vrai-faux ?** » .

Le travail de groupe, faisant référence à l'histoire des arts (géométrie des jardins à la française), sera l'occasion de travailler sur les effets d'un agrandissement sur les surfaces et de travailler sur les unités agraires.

Dans la partie **Présenter, argumenter, communiquer**, l'accent est mis sur la rigueur de la démarche et de son explicitation. La rédaction s'avère essentielle. L'accent a été particulièrement mis sur des situations concrètes (**exercices 71-72-74-75-76**) qui permettent de donner du sens.

Les questions proposées en **travail autonome** permettent aux élèves de faire leur bilan personnel, avec renvoi au cours ou aux exercices résolus en cas de non réussite.

Dans la page **Objectif Brevet**, on trouve six énoncés récents, permettant, à l'aide de conseils, ou en autonomie, de retravailler les principales notions abordées dans le chapitre. Les aides données mettent l'accent sur une rédaction attendue qui bien souvent pose problème aux élèves : calculs des différents rapports avant comparaison ou encore le calcul de rapports égaux dont est déduit un coefficient d'agrandissement.

Les **Exercices d'approfondissement** proposés sont plus riches et demandent à l'élève une réflexion plus importante lors d'une ou plusieurs étape(s) de leur résolution.

Toute piste de recherche sera alors valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète de l'exercice.

Ils permettront de revenir sur différentes notions du programme de la classe de **3e** et peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Ainsi **l'exercice 94** permet de travailler le calcul littéral et de revenir sur l'exploitation de la représentation graphique d'une fonction.

L'exercice 96 incitera à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique et permettra de réinvestir le calcul littéral.

Les **exercices 97 et 98** sont beaucoup plus ouverts et laissent une grande part d'initiative aux élèves.

Dans la **tâche complexe,** les élèves doivent extraire des informations de trois documents. La situation proposée est particulièrement riche et une des difficultés est de se représenter la situation afin de se ramener à une configuration de Thalès.

Dans la rubrique **En route vers la seconde,** le premier exercice propose de conjecturer l'égalité de deux longueurs *via* l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. La démonstration de ce résultat se fait par l'utilisation à deux reprises du théorème de Thalès dans deux configurations bien choisies.

Le second exercice, plus ouvert, met l'accent sur la prise d'initiative et l'exploitation pertinente des données.

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

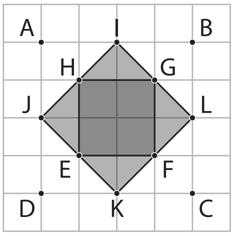
On mesure la hauteur de l'hippocampe sur la photo : 4 cm (sur le manuel grand format).

Il faut donc réduire dans le rapport $\frac{2,5}{4}$ soit 0,625.

Lena devra donc régler le zoom du photocopieur sur 62,5 %.

• Devinette

L'idée est de construire un carré d'aire double orienté différemment :



2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : c.

Les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles. AM = AB : 4 donc AN = AC : 4. Ainsi AN = 5 : 4 = 1,25.

2 Bonne réponse : b.

3 Bonne réponse : a.

4 Bonne réponse : c.

Le rapport d'agrandissement est : $\frac{15}{5,4} = \frac{150}{54} = \frac{25}{9}$

5 Bonne réponse : b.

Un rapport de réduction est un nombre compris entre 0 et 1.

3. Calcul mental

6 a. 6 cm

b. 4,5 cm

c. 9 cm

7 6,5 cm

4. Activités

Le théorème de Thalès

1 Étudier une situation nouvelle

1. c. On conjecture que les trois rapports sont égaux.

2. b. Les droites (M'N') et (MN) sont bien parallèles car (M'N') est l'image de (MN) par la symétrie de centre A, or la symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle. Comme (MN) est parallèle à (BC) on en déduit que (M'N') est parallèle à (BC).

c. On retrouve la configuration de Thalès étudiée en 4^e avec les triangles AM'N' et ABC.

On obtient alors $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$.

Comme la symétrie centrale conserve les longueurs, on a AM' = AM, AN' = AN et M'N' = MN

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

d. « Si deux droites (MB) et (MC) sont sécantes en A et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ».

2 Exploiter ses nouvelles connaissances

Clara a raison. Si les droites étaient parallèles nous aurions $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ or $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{8}$; ces rapports ne sont pas égaux donc les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

La réciproque du théorème de Thalès

3 Participer à un débat

a. Tara se trompe, en effet dans la figure 3, on a bien $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = 1,5$ et pourtant les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

b. Conjecture : ajouter que les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre (comme dans les figures 1 et 2).

4 Reconnaître des droites parallèles

On remarque déjà que AB ≠ BC et EB ≠ BF donc les diagonales de ce quadrilatère ne se coupent pas en leur milieu. Fode a tort, il ne peut s'agir d'un parallélogramme.

On calcule d'une part $\frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$

et d'autre part $\frac{EB}{BF} = \frac{4,8}{8} = 0,6$

donc $\frac{AB}{BC} = \frac{EB}{BF}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AE) et (BC) sont parallèles.

Stessie a raison et Rudy a tort car dans ce quadrilatère deux côtés opposés sont parallèles. Il s'agit donc d'un trapèze.

Agrandissement et réduction

5 Comprendre les effets sur les angles et les aires

1. b. $\widehat{D'A'B'} = 90°$ et $\widehat{D'B'C'} = 60°$

c. L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABD est : $\mathscr{A} = \frac{4 \times 6}{2} = 12 \text{ cm}^2$.

L'aire $\mathscr{A}'$ du triangle A'B'D' est : $\mathscr{A}' = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$.

$\frac{3}{12} = 0,25 = 0,5^2$ donc $\mathscr{A}' = 0,5^2 \times \mathscr{A}$.

2. b. $\widehat{D''A''B''} = 90°$ et $\widehat{D''B''C''} = 60°$

c. L'aire $\mathscr{A}''$ du triangle A"B"D" est :

$$\mathscr{A}'' = \frac{4,8 \times 7,2}{2} = 17,28 \text{ cm}^2.$$

$\frac{17,28}{12} = 1,44 = 1,2^2$ donc $\mathscr{A}'' = 1,2^2 \times \mathscr{A}$.

3. Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les angles sont conservés, les aires sont multipliées par k^2.

6 **Comprendre l'effet sur les volumes**

1. a. $V = (AB \times BC) \times \dfrac{SA}{3} = 0{,}6\ \text{dm}^3$.

b. $A_{A'B'C'D'} = 2^2 \times A_{ABCD} = 2^2 \times 1{,}2\ \text{dm}^2 = 4{,}8\ \text{dm}^2$
$SA' = 1{,}2 \times SA = 3\ \text{dm}$.

c. $V' = 4{,}8\ \text{dm}^2 \times \dfrac{3\ \text{dm}}{3} = 4{,}8\ \text{dm}^3$
$V' = 2^3 \times V$.

2. L'aire de la base réduite est $0{,}4^2 \times 1{,}2\ \text{dm}^2 = 0{,}192\ \text{dm}^2$.
La longueur de la hauteur réduite est de :

$$0{,}4 \times 1{,}5\ \text{dm} = 0{,}6\ \text{dm}.$$

Le volume de cette réduction est donc de :

$$0{,}192\ \text{dm}^2 \times \frac{0{,}6}{3}\ \text{dm}^3 = 0{,}0384\ \text{dm}^3.$$

3. Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3.

5. J'applique

4 Le tableau donné n'est pas un tableau de proportionnalité. En effet, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = 0{,}25$ et $\dfrac{MN}{BC} \approx 0{,}254$ donc Tom a raison.

5 **a.** $\dfrac{TU}{TS} = \dfrac{TV}{TR} = \dfrac{UV}{RS}$

b. $\dfrac{8}{15} = \dfrac{TU}{9}$ on a alors $15 \times TU = 8 \times 9$ donc $TU = 4{,}8$ cm.

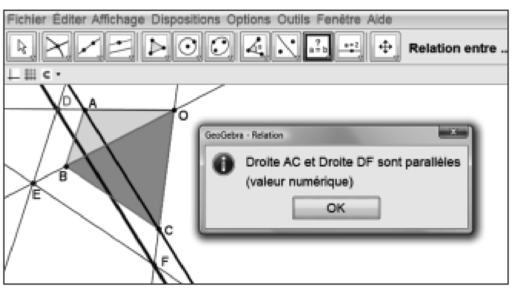
c. $\dfrac{8}{15} = \dfrac{UV}{12}$ et donc $UV = 6{,}4$ cm.

6 On a $\dfrac{AR}{AB} = \dfrac{7{,}5}{21{,}5} = \dfrac{15}{43}$ et $\dfrac{AS}{AC} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$ donc $\dfrac{AR}{AB} \neq \dfrac{AS}{AC}$ et donc d'après le théorème de Thalès les droites (RS) et (BC) ne peuvent être parallèles.

7 $\dfrac{DG}{DE} = \dfrac{6}{7{,}5} = 0{,}8$ et $\dfrac{DH}{DF} = \dfrac{5{,}6}{7} = 0{,}8$ donc $\dfrac{DG}{DE} = \dfrac{DH}{DF}$.
Or les points D, G et E d'une part, D, H et F d'autre part, sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (GH) et (EF) sont parallèles.

8 Les points J,L,U et les points K,L,O sont alignés dans le même ordre.
On a $\dfrac{JL}{LU} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$ et $\dfrac{KL}{LO} = \dfrac{7{,}5}{12} = 0{,}625$ donc $\dfrac{JL}{LU} = \dfrac{KL}{LO}$ et donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (KJ) et (OU) sont parallèles.

10



Conjecture : les droites (AC) et (DF) semblent parallèles.

Démonstration de cette conjecture :
D'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OB}{OE}$ (dans ODE) et $\dfrac{OB}{OE} = \dfrac{OC}{OF}$ (dans OEF)
donc $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OC}{OF}$.
Or les points O,A,D et O,C,F sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (AC) et (DF) sont parallèles.

6. Atelier Brevet

11 **1.** Calculer RA.
$RA = OR - OA = 6{,}84\ \text{cm} - 3{,}8\ \text{cm} = 3{,}04\ \text{cm}$

2. Calculer OK.
Dans le triangle ROK, A est un point de [RO] et S un point de [RK]. (AS)//(OK).
Donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{RA}{RO} = \dfrac{AS}{OK}$ donc :

$$OK = 5 \times \frac{6{,}84}{3{,}04} = 11{,}25$$

3. Calculer le périmètre du triangle RKO.
$P_{RKO} = KR + OR + OK = 7{,}2\ \text{cm} + 6{,}84\ \text{cm} + 11{,}25\ \text{cm}$
$= 25{,}29$ cm.

12 **1.** $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 4^2\ \text{cm}^2 \times 12\ \text{cm} = 64\pi\ \text{cm}^3$

2. a. Le coefficient de réduction est : $\dfrac{3}{12} = 0{,}25$.

b. $\mathscr{V}_{C2} = 0{,}25^3 \times \mathscr{V} = \pi\ \text{cm}^3$.

3. a. Le volume d'eau contenue est donné par :

$$\mathscr{V} - \mathscr{V}_{C2} = 64\pi\ \text{cm}^3 - \pi\ \text{cm}^3 = 63\pi\ \text{cm}^3.$$

b. volume approché : 198 cm^3.
On a 0,2 L = 200 cm^3 or $198 < 200$ donc le volume d'eau n'est pas supérieur à 0,2 L.

7. Exercices à l'oral

Le théorème de Thalès

13 **a.** Ce n'est pas une configuration de Thalès.
En effet, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EAD}$ n'ont pas la même mesure, donc si les points B, A et E sont alignés, les points D, A et C ne le sont pas (ou inversement).

b. Oui, les angles correspondants $\widehat{MSI}$ et $\widehat{OIN}$ ont la même mesure donc les droites (SM) et (IO) sont parallèles.

c. Oui, les angles opposés par le sommet $\widehat{JFI}$ et $\widehat{KFH}$ ont la même mesure donc les points I, F, H ainsi que les points J, F, K. De plus (HK) et (JI) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (JK).

14 **a.** $\dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AS}{AR} = \dfrac{PS}{RI}$

b. $\dfrac{UE}{UM} = \dfrac{UL}{UN} = \dfrac{EL}{MN}$

15 **a.** ADE et AIL.

b. Il y a proportionnalité de rapport 5 donc :

$$AL = 5 \times 0{,}9 = 4{,}5 \quad \text{et} \quad DE = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

16 **a.** (PN) et (SR) étant perpendiculaires à (MN) elles sont parallèles donc on peut utiliser le théorème de Thalès.
b. Le rapport de proportionnalité est donné par $\frac{PN}{SR} = 3$ d'où $MP = 3 \times 2{,}5$ cm $= 7{,}5$ cm.

17 On applique le théorème de Thalès
le rapport de proportionnalité est donné par $\frac{CD}{CE} = 2$ donc $AC = 2 \times 2{,}5$ cm $= 5$ cm et $BE = \frac{AD}{2} = 1{,}8$ cm.

18 On a $BC = 4 \times AC$ et cependant $2{,}5 \times 4 = 10 \neq 9{,}6$ donc Amélie a raison.

La réciproque du théorème de Thalès

19 On a $RS = 3 \times RA$ et $RI = 3 \times RO$ donc les droites (AO) et (SI) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

20 $\frac{OU}{OM} = 2{,}5$ et $\frac{OI}{ON} = 2{,}5$ donc $\frac{OU}{OM} = \frac{OI}{ON}$.
Or les points N, O et I sont alignés dans le même ordre que les points M, O et U.
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (MN) et (UI) sont parallèles.

Agrandissement et réduction

21 Il s'agit d'un tableau de proportionnalité et donc :
$EF = 4{,}5$ cm et $DF = 7{,}5$ cm.

22 **a.** $\frac{AB}{EF} = 5$, $\frac{AC}{EG} = 5$ et $\frac{BC}{FG} \neq 5$ donc EFG n'est pas une réduction de ABC.
b. On prend $FG = \frac{BC}{5} = \frac{6{,}5\text{ cm}}{5} = 1{,}3$ cm
ou $BC = 5 \times FG = 5 \times 1{,}2$ cm $= 6$ cm.

23 **a.** Le théorème de Thalès s'applique. Le triangle ADE est un agrandissement de ABC.
b. Le coefficient d'agrandissement est donné par $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{3}$ donc $AE = \frac{4}{3} \times 2{,}4$ cm $= 3{,}2$ cm.
c. $BC = \frac{3}{4} \times 5{,}2$ cm $= 3{,}9$ cm.

24 L'aire du terrain en réalité est de :
$3\,000^2 \times 8\text{ cm}^2 = 72\,000\,000\text{ cm}^2 = 7200\text{ m}^2$.

25 Le cube réduit a un volume de :
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 408\text{ cm}^3 = \frac{408}{8}\text{ cm}^3 = 51\text{ cm}^3.$$

8. Exercices d'application

Le théorème de Thalès

26 **a.** Les points E, A, D et E, B, C sont alignés et les droites (AB) et (DC) sont parallèles car ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] donc EAB et EDC forment une première configuration de Thalès.
Les points A, O, C et B, O, D sont alignés et les droites (AB) et (DC) sont parallèles donc les droites (AC) et (BD) sécantes en O forment une seconde configuration de Thalès.
b. $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$ et $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}$.

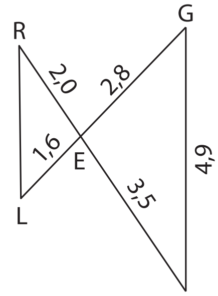
27 **1.** $\frac{LH}{LC} = \frac{LK}{LB} = \frac{HK}{BC}$.
2. $\frac{LK}{LB} = \frac{HK}{BC}$ donc $\frac{LK}{3} = \frac{5{,}4}{4{,}5}$ donc $LK = 3{,}6$ cm.
b. $\frac{LH}{LC} = \frac{HK}{BC}$ donc $\frac{4{,}8}{LC} = \frac{5{,}4}{4{,}5}$ donc $LC = 4$ cm.

28 On applique le théorème de Thalès et on a :
$$\frac{RA}{RS} = \frac{RD}{RT} = \frac{AD}{ST}$$
a. Donc $\frac{RD}{15{,}3} = \frac{10}{17}$ soit $RD = 9$ cm.
b. Donc $\frac{7{,}5}{ST} = \frac{10}{17}$ donc $ST = 12{,}75$ cm.
c. Le périmètre est :
$DA + AS + ST + TD = 7{,}5\text{ cm} + (17\text{ cm} - 10\text{ cm}) + 12{,}75\text{ cm} + (15{,}3\text{ cm} - 9\text{ cm}) = 33{,}55\text{ cm}$

29 Les droites (BD) et (CE) se coupent en A. De plus les angles alternes-internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADE}$ ont la même mesure donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles. On applique le théorème de Thalès et on a alors $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$ donc $ED = 2 \times \frac{3}{1{,}5} = 4$ cm.

30 **a.** On applique le théorème de Thalès.
$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$ donc $CD = 15 \times \frac{14{,}4}{9} = 24$ cm.
b. $\frac{AD}{EB} = \frac{CA}{CB}$ donc $EB = \frac{18 \times 9}{14{,}4} = 11{,}25$ cm.
c. Périmètre du triangle BEC : $15 + 9 + 11{,}25 = 35{,}25$ cm.
Périmètre du triangle ACD : $24 + 14{,}4 + 18 = 56{,}4$ cm.
$1{,}5 \times 35{,}25 = 52{,}875$ et $52{,}875 \neq 56{,}4$.
Ou bien : Le rapport d'agrandissement, donné par $\frac{14{,}4}{9}$, est égal à 1,6 et non 1,5.
Donc Sam a tort.

31 **a.** $ER = RF - EF = 55\text{ mm} - 35\text{ mm} = 20\text{ mm}$.
On applique le théorème de Thalès et on a $\frac{LR}{GF} = \frac{ER}{EF}$ et donc $LR = 49 \times \frac{20}{35} = 28$ mm.
b. $\frac{EG}{EL} = \frac{EF}{ER}$ donc $EG = 16 \times \frac{35}{20} = 28$ mm.
Donc $LG = LE + EG = 16\text{ mm} + 28\text{ mm} = 44\text{ mm}$.
c. Figure (longueurs en cm).



32 **a.** (UT) et (CB) sont toutes deux perpendiculaires à (AB) donc (UT)//(BC).
b. On applique le théorème de Thalès et on a : $\frac{UT}{BC} = \frac{AT}{AB}$ or $AT = AB - TB = 4$ m donc $UT = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$ m.
c. $UT \approx 1{,}34$ m au cm près par excès.

33 Les bases [AR] et [TP] du trapèze TRAP sont parallèles et les droites (AT) et (RP) sont sécantes en Z.

$$\frac{AZ}{ZT}=\frac{ZR}{ZP}=\frac{AR}{TP}$$

Donc $\frac{3}{ZP}=\frac{7}{5}$ donc $ZP=3\times\frac{5}{7}=\frac{15}{7}\approx 2{,}1$ cm

et $\frac{8}{TP}=\frac{7}{5}$ donc $TP=8\times\frac{5}{7}=\frac{40}{7}\approx 5{,}7$ cm.

34 (YE) et (DC) sont perpendiculaires à (DE) donc elles sont parallèles et les droites (YC) et (DE) sont sécantes en A, donc on applique le théorème de Thalès et on a :

$$\frac{AY}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{YE}{DC}$$

Donc $\frac{170}{DC}=\frac{56}{140}$ donc $DC=170\times\frac{140}{56}=425$ cm soit 4,25 m.

35 Réponse **c.**

36 **a.** Les triangles C_1AE_1 et C_1BF forment une configuration de Thalès d'où $\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{AE_1}{BF}=\frac{2}{3}$.

b. (E_2F) et (AB) se coupent en C_2. Les points E_2,C_2,F et A,C_2,B sont alignés dans le même ordre et les droites (d) et (d′) sont parallèles, on applique donc le théorème de Thalès et on a : $\frac{C_2A}{C_2B}=\frac{AE_2}{BF}=\frac{2}{3}$.

c. On construit deux droites parallèles (d) et (d′) passant respectivement par A et B.

On les gradue de la même façon à l'aide du compas à partir de A et B.

E_1 et E_2 sont deux points de (d) tels que $AE_1=AE_2=5$

F est un point de (d′) tel que BF = 7.

(AB) est coupée par (E_1F) en C_1 et par (E_2F) en C_2.

Il s'agit des deux points recherchés.

37 **1.** BREV est un rectangle donc ses côtés opposés sont de même longueur d'où EV = 13 cm.

$$TE = EV - VT = 3{,}4 \text{ cm}$$

2. Tommy a raison car les droites (TE) et (BR) sont parallèles. En effet, BREV étant un rectangle, ses côtés opposés sont parallèles donc en particulier (BR) et (EV) comme T est un point de [VE], on a bien (BR)//(TE).

On applique le théorème de Thalès et on a : $\frac{EN}{NR}=\frac{TE}{BR}$

donc $EN=3{,}4\times\frac{7{,}2+EN}{13}$

donc $13\times EN=3{,}4\times EN+24{,}48$

donc $9{,}6\times EN=24{,}48$

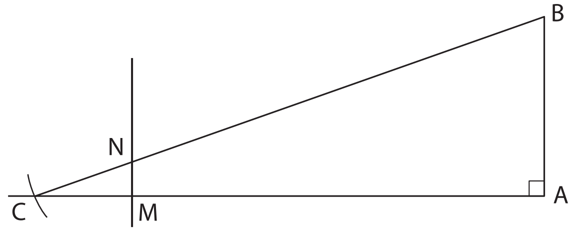
$EN=2{,}55$ cm

b. Sandra a raison car les droites (NB) et (EV) sécantes en T et le fait que (BV)//(EN) permettent de dire que les triangles TEN et BVT forment une configuration de Thalès. De plus si on écrit les égalités de rapport, on obtient directement : $\frac{EN}{BV}=\frac{TE}{TV}$

soit $\frac{EN}{7{,}2}=\frac{3{,}4}{9{,}6}$ soit EN = 2,55.

On obtient ainsi plus rapidement EN sans avoir à résoudre une équation.

38 **a.** Figure (complétée en **c.**).



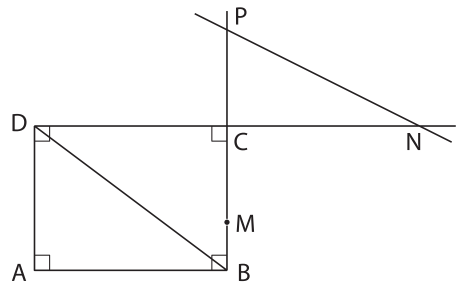
b. Le triangle ABC est rectangle en A donc d'après l'égalité de Pythagore $AC^2=BC^2-AB^2=13^2-5^2$ d'où $AC^2=144$ soit AC = 12 cm.

c. Les triangles CAB et CMN sont dans une configuration de Thalès et donc $\frac{CM}{CA}=\frac{CN}{CB}$

donc $CN=2{,}4\times\frac{13}{12}=2{,}6$ cm.

d. $(MN)//(AB)$ et $(AB)\perp(AC)$ donc $(MN)\perp(AC)$ donc $(MN)\perp(MC)$ donc le triangle CMN est rectangle en M.

39 **1.**



2. a. Le triangle ABD est rectangle en A ; l'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$BD^2=BA^2+AD^2$ d'où $BD^2=12^2+9^2$;

$BD^2=144+81=225$ ainsi BD = 15 cm.

b. Les triangles CNP et CBD sont en configuration de Thalès. On a donc : $\frac{CN}{CD}=\frac{CP}{CB}=\frac{NP}{BD}$.

ABCD est un rectangle, donc ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur, donc BC = AD = 9 cm et CD = AB = 12 cm.

CM = BC – BM = 9 – 3 = 6 cm.

P et M sont symétriques par rapport à C donc :

$$CP = CM = 6 \text{ cm.}$$

Par conséquent : $\frac{CN}{12}=\frac{6}{9}$ d'où CN = 8 cm.

c. DN = DC + CN = 12 + 8 = 20 cm.

d. Le triangle CMN est rectangle en C ; l'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$MN^2=MC^2+CN^2$ d'où $MN^2=6^2+8^2$;

$MN^2=36+64=100$ ainsi MN = 10 cm.

40 $\frac{OI}{ON}=\frac{2{,}4}{1{,}8}=\frac{4}{3}$ et $\frac{OU}{OM}=\frac{4}{2{,}8}=\frac{10}{7}$.

Ces deux rapports ne sont pas égaux donc d'après le théorème de Thalès (UI) et (MN) ne sont pas parallèles. Boris a raison.

41 $\frac{AS}{AT}=\frac{2}{3}$ et $\frac{AP}{AR}=\frac{3}{4}$ donc $\frac{AS}{AT}\neq\frac{AP}{AR}$ donc (SP) et (TR) ne sont pas parallèles.

42 $\frac{AR}{AP}=\frac{7}{5}=1{,}4$ et $\frac{AT}{AS}=\frac{3}{2}=1{,}5$ donc $\frac{AR}{AP}\neq\frac{AT}{AS}$ donc (SP) et (TR) ne sont pas parallèles.

43 $\frac{AS}{AT}=\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}$ et $\frac{AP}{AR}=\frac{4{,}5}{4{,}5+11{,}5}=\frac{4{,}5}{16}=\frac{9}{32}$ donc $\frac{AS}{AT}\neq\frac{AP}{AR}$; les droites (SP) et (TR) ne sont donc pas parallèles.

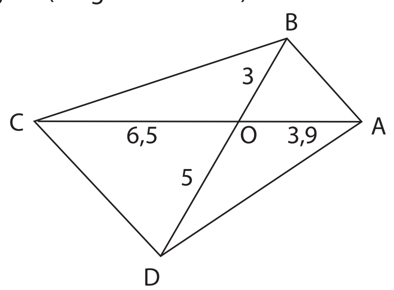
44 $\frac{AS}{AT}=\frac{23-7{,}2}{7{,}2}=\frac{79}{36}$ et $\frac{AP}{AR}=\frac{9}{12{,}6-9}=2{,}5$ donc $\frac{AS}{AT}\neq\frac{AP}{AR}$ donc (SP) et (TR) ne sont pas parallèles.

La réciproque du théorème de Thalès

45 Les points A,M,B et les points A,N,C sont alignés dans le même ordre.
On a $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}=0{,}4$ et $\frac{AN}{AC}=\frac{3}{7{,}5}=0{,}4$ donc $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

46 Les points A,M,B et les points A,N,C sont alignés dans le même ordre.
On a $\frac{AM}{AB}=\frac{4{,}5}{7{,}2}=0{,}625$ et $\frac{AN}{AC}=\frac{4}{6{,}4}=0{,}625$ donc $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

47 **a.** Figure (longueurs en cm).



b. $\frac{OA}{OC}=\frac{3{,}9}{6{,}5}=\frac{3}{5}$ et $\frac{OB}{OD}=\frac{3}{5}$ donc $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$.
Or les points A, O et C d'une part et B, O et D d'autre part, sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AB) et (DC) sont parallèles. De plus les diagonales de ce quadrilatère ne se coupent pas en leur milieu. Donc le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].

48 **a.** Les points D,C,A et les points E,C,B sont alignés dans le même ordre.
On a $\frac{CA}{CD}=3$ et $\frac{CB}{CE}=3$ donc $\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
b. (DE)//(AB) et (DE)⊥(CA) donc (AB)⊥(CA) donc ABC rectangle en A.

49 Les points W,U,Y et les points V,U,X sont alignés dans le même ordre.
On a $\frac{UY}{UW}=3{,}4$ et $\frac{UX}{UV}=3{,}4$ donc $\frac{UY}{UW}=\frac{UX}{UV}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (XY) et (VW) sont parallèles.

50 **a.** Les points P,I,T et les points G,I,Y sont alignés dans le même ordre.
On a $\frac{IP}{IT}=5$ et $\frac{IG}{IY}=5$ donc $\frac{IP}{IT}=\frac{IG}{IY}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (PG) et (YT) sont parallèles.
b. On peut alors appliquer le théorème de Thalès et on a : $GP=5\times YT=4$ cm d'où le périmètre de IGP est de 16 cm.

Agrandissement et réduction

51 **a.** Il a raison, les triangles AMN et ABC sont dans une configuration de Thalès et donc AMN est une réduction de ABC de rapport $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$
b. L'aire de AMN est donc $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 9\text{ cm}^2=1\text{ cm}^2$.

52 Réponse a : on calcule $\frac{24\text{ cm}^2}{1{,}25^2}=15{,}36$.

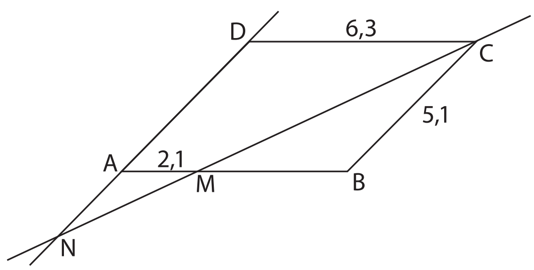
53 On calcule $\sqrt{\frac{1\,800}{72}}=5$.

54 **a.** $\frac{73\text{ m}}{125}=0{,}584$ m ou 58,4 cm.
La longueur de la maquette est 58,4 cm.
b. $540{,}8\text{ cm}^2\times 1\,25^2=8\,450\,000\text{ cm}^2$ ou 845 m^2.
L'aire d'une aile de l'avion est 845 m².
c. $310\,000\text{ L}\times\left(\frac{1}{125}\right)^3=0{,}15\,872\text{ L}$ ou $158{,}72\text{ cm}^3$.
Le réservoir de la maquette a une capacité de 158,72 cm³.

55 **a.** $k=\frac{11{,}5}{46}=0{,}25$
b. $225\text{ T}\times 0{,}25^3=3{,}515625\text{ T}\neq 14\text{ T}$ donc il ne s'agit pas d'une parfaite réduction.

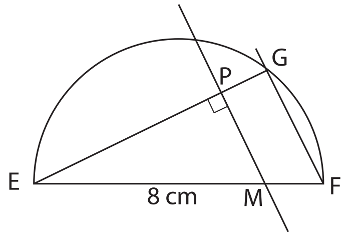
Prendre des initiatives

56 **a.** Figure (longueurs en cm).



b. ABCD est un parallélogramme, donc ses côtés opposés [AD] et [BC] sont parallèles.
Les triangles ANM et MBC forment donc une configuration de Thalès et on a :
$\frac{MA}{MB}=\frac{AN}{BC}$ d'où $\frac{2{,}1}{6{,}3-2{,}1}=\frac{AN}{5{,}1}$ ainsi $AN=2{,}55$ cm.
ABCD est un parallélogramme, donc ses côtés opposés [AD] et [BC] ont la même longueur.
ND = NA + AD = 2,55 + 5,1 = 7,65 cm.

57 **a.**

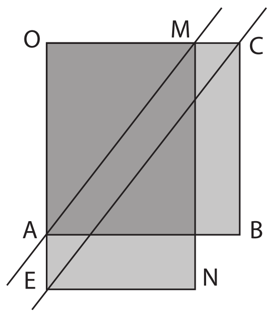


b. G est un point du cercle de diamètre [EF] donc le triangle EFG est rectangle en G.
Comme (MP)⊥(EG) on en déduit que (PM)//(GF).

On applique le théorème de Thalès et on a : $\frac{EM}{EF} = \frac{EP}{EG}$

donc EP = $\frac{9 \times 8}{10}$ = 7,2 cm.

58 **1.**



2. Il faut calculer OM.
Les triangles OAM et OEC sont dans une configuration de Thalès donc $\frac{OA}{OE} = \frac{OM}{OC}$

OM = $7 \times \frac{7}{9} = \frac{49}{9}$

donc l'aire du rectangle OMNE est de $9 \times \frac{49}{9}$ soit 49 cm^2

l'aire du carré OABC est de 7×7 = 49 cm^2

Ils ont donc la même aire.

59 Aire de ABC = $\frac{AH \times BC}{2}$ = 27 cm^2.

Les triangles BAC et BMN sont dans une configuration de Thalès donc le triangle BMN est une réduction du triangle ABC dans le rapport $\frac{BN}{BC}$ = 0,7 donc l'aire de BMN est de $0{,}7^2 \times 27$ = 13,23 cm^2.

60 La vue aérienne dans le livre (grand format) a une hauteur de 3,6 cm et une largeur de 2,2 cm.
$3{,}6 \times 2{,}2$ = 7,92 cm^2.
L'aire de cette partie des jardins est 7,92 cm^2.
5 ha = 500 000 000 cm^2 ou 5×10^8 cm^2.
On peut convenir de dire que les jardins sont un agrandissement de cette vue aérienne.
Le carré du coefficient d'agrandissement est $\frac{5 \times 10^8}{7{,}92}$
soit environ $0{,}63 \times 10^8$.
Le coefficient d'agrandissement est proche de $\sqrt{0{,}63 \times 10^8}$ soit environ $0{,}8 \times 10^4$.
$3{,}6 \times 0{,}8 \times 10^4 \approx 2{,}86 \times 10^4$ cm soit 286 m.
$2{,}2 \times 0{,}8 \times 10^4 \approx 1{,}75 \times 10^4$ cm soit 175 m.
Les dimensions réelles de cette partie des jardins sont proches de 286 m et 175 m.

9. Vrai ou faux

61 FAUX : il s'agit des triangles OAB et OCD

62 FAUX : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ d'où $\frac{3}{OC} = \frac{2{,}5}{6}$; OC = 7,2 cm.

63 VRAI.

64 VRAI : $\left(\frac{1}{1\,000}\right)^2 = 10^{-6}$

10. Calcul mental et réfléchi

65 **a.** $x = 9$ **b.** $x = 5$ **c.** $x = 6$

66 100 cm^2

67 10 m

68 **a.** OUI (théorème des milieux).
b. NON. **c.** OUI

11. Présenter, argumenter, communiquer

69 **a.** FD doit être plus grand que HG donc a une longueur supérieure à 9 cm.
b. Son erreur est dans la dernière égalité, on a :

$$FD = 9 \times \frac{20}{12} = 15 \text{ cm et non } 9 \times \frac{12}{20}.$$

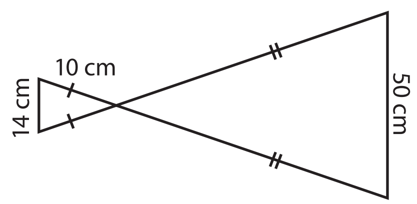
70 Régis : ABCD est un parallélogramme de centre O donc O est le milieu de [DB] donc $\frac{DO}{DB} = \frac{1}{2}$

E est le milieu de [DC] donc $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{DO}{DB} = \frac{DE}{DC}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès :
(OE)//(BC).

Rose : ABCD est un parallélogramme de centre O donc O est le milieu de [DB].
Dans le triangle DBC, O est le milieu de [DB] et E le milieu de [DC] donc d'après le théorème de la droite des milieux, (OE)//(BC).

71 **a.**



b. Notons L la longueur de la lame, on utilise le théorème Thalès et on a $\frac{L}{10} = \frac{50}{14}$ soit L ≈ 35,7 cm.

72 On note t la taille du personnage.
On suppose que les rayons du soleil sont parallèles.
D'après le théorème du Thalès, on a :

$\frac{t + 1{,}20}{1{,}20} = \frac{5{,}98}{2{,}4}$ d'où $2{,}4 \times (t + 1{,}20) = 1{,}20 \times 5{,}98$

$2{,}4t + 2{,}88 = 7{,}176$ soit $2{,}4t = 4{,}296$ et $t = 1{,}79$.

Le personnage mesure 1,79 m.

73 Les triangles CAB et CA'B' sont dans des configurations de Thalès.
CA'B' est un agrandissement de CAB dans le rapport $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{3}$ donc l'aire de A'B'C' = $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 2{,}7$ cm^2 = 4,8 cm^2.

74 **a.** $\left(\dfrac{75}{100}\right)^3 \times 720 \text{ mL} = 303{,}75 \text{ mL}$

b. $\left(\dfrac{50}{100}\right)^3 \times 720 \text{ mL} = 90 \text{ mL}$

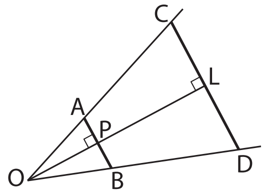
Le volume du petit cône est 90 mL.

$90 \times 2 = 180$ et $180 \neq 303{,}7$ donc Marie a tort.

75 $100 \text{ cm}^3 \times \left(1+\dfrac{10}{100}\right)^3 = 133{,}1 \text{ cm}^3$ donc elle contient $33{,}1 \text{ cm}^3$ d'eau.

76 On peut représenter la situation par un schéma.

O représente l'œil d'Olivier, [AB] un diamètre de la pièce et [CD] un diamètre de la Lune.



$380\,000 \text{ km} = 380\,000\,000\,000 \text{ mm}$ ou 38×10^{10} mm.

$3\,480 \text{ km} = 3\,480\,000\,000 \text{ mm}$ ou 348×10^7 mm.

On note d la distance cherchée.

En utilisant le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{OP}{OL} = \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$ d'où $\dfrac{d}{38 \times 10^{10}} = \dfrac{23{,}25}{348 \times 10^7}$

soit $d = 2{,}54 \times 10^3$ mm ou 2,54 m.

Olivier doit placer la pièce de 1 € à environ 2,54 m de son œil.

12. QCM

77 **a.** **78** **b.** **79** **c.** **80** **a.** **81** **a.**

82 **c.** **83** **c.** **84** **a. b. c.** **85** **a. b. c.**

13. Objectif Brevet

86 **1. a.** Dans le triangle PMW, C est un point du côté [PM], T est un point du côté [PW] et les droites (CT) et (MW) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{PC}{PM} = \frac{CT}{MW} \text{ soit } \frac{3{,}78}{4{,}20} = \frac{CT}{3{,}40}$$

donc $CT = 3{,}40 \times \dfrac{3{,}78}{4{,}20} = 3{,}06$ m.

b. $3{,}06 \times 2 = 6{,}12$ or $6{,}12 < 7$, donc 7 m de fil suffiront.

2. $\dfrac{PT}{PW} = \dfrac{1{,}88}{2{,}30} = \dfrac{94}{115}$ et $\dfrac{PC}{PM} = \dfrac{3{,}78}{4{,}20} = \dfrac{9}{10}$

$\dfrac{94}{115} \neq \dfrac{9}{10}$ donc $\dfrac{PT}{PW} \neq \dfrac{PC}{PM}$;

les droites (CT) et (MW) ne sont pas parallèles.

87 **a.** $AC^2 = 140^2 = 19\,600$ et

$AB^2 + BC^2 = 115^2 + 80^2 = 19\,625$ donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$.

Donc d'après l'égalité de Pythagore le triangle ABC n'est pas rectangle.

b. $\cos\left(\widehat{ACD}\right) = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{5}{7}$ donc $\widehat{ACD} \approx 44°$

c. $\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{140}{168} = \dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{100}{120} = \dfrac{5}{6}$ donc $\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{CD}{CE}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AD) et (FE) sont parallèles.

88 **a.** On applique le théorème de Thalès et on a :

$\dfrac{OD}{OE} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{BD}{CE}$

$\dfrac{6}{OE} = \dfrac{7{,}2}{10{,}8} = \dfrac{BD}{5{,}1}$

donc OE = 9 et BD = 3,4

b. $\dfrac{OG}{OB} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{OF}{OD} = \dfrac{1}{3}$ donc $\dfrac{OG}{OB} = \dfrac{OF}{OD}$.

Or les points B, O, G et D, O, F sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (GF) et (BD) sont parallèles.

89 **a.** RD = RE + ED = 3 + 1,5 = 4,5.

Les points R, E, D et les points R, C, U sont alignés dans le même ordre.

$\dfrac{RE}{RD} = \dfrac{3}{4{,}5} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{RC}{RU} = \dfrac{2}{3}$ donc $\dfrac{RE}{RD} = \dfrac{RC}{RU}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (EC) et (DU) sont parallèles.

b. Coefficient d'agrandissement : $\dfrac{RU}{RC} = \dfrac{2}{3} = 1{,}5$.

c. Dans un agrandissement de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2.

$1{,}5^2 = 2{,}25$ donc l'aire du triangle RDU est égale à 2,25 fois l'aire du triangle REC.

90 **a.** $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ et $\dfrac{OR}{OS} = \dfrac{3{,}2}{8} = 0{,}4$ donc $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{OR}{OS}$.

Or les points C, O, E et R, O, S sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (CR) et (SE) sont parallèles.

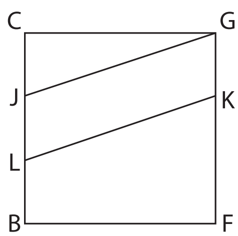
b. Les triangles COR et SOE forment une configuration de Thalès. On a donc :

$$\frac{OR}{OS} = \frac{OC}{OE} = \frac{CR}{SE} \text{ d'où } \frac{3{,}6}{SE} = 0{,}4.$$

Alors SE = 9 cm.

c. Le coefficient de réduction est donné par $\dfrac{OC}{OE} = 0{,}4$.

91 **a.** Dessin à l'échelle 1/4. Le côté du carré mesure 3 cm : GK = CJ = JL = LB = 1 cm.



b. L'aire de la bande est l'aire du rectangle LKGJ.

Aire d'un parallélogramme = côté × hauteur associée.

Ici, on choisit [GK] par exemple comme côté, la hauteur associée est CG.

$1 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$ donc l'aire de la bande sur le dessin est bien 3 cm^2.

Comme le dessin est à l'échelle $\dfrac{1}{4}$, l'aire réelle de la bande est $4^2 \times$ l'aire de la bande sur le dessin :

$$4^2 \times 3 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2,$$

ainsi l'aire réelle de cette bande est 48 cm^2.

14. Exercices d'approfondissement

92 Les triangles OAB et OFE sont dans une configuration de Thalès donc $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}$

Les triangles ODE et OBC sont dans une configuration de Thalès donc $\frac{OD}{OB} = \frac{OE}{OC}$

donc en multipliant ces égalités on obtient :

$$\frac{OA}{OE} \times \frac{OE}{OC} = \frac{OB}{OF} \times \frac{OD}{OB}$$

donc en simplifiant on a $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OF}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès on en déduit que les droites (AD) et (FC) sont parallèles.

93 $\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 1{,}1^3 = 1{,}331$

$\left(1+\frac{25}{100}\right)^3 = 1{,}25^3 = 1{,}953125$

$\left(1+\frac{50}{100}\right)^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375.$

La bonne réponse est la **b.**

94 **1. a.** On utilise l'égalité de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A et on a $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ donc BC = 5 cm.

b. APMQ est un quadrilatère ayant 3 angles droits c'est donc un rectangle.

c. Les triangles BPM et BAC sont dans une configuration de Thalès donc $\frac{BP}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{PM}{AC}$ donc $\frac{BP}{3} = \frac{BM}{5} = \frac{PM}{4}$.

2. a. $\frac{BP}{3} = \frac{x}{5}$ donc $BP = 0{,}6x$ $\quad \frac{PM}{4} = \frac{x}{5}$ donc $PM = 0{,}8x$

b. $AP = AB - BP = 3 - 0{,}6x$

c. APMQ est carré si AP = PM soit $3 - 0{,}6x = 0{,}8x$ donc pour $x = \frac{15}{7}$

d. $A(x) = PM \times AP = 0{,}8x \times (3 - 0{,}6x) = 2{,}4x - 0{,}48x^2$

e. L'aire du rectangle est de 1 cm² pour $x = 0{,}5$ et $x = 4{,}5$

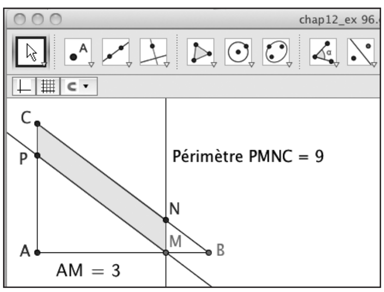
l'aire est maximale pour $x = 2{,}5$ et cette aire est de 3 cm²

95 Dans le triangle ABC, M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{d'où} \quad \frac{2}{6} = \frac{AN}{AN+4{,}5}$$

Par conséquent $2(AN + 4{,}5) = 6\,AN$ soit $2\,AN + 9 = 6\,AN$, ainsi $AN = \frac{9}{4}$ c'est-à-dire AN = 2,25 cm.

96 **1. a.** et **b.**



Conjecture : il semble que le périmètre du quadrilatère PMNC soit 9 cm pour AM = 3 cm.

2. a. Dans le triangle ABC, M est un point de [AB], P un point de [AC] et les droites (MP) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{PM}{BC}.$$

D'où $\frac{x}{4} = \frac{AP}{3} = \frac{MP}{BC}$. Ainsi $AP = \frac{3x}{4}$ ou $0{,}75x$.

$PC = AC - AP$ donc $PC = 3 - 0{,}75x$.

Pour déterminer la longueur MP, il est nécessaire de calculer BC auparavant.

D'après l'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{soit} \quad BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25,$$

d'où BC = 5 cm.

D'où $\frac{x}{4} = \frac{MP}{5}$. Ainsi $MP = \frac{5x}{4}$ ou $1{,}25x$.

b. Le quadrilatère PMNC a ses côtés opposés parallèles donc c'est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont de même longueur.

Son périmètre est donné par :

$$2 \times PC + 2 \times PM = 6 - 1{,}5x + 2{,}5x = x + 6$$

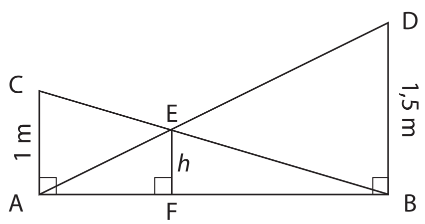
on veut $x + 6 = 9$ donc $x = 3$.

97 5,4 cm × 4,05 cm correspond à 640 × 480 pixels.

Le coefficient d'agrandissement est $\frac{41{,}5}{5{,}4} = \frac{415}{54} \approx 7{,}7$

$0{,}3\ \text{Mpx} \times \left(\frac{415}{54}\right)^2 \approx 17{,}72$ Mpx donc le fabricant a raison.

98 **Un défi**



• Les droites (AC), (EF) et (BD) toutes perpendiculaires à (AB) sont parallèles.

On utilise le théorème de Thalès deux fois :

– dans le triangle ABC : $\frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC}$ d'où $\frac{BF}{BA} = \frac{h}{1}$.

– dans le triangle ABC : $\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{DB}$ d'où $\frac{AF}{AB} = \frac{h}{1{,}5}$.

• F est un point du segment [AB] donc AF = FB = AB et par conséquent $\frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$.

On a donc à résoudre l'équation : $\frac{h}{1{,}5} + \frac{h}{1} = 1$

soit $h + 1{,}5h = 1{,}5$ ou $2{,}5h = 1{,}5$.

On obtient : $h = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$.

Les deux barrières se croisent à une hauteur de 0,6 m.

15. Tâche complexe

99 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Faire un schéma de la trajectoire de l'avion dans un plan vertical (les points A, M et D étant au sol).

Aide n° 2 : Quelle(s) distance(s) réelle(s) peut-on déterminer ?

Aide n° 3 : Comment peut-on estimer le rapport de réduction de la photo par rapport à la réalité ?

Aide n° 4 : Quelle distance est à comparer à la hauteur des arbres ?

Aide n° 5 : Quelle distance est à déterminer pour trouver le temps qui lui reste avant d'atterrir ?

2. Quelques commentaires

• Si la situation est aisée à comprendre, il en est autrement des documents 1 et 2 qu'il est nécessaire d'étudier en même temps ; en particulier il faut réaliser que les points M et D sont au sol (sinon il manquerait des informations) ; d'autre part le document 2 donne plusieurs informations (données chiffrées, vocabulaire, etc.).

Si une question porte d'emblée sur une conversion pieds – mètres, on pourra renvoyer vers un moteur de recherche.

• Une clé de cette tâche complexe est de penser à schématiser la situation, pour mieux la percevoir. Il est pertinent de faire un schéma dans un plan vertical en faisant apparaître les différences d'altitude.

La difficulté réside dans le passage d'une situation spatiale à une situation dans un plan. Il faudra sans doute alors aider les élèves qui seront en difficulté.

À noter que l'altimètre donne l'altitude par rapport au niveau de la mer (O m). Connaître l'altitude de l'avion par rapport à la piste s'avère indispensable.

• À lui seul le schéma n'est pas suffisant : il faut mettre encore en place un raisonnement pour savoir si la position de l'avion à la verticale des arbres est au-dessus ou au-dessous de la cime des arbres (15 m au-dessus du niveau du sol). Et une toute autre démarche sera nécessaire pour trouver le temps qui reste avant l'atterrissage.

Il est probable que les élèves reconnaîtront dans ce schéma une figure-clé de Thalès, mais ils s'apercevront sans doute rapidement qu'il leur manque des longueurs pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès.

Une mesure sur la carte et l'utilisation de la longueur de la piste (représentée par le segment noir sur la photo) permettront de déterminer l'échelle de la photo.

• D'autres mesures sur la photo (AM et AD) et l'utilisation de cette échelle permettront d'estimer les distances réelles et de les faire figurer sur le schéma.

Les groupes qui voudront faire un plan à l'échelle ou qui voudront utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour réaliser la figure constateront que cela n'est pas suffisant pour répondre à la question (représenter un segment de 15 m et un autre de 2 m sur le même schéma ne permet pas d'avoir une bonne précision.

Toutefois cette démarche pourra être valorisée, bien que n'ayant pas abouti).

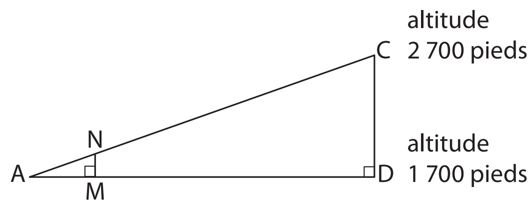
• Une autre étape consiste à déterminer la durée de la descente de l'avion. Ici est attendue en préalable l'utilisation de l'égalité de Pythagore pour déterminer la longueur de la trajectoire. C'est alors seulement qu'intervient l'information donnée dans le document 3.

À noter que là aussi on pourra valoriser toute démarche, même non aboutie, en particulier tout essai consistant à donner une réponse en minutes et non en heures (on pourra accepter des réponses du genre « environ 1 min » ou « un peu plus d'une minute » selon le cas).

Remarque : une fois les différentes distances réelles déterminées, les deux réponses sont indépendantes ; l'ordre dans lequel elles sont données n'a pas d'importance.

3. Éléments de réponse

• Représentation de la situation dans un plan vertical :



Sur ce schéma, le segment [CA] représente la trajectoire rectiligne de l'avion lors du vol en descente avant l'atterrissage.

C est la position de l'avion à la verticale de D, A est le point où l'avion se pose (situé au début de la piste de l'aérodrome).

M est l'endroit où se situent les arbres (on l'assimile à un point), N est la position de l'avion à la verticale de ces arbres.

• On mesure la longueur de la piste sur la photo : 2 cm (sur le manuel grand format).

Sachant que la piste mesure 600 m, on peut déterminer le rapport de réduction de la photo par rapport à la réalité :

$$k = \frac{2\text{ cm}}{600\text{ m}} = \frac{2\text{ cm}}{60\,000\text{ cm}} = \frac{1}{30\,000}$$

Le rapport de réduction est donc $\frac{1}{30\,000}$.

• On mesure sur la photo les distances AM et AD :

$$AM = 0{,}5\text{ cm} \quad\text{et}\quad AD = 8\text{ cm}.$$

Donc en réalité ces distances sont :

$AM = 0{,}5\text{ cm} \times 30\,000 = 15\,000\text{ cm} = 150\text{ m}$

$AD = 8\text{ cm} \times 30\,000 = 240\,000\text{ cm} = 2\,400\text{ m}$

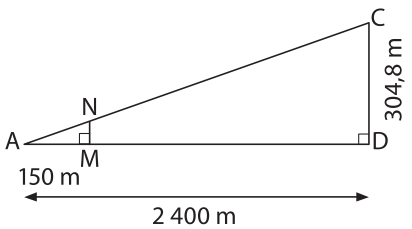
• On calcule la distance CD :

$CD = 2\,700\text{ pieds} - 1\,700\text{ pieds} = 1\,000\text{ pieds}$

En prenant 0,3048 m pour 1 pied, on a :

$CD \approx 1\,000 \times 0{,}3048$ soit $CD \approx 304{,}8$ m.

On obtient donc la figure suivante :



a. L'avion accrochera-t-il les arbres ?

Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DC}$ soit $\frac{150}{2\,400} \approx \frac{MN}{304,8}$.

Ainsi $MN \approx \frac{150 \times 304,8}{2\,400}$; $MN \approx 19,05$ m.

En conclusion : MN > 15 m donc l'avion de Lionel n'accrochera pas les arbres.

b. Durée de la descente de l'avion

• Avec les notations du schéma précédent, on calcule la distance CA.

Dans le triangle ADC rectangle en D, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

ainsi $AC^2 \approx 2\,400^2 + 304,8^2$

soit $AC^2 \approx 5\,852\,903$ et $AC \approx 2\,419$ m.

La distance *d* qui reste à parcourir est donc d'environ 2 419 m soit 2,419 km.

• L'avion vole à la vitesse de 120 km/h.

On sait que $v = \frac{d}{t}$ et donc que $t = \frac{d}{v}$

donc $t \approx \frac{2,419}{120}$ h soit : $t \approx 0,02015$ h.

On convertit cette durée en minutes :

$t \approx 0,02015 \times 60$ min soit $t \approx 1,209$ min.

On peut convertir 0,209 min en secondes :

$0,209$ min $= 0,209 \times 60$ s soit 12,54 s.

Ainsi la descente avant l'atterrissage dure environ 1 min et 13 s.

16. En route pour la Seconde

100 **1. b.** On conjecture que MD = ME

2. MAB et MRD sont dans une configuration de Thalès donc $\frac{MR}{MA} = \frac{MD}{MB}$

MAC et MRE sont dans une configuration de Thalès donc :

$$\frac{MR}{MA} = \frac{ME}{MC}$$

donc $\frac{MD}{MC} = \frac{ME}{MC}$ donc MD = ME.

101 **a.** Calculons le rapport $\frac{EF}{AB}$

$EF^2 = EB^2 + BF^2$ d'après l'égalité de Pythagore donc

$EF^2 = 2 \times \frac{AB^2}{9}$ donc $EF = \frac{\sqrt{2}}{3} AB$

donc le coefficient de réduction qui permet de passer de ABCD à EFGH est de $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

b. On remarque que le carré de côté [DJ] est moitié de celui de ABCD et l'on retrouve la même construction que la précédente réduite de $\frac{1}{2}$ donc les coefficients de réduction qui suivent sont tous égaux à $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE 13

Sections planes de solides

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Dans les classes précédentes, les élèves ont étudié les différents solides dont on va étudier les sections par un plan.
Le vocabulaire est donc connu, les formules de calcul des volumes également.

2. Activités

Pour les différentes activités proposées, il peut s'avérer utile d'avoir à sa disposition les différentes pièces obtenues avec une section.
De nombreux élèves sont en difficulté pour voir dans l'espace alors que d'autres sont particulièrement habiles.
Les petites vidéos peuvent également aider à voir dans l'espace.

Section d'un parallélépipède rectangle

Deux activités permettent d'aborder les deux cas envisagés par le programme.
Le professeur peut montrer qu'en dehors de ces deux cas, les sections ont d'autres formes.
C'est d'ailleurs envisagé dans des exercices. Au professeur de choisir le moment opportun.

- **Couper par un plan parallèle à une face.**

Il s'agit du cas le plus simple, les sections sont des rectangles identiques à ceux des faces.
Il n'y a aucune nouvelle dimension qui intervient, les constructions sont donc faciles à réaliser.

- **Couper par un plan parallèle à une arête.**

Pour ces situations, des élèves ont des difficultés à voir que les sections sont des rectangles d'où l'avantage à avoir du matériel qu'ils peuvent manipuler.
Les trois cas envisagés vont croissant en difficulté de construction.
Pour le **a.** la dimension IM étant donné, l'autre dimension est donnée dans **l'activité 1**.
La seule difficulté réside dans le fait que la section est un rectangle alors que sur la photo, elle peut apparaître comme un parallélogramme.
Pour le **b.** une des dimensions est à construire, c'est GB, diagonale d'une des faces que l'on peut tracer dès lors que la face est construite.
Certes, elle pourrait être calculée mais ce n'est pas l'objectif que nous nous sommes donné.
Pour le **c.** là encore, une des dimensions est à construire à partir d'une face mais il faut d'abord placer un point sur cette face avant de tracer la dimension DK.

Section d'un cylindre de révolution

Les deux activités permettent d'aborder les deux cas à étudier. Là encore, outre ces deux cas, le professeur peut montrer d'autres sections mais contrairement au parallélépipède rectangle, ces cas ne sont bien sûr pas abordés dans les exercices !

- **Couper par un plan perpendiculaire à l'axe.**

Pour ce premier cas, les élèves éprouvent rarement des difficultés à se représenter cette section.

- **Couper par un plan parallèle à l'axe.**

Pour ce deuxième cas, certains élèves hésitent pour proposer une conjecture. La construction de la section passant par I et J demande une construction auxiliaire, celle du disque de base pour reporter les points I et J. Il sera peut-être plus facile de demander d'abord celle contenant l'axe, c'est au professeur d'en juger.

Section d'un cône de révolution

- **Couper par un plan parallèle à la base.**

Le professeur peut avoir non seulement un cône de révolution coupé par un plan parallèle à la base mais aussi par un plan quelconque.
Les élèves seront curieux de les voir !
Ils n'auront vraisemblablement pas de difficulté à conjecturer les réponses correctes.

- **Réduire un cône.**

Avec le travail fait dans les chapitres précédents, cette activité trouve ici tout son intérêt. Le professeur doit souligner que raisonner dans l'espace (en 3D) revient à extraire de la situation une figure plane (en 2D) pour y appliquer les propriétés déjà étudiées.

Section d'une pyramide

- **Couper par un plan parallèle à la base.**

Là encore, le professeur peut s'amuser à proposer des sections autres que celles proposées par le programme.
Pour cette activité, les conjectures proposées seront sûrement correctes. Il convient donc de passer assez rapidement à l'activité suivante.

- **Réduire une pyramide.**

Il s'agit, comme dans **l'activité 6** d'une démonstration qui utilise les résultats établis dans le chapitre 12.

3. Savoir Faire

Le premier est consacré à une construction en vraie grandeur alors que les deux suivants montrent comment conduire des calculs d'aire et de volume.

L'exercice résolu propose donc la construction d'une section faite sans faire appel à des calculs de longueur. Seules des constructions d'angles droits et les mesures directement prises avec la règle graduée sont utilisées. Ce savoir-faire demande des déductions que l'élève n'a pas à rédiger, d'où l'intérêt porté par beaucoup.

L'exercices résolus portant sur des calculs montrent deux façons de faire tout en privilégiant, de part la présentation, l'utilisation des propriétés établies dans le chapitre 12 sur : « Agrandissement - Réduction ».

Pour les deux, nous avons donc mis en avant, en accord avec le programme (socle commun) que l'on peut d'abord calculer le rapport de réduction et appliquer directement la propriété énoncé dans le §3 page 231 au lieu de reprendre les démonstrations des **activités 6** et **8**.

Le savoir faire TICE

Le logiciel Geospace permet de présenter rapidement des sections enrichissant ainsi les représentations mentales des élèves. Pour tous ces savoir-faire, les exercices de la rubrique « J'applique » avec la correction en fin de manuel permettent à l'élève de travailler en autonomie.

La Page Atelier Brevet

Quelques exercices sur ce chapitre ont été proposés les années précédentes aux épreuves du DNB et nous en proposons deux que nous avons adaptés. On y retrouve en grande partie les sujets abordés par les savoir-faire précédents hormis celui de la construction d'un patron ; mais ce savoir-faire est travaillé depuis la classe de **6^{e}** et même à l'école primaire. Le présenter dans un sujet type DNB rappelle à l'élève que toutes les connaissances rencontrées dans sa scolarité doivent être disponibles pour cet examen.

4. Compléments

De nombreux exercices sont proposés pour permettre à l'élève de réactiver ses anciennes connaissances et d'en construire de nouvelles.

Pour certains exercices, le professeur peut prévoir des photocopies afin d'alléger la charge de travail et permettre à l'élève de consacrer son temps sur l'acquisition des nouveaux savoirs.

Le **travail de groupe** présenté dans le numéro 44 est également classé dans la rubrique « Math et Arts ».

La série **Vrai ou Faux** permet à l'élève capable d'argumenter ses réponses de se rendre compte s'il a oui ou non compris l'essentiel de ce chapitre.

Les exercices de la page **Présenter, Argumenter, Communiquer,** travaillent non seulement la rédaction, la qualité de l'argumentation mais aussi, avec le numéro 56, la représentation en perspective d'une section.

La **Narration de recherche,** quant à elle poursuit son objectif avec ici une prise d'initiative et des calculs, excellent entraînement pour la recherche et l'épreuve du DNB.

Objectif Brevet reprend le thème du savoir-faire 1 et celui de la construction d'un patron.

Les **exercices d'approfondissement**, en ne reprenant pas les titres des paragraphes du cours auxquels ils font appel, sauront intéresser les élèves.

Ne pas oublier que le « **Problème ouvert** » permet d'utiliser tout ce qui est à disposition de l'élève.

La réponse du **défi** pour un expert est la racine cubique de 0,5. Bien entendu, on ne demande pas à l'élève d'utiliser ce savoir mais il peut suggérer cette réponse et en tout cas, il doit être en mesure d'en donner une valeur approchée.

5. Socle : tâche complexe

On peut utilement consulter :

http://media.eduscol.education.fr/file/MPS/23/7/LyceeGT_Ressources_2_Exploration_MPS_6-1_cristallographie_15237.pdf

Une recherche avec un tableur peut s'avérer utile, de même qu'un peu de matériel, par exemple quelques oranges ou quelques pommes (qui roulent moins que de vraies sphères !) afin de les empiler et d'inviter les élèves à créer une suite à charger dans une feuille de calcul.

6. En route vers la seconde

Le premier de ces exercices répond à une préoccupation écologique puisqu'il s'agit d'utiliser l'énergie solaire.

Cet exercice peut donc susciter un grand intérêt.

L'**exercice 86** est lié à l'**exercice 85** dans le sens où la section du cube est en partie semblable.

Corrigés

1. Devinettes

• Devinette

Indice :

Dénombrer le nombre de tétraèdres nécessaires pour réaliser les empilements de la photographie puis essayer de trouver une relation entre ces nombres.

Réponse :

On remarque qu'à chaque étape, il faut 4 fois l'empilement précédent.

$1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$. Il faut donc 256 tétraèdres.

• Devinette

Indice :

Imaginer la boîte obtenue à partir d'un parallélépipède rectangle à base carrée duquel on enlève des tétraèdres dont une arête est aussi la hauteur.

Réponse :

Côté du fond de la boîte :

$$6 + 2 \times 6 \cos 45° = 6 + 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 + 6\sqrt{2}$$

La hauteur de la boîte est $6 \cos 45° = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Volume du parallélépipède rectangle :

$(6 + 6\sqrt{2})^2 \times 3\sqrt{2} = (108 + 72\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} = 324\sqrt{2} + 432$

Volume des 4 tétraèdres enlevés :

$$4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (3\sqrt{2})^2 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

Volume de la boîte :

$$324\sqrt{2} + 432 - 36\sqrt{2} = 288\sqrt{2} + 432$$

Remarque : au lieu d'utiliser cos 45°, on peut calculer avec l'égalité de Pythagore.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : b.

2 Bonne réponse : c.

3 Bonne réponse : b.

4 Bonne réponse : a.

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$ d'où $V = \frac{1}{3} \times 7 \times 7 \times 12 = 196$ cm^3.

5 Bonne réponse : c.

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$ d'où $V = \frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times \pi \times 18$.

$V = 384\,\pi$ cm^3 soit $V \approx 1\,206$ cm^3.

6 Bonne réponse : c.

Les dimensions du parallélépipède agrandi sont 4 cm, 14 cm et 10 cm.

$V = 4 \times 14 \times 10 = 560$ cm^3.

3. Calcul mental

7 **a.** 46,7 cm^2 = 0,467 dm^2 **b.** 0,007 3 m^2 = 73 cm^2

c. 120 cm^2 = 12 000 mm^2 **d.** 0,058 m^3 = 58 dm^3

e. 79 600 cm^3 = 0,0796 m^3 **f.** 1,52 mm^3 = 0,00152 cm^3

8 **a.** 0,85 L = 85 cL **b.** 2,4 mL = 0,24 cL

c. 320 L = 3,2 hL

9 **a.** 0,85 L = 0,85 dm^3 **b.** 73,2 L = 73 200 cm^3

c. 1 150 cm^3 = 1,15 L **d.** 54 dm^3 = 0,54 hL

e. 2 700 cm^3 = 2,7 L **f.** 5 100 L = 5,1 m^3

4. Activités

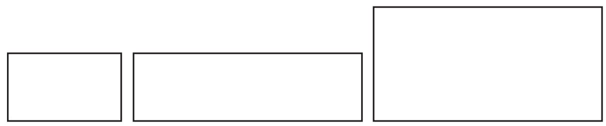
Section d'un parallélépipède rectangle

1 Par un plan parallèle à une face

Les sections sont des rectangles dont les dimensions sont :

a. 1,5 cm et 2,5 cm,

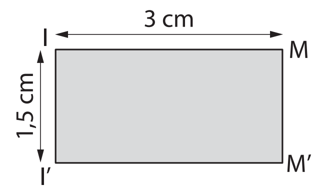
b. 1,5 cm et 5 cm pour l'une et 2,5 cm et 5 cm pour l'autre.



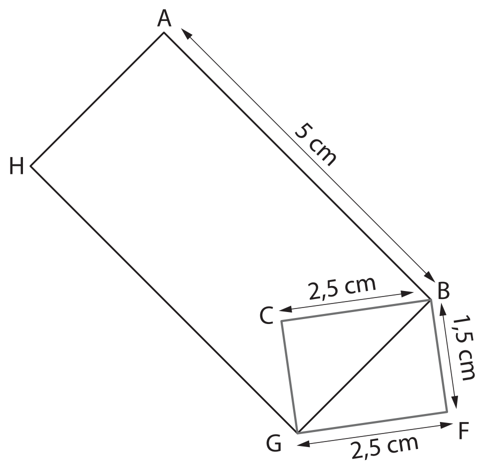
2 Par un plan parallèle à une arête

Les sections sont des rectangles.

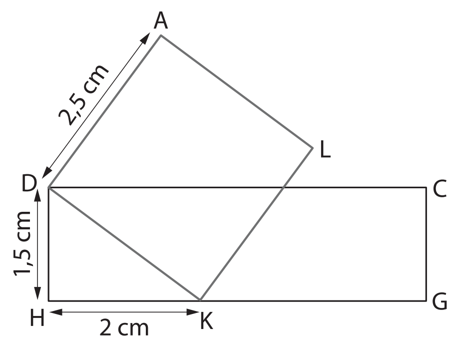
a.



b.



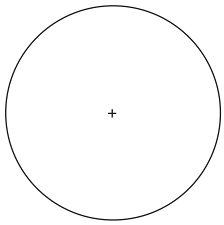
c.



Section d'un cylindre de révolution

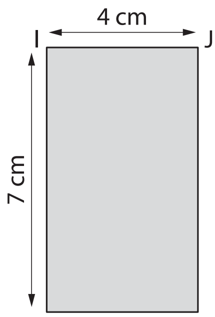
3 Par un plan perpendiculaire à son axe

La section est un cercle de même rayon que le cylindre.

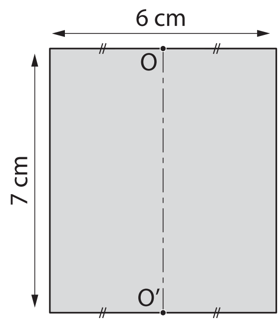


4 Par un plan parallèle à son axe

a. La section du plan parallèle à l'axe (OO′) qui passe par I et J est un rectangle de 7 cm sur 4 cm.



b. La section du plan parallèle à l'axe (OO′) qui passe par O est un rectangle de 7 cm sur 6 cm (le diamètre du cylindre).



Section d'un cône de révolution

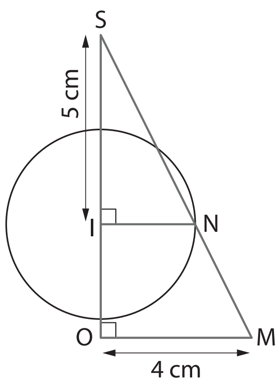
5 Couper par un plan parallèle à sa base

a. La section de ce cône par le plan parallèle à sa base et qui passe par le point I tel que SI = 5 cm est un cercle de centre I.

b. La section de ce cône par le plan parallèle à sa base et qui passe par le point S est le point S.

6 Réduire un cône

La figure ci-contre n'est pas demandée mais elle peut être un exercice utile.



a. Dans le triangle, SOM, les droites (OM) et (NI) sont parallèles entre elles.

On reconnaît une configuration du théorème de Thalès avec les droites (SM) et (SO) sécantes en S et les deux droites parallèles (OM) et (IN).

On a alors : $\frac{SI}{SO}=\frac{IN}{OM}$ d'où $\frac{5}{8}=\frac{IN}{4}$ et donc :

$$IN = \frac{5\times 4}{8} = 2{,}5.$$

La distance IN est égale à 2,5 cm, quelle que soit la position de ce point N, N est donc un point du cercle de centre I et de rayon 2,5 cm.

La section de la section du cône par le plan P est le cercle de centre I et de rayon 2,5 cm.

b. $\mathcal{V} = \frac{\pi\times 4^2\times 8}{3} = \frac{128\pi}{3}$ et $\mathcal{V}' = \frac{\pi\times 2{,}5^2\times 5}{3} = \frac{125\pi}{12}$

$\mathcal{V}\times\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{128\times\pi\times 5^3}{3\times 8^3} = \frac{125\pi}{12}$ or, $\mathcal{V}' = \frac{125\pi}{12}$

On a vérifié que $\mathcal{V}' = \left(\frac{5}{8}\right)^3\mathcal{V}$

c. Le rapport de réduction est $\frac{5}{8}$.

Section d'une pyramide

7 Couper par un plan parallèle à sa base

a. La section semble être un carré.

b. On peut conjecturer que la section de la pyramide est alors un triangle équilatéral.

8 Réduire une pyramide

a. Avec (SA) et (SB) sécantes en S et (AB) // (A′B′), on applique la propriété de Thalès pour écrire que :

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{A'B'}{AB}$$

De même avec (AC) // (A′C′), on a $\frac{SA'}{SA}=\frac{SC'}{SC}=\frac{A'C'}{AC}$

et avec (BC) // (B′C′), on a $\frac{SC'}{SC}=\frac{SB'}{SB}=\frac{C'B'}{CB}$

On peut donc en déduire que $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{SC'}{SC}$.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{SC'}{SC}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$\frac{B'C'}{5{,}4}=\frac{1}{3}$ d'où $B'C' = \frac{5{,}4}{3} = 1{,}8$

$\frac{A'C'}{7{,}2}=\frac{1}{3}$ d'où $A'C' = \frac{7{,}2}{3} = 2{,}4$

L'égalité de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C donne $AB^2 = CB^2 + CA^2 = 29{,}16 + 51{,}84 = 81$

d'où AB = 9

$\frac{A'B'}{9}=\frac{1}{3}$ d'où $A'B' = \frac{9}{3} = 3$

$A'B'^2 = 9$ $\qquad$ $B'C'^2 + A'C'^2 = 3{,}24 + 5{,}76 = 9$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle A′B′C′ est rectangle en C′.

Remarque : la section de la pyramide par le plan a la même nature que sa base.

b. $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5,4 \times 7,2}{2} \times 12 = 77,76$

$\mathcal{V}' = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2,4 \times 1,8}{2} \times 4 = 2,88$

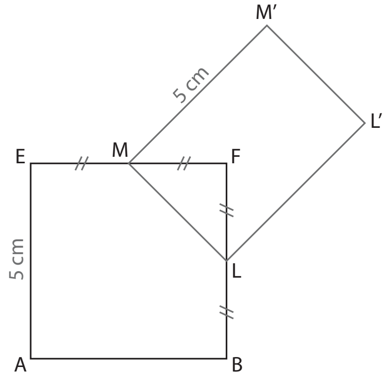
$77,76 \times \dfrac{1}{3^3} = 2,88$

On vient de vérifier que $\mathcal{V}' = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \mathcal{V}$

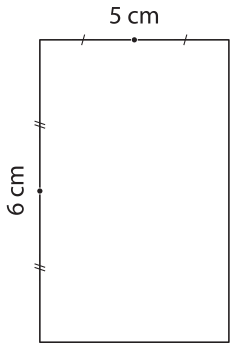
c. Le rapport de réduction est $\dfrac{1}{3}$.

5. J'applique

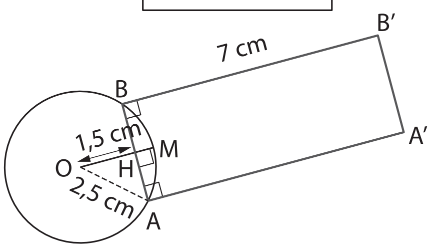
4



5 Il s'agit d'un rectangle de 5 cm sur 6 cm.



6



7 La section du cône par un plan parallèle à la base est une réduction de cette base dans le rapport :

$k = \dfrac{\text{SA}}{\text{SO}}$ c'est-à-dire $k = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la base et $\mathcal{A}'$ celle de la section, alors $\mathcal{A}' = \left(\dfrac{5}{9}\right)^2 \mathcal{A}$

Or, $\mathcal{A} = \pi \text{R}^2 = \pi \times \text{OM}^2 = \pi \times 15^2$ donc $\mathcal{A} = 225\pi\,\text{cm}^2$ et :

$$\mathcal{A}' = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times 225\pi\,\text{cm}^2 = \frac{625}{9}\pi\,\text{cm}^2$$

En arrondissant au mm² $\mathcal{A}' \approx 218,17\ \text{cm}^2$

8 La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD dans le rapport $k = \dfrac{\text{SO}'}{\text{SO}}$ c'est-à-dire :

$$k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

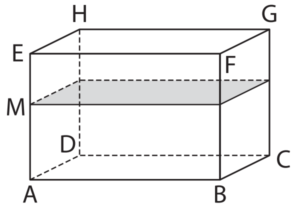
On note $\mathcal{V}$ le volume de la pyramide SABCD et $\mathcal{V}'$ celui de SA'B'C'D', alors $\mathcal{V}' = k^3\mathcal{V}$

Or, $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire de base} \times h = \dfrac{1}{3} \times 4,5^2 \times 9$

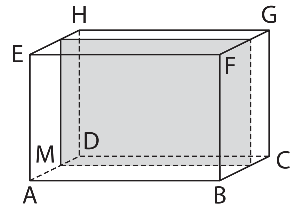
$\mathcal{V} = 60,75\ \text{cm}^3$

Donc, $\mathcal{V}' = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times 60,75\ \text{cm}^3 = 18\ \text{cm}^3$

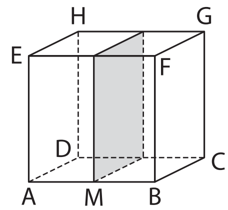
10 Section par un plan parallèle à la face ABCD.



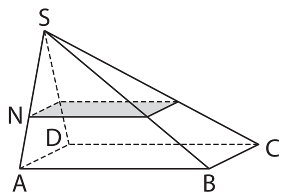
11 Section par un plan parallèle à la face ABFE.



12 Section par un plan parallèle à la face ADHE.

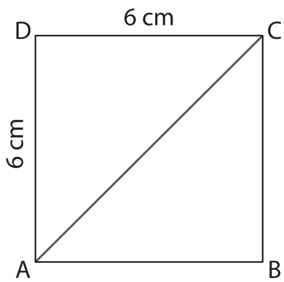


13 Section par un plan parallèle à sa base.

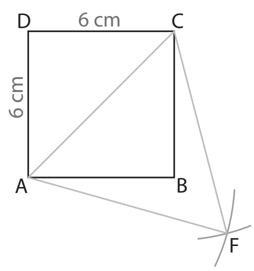


6. Atelier Brevet

14 **1. a.**



b.



2. Dans le triangle ABC, rectangle en B, l'égalité de Pythagore s'écrit :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 6^2$$

D'où AC = $\sqrt{72}$ cm (Soit AC = $6\sqrt{2}$ cm)

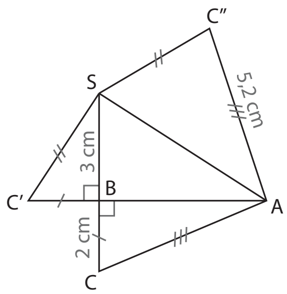
3. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6^2 \times 6 = 36$

Le volume de la pyramide ABCF est 36 cm³.

4. $\frac{36}{6^3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$

Le volume de la pyramide ABCF est environ égal à 17 % de celui du cube et non 18 %.

15 **1.**



2. Le triangle ABC est rectangle en B, on peut donc utiliser l'égalité de Pythagore.

$AC^2 = BC^2 + AB^2$, soit :

$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 5{,}2^2 - 2^2 = 27{,}04 - 4 = 23{,}04$

AB = 4,8 cm

3. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4{,}8 \times 3 = 4{,}8$

Le volume de la pyramide SABC est 4,8 cm³.

4. La pyramide SA'B'C' est une réduction de la pyramide SABC puisque le plan qui coupe la pyramide SABC est parallèle à sa base.

Le rapport de réduction est $k = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$

Donc, $\mathscr{V}(SA'B'C') = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \mathscr{V}(SABC) = \frac{1}{8} \times 4{,}8 = 0{,}6$

Le volume de la pyramide SA'B'C' est 0,6 cm³.

7. Exercices à l'oral

Aires et volumes

16 **a.** 0,01 m² **b.** 250 m² **c.** 0,04 m²
d. 1 000 000 m² **e.** 0,35 m² **f.** 0,0071 m²

17 **a.** 1 000 dm³ **b.** 0,08 dm³ **c.** 0,005 dm³
d. 42,1 dm³ **e.** 1 300 dm³ **f.** 0,54 dm³

18 **a.** Périmètre : 24 cm ; Aire : 35 cm²
b. Périmètre : 6 π cm ; Aire : 9 π cm²
c. $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
Périmètre : 24 cm ; Aire : 24 cm²

19

	1	2	3
a	64 cm³	60 cm³	100 π cm³
b	64 cm²	64 cm² | 54 cm² | 70 cm²	40 π cm²
c	96 cm²	94 cm²	90 π cm²

20 **a.** 210 cm³
b. 210 cm³ = 0,21 dm³ = 0,21 L = 21 cL

21 **a.** 100 π cm³ **b.** 100 π ≈ 314
Alexis a bien raison.

Section d'un parallélépipède rectangle ou d'un cylindre

22 **1. a.** Un carré
b. Un rectangle
c. Un rectangle.
2. La section qui a l'aire la plus grande est la section c. L'un de ses côtés est une diagonale d'une face et donc est plus longue que les 2 autres côtés.

23 **a.** Plan parallèle à la face DCGH (ou à la face ABFE).
b. Plan parallèle à l'arête [AD] (ou à l'arête [EH] ou [FG] ou [BC])

24 **1. a.** un rectangle.
b. un cercle de centre I.
c. un rectangle.
2. a. un rectangle de 9 cm sur 6 cm.
b. un cercle de rayon 3 cm.
c. un rectangle dont la longueur est 9 cm.

Section d'un cône de révolution, d'une pyramide

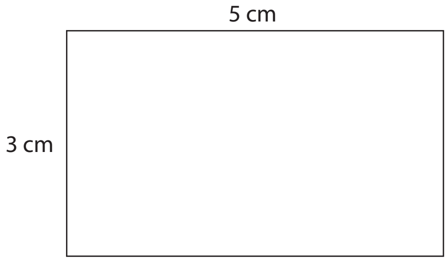
25 **1.** La section est un cercle de centre I.
2. a. I se trouve à $\frac{1}{3}$ de la hauteur, en partant de S.
b. I se trouve à $\frac{3}{4}$ de la hauteur à partir de S.
c. I est confondu avec O.
3. Lilou a raison, le point I est alors confondu avec le point S.
4. a. Le rapport de réduction est $\frac{1}{2}$ pour les longueurs, donc $\frac{1}{4}$ pour les aires.
L'aire de la section est le quart de celle de la base du cône C.
b. Le rapport de réduction pour les volumes est $\frac{1}{8}$ donc, le volume du cône de sommet S et dont la base est la section est $\frac{1}{8}$ du volume du cône C.

26 La section est bien un triangle équilatéral.
On peut dire à David :
– Dans la leçon, on a appris que la section est une réduction de la base. Or, une réduction ne change pas la forme mais uniquement les longueurs.
– Dans l'activité 8, on a établi avec la propriété de Thalès que chaque côté de la section est obtenu en multipliant chaque côté de la base par le même rapport. Comme les trois côtés de la base ont la même longueur, ceux de la section aussi et la section est donc un triangle équilatéral.

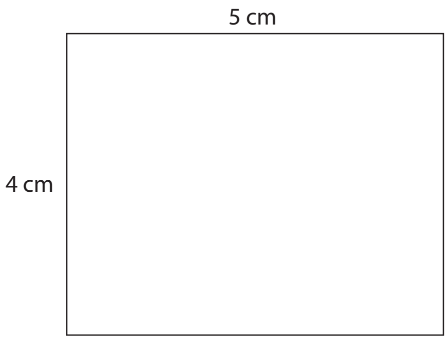
8. Exercices d'application

Section d'un parallélépipède rectangle

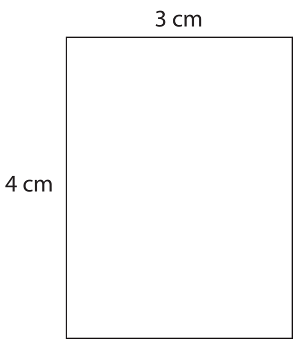
27 **a.**



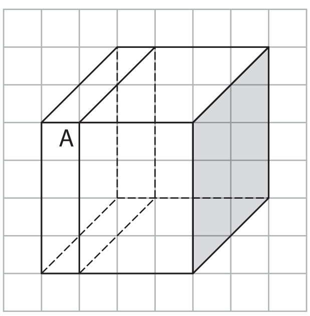
b.



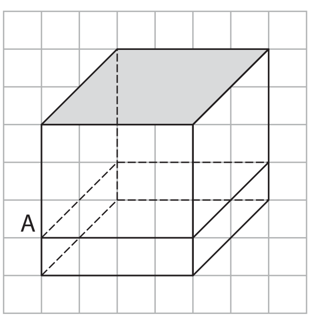
c.



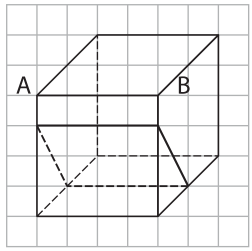
28 **a.**

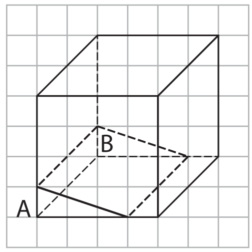


b.

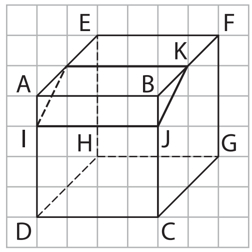


29



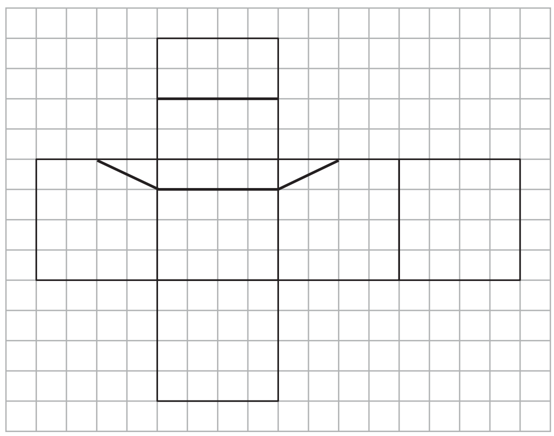


30 **1. a.**



b. Cette section est obtenue par un plan parallèle à l'arête [AB] (ou [DC] ou [HG] ou [FE]) mais non à une face.

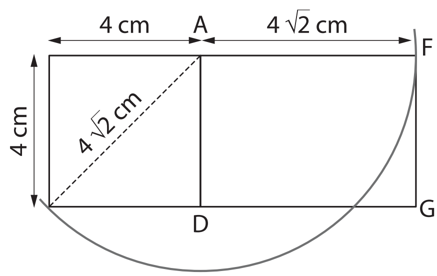
2.



Attention : ce patron n'est pas à l'échelle 1. 1 cm est représenté par un carreau.

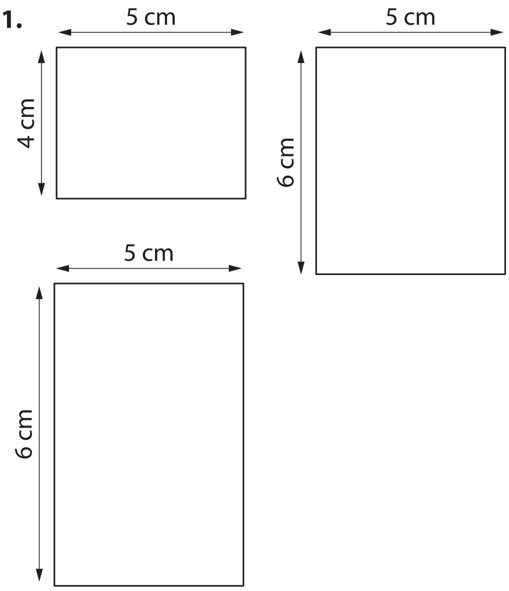
31 **a.** ADGF est un rectangle.

b.

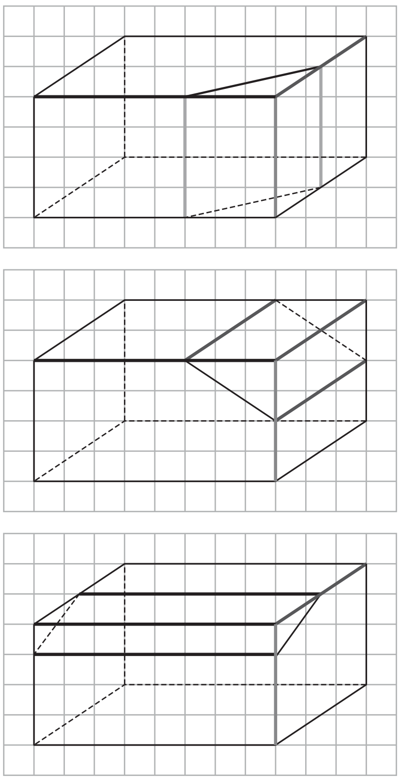


c. $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Les dimensions du rectangle sont 4 cm et $4\sqrt{2}$ cm, soit environ 5,7 cm.

32 **1.**



2. Les trois dessins suivants sur papier quadrillé ne sont donnés qu'en exemple pour montrer les trois sections demandées.



3. $4 \times 5 + 6 \times 5 + 8 \times 5 = 5 \times (4 + 6 + 8) = 90$

Léa a raison, la somme des aires de ces trois sections est bien 90 cm^2.

33 **a.** La section est un rectangle.

b. L'égalité de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D permet d'écrire :

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

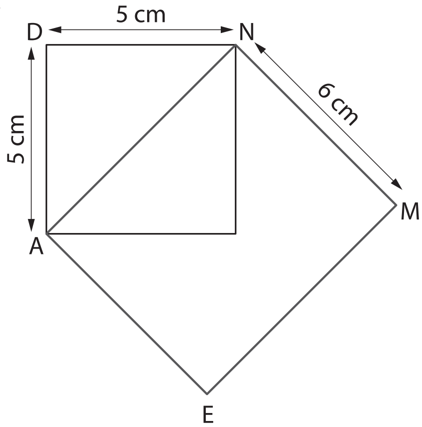
$AC = 13$ cm

La section a pour dimensions 7 cm et 13 cm.

c. $\tan\widehat{ACD} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{5}{12}$ dans ACD, triangle rectangle en D.

d'où $\widehat{ACD} \approx 23°$

34 **1. a.**



b. La valeur exacte de AM se calcule avec l'égalité de Pythagore dans le triangle ADM rectangle en D.

$$AM = 5\sqrt{2}$$

$$6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \approx 42$$

L'arrondi au cm^2 de l'aire de cette section est 42 cm^2.

2. Aire des deux bases, en cm^2 :

$(5 \times 5) : 2 = 12{,}5$

$5 \times 9 - 12{,}5 = 32{,}5$

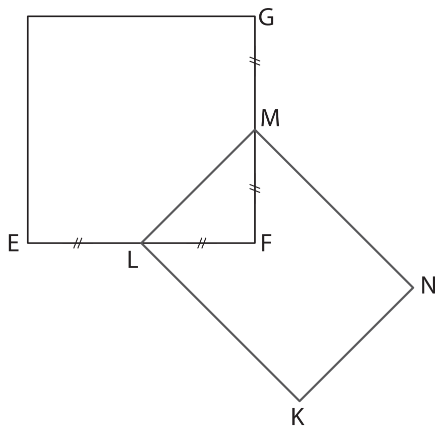
Volumes, en cm^3 :

$12{,}5 \times 6 = 75$

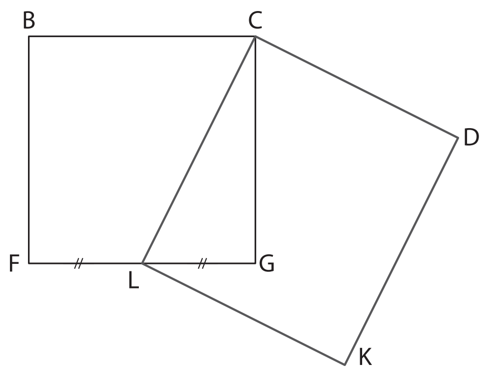
$32{,}5 \times 6 = 195$

Les volumes des deux prismes sont 75 cm^3 et 195 cm^3.

35 **a.**



b.



Section d'un cylindre

36 N° 1 : le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre ou parallèle à la face sur laquelle on voit la base du cylindre.

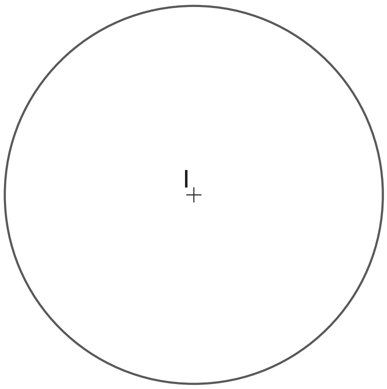
N° 3 : Le plan semble contenir l'axe du cylindre et la diagonale de la face du cube sur laquelle apparaît la base du cylindre.

N° 4 : Le plan est parallèle à l'axe du cylindre.

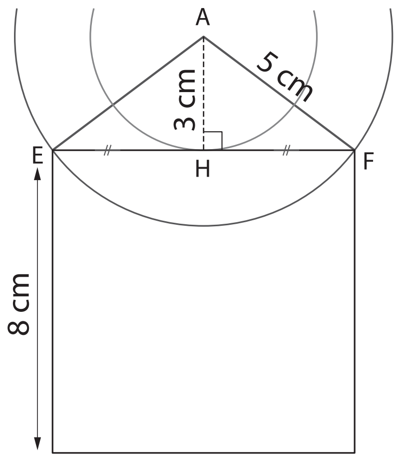
37 **1.** La section rouge est obtenue avec un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.

La section verte est obtenue avec un plan parallèle à l'axe du cylindre (situé à 3 cm).

2. a.



b.



3. a. AE = AF, AEF est isocèle en A. H milieu de [EF] est aussi le pied de la hauteur.

Avec l'égalité de Pythagore dans le triangle AEH, rectangle en H :

$$EH^2 = AE^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

EH = 4 cm, EF = 2×4 cm = 8 cm.

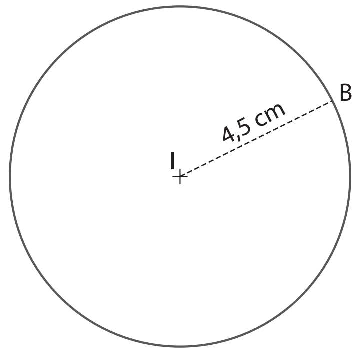
b. On peut effectivement vérifier sur le dessin cette longueur.

Section d'un cône de révolution, d'une pyramide

38 **a.** $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{IB}{OA}$

b. $\dfrac{6}{10} = \dfrac{IB}{7,5}$

$IB = \dfrac{6 \times 7,5}{10} = 4,5$



39 **1. a.** La section par un plan parallèle par la base est une réduction de celle-ci, donc MNPQ est un carré.

b. 1re façon : avec le rapport de réduction qui est :

$$\frac{2,5}{7,5} = \frac{1}{3}$$

$(6 \times 6) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 4$

2e façon : en calculant le côté de la section $6 \times \dfrac{1}{3} = 2$

$2 \times 2 = 4$

L'aire de cette section est 4 cm^2.

2. a. $\dfrac{6 \times 6 \times 7,5}{3} = 90$

Le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide SABCD est 90 cm^3.

b. $\mathcal{V}' = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \mathcal{V} = \dfrac{1}{27} \times 90 \approx 3,33$

Une valeur approchée de $\mathcal{V}'$ est 3,33 cm^3.

40 $\pi \times 15^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 100\pi$

L'aire de cette section est 100π cm^2

$$100\pi \approx 314,1$$

L'arrondi au cm^2 de cette section est 314 cm^2.

41 $8^2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 36$ L'aire de cette section est 36 cm^2.

42 **a.** 6 cm $\times$ 2 = 12 cm, la hauteur du cône C_1 est 12 cm.

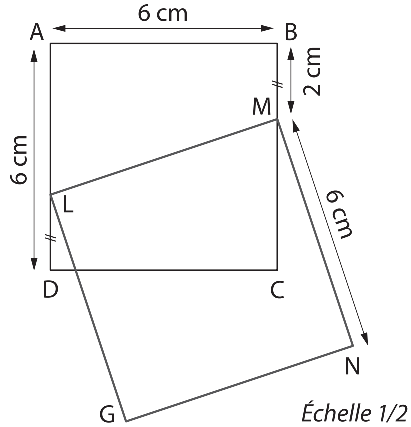
b. 50 cm^2 $\times$ 2^2 = 200 cm^2, l'aire de la base du cône C_1 est 200 cm^2.

c. $\dfrac{1}{3} \times 200 \times 12 = 800$, le volume du cône C_1 est 800 cm^3.

Prendre des initiatives

43 **a.** Le plan coloré est parallèle à une arête, donc la section de ce cube par ce plan est un rectangle qui a pour largeur 6 cm et une longueur égale à LM.

b.



Échelle 1/2

44 L'œuvre semble être composée de 10 cubes (9entiers et deux demis à la base). On peut compter 7 demi diagonales (d'une face carrée) pour une hauteur de 4 m.

Si on note d, une demi diagonale, $7d = 4$, d'où $\frac{4}{7}$, avec l'égalité de Pythagore, dans un des triangles rectangles formés par deux demi diagonales et un côté d'une face :

$$d^2 + d^2 = c^2 = 2d^2$$

$c = \frac{4}{7}\sqrt{2}$

$10 \times \left(\frac{4}{7}\sqrt{2}\right)^3 \approx 5{,}3$. Le volume est environ 5,3 m^3.

45 **a.** 0,5 L = 500 cm^3

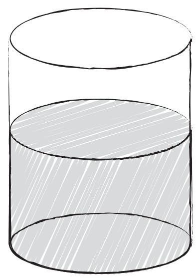
10 cm : 2 = 5 cm

Si on note h, la hauteur de peinture, on a $\pi 5^2 \times h = 500$.

Alors $h = \frac{500}{25\pi} \approx 6{,}4$

La hauteur est environ 6,4 cm.

b. Ci-contre, dessin à main levée de la peinture dans le pot.



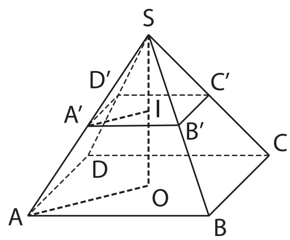
46 Dire que la section est un carré signifie que la hauteur du cylindre est égale à son diamètre.

14 cm : 2 = 7 cm. Le rayon mesure donc 7 cm.

$\frac{1}{2} \times \pi \times 7^2 \times 14 = 343\pi$

Le volume de chacun des morceaux est 343π cm^3.

47 **1. a.**



b. Comme le plan est parallèle à la base, la section est une réduction de cette base, donc un carré.

c. Le rapport de réduction est $\frac{SI}{SO} = \frac{3}{5}$, donc le côté de A'B'C'D' a pour mesure, en cm, $\frac{3}{5} \times 6 = \frac{18}{5} = 3{,}6$

2. $\frac{1}{3} \times 6^2 \times 5 - \frac{1}{3} \times 3{,}6^2 \times 3 = 47{,}04$

Le tronc de pyramide ABCDA'B'C'D' a un volume de 47,04 cm^3.

9. Vrai – Faux

48 **Vrai.**

La section peut être un carré de 6 cm de côté, dans ce cas, le plan ne passe pas par les centres des cercles de base.

49 **Faux.**

Lorsque le rapport de réduction est k, les aires sont multipliées par k^2. Si le cône est coupé à mi-hauteur, l'aire serait le quart et non la moitié.

50 **Faux.**

La section est superposable à la face.

51 **Faux.**

La section d'un cône par un plan est un cercle seulement si celui-ci est parallèle à la base.

52 **Faux.**

La section est un rectangle uniquement si le plan est parallèle à une arête ou à une face.

10. Calcul mental et réfléchi

53 La section est le rectangle ABGH avec AB = 5 cm.

L'égalité de Pythagore dans le triangle AED rectangle en A montre que $ED^2 = AE^2 + AD^2$

$ED^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

ED = 10 cm.

La section est donc un rectangle de 5 cm sur 10 cm

54 **a.** $360 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 40 \qquad 5\,400 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 200$

L'aire est 40 cm^2 et le volume 200 cm^3.

b. $360 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 3{,}6 \qquad 5\,400 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 5{,}4$

L'aire est 3,6 cm^2 et le volume 5,4 cm^3.

11. Présenter, argumenter, communiquer

55 **a.** $8^3 = 512$

Le volume du cube est 512 cm^3.

b. $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 8 = \frac{128}{3}\pi \approx 134$

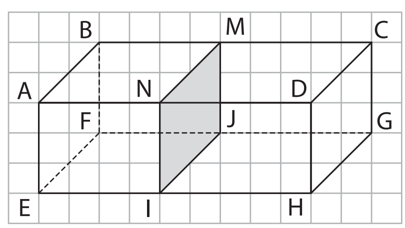
Le volume du cône est $\frac{128}{3}\pi$ cm^3, l'arrondi au cm^3 est 134 cm^3.

c. $\frac{134}{512} \approx 0{,}26$

Le cône occupe environ 26 % du volume du cube, donc moins de 30 %.

56 **a.** Une représentation en perspective cavalière conserve le parallélisme. Or, (MN) et (AB) qui sont parallèles sur le solide, ne sont pas représentées parallèles sur le dessin.

b.



57 Pour calculer le volume d'un cylindre, il faut multiplier l'aire de la base par la hauteur, ou longueur du cylindre. Ceci montre que le volume est proportionnel à la longueur. Ainsi, à bases identiques, un cylindre deux fois plus long a un volume qui est deux fois plus grand, autrement dit, un volume double.

C'est Ninon qui a raison.

58 **a.** Dans le triangle SAB, rectangle en A, l'égalité de Pythagore s'écrit :

$$SB^2 = AB^2 + AS^2$$

$$SB^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$$

On vient de montrer que SB = 26 cm.

b. $\frac{SD}{SA} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$\frac{SE}{SB} = \frac{19,5}{26} = \frac{3}{4}$

On constate que $\frac{SD}{SA} = \frac{SE}{SB}$

et de plus, les points S, E, B et les points S, D, A sont alignés dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

c. Le coefficient de réduction est $\frac{SD}{SA} = \frac{3}{4}$.

d. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 10 \times 11 \times 24 = 440$

Le volume de la pyramide SABC est 440 cm^3.

$440 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 185,625$

Le volume de la pyramide SDEF est 185,625 cm^3.

59 30 cm – 12 cm = 18 cm

$\frac{SO'}{SO} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$

Le cône de hauteur SO' est une réduction du cône de hauteur SO dans le rapport 0,6.

4,8 : 0,6 = 8

Le cône de hauteur SO a 8 cm pour rayon de sa base.

8 cm × 2 = 16 cm

1,50 m = 150 cm

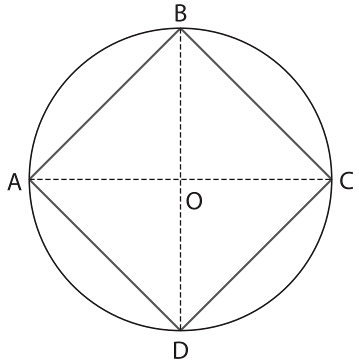
150 cm : 16 = 9,375

On peut aussi écrire

150 cm = 9 × 16 cm + 6 cm

On peut donc placer 9 cônes sur l'étagère.

60



a. Le plus grand volume est obtenu avec le plus grand carré inscrit dans le cercle de 15 cm de rayon.

2 × 15 × 15 = 450

L'aire de ce carré est 450 cm^2

7 m = 700 cm

450 × 700 = 315 000

Le volume de la poutre est 315 000 cm^3, soit 315 dm^3

b. Volume du tronc, en cm^3

$\pi \times 15^2 \times 700$

$$\frac{\text{volume de la poutre}}{\text{volume du tronc}} = \frac{2 \times 15^2 \times 700}{\pi \times 15^2 \times 700} = \frac{2}{\pi} \approx 0,636$$

Le pourcentage de bois utilisé pour la poutre est environ 64 %.

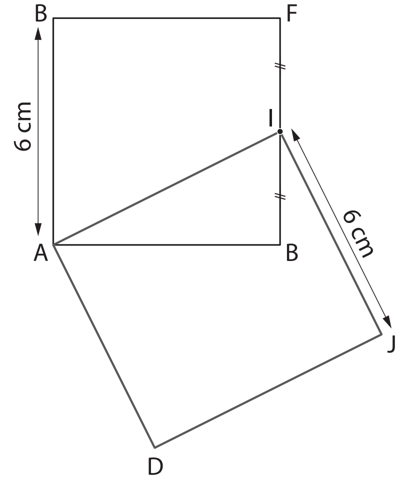
12. QCM pour s'évaluer

61 **a.** **62** **c.** **63** **c.** **64** **a.**

65 **b.** **66** **a. b. c.** **67** **a. c.** **68** **b. c.**

13. Objectif brevet

69 **a.**



b. IB = BF : 2 = 6 cm : 2 = 3 cm

AIB est rectangle en B,

(AB × BI) : 2 = (6 × 3) : 2 = 9

L'aire du triangle AIB est bien 9 cm^2.

c. 9 × 6 = 54

Le volume du prisme droit AIBDJC est 54 cm3.

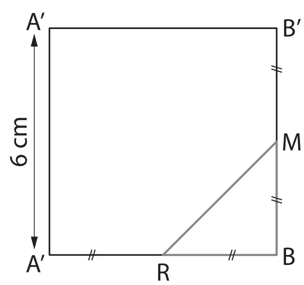
70 **a.** BRM est un triangle rectangle en B.

RB = MB = BB' : 2 = 6 cm : 2 = 3 cm

L'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$$RM^2 = RB^2 + BM^2 = 3^2 + 3^2 = 2 \times 3^2$$

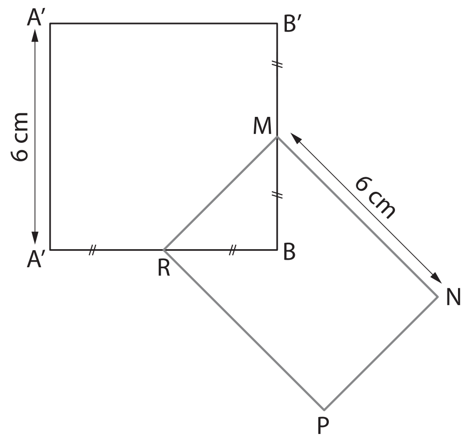
$$RM = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$$



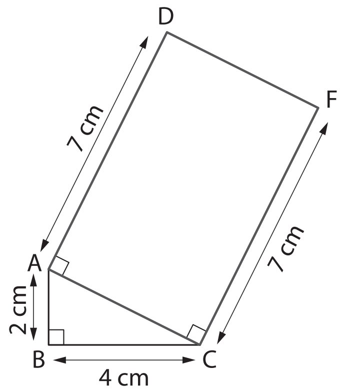
b. La nature de la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête est un rectangle, donc RMNP est un rectangle.

Ses dimensions sont :

$3\sqrt{2}$ cm et 6 cm.



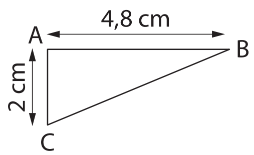
71 **a.**



b. $(BA \times BC : 2) \times CF = (2 \times 4 : 2) \times 7 = 28$

Le volume de ce prisme est 28 cm^3.

72 **a.**

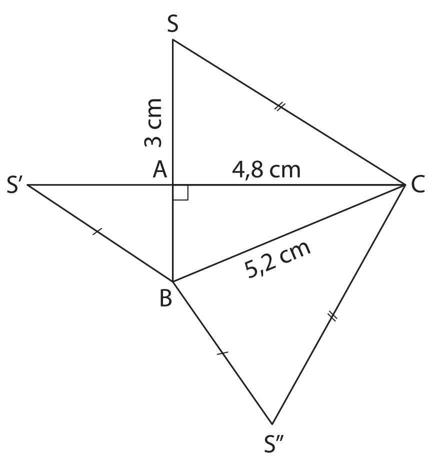


b. $5{,}2^2 = 27{,}04$

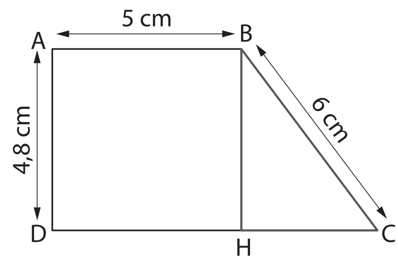
$4{,}8^2 + 2^2 = 23{,}04 + 4 = 27{,}04$

On constate que l'égalité de Pythagore est vérifiée, donc ce triangle est rectangle en A.

c.



73 **a.**



b. ABHD est un rectangle et donc BH = AD = 4,8 cm.

Le triangle BHC est rectangle en H, donc, d'après l'égalité de Pythagore :

$HC^2 = BC^2 - BH^2 = 6^2 - 4{,}8^2 = 36 - 23{,}04 = 12{,}96 = 3{,}6^2$

HC = 3,6 cm.

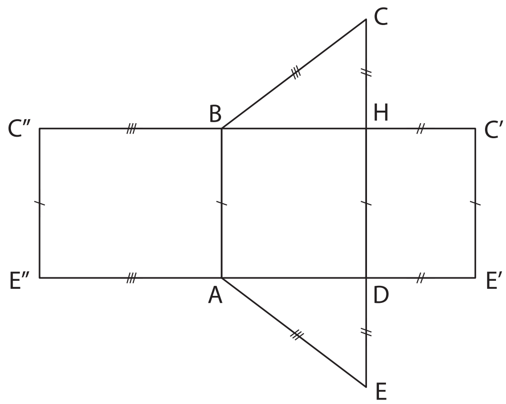
c. 2×5 cm + 4,8 cm + 6 cm + 3,6 cm = 24,4

Le périmètre du trapèze ABCD est 24,4 cm.

d. $5 \times 4{,}8 + 4{,}8 \times 3{,}6 : 2 = 24 + 8{,}64 = 32{,}64$

L'aire du trapèze ABCD est 32,64 cm^2.

e.



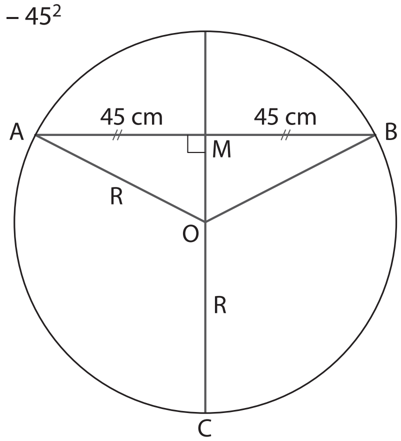
Note : la figure n'est pas donnée à l'échelle 1.

14. Exercices approfondissement

74 CM = 81 cm

Avec l'égalité de Pythagore, $OM^2 = OA^2 - AM^2$

$OM^2 = R^2 - 45^2$



$OM = CM - OC = 81 - R$

$OM^2 = 81^2 - 162\,R + R^2$

D'où $R^2 - 45^2 = 81^2 - 162\,R + R^2$

$-45^2 = 81^2 - 162\,R$ et $R = (81^2 + 45^2) : 162 = 53$.

Le rayon du tronc d'arbre mesure 53 cm.

75 $12 \text{ cm} : 2 = 6 \text{ cm}$
La hauteur de ces deux cônes est 6 cm.
$5 \text{ cm} : 2 = 2{,}5 \text{ cm}$
Le rayon de base est 2,5 cm.
La partie emplie de sable a la forme d'un cône qui est la réduction du cône initial dans le rapport $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$2{,}5 \times \frac{1}{2} = 1{,}25$$

Ce cône de sable a donc une hauteur de 3 cm et un rayon de 1,25 cm.

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 1{,}25^2 \times 3 = \pi \times 1{,}5625$$

Et son volume est $1{,}5625\,\pi \text{ cm}^3$.
$1{,}5625\,\pi : 1{,}6 \approx 3{,}06796 \text{ min}$
$0{,}06796 \times 1 \text{ min} = 0{,}06796 \times 60 \text{ s} \approx 4{,}07 \text{s}$
La totalité du sable va donc s'écouler en 3 min et 4 s.

76 L'égalité de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B s'écrit :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$$
$$AC = 17 \text{ cm}$$

Comme on a (IJ) // (AC), le théorème de Thalès s'applique aux triangles BIJ et BCA :

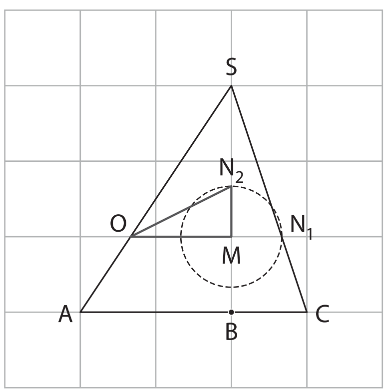
$$\frac{BI}{BA} = \frac{IJ}{AC}$$

$BI = BA - AI = 15 - 3 = 12$

$$\frac{12}{15} = \frac{IJ}{17}$$

d'où $IJ = \frac{12 \times 17}{15} = 13{,}6$
La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une de ses arêtes est un rectangle, donc IJKL est un rectangle de 13,6 cm sur 6 cm.
$13{,}6 \times 6 = 81{,}6$
L'aire du rectangle IJKL est $81{,}6 \text{ cm}^2$.

77 **1.** La section MNO est représentée en vraie grandeur par le triangle MN_2O.



2. a. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 3 = 1$
Le volume de la pyramide SABC est 1 cm^3.
b. La pyramide SOMN est une réduction de la pyramide SABC dans le rapport : $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$
Sa base a donc pour aire :

$$\text{Aire de la base de SABC} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

L'aire du triangle MNO est donc $\frac{4}{9} \text{ cm}^2$.
c. On peut calculer ce volume avec la formule du volume d'une pyramide :

$$\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times 2 = \frac{8}{27}$$

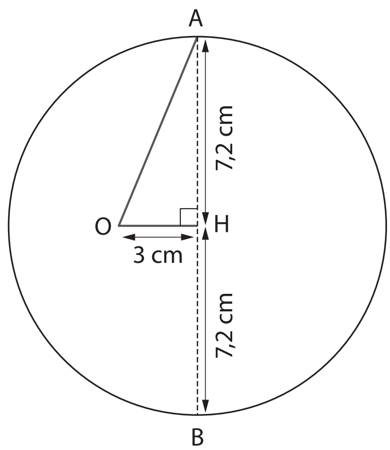
Le volume de la pyramide est $\frac{8}{27} \text{ cm}^3$
On peut aussi utiliser le rapport de réduction :

$$\text{Volume de SABC} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

78 Soit O le centre d'une base avec OH = 3 cm. La droite perpendiculaire en H à (OH) coupe le cercle de base en A et B tel que AB = 14,4 cm. De plus, comme le triangle OAB est isocèle en O, H, pied de la hauteur issue de O est aussi le milieu de [AB].
$HA = AB : 2 = 14{,}4 : 2 = 7{,}2$
Dans le triangle OHA, rectangle en H, l'égalité de Pythagore donne :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$
$$OA = 7{,}8 \text{ cm}$$

Le rayon des bases de ce cylindre est 7,8 cm.



79 ABC est un triangle rectangle en B, on peut donc écrire l'égalité de Pythagore pour calculer AC.
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2$
$AC = 8\sqrt{2}$
Soit O le centre de la base ABCD,
$AO = AC : 2 = 8\sqrt{2} : 2 = 4\sqrt{2}$
Comme la pyramide SABCD est régulière, SO est sa hauteur.
Le triangle SAO est rectangle en O, avec l'égalité de Pythagore :

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 9^2 - (4\sqrt{2})^2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$$
$$SO = 7 \text{ cm}$$

La petite pyramide est une réduction de la grande dans le rapport : $\frac{3}{7}$

Son volume est donc :

$$\text{Volume de la grande} \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 7 \times \frac{3^3}{7^3}$$
$$= \frac{64 \times 7 \times 3^3}{3 \times 7^3} = \frac{64 \times 3^2}{7^2}$$
$$= \frac{576}{49}$$

La petite pyramide a un volume de $\frac{576}{49}$ cm^3 soit, arrondi au mm^3 : 11,755 cm^3.

80 Le volume de l'eau est celui du tronc de cône obtenu en enlevant au cône de 92 m de haut, un cône de 23 m de haut, réduction du grand dans le rapport :

$$\frac{23}{92} = \frac{1}{4}$$

44 ha = 44 hm^2 = 440 000 m^2

$$\frac{1}{3} \times 440\,000 \times 92 - \frac{1}{3} \times 440\,000 \times 92 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$= \frac{1}{3} \times 440\,000 \times 92\left(1 - \frac{1}{4^3}\right)$$
$$= \frac{440\,000 \times 92 \times 63}{3 \times 4^3} = 13\,282\,500$$

Le volume d'eau est 13 282 500 m^3.

81 Défi

En découpant par un plan parallèle à la base, on obtient une petite pyramide qui est la réduction de la grande dans le rapport : $\frac{SA}{SH}$.

Soit V le volume de la grande pyramide et $\mathcal{V}'$ celui de la petite, on doit avoir simultanément :

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times \left(\frac{SA}{SH}\right)^3 \text{ et } \mathcal{V}' = \frac{1}{2} \times \mathcal{V}$$

Ce qui conduit à écrire que $\frac{SA^3}{SH^3} = \frac{1}{2}$ d'où :

$$SA^3 = \frac{1\,000}{2} = 500$$

Avec une calculatrice, on peut chercher une valeur approchée du nombre dont le cube est 500, on trouve 7,93700…

La hauteur SA doit mesurer environ 7,9 cm, arrondi au mm ou 8 cm, arrondi au cm.

15. Tache complexe

82 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Combien de balles sont nécessaires pour fabriquer une pyramide pleine à base carrée ayant 3 balles par côté sur la couche du bas ?

Aide n° 2 : Recommencer avec 4 balles par côté sur la couche du bas, puis avec 5 balles par côté, etc.

Aide n° 3 : Lorsqu'on dispose 5 balles par côté sur la couche du bas, on a besoin de 55 balles pour fabriquer une pyramide pleine. De combien de nouvelles balles a-t-on besoin lorsqu'il y a 6 balles par côté sur la couche du bas ?

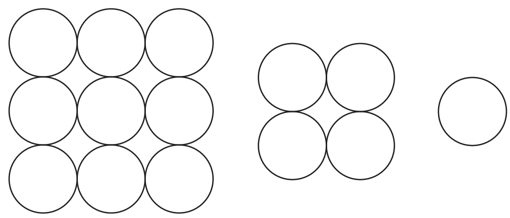
2. Quelques commentaires

• On peut penser que les élèves commenceront par compter le nombre de balles nécessaires pour fabriquer une pyramide ayant un petit nombre de balles par côté sur la couche du bas.

• Deux actions sont à distinguer : compter le nombre de balles par couche (le carré du nombre de balles par côté) et compter le nombre total de balles.

Pour expérimenter, il nous semble plus facile de manipuler des pommes plutôt que de véritables balles qui rouleront trop facilement. Il peut être intéressant de rappeler aux élèves les empilements de pommes ou d'oranges vus sur les marchés.

Pour mieux appréhender la situation, il est possible de faire un schéma couche par couche, comme par exemple ici pour une pyramide ayant 3 balles par côté couche du bas :



soit un total de 14 balles.

À partir de la seule couche du bas, on peut imaginer la disposition des balles au-dessus des « trous », afin de constituer la couche située immédiatement au-dessus, etc.

• On peut ensuite augmenter le nombre de balles posées par côté sur la couche du bas. On constatera que l'on est loin des 20 000 balles possibles (pour 20 balles par côté il faut seulement 2 870 balles au total).

• D'où l'idée que les tâtonnements ne permettront pas d'aboutir. Naîtra certainement l'envie de fabriquer une formule pour connaître le nombre total N de balles connaissant le nombre n de balles par côté sur la couche du bas.

Peut-être certains élèves penseront-ils à :

$$N = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2$$

mais malgré leurs connaissances en calcul littéral, ils risquent de ne pouvoir exploiter cette formule.

Une clé de cette tâche est de comprendre qu'il suffit d'ajouter une couche de n^2 balles **sous** une pyramide dont la couche du bas comporte $(n-1)$ balles par côté pour fabriquer une pyramide dont la couche du bas comporte n balles par côté.

Le fait d'avoir conçu un protocole de calcul sera valorisé, même si la recherche n'aboutit pas.

• Les élèves utiliseront sans doute d'eux-mêmes la calculatrice, mais une fois le protocole de calcul établi, on peut imaginer que des groupes vont penser à utiliser un tableur pour déterminer s'il existe un nombre n pour lequel N est égal à 20 000.

• Les élèves doivent écrire leurs résultats en les organisant sur leur feuille de recherche, il sera parfois utile de le leur conseiller.

• Le professeur consultera avec plaisir des compléments sur le site :

http://media.education.fr/file/MPS/23/7/LyceeGT_Ressources_2_Exploration_MPS_6-1_cristallographie_152237.pdf

Il s'agit de *Ressources pour la classe de seconde générale et technologique*, un document destiné aux *Méthodes pratiques et scientifiques, Thème science et vision du monde – Projet « autour de la cristallographie »*.

3. Éléments de réponse

On s'en doute un peu ! La réponse est non !

Solution avec tableur

On entre 1 dans les cellules A2 et B2.

On entre la formule =A3^2+B2 dans la cellule B3.

On obtient :

	A	B
1	Nombre de balles par côté sur la couche du bas	Nombre total de balles
2	1	1
3	2	5
4	3	14
5	4	30
6	5	55
7	6	91
8	7	140
9	8	204
10	9	285
11	10	385
12	11	506
13	12	650
14	13	819

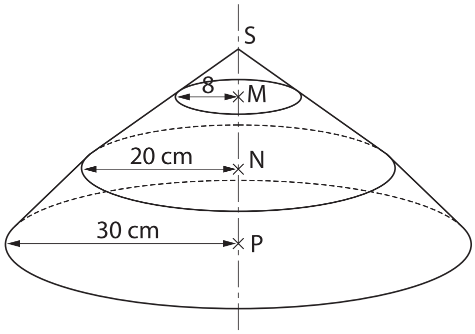
puis :

37	36	16 206
38	37	17 575
39	38	19 019
40	39	20 540

Il n'est donc pas possible de fabriquer une pyramide pleine à base carrée avec exactement 20 000 balles.

16. En route pour la seconde

83 Pour déterminer le tronc de cône A, on a coupé le cône de sommet S, de hauteur SN = 30 cm par le plan parallèle à la base et passant par N.

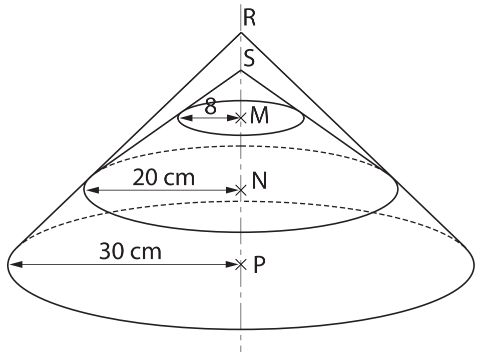


On a obtenu un petit cône de hauteur SM, réduction du premier dans le rapport : $\frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

On a donc $\frac{SM}{SN} = \frac{4}{10}$, $\frac{SM}{30} = \frac{4}{10}$, d'où SM = 12 cm.

MN = SN – SM = 30 cm – 12 cm = 18 cm

On raisonne de même pour le tronc de cône B, soit R, le sommet du grand cône, sa hauteur RP = 60 cm et RN la hauteur du petit cône.



Le rapport de réduction est : $\frac{20}{30}$

On a donc $\frac{RN}{RP} = \frac{20}{30}$, $\frac{RN}{60} = \frac{20}{30}$, d'où RN = 40 cm.

NP = RP – RN = 60 cm – 40 cm = 20 cm

18 cm + 20 cm = 38 cm

Ce cuiseur solaire a une hauteur de 38 cm

84 **a.** Les pyramides IFBG et IEAH ont le même volume :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 2{,}5 = \frac{125}{12}$$

ADHBCG est un prisme droit, $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 5 = \frac{125}{2}$

$5^3 - 2 \times \frac{125}{12} - \frac{125}{2} = \frac{125}{3}$

Le volume de la pyramide IABGH est $\frac{125}{3}$ cm^3

b. L'égalité de Pythagore appliquée au triangle BCG, rectangle en C, permet de calculer BG :

$$BG^2 = BC^2 + CG^2 = 2 \times 5^2$$

$$BG = 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

La base relative à la hauteur est le rectangle ABGH, d'aire, en cm^2 :

$5 \times 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$

$\frac{1}{3} \times 25\sqrt{2} \times IS = \frac{125}{3}$

$IS = \frac{125}{25\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

85 **1.** $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times 18 = 972$

Le volume de la pyramide DABC est 972 cm^3.

2. Lorsque l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, la section est une réduction de celle-ci donc EFG est équilatéral comme ABC. En effet, AB, AC et BC sont les diagonales des faces du cube, donc de même longueur.

3. a. $0 \leqslant x \leqslant 18$

b. Rapport de réduction : $\frac{DE}{DA} = \frac{x}{18}$

c. $\mathcal{V}(x) = 972 \times \left(\frac{x}{18}\right)^3 = \frac{x^3}{6}$

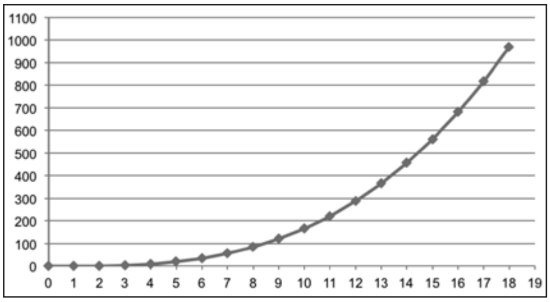
d.

x	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{V}(x)$	0	0,167	1,333	4,5	10,67	20,83

x	0	1
$\mathcal{V}(x)$	=B1^3/6	=C1^3/6

6	7	8	9	10	11	12
36	57,17	85,33	121,5	166,7	221,8	288

13	14	15	16	17	18
366,2	457,3	562,5	682,7	818,8	972



e. 972 : 3 = 324

La valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide DEFG est le tiers de celui de la pyramide ABCD est comprise entre 12 et 13.

x	12	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5
$\mathcal{V}(x)$	288	295,26	302,641	310,14	317,771	325,52

On voit que la valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide DEFG est le tiers de celui de la pyramide ABCD est comprise entre 12,4 et 12,5.

La valeur approchée par défaut à 1 mm près de DE pour laquelle le volume de DEFG est le tiers de celui de ABCD est donc 12,4 cm.

86 En traçant la diagonale [EG], on démontre que le triangle BEG est équilatéral :

[EG], [EB] et [BG] sont trois diagonales d'un carré de côté *a* et ont donc la même longueur.

$\widehat{EBG} = 60°$

CHAPITRE 14

Sphères et boules

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

Ce chapitre présente les deux derniers solides étudiés au collège à savoir la sphère et la boule. En classe de troisième, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité par une synthèse d'un apprentissage commencé à l'école primaire.

• En **6e**, l'élève a appris à :

❒ Savoir que, pour un cercle :

– tout point qui appartient au cercle est à une même distance du centre,

– tout point situé à cette distance du centre appartient au cercle.

❒ Construire, à la règle et au compas, un triangle.

❒ Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un disque.

❒ Connaître et utiliser les unités de volume et les relier aux unités de contenance.

❒ Savoir que 1 L = 1 dm^3.

❒ Effectuer pour les volumes des changements d'unités de mesure.

• En **5e**, l'élève a appris à :

❒ Calculer le volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.

• En **4e**, l'élève a appris à :

❒ Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle.

❒ Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.

❒ Calculer le volume d'un pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = \frac{1}{3} Bh$.

2. Sphères et boules

• **L'activité 1** permet de préciser le vocabulaire mathématique qui distingue sphère et boule grâce à des objets.

• **L'activité 2** se déroule en salle informatique et nécessite le logiciel GeoplanGeospace que l'on peut télécharger par exemple à l'adresse suivante :

http://www.aid-creem.org/telechargement.html

Les objectifs de cette activité très riche sont :

– définir la sphère de centre O et de rayon 2 cm comme l'ensemble des points M de l'espace tels que OM = 2 cm ;

– mettre en évidence les grands cercles de la sphère

– mettre en évidence les couples de points diamétralement opposés.

Les indications fournies sous forme de bulles devraient écarter les difficultés liées à la découverte du logiciel.

Les élèves qui manipulent un logiciel de construction 3D en technologie parviennent assez rapidement à visualiser les cercles de la sphère et les diamètres de celle-ci.

Enfin la correction de la question g. (où l'on demande à l'élève de tracer deux grands cercles de la sphère) sera l'occasion d'effectuer la synthèse des notions découvertes lors de cette activité.

On pourra poursuivre par l'étude du **§1**. du cours puis avec les exercices **13** à **15** , **23** à **26**, **38** et **39** qui ne mettent pas en jeu d'autres notions.

Comme le programme le demande, les **exercices 30** à **34** permettent d'effectuer le rapprochement avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour le repérage sur la sphère à l'aide des méridiens et des parallèles.

Enfin les **exercices 26** à **29** traitent du cas plus particulier des grands cercles de la sphère et du triangle rectangle dont l'un des côté est un diamètre de la sphère.

3. Sections planes d'une sphère

• **L'activité 3** présente la section d'une sphère par un plan.

Cette activité qui se déroule elle aussi en salle informatique (avec pour support le logiciel GeoplanGeospace) peut se traiter dans la même séance que l'activité 2.

Ici aucun calcul n'est demandé et il s'agit donc que l'élève puisse visualiser puis formuler le fait que la section d'une sphère par un plan est un cercle.

On pourra soit choisir d'enchainer avec **l'activité 3** soit d'étudier le **§2.** du cours, soit proposer l'**exercice 27** qui nécessite l'utilisation du logiciel GeoplanGeospace.

Enfin on pourra proposer les **exercices 16** , **17** et **35** qui abordent la section d'une sphère sans nécessité de calculs.

• **L'activité 4** fait suite naturellement. Il s'agit ici :

– d'envisager les différents cas de section d'une sphère par un plan ;

– de calculer le rayon du cercle de section sur un exemple.

Cette activité est l'occasion d'utiliser le théorème de Pythagore dans l'espace.

On pourra poursuivre par l'étude de l'**exercice résolu 1** puis avec les **exercices 5 ,6 , 17 , 18, 35** à **40**.

4. Aire d'une sphère. Volume d'une boule

• Pour **l'activité 5** dont l'objectif est de mettre en place la formule qui permet de calculer l'aire d'une sphère nous n'avons retenu aucune expérience. En effet nous avons privilégié un travail sur un texte qui va demander à l'élève d'écrire des formules.

Cette activité sollicite plusieurs compétences :

compréhension d'un texte , prise d'initiative, maîtrise de la formule de l'aire latérale d'un cylindre et maîtrise du calcul littéral.

Une fois la formule établie une première application numérique est proposée avec le calcul de l'aire de *La Maîtresse de la Tour Eiffel*.

On pourra poursuivre cette activité avec l'étude de l'**exercice résolu 2** puis les **exercices 7** et **8**, **19**, **41** et **42** permettront de fixer dans les esprits cette formule.

• L'objectif de **l'activité 6** est de mettre en place la formule qui permet de calculer le volume d'une boule.

Une animation téléchargeable sur le site compagnon accompagne cette activité. Si on dispose du matériel nécessaire on peut bien sur réaliser soi même l'expérience qu'illustre cette animation.

Ici encore l'élève va devoir interpréter l'animation puis écrire des formules.

Une fois la formule établie une première application numérique est proposée avec le calcul du volume de *La Maîtresse de la Tour Eiffel*.

On pourra poursuivre avec l'étude de l'**exercice résolu 3** puis avec les **exercices 9**, **10**, **43** et **46**.

5. Savoir-faire

• L'**exercice résolu 1** est consacré à la section d'une sphère par un plan. Après avoir tracé la section en vraie grandeur on détaille le calcul du rayon de cette section.

Lors de la présentation des résultats un travail est à faire pour distinguer valeur exacte et arrondi.

• L'**exercice résolu 2** est consacré au calcul de l'aire d'une sphère. La situation proposée ne présente pas de difficulté.

Ici aussi une attention particulière est accordée aux valeurs exactes et approchées.

• L'**exercice résolu 3** est consacré au calcul d'un volume.

La situation est assez complexe puisque le volume demandé s'obtient par différence.

Cet exercice qui est l'occasion de réinvestir les calculs des volumes d'un cylindre et d'une boule sera encore une fois l'occasion d'un travail spécifique sur les arrondis.

• L'exercice de la page **Atelier Brevet** qui s'appuie sur une situation de la vie courante (fabrication de glaces dans un restaurant) est l'occasion de passer en revue les calculs de certains volumes (parallélépipède rectangle , cylindre , boule) vus au collège.

Enfin la dernière question qui nécessite une prise d'initiative est totalement dans l'esprit des nouvelles épreuves du brevet.

6. Compléments

• Les exercices de la page **Présenter, argumenter, communiquer** sont issus de domaines variés de la réalité.

Présenter la démarche suivie, présenter les résultats obtenus à l'aide d'un langage adapté, argumenter, communiquer à l'aide d'un langage adapté sont des items de la compétence 3 du socle commun de connaissances et de compétences.

L' **exercice 68**, propose une copie que l'élève doit améliorer. On pourra attitrer l'attention sur le fait que les réponses aux trois questions suivantes :

– que calcule-t-on ?

– quelle formule utilise-t-on ?

– quelle est l'unité du résultat obtenu ?

doivent-être évidentes pour la personne qui lit la correction proposée.

Dans l'**exercice 69**, on travaille à partir d'un texte dense qui explique la construction des fuseaux horaires.

L'élève doit utiliser les informations reçues pour élaborer une démarche lui permettant de répondre aux questions posées.

L'**exercice 70** qui peut se traiter à l'oral propose une situation (section d'un ensemble) et quatre figures pouvant résulter ou non de cette situation. Cet exercice peut donner lieu à un débat au sein de la classe.

L'**exercice 71** propose l'étude de trois emballages possibles (une sphère, une sphère et un parallélépipède rectangle). Pour traiter la question b. l'élève doit utiliser les résultats de la question **a.** , prendre l'initiative de calculer les aires des solides proposés mais aussi faire preuve de sens pratique pour justifier pourquoi les boîtes de conserve n'ont pas une forme sphérique.

La narration de recherche (**exercice 72**) porte sur l'étude de la surface habitable d'une maison en forme de demi-sphère. Certains élèves ne comprendront le vocabulaire « surface habitable » et d'autre ne passeront pas de la photo à une figure puis aux calculs. Il faudra donc veiller à prévoir éventuellement des aides adaptées pour « débloquer » ces élèves. Enfin toute trace de recherche devra être valorisée.

• L'**exercice 40** (**Maths et Arts**) qui propose l'étude de la géode peut être le support d'un exposé.

• Les **exercices 45** et **91** font appel au tableur et peuvent être l'occasion d'une séance en salle informatique.

• La première partie de la page **Objectif Brevet** aborde des calculs de volumes avec pour chacun des trois exercices proposés une question avec prise d'initiative.

La deuxième partie de cette page est consacrée à la section d'une sphère. L'**exercice 87** qui aborde le cas particulier du calcul de la longueur d'un parallèle fait aussi intervenir la trigonométrie.

• Les situations, issues de la réalité, **des exercices d'approfondissement** sont riches et variées.

Ces situations où l'on doit résoudre un problème concret peuvent donc être une source de motivation nouvelle.

Certains exercices peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Toute piste de recherche sera alors valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète.

• Dans la rubrique **En route vers la Seconde**, les élèves travailleront sur quatre problèmes. L'**exercice 98**, où l'élève doit calculer la longueur du trajet d'un avion fait intervenir les notions suivantes : les connaissances du globe terrestre , la trigonométrie et la proportionnalité.

Les **exercices 99** et **100** proposent d'écrire une nouvelle formule à partir de formules connues et permettent de mobiliser les capacités des élèves en algèbre.

L'exercice 101 fait intervenir à la fois les calculs de volume et l'écriture scientifique. Cet exercice peut être l'occasion d'un travail avec les collègues d'histoire-géographie et de SVT sur les liens qui existent entre les catastrophes climatiques et le développement des zones urbanisées.

Corrigés

1. Devinettes

- **Devinette**

30 L = 0,03 m^3.

Sur 1 m^2 il est tombé 30 L ou 0,03 m^3 d'eau.

On considère que l'eau tombée sur 1 m^2 forme un parallélépipède rectangle de volume 0,03 m^3 dont l'aire de la base est 1 m^2.

Notons h la hauteur dont les eaux ont monté :

De $\mathcal{V}$ = aire base × hauteur, on obtient :

$$0{,}03\text{ m}^3 = 1\text{ m}^2 \times h \quad \text{d'où} \quad h = 0{,}03\text{ m}.$$

Les eaux du lac ont monté de 0,03 m ou 3 cm.

- **Devinette**

On parcourt 12 km vers le sud, de N à A, le long d'un méridien. Ensuite, on parcourt 5 km vers l'ouest, de A à B, le long d'un parallèle.

Alors de B à N (le long d'un méridien), il y a encore 12 km. Donc on se retrouve à 12 km du pôle Nord.

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : c.

La distance entre deux points d'un disque est inférieure ou égale au diamètre de ce cercle soit ici 10 cm. Donc la longueur AB ne peut pas être égale à 10,1 cm.

2 Bonne réponse : a.

La longueur d'un cercle de diamètre d cm est πd cm soit ici 16π cm.

3 Bonne réponse : c.

L'aire d'un disque de rayon R cm est πR^2 cm^2 soit ici :

$$\pi \times 10^2\text{ cm}^2 \quad \text{ou encore} \quad 100\pi\text{ cm}^2.$$

4 Bonne réponse : a.

L'aire d'un disque de rayon R m est πR m^2 soit ici :

$$\pi \times 40^2\text{ m}^2 \quad \text{ou} \quad 1\,600\pi\text{ m}^2.$$

La calculatrice affiche 5 026,548246 donc l'arrondi au dm^2 est 5 026,55.

5 Bonne réponse : b.

1 m^3 = 1 000 L donc 250 L = 0,25 m^3.

6 Bonne réponse : b.

3. Calcul mental

7 **a.** 0,32 — **b.** 740
c. 7,5 — **d.** 10 000
e. 0,038 — **f.** 7 100

8 **a.** Périmètre : 6π m — Aire : 9π m^2.
b. Périmètre : 8π cm — Aire : 16π cm^2.
c. Périmètre : 120π m — Aire : $3\,600\pi$ m^2.
d. Périmètre : 20π dam — Aire : 100π dam^2.
e. Périmètre : $1{,}8\pi$ cm — Aire : $0{,}81\pi$ cm^2.

9 **a.** 27 m^3 — **b.** 1 000 dm^3
c. 125 m^3 — **d.** 0,008 m^3
e. 64 cm^3

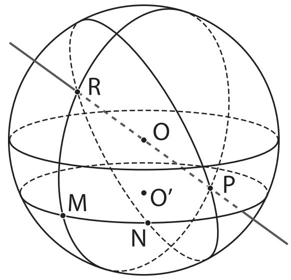
4. Activités

Sphères et boules

1 Percevoir le monde

- Sphère : balle de ping-pong, ballon de football...
- Boule : pamplemousse, balle de golf...

2 Découvrir la sphère



d. La sphère de centre O et de rayon 2 cm est l'ensemble des points M tels que OM = 2 cm.

e. Le rayon de C est maximal lorsque O et O' sont confondus.

f. PR = 4 cm donc [PR] est un diamètre de la sphère S.

g. Les cercles C1 et C2 circonscrits aux triangles RPM et RPN sont deux grands cercles de la sphère qui ont pour diamètre [PR].

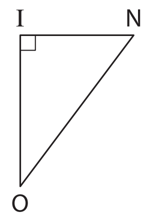
Sections planes d'une sphère

3 Découvrir la nature d'une section

Lorsque I est fixe la longueur IM est constante donc la section est un cercle de centre I.

4 Calculer le rayon du cercle intersection

a.



b. Dans le triangle OIN rectangle en I, on a :

ON = 2 cm et le théorème de Pythagore donne :

$IN^2 = ON^2 - OI^2$

$IN^2 = 2^2 - 1{,}6^2$

$IN^2 = 1{,}44$ et donc $IN = \sqrt{1{,}44}$

IN = 1,2 cm.

c. IN = 1,2 cm donc la section de S par le plan P est un cercle de centre I et de rayon 1,2 cm.

2. La section de la sphère S par le plan P est un point.

Le plan P est tangent à la sphère S.

3. La section est un grand cercle de S lorsque les points I et O sont confondus c'est-à-dire lorsque OI = 0 cm.

Aire d'une sphère. Volume d'une boule

5 Calculer l'aire d'une sphère

1. a. Le cylindre a le même rayon que la sphère, donc R.

La hauteur du cylindre est la même que le diamètre de la sphère, donc 2R.

b. L'aire latérale du cylindre est : $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$.

L'aire d'une sphère de rayon R est donc : $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.

2. $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 3{,}75^2 = 56{,}25\pi$.

L'aire de la Maîtresse de la Tour Eiffel est $56{,}25\pi$ m² et l'arrondi au dm² de cette aire est 176,71 m².

6 Calculer le volume d'une boule

b. On doit vider deux fois le cône pour remplir la boule.

c. Le cône a pour rayon R et pour hauteur 2R.

Son volume $\mathcal{V}'$ est donc $\dfrac{\pi R^2 \times 2R}{3} = \dfrac{2}{3} \times \pi R^3$.

Le volume $\mathcal{V}$ de la boule est le double du volume du cône soit $\mathcal{V} = 2 \times \dfrac{2}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3$.

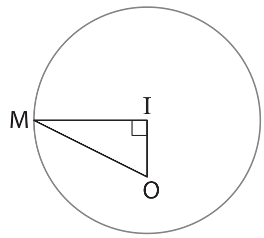
Le volume d'une boule de rayon R est $\dfrac{4}{3} \times \pi R^3$.

2. $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3{,}75^3 = 70{,}3125\pi$.

Le volume de la Maîtresse de la Tour Eiffel est $70{,}3125\pi$ et l'arrondi au dm³ de ce volume est 220,893 m³.

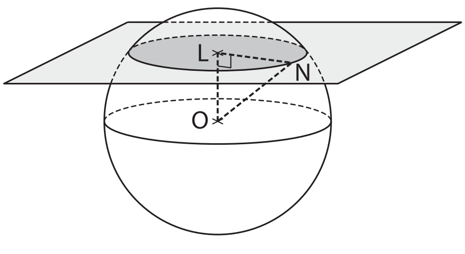
5. J'applique

4 a.

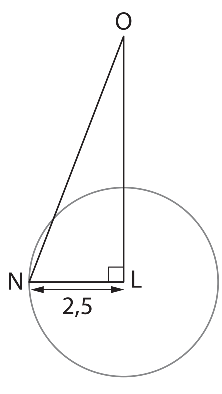


b. Le triangle OIM est rectangle en I, donc d'après l'égalité de Pythagore : $OM^2 = OI^2 + IM^2$ soit $5^2 = 2{,}4^2 + IM^2$.
Donc $IM^2 = 5^2 - 2{,}4^2 = 19{,}24$. D'où $IM = \sqrt{19{,}24}$ cm.
Le rayon de la section est $\sqrt{19{,}24}$ cm soit environ 4,4 cm.

5 a.



b.



c. Le triangle OLN est rectangle en L, donc d'après l'égalité de Pythagore : $ON^2 = OL^2 + LN^2$ soit $6{,}5^2 = 6^2 + LN^2$.

Donc $LN^2 = 6{,}5^2 - 6^2 = 6{,}25$.

D'où $LN = \sqrt{6{,}25}$ cm $= 2{,}5$ cm.

Le rayon de la section est bien 2,5 cm.

6 Le triangle OIM est rectangle en I, donc d'après l'égalité de Pythagore : $OM^2 = OI^2 + IM^2$ soit :

$$12^2 = OI^2 + 8^2$$

Donc $OI^2 = 12^2 - 8^2 = 80$. D'où $OI = \sqrt{80}$ cm.

La distance OI est $\sqrt{80}$ cm soit environ 8,9 cm.

7 Le rayon de la sphère est la moitié de son diamètre donc R = 21 cm.

$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 21^2 = 1\,764\pi$

L'aire de cette « boule japonaise » est $1\,764\pi$ cm².

L'arrondi au cm² de l'aire de cette « boule japonaise » est 5 542 cm².

8 $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 15^2 = 900\pi$

L'aire de cette lampe est 900π cm².

L'arrondi au mm² de l'aire de cette lampe est 2 827,43 cm².

9 72 mn = 7,2 cm. Le rayon de la boite est la moitié de son diamètre donc R = 3,6 cm.

• Volume de la boîte : $\mathcal{V}_1 = \pi R^2 h$.

Donc ici, $\mathcal{V}_1 = \pi \times 3{,}6^2 \times 21{,}6 = 279{,}936\pi$

Le volume $\mathcal{V}_1$ de la boîte est $279{,}936\pi$ cm³.

Volume d'une boule : $\mathcal{V}_2 = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3$.

Donc ici, $\mathcal{V}_2 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3{,}6^3 = 62{,}208\pi$.

Le volume $\mathcal{V}_2$ d'une boule est $62{,}208\pi$ cm³.

Volume de l'espace libre : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - 3\mathcal{V}_2$

Donc $\mathcal{V} = 279{,}936\pi - 3 \times 62{,}208\pi = 93{,}312\pi$.

Le volume $\mathcal{V}$, en cm³, de l'espace laissé libre par les boules est $93{,}312\,\pi$ cm³ soit environ 293,148 cm³.

10 Volume de la boîte : $\mathcal{V}_1 = L \times \ell \times h$.

Donc ici, $\mathcal{V}_1 = 8 \times 4 \times 4 = 128$.

Le volume $\mathcal{V}_1$ de la boîte est 128 dm³.

20 cm = 2 dm.

Volume d'une boule : $\mathcal{V}_2 = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3$.

Donc ici $\mathcal{V}_2 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \dfrac{32}{3}\pi$.

Le volume $\mathcal{V}_2$ d'une boule est $\dfrac{32}{3}\pi$ dm³.

• Volume de l'espace libre : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - 2\mathcal{V}_2$

Donc $\mathcal{V} = 128 - 2 \times \dfrac{32}{3}\pi = 128 - \dfrac{64}{3}\pi$.

Le volume $\mathcal{V}$, en dm³, de l'espace laissé libre par les deux boules est $128 - \dfrac{64}{3}\pi$ dm³ soit environ 61 dm³.

6. Atelier Brevet

11 1. a. $\mathcal{V}_1 = L \times \ell \times h$. Donc ici, $\mathcal{V}_1 = 20 \times 15 \times 12 = 3\,600$.

Le volume $\mathcal{V}_1$ d'un pot de glace au chocolat est 3 600 cm³.

b. $\mathcal{V}_2 = \pi R^2 h$. Donc ici, $\mathcal{V}_2 = \pi \times 7^2 \times 15 = 735\pi$.

Le volume $\mathcal{V}_2$ d'un pot de glace à la vanille est 735π cm³ et l'arrondi au cm^3 de ce volume est 2 309 cm^3.

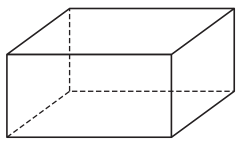
2. $\mathcal{V}_3 = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}1^3 = 12{,}348\pi$

Le volume $\mathcal{V}_3$ d'une boule de glace est 12,348π cm^3 et l'arrondi au cm^3 de ce volume est 39 cm^3.

3. $\frac{100 \times 2 \times 12{,}348\pi}{3\,600} \approx 2{,}16$ donc le restaurateur doit acheter 3 pots de glace au chocolat.

$\frac{100 \times 12{,}348\pi}{735\pi} = 1{,}68$ donc le restaurateur doit acheter 2 pots de glace à la vanille.

12 **1. a.**



2. a. Volume de l'aquarium : $\mathcal{V}_1 = L \times \ell \times h$.

Donc ici, $\mathcal{V}_1 = 40 \times 20 \times 30 = 24\,000$.

Le volume $\mathcal{V}_1$ de l'aquarium est 24 000 cm^3.

b. $\frac{24\,000}{1\,000} = 24$ donc cet aquarium peut contenir 24 L.

3. $\frac{4}{3} \times \pi \times 15^3$

4. Calcul du volume d'eau versé :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3 = 3375\pi.$$

On verse 225π cm^3 dans le premier aquarium.

Notons h la hauteur d'eau dans le premier aquarium.

$\mathcal{V}_2 = L \times \ell \times h$ donc $3375\pi = 40 \times 20 \times h$ soit $800 = 3375\pi$.

D'où $h = \frac{3\,375\pi}{800} \approx 13{,}3$

La hauteur d'eau dans le premier aquarium est environ 13,3 cm.

7. Exercices à l'oral

Sphères et boules

13 **a.** Le solide obtenu est la sphère de centre O et de rayon 4 cm.

b. Le solide obtenu est la boule de centre O et de rayon 4 cm.

14 $I \notin S$ et $I \in B$; $J \notin S$ et $J \in B$;
$L \in S$ et $L \in B$; $M \notin S$ et $M \notin B$.

15 **1.a.** A, B, C, D et M.

b. O, A, B, C, D , E et M.

2. a. OM = 4 cm **b.** OB = 4 cm

c. OE < 4 cm **d.** OF > 4 cm **e.** DC = 8 cm

3. Louis se trompe tout ce que l'on peut dire sur la longueur AB c'est qu'elle est inférieure à 8 cm.

Sections planes d'une sphère

16 Claire se trompe la section d'une sphère par un plan est un cercle.

17 • Le dessin ❶ peut représenter la section.

Le plan passe par le centre d'une face.

• Le dessin ❷ peut représenter la section le plan coupe le cube.

• Le dessin ❸ peut représenter la section.

Le plan contient une face du cube et le plan est tangent à la sphère.

• Le dessin ❹ ne peut pas représenter la section.

18 **a.** Lorsque l'on coupe une balle de ping-pong par un plan passant par le centre de la balle.

b. Une bille ou une balle qui roule sur un sol est tangente au plan représenté par ce sol.

Aire d'une sphère. Volume d'une boule

19 **a.** ① et ⑥ **b.** ③

20 **a.** 100π cm^2 **b.** 36π cm^3

21 Chloé a raison. En effet soit R le rayon commun, en cm, de la boule et de la sphère.

En multipliant chacun des deux membres de l' inégalité $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 > 4\pi R^2$ par $\frac{3}{4\pi R^2}$ on obtient $R > 3$. Donc :

• si R < 3 cm, le volume est de la boule en cm^3 est inférieur à l'aire de la sphère en cm^2 ;

• si R > 3 cm, le volume est de la boule en cm^3 est supérieur à l'aire de la sphère en cm^2 ;

• si R = 3 cm, le volume est de la boule en cm^3 est égal à l'aire de la sphère en cm^2.

22 **1.** Le rapport d'agrandissement est $\frac{12}{6}$ soit 2.

2. a. L'affirmation est fausse.

En effet, dans un agrandissement de rapport 2 les aires sont multipliées par 2^2 c'est-à-dire par 4.

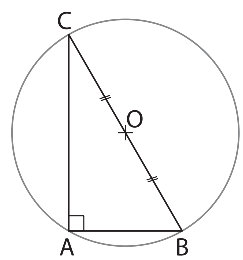
b. L'affirmation est vraie.

En effet, dans un agrandissement de rapport 2 les volumes sont multipliés par 2^3 c'est-à-dire par 8.

8. Exercices d'application

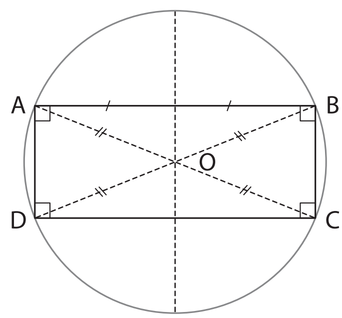
Sphères et boules

23 **a.** et **b.**



c. Pour obtenir une sphère il faut faire tourner le cercle autour du côté [BC].

24 **a.**

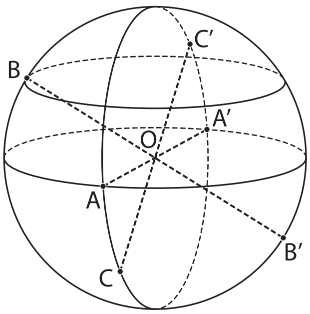


b. Le solide engendré par le cercle lorsqu'on le fait tourner autour de la médiatrice de [AB] est une sphère de centre O et de rayon OA (avec OA = $\frac{\sqrt{29}}{2}$ cm).

Le solide engendré par le rectangle lorsqu'on le fait tourner autour de la médiatrice de [AB] est un cylindre de diamètre AB = 5 cm et de hauteur AD = 2 cm.

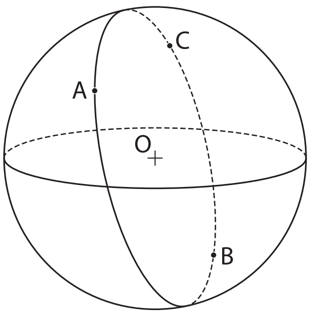
25 • E ∈ S vrai • E ∉ B faux
• F ∈ S faux • F ∈ B vrai
• G ∉ S faux • H ∈ S on ne peut pas savoir

26 **a.** **b.** et **c.**



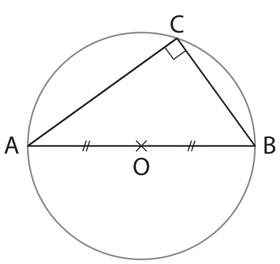
On a tracé :
• un grand cercle de la sphère de diamètres [AA′] et [CC′] ;
• en gris un cercle de la sphère qui n'est pas un grand cercle.

27 **1.** et **2. a.**



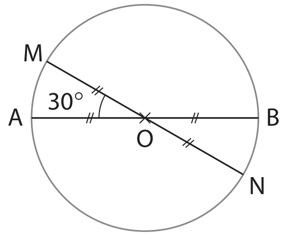
2. b. Ce cercle est un grand cercle de la sphère.
3. a. $\widehat{ACB} = 90°$.
b. La mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ reste égale à 90°.
c. C est un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B donc le triangle ABC est rectangle en C.
D'où $\widehat{ACB} = 90°$.

28 **a.**



b. C est un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B donc le triangle ABC est rectangle en C.
Le triangle ABC est rectangle en C, donc d'après l'égalité de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + CB^2$ soit $5^2 = 4^2 + CB^2$.
Donc $CB^2 = 5^2 - 4^2 = 9$.
D'où BC = 3 cm.
La longueur BC est 3 cm.

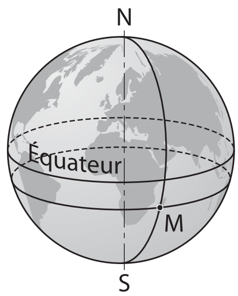
29 **a.**



b. Les diagonales du quadrilatère AMBN se coupent en leur milieu O et sont de même longueur donc AMBN est un rectangle.

30 **a.** • O : 0° et 35° Nord.
• K′ : 70° Est et 50° Sud.
• G : 90° Ouest et 0°.
b. Latitude 46° Nord et longitude 72° Ouest.

31



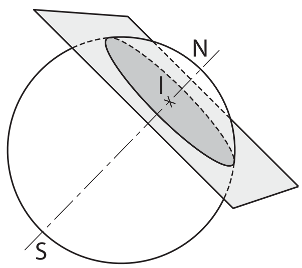
32 Rio de Janeiro : 43° Ouest et 20° Sud
New York : 70° Ouest et 40° Nord
Le Cap : 20° Est et 30° Sud
Castellon : 0° et 40° Nord
Kaduqli : 30° Est et 10° Nord

33 Les nouvelles coordonnées sont 40° Est et 25° Nord.
Pour projeter une animation :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Rotation_de_la_Terre

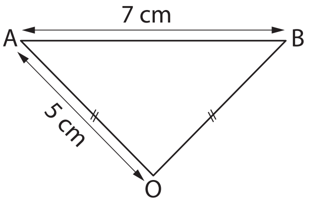
34 **a.** ON = OE = 6 370 km.
Le triangle ONE est rectangle en O donc :
$NE^2 = OE^2 + ON^2 = 6\,370^2 + 6\,370^2$.
Donc $NE^2 = 81\,153\,800$ et $NE \approx 9\,009$ km.
L'arrondi au km de NE est 9 009 km.
b. $\frac{1}{4} \times 2\pi \times 6\,370$ km $= 3\,185\pi$ km.
À vol d'oiseau, l'arrondi au km est 10 006 km.

Sections planes d'une sphère

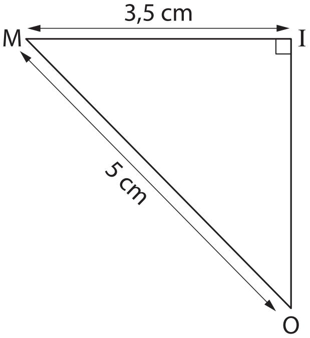
35 **a.** et **b.**



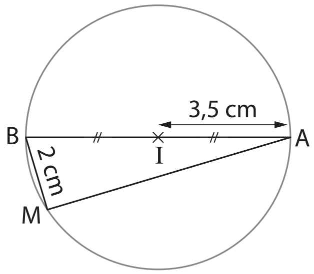
36 **a.**



b.

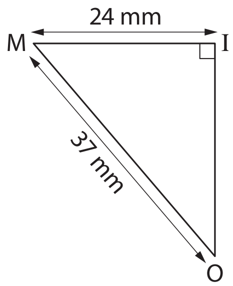


c.



37 Sur la figure ci-dessous O est le centre de la boule, I est le centre d'un des cercles et M est un point du cercle de centre M.

Calculer la distance du centre d'un des cercles au centre de la boule revient à calculer la longueur OI.



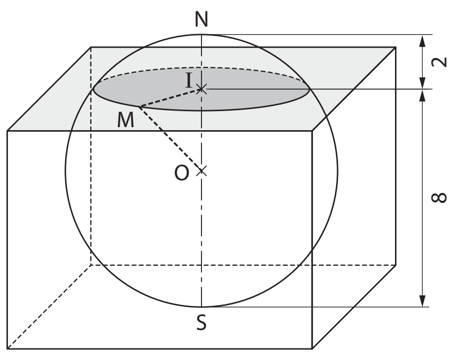
Le triangle OIM est rectangle en I, donc d'après l'égalité de Pythagore : $OM^2 = OI^2 + IM^2$ soit :

$$37^2 = OI^2 + 24^2$$

Donc $OI^2 = 37^2 - 24^2 = 793$. D'où $OI = \sqrt{793}$ mm.

La distance OI est $\sqrt{793}$ mm soit environ 28 mm.

38



- $SI = 8$ cm et $IN = 2$ cm ;

$NS = 8\text{ cm} + 2\text{ cm} = 10$ cm.

- $OM = ON = OS = \frac{1}{2} \times 10\text{ cm} = 5$ cm.

Donc OM = 5 cm.

- $OI = ON - IN$ soit $OI = 5\text{ cm} - 2\text{ cm} = 3$ cm.

Donc OI = 3 cm.

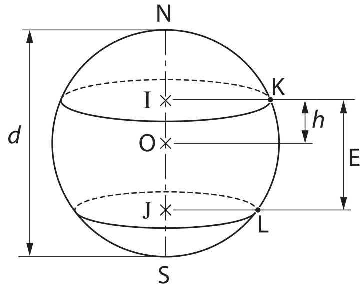
- Dans le triangle OMI, rectangle en I :

$IM^2 = OM^2 - OI^2$

$IM^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Donc IM = 4 cm

Le rayon du cercle d'intersection de la sphère et de la surface de l'eau est 4 cm.

39



ON = OS = OK = OL = 1,3 cm ;

IK = 1,2 cm et JL = 1,04 cm.

- $d = 2 \times ON = 2 \times 1{,}3 = 2{,}6$.

d = 2,6 cm

- Dans le triangle OIK, rectangle en I :

$OI^2 = OK^2 - IK^2$

$OI^2 = 1{,}3^2 - 1{,}2^2 = 0{,}25$.

Donc $OI = \sqrt{0{,}25}$ cm = 0,5 cm

h = 0,5 cm

- Dans le triangle OJL, rectangle en J :

$OJ^2 = OL^2 - JL^2$

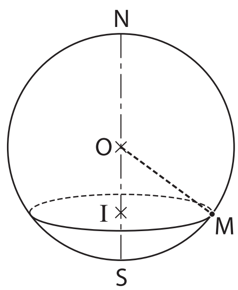
$OJ^2 = 1{,}3^2 - 1{,}04^2 = 0{,}608\,4$.

Donc $OJ = \sqrt{0{,}6084}$ cm = 0,78 cm.

- E = JO + OI = 0,78 + 0,5 = 1,28

E = 1,28 cm

40 **a.**



- ON = OS = OM = 18 m ; NI = 29 m.

OI = NI – ON = 29 – 18 = 11. Donc OI = 11 m.

- Dans le triangle OMI, rectangle en I :

$IM^2 = OM^2 - OI^2$

$IM^2 = 18^2 - 11^2 = 203$.

Donc $IM = \sqrt{203}$ m.

La valeur exacte du rayon du cercle de section avec le sol est $\sqrt{203}$ m.

b. $\mathcal{A} = \pi R^2 = \pi\left(\sqrt{203}\right)^2 = 203\pi$ et $\mathcal{A} \approx 638$ m^2.
L'arrondi au m^2 de l'aire de la surface au sol est 638 m^2.

Aire d'une sphère. Volume d'une boule

41 **a.** $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 10^2 = 400\pi$
L'aire de la sphère est 400π cm^2.
L'arrondi au mm^2 de cette aire est 1 256,64 cm^2.
b. $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$. Le rayon est 8 cm.
$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 8^2 = 256\pi$
L'aire de la sphère est 256π cm^2.
L'arrondi au mm^2 de cette aire est 804,25 cm^2.

42 **1.** $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 6\,370^2$.
Donc $\mathcal{A} \approx 509\,904\,364$.
La surface de la terre est environ 509 904 364 km^2.
2. a. $\dfrac{70,7}{100} \times 509\,904\,364 = 360\,502\,385,3$.
L'arrondi au km^2 de la surface occupée par les océans est 360 502 385 km^2.
b. $100 - 70,7 = 29,3$. Donc les terres émergées occupent 29,3 % de la surface de la terre.
$\dfrac{27}{100} \times \dfrac{29,3}{100} \times 509904364 = 40\,338\,534,24$.
L'arrondi au km^2 de la surface occupée par les forêts est 40 338 534 km^2.

43 **a.** $v = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 21^3 = 12\,348\pi$.
Le volume de la boule est $12\,348\pi$ cm^3.
L'arrondi au mm^3 de ce volume est 38 792,386 cm^3.
b. $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{5}{2} = 5$. Le rayon est 5 cm.
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$
Le volume de la boule est $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3.
L'arrondi au mm^3 de ce volume est 523,599 cm^3.

44 $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{80}{2} = 40$. Le rayon est 40 cm.
a. $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 40^2 = 6\,400\pi$.
L'aire du ballon est $6\,400\pi$ cm^2.
L'arrondi au cm^2 de cette aire est 20 106 cm^2.
b. $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 40^3 = \dfrac{256\,000\pi}{3}$
Le volume d'air contenu dans le ballon est $\dfrac{256\,000\pi}{3}$ cm^3 soit $\dfrac{256\,\pi}{3}$ L.

45

	A	B	F	G	H
1	**Sport**	**Tennis**	**Handball**	**Football**	**Golf**
2	**Rayon (en cm)**	3,3	8,7	22,0	2,1
3	**Aire (en cm²)**	136,8	951,1	6082,1	55,4
4	**Volume (en cm³)**	150,5	2758,3	44602,2	38,8

On a saisi :
Cellule B3 : =4*PI()*A2*A2
Cellule B4 : =4*PI()*A2^3/3

46 • Calcul du volume $\mathcal{V}$ de l'espace libre dans l'aquarium.
$h = 30 - 27 = 3$.
$\mathcal{V} = L \times \ell \times h = 40 \times 20 \times 3 = 2\,400$.
Le volume de l'espace libre dans l'aquarium est 2 400 cm^3.
• Calcul du volume v d'une bille.
24 mm = 2,4 cm.
$R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{2,4}{2} = 1,2$ cm.
Le rayon R d'une bille est 1,2 cm.
$v = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1,2^3 = 2,304\pi$.
Le volume d'une bille est $2,304\pi$ cm^3.
• Calcul du nombre de billes que Numa peut mettre dans l'aquarium avant que l'eau ne déborde.
$\dfrac{\mathcal{V}}{v} = \dfrac{2\,400}{2,304\pi} \approx 331,6$
Numa peut mettre 331 billes dans l'aquarium avant que l'eau ne déborde.

47 $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 144\pi$ donc $R^2 = \dfrac{144\pi}{4\pi} = 36$ et $R = 6$ cm.
Le rayon de la sphère est 6 cm.
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi$.
Le volume de la boule est 288π cm^3.

48 Calcul du volume $\mathcal{V}$ de la boule :
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.
Le volume d'une boule de rayon 2 cm est $\dfrac{32\pi}{3}$ cm^3.
Calcul du volume v de la demi–boule :
$$v = \dfrac{\dfrac{4}{3} \times \pi R^3}{2} = \dfrac{\dfrac{4}{3} \times \pi \times 4^3}{2} = \dfrac{\dfrac{256\pi}{3}}{2} = \dfrac{128\pi}{3}.$$
Le volume d'une demi-boule de rayon 4 cm est $\dfrac{128\pi}{3}$ cm^3.
Wendy a donc tord.

49 • Calcul du volume v du petit flacon :
$$v = \dfrac{4}{3} \times \pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 24^3 = 18\,432\pi.$$
Le volume du petit flacon est $18\,432\pi$ cm^3.
• Calcul du volume $\mathcal{V}$ du grand flacon :
$\mathcal{V} = \pi R^2 h = \pi \times 24^2 \times 72 = 41\,472\pi$.
Le volume du grand flacon est $41\,472\pi$ cm^3.
• Calcul du prix du grand flacon si les prix étaient proportionnels au volume de parfum.
On peut construire ce tableau de proportionnalité.

Volume en cm³	$18\,432\pi$	$41\,472\pi$
Prix en €	28	x

$$x = \dfrac{41\,472\pi \times 28}{18\,432\pi} = 63.$$
Dans le cas où le prix est proportionnel au volume de parfum le grand flacon coûterait 63 €.
• Le prix de vente maximum du grand flacon est donc 63 €.

50 • Traduction de l'énoncé.
Une bouée est constituée d'un cône de révolution et d'une demi-boule de même rayon 15 cm.
La hauteur du cône est 32 cm.

Calculer le volume exact puis l'arrondi au cm^2 du volume de cette bouée.

- Réponse au problème.

– Calcul du volume $\mathcal{V}_1$ du cône :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}\times\pi R^2 h = \frac{1}{3}\times\pi\times 15^2\times 32 = 2\,400\pi.$$

Le volume du cône est $2\,400\pi$ cm^3.

– Calcul du volume $\mathcal{V}_2$ de la demi-boule :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\frac{4}{3}\times\pi R^3}{2} = \frac{\frac{4}{3}\times\pi\times 15^3}{2} = \frac{4\,500\pi}{2} = 2\,250\pi.$$

Le volume de la demi-boule est $2\,250\pi$ cm^3.

– Calcul du volume $\mathcal{V}$ de la bouée :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 2\,400\pi + 2\,250\pi = 4\,650\pi.$$

Le volume de la bouée est $4\,650\pi$ cm^3.

L'arrondi au cm^3 du volume de la bouée est 14 608 cm^3.

51 **1. a.** $\mathcal{A}_1 = 4\pi R_1^2 = 4\times\pi\times 1{,}2^2 = 5{,}76\pi$.

Donc $\mathcal{A}_1 = 5{,}76\pi$ cm^2.

b. 3 mm = 0,3 cm et $\frac{0{,}3}{1{,}2} = \frac{1}{4}$.

Donc la petite sphère est une réduction de rapport $\frac{1}{4}$ de la grande sphère.

Dans une réduction de rapport k les aires sont multipliées par k^2 donc pour obtenir $\mathcal{A}_2$ on doit multiplier :

$$\mathcal{A}_1 \text{ par } \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

c'est-à-dire par $\frac{1}{16}$.

$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{16}\times 5{,}76\pi = 0{,}36\pi$.

Donc $\mathcal{A}_2 = 0{,}36\pi$ cm^2.

2. a. $\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\times\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 1{,}2^3 = 2{,}304\pi$.

Donc $\mathcal{V}_1 = 2{,}304\pi$ cm^3.

b. Dans une réduction de rapport k les volumes sont multipliés par k^3 donc pour obtenir $\mathcal{V}_2$ on doit multiplier $\mathcal{V}_1$ par $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, c'est-à-dire par $\frac{1}{64}$.

$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{64}\times 2{,}034\pi = 0{,}036\pi$.

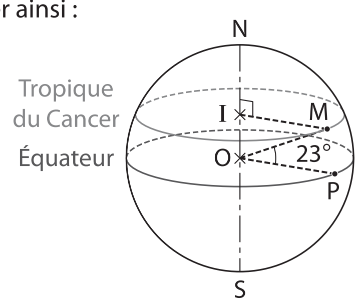
Donc $\mathcal{V}_2 = 0{,}036\pi$ cm^3.

3. $20\times 2\times 1{,}2 + 20\times 2\times 0{,}3 = 60$.

La longueur minimale du collier est 60 cm.

52 • Le tropique du Cancer est le parallèle de 23° 26′ 16″ de latitude nord.

En prenant 23° comme latitude la situation peut se représenter ainsi :



- On considère que le rayon OM de la terre est 6 370 km.

$\widehat{IOM} = 90° - \widehat{MOP} = 90° - 23° = 67°$.

Le triangle IOM est rectangle en I.

$\sin\widehat{IOM} = \frac{IM}{OM}$ soit $\sin 67° = \frac{IM}{6370}$ et donc

$IM = 6\,370\times\sin 67° \approx 5\,864$.

Donc IM = 5 864 km.

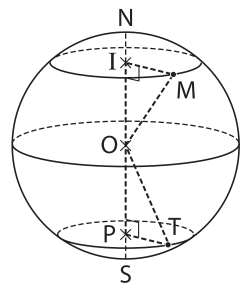
Le tropique du Cancer peut-être assimilé à un cercle de rayon 5 864 km.

- L'aventurier parcourt la longueur d'un cercle de rayon 5 864 km.

$2\times\pi\times 5\,864$ km $\approx 36\,845$ km.

Donc cet aventurier parcourt environ 36 845 km.

53 Calculer la hauteur de la théière revient à calculer la longueur IP sur le schéma ci-dessous.



- OM = OT = ON = OS = 6,5 cm.

IM = 3,3 cm et PT = 1,6 cm

- Calcul de IO

Dans le triangle OMI, rectangle en I :

$OI^2 = OM^2 - IM^2$

$OI^2 = 6{,}5^2 - 3{,}3^2 = 31{,}36$.

Donc $OI = \sqrt{31{,}36}$ m soit OI = 5,6 cm.

- Calcul de OP

Dans le triangle OPT, rectangle en P :

$OP^2 = OT^2 - PT^2$

$OP^2 = 6{,}5^2 - 1{,}6^2 = 39{,}69$.

Donc $OP = \sqrt{15{,}21}$ m soit OP = 6,3 cm.

- Calcul de la hauteur IP de la théière :

$$IP = 5{,}6 + 6{,}3 = 11{,}9.$$

La hauteur de la théière est 11,9 cm.

54 • $R = \frac{D}{2} = \frac{22{,}5}{2} = 11{,}25$.

Le rayon du ballon est 11,25 m.

$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\times\pi R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 11{,}25^3$

$\mathcal{V} \approx 5\,964$ m^3.

Le volume du ballon est environ 5 964 m^3.

Comme 1 m^3 d'hélium permet de soulever 1 kg le ballon peut soulever 5 964 kg.

- 1,5 t + 2 t = 3,5 t et 3,5 t = 3 500 kg.

5 964 – 3 500 = 2 464.

La masse totale des personnes embarquées doit être inférieure à 2 464 kg.

- $\frac{2\,464}{75} \approx 32{,}8$ donc le ballon peut emporter au maximum 32 personnes.

55 **a.** MN = 26 = 2 × 13 cm donc [MN] est un diamètre de la sphère.

Le cercle circonscrit au triangle MNP est donc un grand cercle de la sphère.

[MN] est donc un diamètre de ce cercle.

P est un point, différent de M et de N, du cercle de diamètre [MN] donc le triangle MNP est rectangle en P.

• Dans le triangle MNP, rectangle en P :

$PN^2 = MN^2 - MP^2$

$PN^2 = 26^2 - 10^2 = 576.$

Donc $PN = \sqrt{576}$ cm = 24 cm.

9. Vrai ou faux

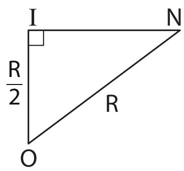
56 L'affirmation est vraie.

En effet, 2 × 6,5 cm = 13 cm.

Les diamètres de la sphère mesurent 13 cm donc [AB] est un diamètre de la sphère.

57 L'affirmation est fausse.

En effet, notons R le rayon de la sphère on obtient le triangle suivant :



Dans le triangle OIN rectangle en I :

$$\cos\widehat{O} = \frac{OI}{OM} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = 0{,}5$$

Donc $\widehat{O} = 60°$ et $\widehat{N} = 30°$

58 L'affirmation est fausse.

En effet, tous les méridien ont pour longueur la moitié de la longueur de l'équateur alors que deux parallèles n'ont en général pas la même longueur (leur longueur dépend de leur latitude).

59 L'affirmation est fausse.

En effet, la distance du plan au centre de la sphère est 6 cm donc ce plan ne coupe pas la sphère.

Pour que la sphère et le plan soient tangents le plan doit être situé à 3 cm du centre de la sphère.

60 L'affirmation est vraie.

En effet, la longueur d'un grand cercle d'une sphère de rayon R est 2πR.

Le coefficient de proportionnalité est 2π.

61 L'affirmation est vraie.

En effet, l'aire $\mathcal{A}_1$ de la sphère est

$\mathcal{A}_1 = 4\pi R_1{}^2 = 4\pi \times 4^2 = 64\pi$ donc $\mathcal{A}_1 = 64\pi$ cm².

L'aire $\mathcal{A}_2$ du disque est

$\mathcal{A}_2 = \pi R_2{}^2 = \pi \times 8^2 = 64\pi$ donc $\mathcal{A}_2 = 64\pi$ cm².

62 L'affirmation est vraie.

– Calcul du volume $\mathcal{V}_1$ de la boule :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi.$$

Donc le volume de la boule est 36π cm³.

– Calcul du volume $\mathcal{V}_2$ du cône :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 12 = 36\pi.$$

Le volume du cône est aussi 36π cm³.

63 L'affirmation est fausse.

En effet dans un agrandissement de rapport k les aires sont multipliées par k^2. Ici $k = 3$ et $3^2 = 9$ donc l'aire de la grande sphère est égale à 9 fois l'aire de la petite sphère.

10. Calcul mental et réfléchi

64 MN = 10 cm, OP = 5 cm et PN = 8 cm.

En effet, le triangle MNP est rectangle en P donc

$PN^2 = MN^2 - MP^2 = 10^2 - 6^2 = 64.$

$PN^2 = 64$ donc PN = 8 cm.

65 $\dfrac{4\,000\pi}{3}$ cm³.

En effet $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 400\pi$ donc R = 10 cm.

$$\text{D'où } \mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{4\,000\pi}{3}.$$

Le volume de la boule est $\dfrac{4\,000\pi}{3}$ cm³.

66 $\mathcal{A} = 40\pi$ cm²

En effet soit M un point du cercle de section.

Le triangle OIM est rectangle en M donc :

$$IM^2 = OM^2 - OI^2 = 7^2 - 3^2 = 40.$$

De plus, $\mathcal{A} = \pi \times IM^2 = 40\pi$.

67 24π cm³.

En effet,le rayon d'une boule est 1 cm.

Le volume des 18 boules est $\mathcal{V} = 18 \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1^3 = 24\pi$

11. Présenter, argumenter, communiquer

68 $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{1{,}5}{2} = 0{,}75.$

Le rayon de la citerne est 0,75 m.

Calcul du volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre :

$$\mathcal{V}_1 = \pi R^2 h = \pi \times 0{,}75^2 \times 2{,}5 = 1{,}406\,25\pi$$

Donc $\mathcal{V}_1 = 1{,}406\,25\pi$ m³.

Calcul du volume $\mathcal{V}_2$ des deux demi-boules :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}75^3 = 0{,}562\,5\pi$$

Donc $\mathcal{V}_2 = 0{,}562\,5\pi$ m³.

Calcul du volume $\mathcal{V}$ de la cuve :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 1{,}40\,625\pi + 0{,}562\,5\pi = 1{,}968\,75\pi$$

Donc le volume de la cuve est 1,968 75π m³ soit environ 6,185 m³.

1 m³ = 100 L donc la cuve peut contenir environ 6 185 L ce qui est plus que 6 000 L.

69 **1. a.** Il y a 24 fuseaux horaires.

b. $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 6\,370^2$.

Donc $\mathcal{A} \approx 509\,904\,364$.

La surface de la terre est environ 509 904 364 km².

$$\frac{509\,904\,364}{24} \approx 21\,246\,015$$

La surface couverte par un fuseau horaire est environ 21 246 015 km².

2. L'écartement en degrés entre deux méridiens qui délimitent un fuseau horaire est de 15°.

3. Notons L la longitude du lieu.

a. 7,5° ⩽ L ⩽ 22,5°
b. 22,5° ⩽ L ⩽ 37,5°
c. 82,5° ⩽ L ⩽ 97,5°

70 Les dessins ❶, ❸ et ❹ peuvent représenter la section.
❶ Le plan est parallèle à l'axe du cylindre est passe par le centre de la boule.
❸ Le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre.
❹ Le plan est parallèle à l'axe du cylindre mais il ne passe par le centre de la boule.

71 • Calcul du volume de la boule

$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4{,}2^3 = 98\,784\pi.$

Le volume de la boule est 98 784π cm³ et l'arrondi au cm³ de ce volume est 310 cm³.

• Calcul du volume du cylindre :

$$\mathcal{V}_2 = \pi R^2 h = \pi \times 4{,}2^2 \times 5{,}6 = 98\,784\pi.$$

Le volume du cylindre est aussi 98 784π cm³ et l'arrondi au cm³ de ce volume est 310 cm³.

• Calcul du volume du cube :

$$\mathcal{V}_3 = c^3 = 6{,}77^3 = 310{,}288\,73.$$

Le volume du cube est 310,288 733 cm³ et l'arrondi au cm³ de ce volume est aussi 310 cm³.

• Les arrondis au cm³ des volumes de ces trois boîtes sont bien égaux.

b. • Calcul de l'aire de la sphère :

$$\mathcal{A}_1 = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 4{,}2^2 = 70{,}56\pi.$$

L'aire de la sphère est 70,56π cm².
L'arrondi au cm² de cette aire est 222 cm².

• Calcul de l'aire totale du cylindre :

$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \times 4{,}2 \times 5{,}6 + 2\pi \times 4{,}2^2 = 82{,}32\pi.$$

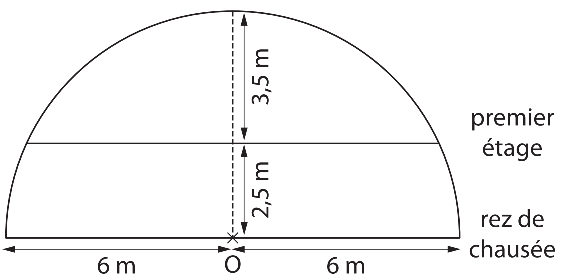
L'aire totale du cylindre est 82,32π cm².
L'arrondi au cm² de cette aire est 259 cm².

• Calcul de l'aire totale du cube :

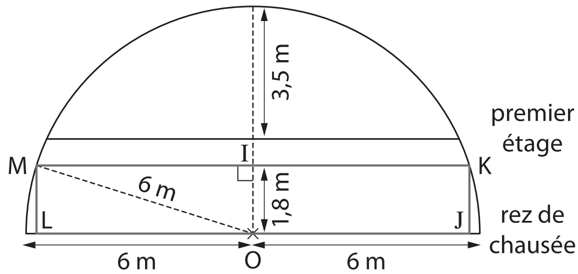
$$6c^2 = 6 \times 6{,}77^2 = 274{,}997\,4.$$

L'aire totale du cube est 274,997 4 cm².
L'arrondi au cm² de cette aire est 275 cm².
La boîte qui utilise le moins de matériau est la boule.
Les boîtes sphériques ne sont pas utilisées car elles sont instables car elles roulent.
De plus leur contenu est aussi difficile à vider entièrement.

72



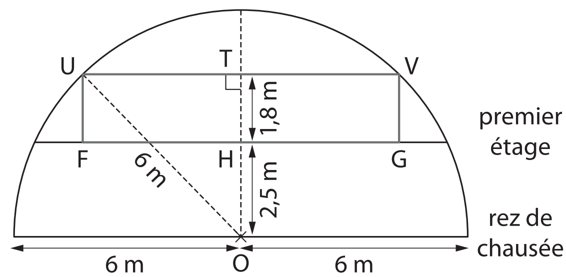
• Calcul de la surface habitable $\mathcal{A}_1$ du rez de chaussée.



La surface habitable du rez-de-chaussée est délimitée par un cercle de rayon OL ou IM.
Le triangle OIM est rectangle en M donc :

$$IM^2 = OM^2 - OI^2 = 6^2 - 1{,}80^2 = 32{,}76.$$

Donc IM² = 32,76 m²
$\mathcal{A}_1 = \pi \times IM^2 = 32{,}76\pi$
La surface habitable du rez-de-chaussée est 32,76π m².
• Calcul de la surface habitable $\mathcal{A}_2$ du premier étage :



La surface habitable du premier étage est délimitée par un cercle de rayon TU ou HF.
Le triangle OUT est rectangle en T donc :

$$UT^2 = OU^2 - OT^2 = 6^2 - 4{,}30^2 = 17{,}51.$$

Donc UT² = 17,51 m²
$\mathcal{A}_2 = \pi \times UT^2 = 17{,}51\pi$
La surface habitable du premier étage est 17,52π m².
• Calcul de la surface habitable $\mathcal{A}$ de la maison.
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 32{,}76\pi + 17{,}51\pi = 50{,}27\pi.$
La surface habitable de la maison est 50,27π m².
L'arrondi au m² de cette surface habitable est 158 m².

12. QCM

73 **c.** **74** **c.** **75** **c.** **76** **b.**
77 **b.** **78** **b.** **79** **a.** et **c.** **80** **a.** et **b.**
81 **b.** **82** **a.** ,**b.** et **c.**

13. Objectif brevet

83 **a.** 0,5 mm = 0,05 cm.
La formule donnant le volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre est :

$$\mathcal{V}_1 = \pi R_1^2\, h.$$

Donc ici $\mathcal{V}_1 = \pi \times 0{,}05^2 \times h$ soit :

$$\mathcal{V}_1 = 0{,}0025 \times \pi \times h \text{ cm}^3.$$

Le volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre est bien $0{,}0025 \times \pi \times h$ cm³.

b. $\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3} \times \pi R_2^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 30^3 = 36\,000\pi.$

Le volume $\mathcal{V}_2$ de la boule est bien 36 000 × π cm³.

c. Pour $h = 144$ km $= 14\,400\,000$ cm on a :

$$\mathcal{V}_1 = 0{,}0025 \times \pi \times 14\,400\,000 = 36\,000 \times \pi = \mathcal{V}_2.$$

Pour $h = 144$ km le volume du cylindre est égal à celui du la boule donc la hauteur h du cylindre est bien 144 km.

d. • Calcul de la longueur de l'équateur.

$$2\pi R = 2 \times \pi \times 6\,400 = 12\,800\pi.$$

La longueur de l'équateur est $12\,800\pi$ km soit environ 40 212 km.

• Calcul de la longueur obtenue en mettant 295 pelotes bouts à bouts.

$$295 \times 144 = 42\,480$$

Donc la longueur obtenue en mettant les 295 pelotes bouts à bouts est 42 480 km.

Cette longueur est supérieure à la longueur de l'équateur donc Annie a raison.

84 **a.** Calcul du volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre.

$$\mathcal{V}_1 = \pi R^2 h = \pi \times 20^2 \times 40 = 16\,000\pi.$$

Le volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre est $16\,000\pi$ cm^3.

L'arrondi au cm^3 de ce volume est 50 265 cm^3.

b. Calcul du volume $\mathcal{V}_2$ de la demi-boule.

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\frac{4}{3} \times \pi R^3}{2} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 20^3}{2} = \frac{\frac{32\,000\pi}{3}}{2} = \frac{16\,000\pi}{3}.$$

Le volume $\mathcal{V}_2$ de la demi-boule est $\frac{16\,000\pi}{3}$ cm^3.

L'arrondi au cm^3 de ce volume est 16 755 cm^3.

c. Calcul du volume $\mathcal{V}$ d'un plot

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 16\,000\pi + \frac{16\,000\pi}{3} = \frac{64\,000\pi}{3}$$

Le volume d'un plot est $\frac{64\,000\pi}{3}$ cm^3 ou $\frac{0{,}064\pi}{3}$ m^3.

• Calcul du volume de béton nécessaire pour 1 000 de ces plots.

$$1\,000 \times \frac{0{,}064\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}.$$

Le volume de béton nécessaire pour fabriquer 1 000 de ces plots est $\frac{64\pi}{3}$ m^3 soit environ 67 m^3

85 **1. a.** $R_1 = \frac{D_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Le rayon de la boule de glace est 3 cm.

Calcul du volume $\mathcal{V}_1$ de la boule de glace :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi R_1{}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi.$$

Donc le volume de la boule de glace est 36π cm^3.

b. $R_2 = \frac{D_2}{2} = \frac{5{,}4}{2} = 2{,}7$.

Le rayon du cône est 2,7 cm.

Calcul du volume $\mathcal{V}_2$ du cône :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \pi R_2{}^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2{,}7^2 \times 12 = 29{,}16\pi.$$

Donc le volume du cône est $29{,}16\pi$ cm^3.

2. Bernard peut-être rassuré le volume de la boule est supérieur au volume du cône. Il n'est donc pas plus intéressant de remplir le cône de glace.

86 **a.** La section est un cercle de centre H.

b. Le triangle OHA est rectangle en H donc le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$HA^2 = OA^2 - OH^2 = 7^2 - 4^2 = 33.$

Donc $HA^2 = 33$ et $HA = \sqrt{33}$ cm.

La valeur exacte du rayon HA de la section est $\sqrt{33}$ cm.

87 **a.** Le triangle OSL est rectangle en S donc le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$LS^2 = LO^2 - SO^2 = 6\,370^2 - 4\,880^2 = 16\,762\,500$

$LS^2 = 16\,762\,500$ donc $LS = \sqrt{16\,762\,500} \approx 4\,094$

L'arrondi au km près de SL est 4 094 km.

b. Le triangle OSL est rectangle en S donc

$\cos \widehat{SOL} = \frac{OS}{OL} = \frac{4\,880}{6\,370}$ donc $\widehat{SOL} \approx 40°$.

c. $\widehat{LOM} = 90° - \widehat{SOL} \approx 90° - 40°$

Donc $\widehat{LOM} \approx 50°$.

Donc la latitude Nord de Londres au degré près est 50°.

14. Exercices d'approfondissement

88 **a.** • 75 mm = 7,5 cm

$R = \frac{d}{2} = \frac{7{,}5}{2} = 3{,}75$.

Le rayon de la boule est 3,75 cm.

• Calcul du volume $\mathcal{V}$ de la boule :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}75^3 = 70{,}3125\pi.$$

Le volume $\mathcal{V}$ de la boule est $70{,}3125\pi$ cm^3.

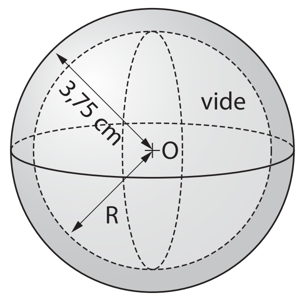
• Calcul de la masse de la boule en considérant qu'elle est pleine.

$M = 70{,}3125\pi \times 7{,}9 = 555{,}46875\pi.$

Et donc $M \approx 1\,745$.

• Une boule de pétanque pleine pèserait environ 1 745 g. La boule de pétanque étudiée pèse 710 g : elle n'est donc pas pleine.

b.



• $1\,745 - 710 = 1\,035$ et $\frac{1\,035}{7{,}9} \approx 131.$

Donc le volume de la boule formée par le vide est environ 131 cm^3.

• $\frac{4}{3} \times \pi R^3 = 131$ soit $R^3 = \frac{3}{4\pi} \times 131.$

Donc $R^3 \approx 31{,}274$.

En utilisant un tableur ou la touche $\sqrt[3]{\ }$ de la calculatrice on obtient $R \approx 3{,}15$ cm.

Le vide forme donc une boule de rayon 3,15 cm.

• $3{,}75 - 3{,}15 = 0{,}6$ donc l'épaisseur de la boule de pétanque est environ 0,6 cm ou 6 mm.

89 • $\pi \times 8^2 \times 15 = 960\pi$.

Le volume du cylindre est 960π cm^3.

• $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 6^3$ cm^3 = 288π cm^3.

Le volume de la boule est 288π cm^3.

• $960\pi - 288\pi = 672\pi$.

Le volume d'eau restant dans le cylindre après avoir retiré la boule est $672\,\pi$ cm^3.

• $\pi \times 8^2 \times h = 672\pi$ donc $h = \dfrac{672\pi}{64\pi} = 10{,}5$.

La hauteur d'eau était 10,5 cm.

90 **a.** 90° Ouest et O° Nord.

b. 180° Est et 35° Sud.

c. 120° Est et 3° Nord.

91 **a.** et **b.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Rayon extérieur (en mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Rayon intérieur (en mm)	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	Volume extérieur (en mm^3)	523,6	904,78	1436,8	2144,7	3053,6	4188,8	5575,3	7238,2	9202,8
4	Volume intérieur (en mm^3)	113,1	268,08	523,6	904,78	1436,8	2144,7	3053,6	4188,8	5575,3
5	Volume d'or (en mm^3)	410,5	636,7	913,16	1239,9	1616,9	2044,1	2521,7	3049,4	3627,5
6	Masse d'or (en g)	7,9	12,3	17,6	23,9	31,2	39,5	48,7	58,9	70,0
7	Coût de la boule (en €)	321,03	497,92	714,12	969,63	1264,5	1598,6	1972	2384,8	2836,8

On a saisi :

Cellule B2 : = B1–2

Cellule B3 : = 4*PI()*B1^3/3

Cellule B4 : = 4*PI()*B2^3/3

Cellule B5 : = B3–B4

Cellule B6 : = B5*19,3/1 000

Cellule B7 : = B6*40,52

c. Pour 700 € l'artisan peut proposer d'acheter 2 boules de 5 mm de rayon pour faire par exemple des boucles d'oreilles ou une seule boule de 6 mm de rayon pour un collier ou un bracelet.

92 Un méridien est un demi-grand cercle de la terre.

$\dfrac{2 \times \pi \times 6\,370}{2} \approx 20\,012$.

La longueur d'un méridien est environ 20 012 km et cette longueur correspond à un déplacement de 180°.

La longueur d'un mille marin est :

$\dfrac{20\,012}{180} \times \dfrac{1}{60} \approx 1{,}853$.

Donc 1 mille marin correspond à environ 1,853 km soit 1 853 m.

93 $\mathcal{V} = \dfrac{\frac{4}{3} \times \pi R^3}{2} = \dfrac{\frac{4}{3} \times \pi \times 12^3}{2} = \dfrac{2\,304\pi}{2} = 1\,152\pi$.

Le volume du saladier est $1\,152\pi$ cm^3 soit environ 3 619 cm^3.

Comme 1 L = 1 000 cm^3 on en déduit que la contenance du saladier est environ 3,619 L.

Armelle peut donc utiliser ce saladier.

94 **a.** $5 \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times 20^3$ m^3 = $\dfrac{160\,000}{3}\pi$ m^3 et

$\dfrac{160\,000}{3}\pi$ m^3 $\approx 167\,552$ m^3.

Le méthanier transporte environ 167 552 m^3 de GNL.

b. 167 552 m^3 × 600 = 100 531 200 m^3.

Le volume correspondant de gaz naturel est :

100 531 200 m^3.

95 **1. a.** $4 \times \pi \times 25\,000^2 = 2\,500\,000\,000\pi$

L'aire de la surface de Neptune est $2\,500\,000\,000\pi$ km^2.

L'arrondi au km^2 de cette aire est 7 853 981 634 km^2.

b. $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 25\,000^3 \approx 6{,}5 \times 10^{13}$

Le volume de Neptune est environ $6{,}5 \times 10^{13}$ km^3.

2. a. $k = \dfrac{6\,000}{25\,000} = 0{,}24$.

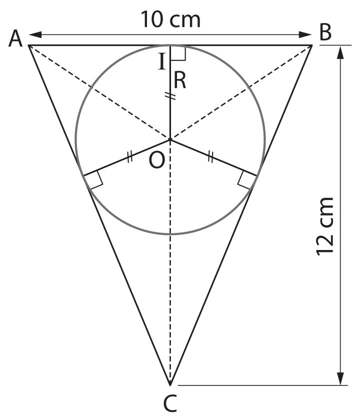
b. • $7\,853\,981\,634 \times 0{,}24^2 = 452\,389\,342{,}118\,4$

L'arrondi au km^2 de l'aire de Vénus est 452 389 342 km^2.

• $6{,}5 \times 10^{13} \times 0{,}24^3 = 8{,}985\,6 \times 10^{11}$

Le volume de Vénus est $8{,}985\,6 \times 10^{11}$ km^3.

96 **Un défi**



• Calcul de la longueur AC.

Le triangle AIC est rectangle en I donc :

$$AC^2 = AI^2 + IC^2 = 5^2 + 12^2 = 169.$$

Donc CB = AC = 13 cm.

• Calcul de l'aire du triangle ABC

$\mathcal{A} = \dfrac{AB \times IC}{2} = \dfrac{10 \times 12}{2} = 60$.

L'aire du triangle ABC est 60 cm^2.

• Calcul du rayon de la boule

La somme des aires des triangles AOC, AOB et BOC est égale à l'aire du triangle ABC donc :

$$\frac{AC \times R}{2} + \frac{AB \times R}{2} + \frac{BC \times R}{2} = \mathcal{A}$$

soit $\dfrac{13 \times R}{2} + \dfrac{5 \times R}{2} + \dfrac{13 \times R}{2} = 60$.

D'où $6{,}5R + 2{,}5R + 6{,}5R = 30$ soit $15{,}5R = 60$.

Donc $R = \dfrac{60}{15{,}5}$ cm.

• Calcul du volume de la boule :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{60}{15{,}5}\right)^3 \approx 242{,}967$$

L'arrondi au mm^3 de la boule est 242,967 cm^3.

15. Tache complexe : Savoir évaluer le danger

97 1. Des aides possibles

Aide n° 1 : Que peut-on calculer en sachant que la waterball a 2 m de diamètre ?

Aide n° 2 : Comment connaître le volume d'oxygène contenu dans la waterball au début ?

Aide n° 3 : Déterminer le volume minimal d'oxygène et le volume maximal de dioxyde de carbone qu'il doit y avoir dans la waterball pour que Thomas y soit en sécurité.

Aide n° 4 : Quel volume d'air Thomas inspire (et expire) par minute ?

Aide n° 5 : Quel volume d'oxygène disparait chaque minute ?

Aide n° 6 : Quel volume de dioxyde de carbone est ajouté chaque minute ?

2. Quelques commentaires

• La première difficulté de cette tâche est liée à la compréhension de la situation. En effet l'élève doit comprendre que plus le temps passe, plus le volume d'oxygène diminue et plus celui de dioxyde de carbone augmente. Ceci est une clé de cette tâche complexe.

• Une autre clé est de traduire les informations données dans les deux premières colonnes du tableau du document 1 et d'en déduire qu'il y a 21 % d'oxygène et 79 % d'azote, avec quelques traces de dioxyde de carbone, dans la bulle au moment où Thomas y entre.

Il est possible que des élèves utilisent leurs connaissances de physique-chimie - la composition de l'air est au programme de 4^{e} – à savoir que l'air est un mélange de dioxygène (environ 20 % en volume) et de diazote (environ 80 % en volume).

• Une autre difficulté réside dans le fait que la question posée porte sur une durée, alors que la plupart des informations, hormis les deux premières lignes du document 1, ainsi que la plupart des calculs possibles, portent sur des volumes.

• Enfin, les informations données sont exprimées dans différentes unités (diamètre de la bulle en mètres, volume d'air inspiré et expiré par Thomas en litres) et le tableau du document 1 donne des renseignements pour 100 cm^3 d'air (inspiré et expiré). Les élèves vont devoir effectuer des conversions d'unités, ce qui peut constituer une difficulté pour certains.

• Après avoir laissé du temps aux élèves pour une phase de réflexion individuelle, l'enseignant pourra faire un point et recueillir des éléments de démarche, mais aussi des questions. Il sera d'ailleurs pertinent d'amener des élèves à reformuler certaines questions pour s'assurer de leur sens. Ce point sera l'occasion de favoriser l'appropriation par la classe du problème à résoudre, qui doit être compris de tous. La suite de la recherche pourra s'effectuer par groupes.

• On peut penser que les élèves commencent par calculer le volume de la bulle. Ensuite, les démarches seront sans doute diverses : il est possible que certains élèves s'intéressent aux conditions initiales et aux conditions à ne pas dépasser, et que d'autres s'intéressent plus spécialement à Thomas et à la quantité d'air qu'il inspire (et expire).

• On pourra remarquer si les élèves comprennent qu'au moment où Thomas entre dans la bulle, l'air qui y est contenu est composé d'oxygène, dont le volume est à déterminer, d'azote, dont on peut calculer le volume mais qui n'intervient pas dans la solution, et de traces de dioxyde de carbone, avec un volume quasi nul. On observera aussi si les élèves sont sensibles au fait que chaque inspiration-expiration conduit à diminuer le volume de dioxygène contenu dans la bulle et à le remplacer par du dioxyde de carbone.

• Il sera pertinent de permettre aux différents groupes d'exposer leur démarche à la classe et de répondre aux questions. Un travail écrit individuel de rédaction pourra être ensuite proposé.

3. Éléments de réponse

• Volume de la bulle : $\frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 \approx 4{,}189$

Le volume de la bulle est environ 4,189 m^3 ou 4 189 L.

• $30 \times 0{,}8 = 24$

Chaque minute Thomas inspire (et expire) 24 L d'air.

• Comme 1 L = 1 000 cm^3, le tableau du document 1 peut devenir le tableau ci-dessous :

Dans 1 L d'air	inspiré	expiré
Oxygène	0,21 L	0,16 L
Dioxyde de carbone	traces	0,05 L
Azote	0,79 L	0,79 L

Étude du volume d'oxygène dans la bulle

• $\frac{21}{100} \times 4\,189 \approx 880$

Au début la bulle contient 880 L d'oxygène (à 1 L près).

• $\frac{17}{100} \times 4\,189 \approx 712$

La bulle doit contenir au minimum 712 L d'oxygène (à 1 L près).

• $24 \times (0,21\text{ L} - 0,16\text{ L}) = 1{,}2\text{ L}$

Chaque minute, il y a 1,2 L d'oxygène en moins dans la bulle.

• $t \approx \frac{880 - 712}{1{,}2}$ soit $t \approx 140$

Ainsi au bout d'environ 140 min, soit 2 h 20 min, il n'y aura plus assez d'oxygène dans la bulle.

Etude du volume de dioxyde de carbone dans la bulle

• Au début, la bulle ne contient pratiquement pas de dioxyde de carbone.

• $\frac{0{,}6}{100} \times 4\,189 \approx 25$

La bulle ne doit pas contenir plus de 25 L de dioxyde de carbone (à 1 L près).

• $24 \times 0{,}05$ L = 1,2

Chaque minute, il y a 1,2 L de dioxyde de carbone en plus dans la bulle.

• $t \approx \dfrac{25}{1{,}2}$ soit $t \approx 20{,}9$

Ainsi au bout d'environ 20,9 minutes il y aura trop de dioxyde de carbone dans la bulle.

Conclusion

A cause du dioxyde de carbone Thomas ne peut pas rester plus de 20 minutes dans la bulle.

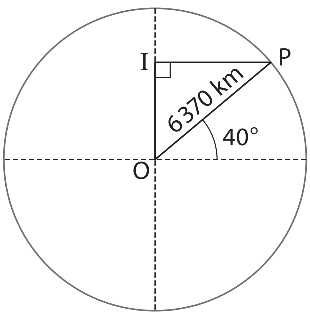
On peut même lui conseiller, pour être en totale sécurité, de sortir de la bulle au bout de 15 minutes.

16. En route vers la Seconde

98 On considère que le rayon de la terre est 6 370 km.

Le bateau suit un parallèle de latitude 40° N.

Calculer le rayon de ce parallèle revient à calculer la longueur IP sur la figure ci-dessous.



$\widehat{IOP} = 90° - 40° = 50°$

Le triangle IOP est rectangle en I.

$\sin \widehat{IOP} = \dfrac{IP}{OP}$ soit $\sin 50° = \dfrac{IP}{6370}$ et donc :

$$IP = 6\,370 \times \sin 50° \text{ km.}$$

• La longueur du parallèle suivi par le bateau est :

$2 \times \pi \times 6\,370 \times \sin 50°$ km soit $12\,740 \times \pi \times \sin 50°$.

• Le bateau va se déplacer de 60° vers l'ouest, on peut donc dresser ce tableau de proportionnalité :

Longueur en km	$12\,740 \times \pi \times \sin 50°$	x
Degré	360	60

Et $x = \dfrac{12\,740 \times \pi \times \sin 50°}{6} \approx 5\,110$.

Ce bateau va parcourir environ 5 110 km.

99 **a.** $R = \dfrac{D}{2}$. Le volume de la boule est :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{D^3}{8}$$

$\mathcal{V} = \dfrac{4}{24} \times \pi \times D^3 = \dfrac{1}{6}\pi D^3$.

Le volume de la boule est $\dfrac{1}{6}\pi D^3$

b. L'aire de la sphère est :

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \times \frac{D^2}{4} = \pi D^2.$$

L'aire de la sphère est πD^2.

100 **a.** • Volume du cône :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times 2R = \frac{2}{3} \times \pi \times R^3$$

Le volume du cône est $\dfrac{2}{3} \times \pi \times R^3$.

• Volume du cylindre :

$$\mathcal{V}_2 = \pi R^2 h = \pi R^2 \times 2R = 2 \times \pi \times R^3$$

Le volume du cylindre est $2 \times \pi \times R^3$.

• Volume de la boule :

$$\mathcal{V}_3 = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3.$$

Le volume de la boule est $\dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

b. Par exemple : $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3$.

101 **a.** • Calcul du volume d'une goutte :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi$$

Le volume d'une goutte est 36π mm³ ou $0{,}036\pi$ cm³.

• Calcul du volume d'eau qui est tombé sur la zone :

$10 \text{ km}^2 = 10 \times 10^{10} \text{ cm}^2$

$\mathcal{V}_2 = 40 \times 10 \times 10^{10} = 4 \times 10^{12}$

Il est tombé 4×10^{12} cm³ d'eau sur la zone.

• Calcul du nombre de gouttes d'eau qui sont tombées sur la zone :

$$\frac{4 \times 10^{12}}{0{,}036\pi} \approx 3{,}5 \times 10^{13}.$$

Donc il est tombé environ $3{,}5 \times 10^{13}$ gouttes d'eau sur cette zone en 24 heures.

b. Pour limiter les conséquences meurtrières on peut :

– faire respecter les instructions données lors des alertes de météo France (interdire les déplacements, etc) ;

– éviter de construire dans des zones inondables ;

– entretenir les voies d'écoulement des eaux (caniveaux, fossés…)

CHAPITRE 15

Angles inscrits Polygones réguliers

Choix pédagogiques

1. Le point sur les classes précédentes

• Les angles

Depuis leur introduction en classe de **6e**, plusieurs propriétés sur les angles ont été étudiées et seront utiles dans ce chapitre :

– En **6e** et **5e** les propriétés relatives aux angles des triangles isocèles, équilatéraux et rectangles ;

– En **5e**, les angles opposés par le sommet et leur propriété ;

– En **4e**, la caractérisation des points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.

La propriété directe : « Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle » est généralisée dans le programme de **3e** par la relation qui existe entre la mesure d'un angle inscrit dans un cercle et la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

• **Les polygones réguliers**

En **6e** et en **5e** sont étudiées les propriétés des triangles équilatéraux et des carrés (mais l'appellation polygone régulier n'a pas encore été utilisée).

La construction du cercle circonscrit à un triangle a été travaillée et justifiée en classe de **5e**.

À noter que le rapprochement des deux notions abordées dans ce chapitre s'explique par le fait que les propriétés des angles inscrits peuvent être utilisées dans la résolution de certains problèmes sur les polygones réguliers.

Néanmoins, ces deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre et dans un ordre indifférent.

2. Angle inscrit, angle au centre

L'activité 1 permet d'une part de faire découvrir le nouveau vocabulaire relatif aux angles (inscrit et au centre) présents dans un cercle. Elle permet d'autre part d'émettre une conjecture concernant ces angles.

L'utilisation du logiciel de géométrie dynamique est idéale ici pour observer grand nombre de cas et pour constater que dans ce grand nombre de cas la propriété semble toujours vraie.

Charge à l'enseignant de faire sentir aux élèves que cette multiplicité d'exemples n'est pas suffisante et que démontrer cette propriété est nécessaire. Cette démonstration est amenée dans **l'activité 2** en plusieurs étapes qui sont les trois figures qui ont pu être obtenues dans **l'activité 1**.

La conjecture est tout d'abord démontrée dans le cas où le centre O du cercle se trouve sur un côté de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ (écran d'Arthur) ; on utilise la question 3 de la page « Je vérifie mes acquis ». Pour les deux autres situations (écrans de Bachir et de Chloé), on se ramène à la question 1 en considérant le diamètre [MN].

Les élèves peuvent alors énoncer la propriété démontrée. On pourra dans un premier temps accepter différentes formulations. De façon assez ouverte et en invitant les élèves à développer leur esprit critique, **l'activité 3** permet de découvrir la conséquence de la propriété précédente concernant l'égalité des mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc.

3. Polygones réguliers

L'activité 4 vise à sensibiliser les élèves sur le fait que les procédés géométriques sont fréquemment rencontrés à différentes époques de l'histoire des Arts. Ainsi, les polygones réguliers sont découverts à travers diverses oeuvres d'art. À l'issue de cette activité, le vocabulaire et les définitions seront dégagés.

Les **activités 5, 6** et **7** concernent la construction sur papier blanc de polygones réguliers à 3, 4 et 6 cotés (à noter que parmi ces constructions seules celles du triangle équilatéral et du carré figurent au socle).

Ces constructions s'effectuent en connaissant le centre du polygone et l'un de ses sommets.

Ces trois activités reposent alors sur une phase importante qu'est l'analyse de la situation. L'élaboration d'une figure à main levée est alors un apport considérable et permettra cette analyse, le dégagement de propriété, des codages intéressants… avant de passer à la phase de construction.

Il pourra être intéressant d'aborder les différents chemins de calculs des mesures d'angles (propriétés sur les triangles particuliers, utilisation des propriétés des angles inscrits…)

4. Savoir Faire

L'**exercice résolu 1** est l'occasion de travailler les relations existant entre angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc. Les conseils donnés soulignent la rédaction des propriétés respectivement utilisées.

Les **exercices 4** et **5** font appel aux mêmes propriétés.

L'**exercice 5** fait appel à l'esprit critique des élèves et les invite à ne pas avoir une lecture trop perceptive d'une figure géométrique (comme dans l'**exercice 34**).

Le programme de la classe de **3^e^** stipule que les constructions de polygones réguliers (en partant du centre du polygone et de l'un de ses sommets) à connaître sont celles :

– du triangle équilatéral ;
– du carré ;
– de l'hexagone régulier ;
– de l'octogone régulier.

Les trois premières ont été abordées dans les activités (5, 6 et 7), l'**exercice résolu 2** traite de la construction de l'octogone régulier.

Des calculs de longueurs aboutissant sur des calculs de périmètres mais aussi d'aires seront fréquemment rencontrés (comme dans les **exercices 49** à **51, 68, 90, 91, 96**).

Ces calculs de longueurs nécessitent diverses propriétés de géométrie comme par exemple l'égalité de Pythagore ou encore la trigonométrie.

C'est cette méthode même qui est développée dans l'**exercice résolu 3**.

L'**exercice résolu 11** aborde l'utilisation du logiciel GeoGebra et de sa fonction « polygone régulier ». Les différentes constructions (de cercles ou de polygones) demandées dans les **exercices 11** à **13** peuvent donner lieu à de véritables problèmes de construction où une phase d'analyse préalable est nécessaire.

L'**exercice 14** de **l'atelier brevet** nécessite la mobilisation de plusieurs propriétés de géométrie : propriété du triangle inscrit dans un cercle de diamètre un côté ; relation existant entre angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc ; égalité de Pythagore.

L'**exercice 15** de cet **atelier brevet** est une construction géométrique. Les pré–requis en sont la construction d'un triangle équilatéral, les notions de symétries vues en **6^e^** et en **5^e^**, la reconnaissance d'un hexagone régulier. Aucune justification n'est demandée.

5. Compléments

• Les exercices **Je vérifie mes acquis** sont une évaluation diagnostique précieuse pour l'enseignant.

• Dans **les exercices à l'oral** tout comme dans **les exercices d'application**, la progressivité de l'apprentissage est particulièrement prise en compte.

• Les exercices de la page **Présenter, argumenter, communiquer** permettent de travailler des items de la compétence 3 du socle commun de connaissances et de compétences comme présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté, par un texte écrit, en participant à un débat, à l'oral, mais aussi réaliser des constructions.

• Les exercices de la page **Objectif Brevet** portent sur les deux parties de ce chapitre.

Dans les exercices de la première partie, outre les propriétés sur angle inscrit et angle au centre, on utilise des propriétés étudiées au cours des années précédentes comme la somme des mesures des angles dans un triangle, ou la caractérisation du triangle rectangle par son inscription dans un cercle dont un diamètre est un côté du triangle.

Un intérêt de l'**exercice 83** réside dans la prise d'initiative de tracer un cercle (ici mentionnée dans l'aide). C'est une porte ouverte pour les élèves dans la prise d'initiative.

Les exercices de la seconde partie portent sur un octogone qui s'avèrera non régulier et sur un hexagone régulier. Propriété de Pythagore et calculs d'aires de figures simples sont ici réinvestis.

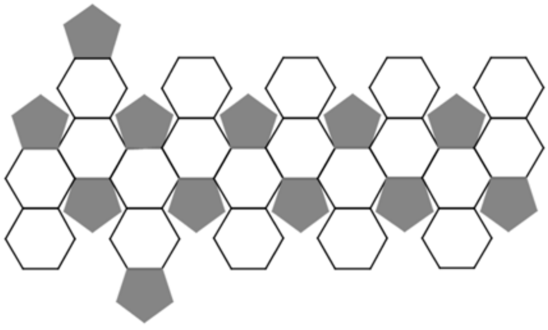
• Les situations proposées dans les **exercices d'approfondissement** sont riches et variées. Ces exercices peuvent être l'occasion de travaux collectifs. Toute piste de recherche sera valorisée, même si elle n'a pas permis d'aboutir à une résolution complète.

Ces exercices demandent à l'élève des compétences dans différents domaines et une réflexion plus importante. Ils sont pour la plupart issus d'une situation « réelle » pouvant être une source de motivations nouvelles pour certains élèves. Pour deux d'entre eux (n° **88** et **93**), l'utilisation d'un logiciel de géométrie permet d'émettre une conjecture, qu'il s'agira ensuite de prouver. C'est le cas aussi pour l'**exercice 89** (**problème ouvert**), mais ici l'usage du logiciel est une prise d'initiative qui n'a pas été dévoilée.

Les exercices 88, 89 et 95 portent sur angle inscrit et angle au centre, les autres sur des calculs de longueurs, d'aires, de volumes, à propos d'hexagones et d'octogones. Des compétences en trigonométrie sont mobilisées.

L'**exercice 90** (**Math et Arts**) nécessite d'extraire les informations de différents documents (énoncé, schéma). Il faudra sans doute un peu de temps pour le résoudre. La seconde question peut donner lieu à de courts exposés illustrés.

Si l'**exercice 92** (**Math et métier**) est aisé à comprendre, sa résolution demande une organisation de la démarche suivie. A noter qu'il est possible de réaliser un tel ballon en carton, à l'aide du schéma ci-dessous :



• Dans la **tâche complexe**, les élèves – qui peuvent là aussi travailler en petits groupes – doivent réaliser une construction géométrique et concevoir un programme de cette construction.

Le compte-rendu pourra être fait sous différentes formes : exposé oral avec présentation commentée de la figure réalisée sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie ou document écrit.

• Deux problèmes sont proposés dans la rubrique **En route vers la Seconde.** Dans l'**exercice 96** les élèves détermineront le périmètre d'un polygone régulier ayant *n* côtés. L'**exercice 97** propose une situation liée à la présence d'un octogone régulier dans un carré ; ce problème sera résolu à l'aide de deux démarches, l'une utilisant la trigonométrie, l'autre une mise en équation. Les figures de ces deux exercices seront réalisées avec un logiciel de géométrie.

Corrigés

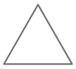
1. Devinettes

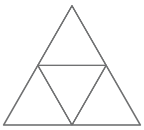
• Devinette

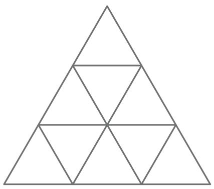
Il y a trois manières d'ajouter un carré pour avoir une figure qui a un axe de symétrie.

• Devinette

Il y a 38 triangles en tout.

24 « petits » triangles : 

12 triangles « moyens » : 

et 2 « grands » triangles : 

2. Je vérifie mes acquis

1 Bonne réponse : c
2 Bonne réponse : b
3 Bonne réponse : a
4 Bonne réponse : c
5 Bonne réponse : b
6 Bonne réponse : a
7 Bonne réponse : c

3. Calcul mental

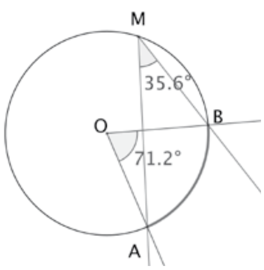
8 **a.** 60° **b.** 130° **c.** 70°

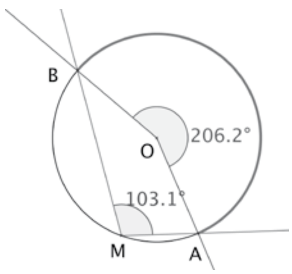
4. Activités

Angles inscrits, angles au centre

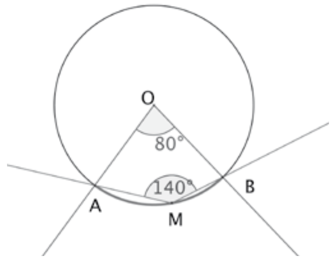
1 Conjecturer une nouvelle propriété

a. b.





On peut conjecturer que si $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



Si $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ n'interceptent pas le même arc, alors ce n'est pas le cas.

2 Démontrer cette conjecture

1. a. OMA est isocèle en O. Ses deux angles à la base $\widehat{AMB}$ et $\widehat{OAM}$ ont donc même mesure.
Donc $\widehat{AOM} = 180° - 2\,\widehat{AMB}$.

b. Comme les points M, O et B sont alignés, on a :
$\widehat{AOB} = 180° - \widehat{AOM}$
$= 180° - \left(180° - 2\,\widehat{AMB}\right)$
$= 180° - 180° + 2\,\widehat{AMB}$
Donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB}$

2. a. D'après le **1.**, on a :
$\widehat{AON} = 2\,\widehat{AMN}$
$\widehat{NOB} = 2\,\widehat{NMB}$

b. Or $\widehat{AOB} = \widehat{AON} + \widehat{NOB}$
Donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMN} + 2\,\widehat{NMB}$
$= 2(\widehat{AMN} + 2\,\widehat{NMB})$
$= 2\,\widehat{AMB}$

3. a. D'après le **1.**, on a :
$\widehat{NOB} = 2\,\widehat{NMB}$
$\widehat{NOA} = 2\,\widehat{NMA}$

b. Or $\widehat{AOB} = \widehat{NOB} - \widehat{NOA}$
Donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{NMB} - 2\,\widehat{NMA}$
$= 2(\widehat{NMB} - \widehat{NMA})$
$= 2\,\widehat{AMB}$

4. On a démontré ainsi que :
« Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. »

3 Tirer une conséquence

$\widehat{COA}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{CBA}$.
De même, $\widehat{COA}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{CDA}$.
Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.
Donc $\widehat{COA} = 26° \times 2 = 52°$ et $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ ont la même mesure de 26°.
Lise s'est effectivement trompée et nul besoin de rapporteur pour s'en rendre compte.

Polygones réguliers

4 Analyser différentes œuvres

a. • Un triangle équilatéral vert

• Deux pentagones réguliers rouges

• Des carrés : jaunes, blancs et verts

Des octogones réguliers : turquoises et rouges

• Un hexagone régulier au centre

Des carrés

b. Oui, pour chacun des polygones réguliers trouvés, il semble possible de tracer un cercle passant pas tous les sommets.

5 Construire un triangle équilatéral

a. Une façon :

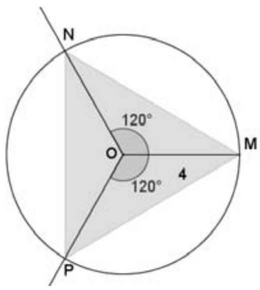
Le centre O du cercle circonscrit au triangle est le point de concours des médiatrices mais comme le triangle est équilatéral, ces médiatrices sont aussi bissectrices des angles. Donc $\widehat{ACO} = 60 : 2 = 30°$.

De plus, le triangle AOC est isocèle en O donc :

$$\widehat{COA} = 180° - 2 \times 30° = 120°$$

De même $\widehat{BOA} = 120°$ et $\widehat{BOC} = 120°$.

b.

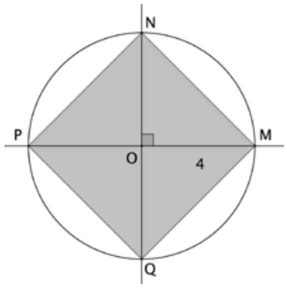


6 Construire un carré

a. • Si un quadrilatère est un carré alors ses diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur.

Donc $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90°$

b.



7 Construire un hexagone régulier

a. • Les six triangles AOB, BOC, , OFA sont superposables, donc :

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \ldots = \widehat{FOA} = 360° : 6 = 60°$$

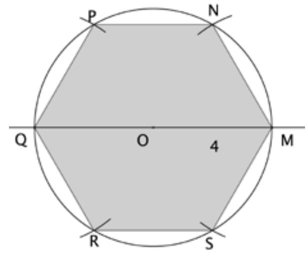
• Le triangle OAB est isocèle en O donc ses deux angles à la base ont même mesure. De plus $\widehat{AOB} = 60°$.

Donc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$

OAB est donc un triangle équilatéral.

On montre de même que OBC, OCD, . . . , OFA aussi. Les côtés de l'hexagone régulier ont donc pour longueur le rayon du cercle.

b.



5. J'applique

4 • $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ACB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc :

$$\widehat{ACB} = 72° : 2 = 36°$$

• $\widehat{COB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{CAB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc :

$$\widehat{CAB} = 52° : 2 = 26°$$

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

Donc $\widehat{ABC} = 180° - (26° + 36°) = 118°$

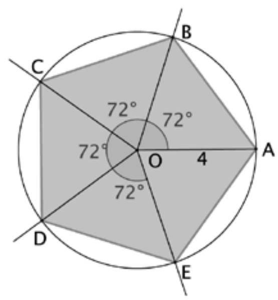
5 **a.** Les angles inscrits $\widehat{TFS}$, $\widehat{TDS}$ et $\widehat{TES}$ interceptent le même arc.

Or si des angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales.

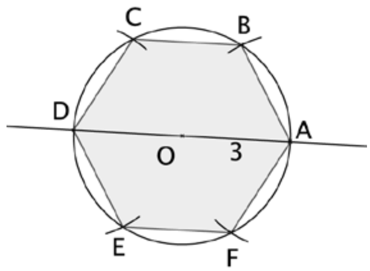
Donc $\widehat{TFS} = \widehat{TDS} = \widehat{TES}$. Marion a donc tort.

6 Un pentagone régulier a 5 côtés et :

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA} = \frac{360°}{5} = 72°$$



7 Dans un cercle de centre O et de rayon OA = 3 cm, on reporte 6 fois le rayon OA.



8 On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB isocèle en O. La hauteur (OH) est aussi médiatrice de [AB] et bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Donc AB = 2AH et $\widehat{AOB} = 2\ \widehat{AOH}$

Or, $\widehat{AOB} = 120°$

Donc $\widehat{AOH} = 120° : 2 = 60°$.

Dans le triangle AOH, rectangle en H, on a :

$\sin \widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OA}$

Donc $\sin 60° = \dfrac{AH}{4}$

Donc $AH = 4 \times \sin 60°$ cm

Donc $AB = 8 \sin 60° \approx 6{,}9$ cm

9 Dans un carré les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur. Donc le triangle AOB est rectangle et isocèle en O.

Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

Donc $AB^2 = 2^2 + 2^2$

Donc $AB^2 = 8$

Donc $AB = \sqrt{8} \approx 2{,}8$ cm

La longueur AB mesure environ 2,8 cm.

10 **a.** On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB isocèle en O. La hauteur (OH) est aussi médiatrice de [AB] et bissectrice de $\widehat{AOB}$.

$$\text{Donc } AB = 2AH \quad \text{et} \quad \widehat{AOB} = 2\ \widehat{AOH}$$

Or, $\widehat{AOB} = 360° : 8 = 45°$

Donc $\widehat{AOH} = 45° : 2 = 22{,}5°$.

Dans le triangle AOH, rectangle en H, on a :

$$\sin \widehat{AOH} = \frac{AH}{OA}$$

Donc $\sin 22{,}5° = \dfrac{AH}{4}$

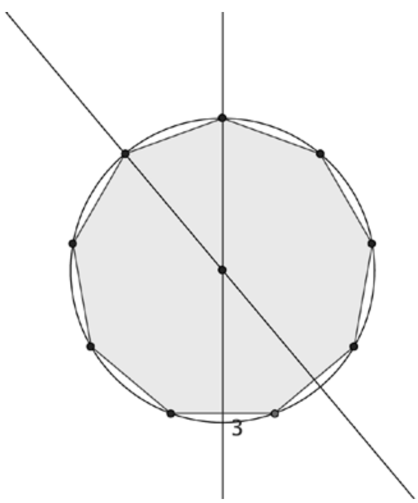
Donc $AH = 4 \times \sin 22{,}5°$ cm

Donc $AB = 8 \sin 22{,}5° \approx 3{,}1$ cm

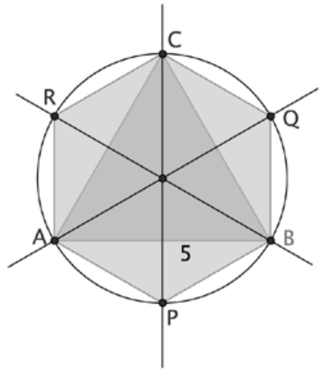
b. $8 \times AB = 8 \times 8 \sin 22{,}5° = 64 \sin 22{,}5° \approx 24{,}5$ cm

Le périmètre de l'octogone est d'environ 24,5 cm.

12



13



6. Atelier Brevet

14 **1.** On sait que [BM] est un diamètre du cercle et que D est un point du cercle.

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle donc BMD est rectangle en D.

2. a. On sait que BAD est isocèle en A.

Donc ses deux angles à la base ont même mesure et :

$$\widehat{BAD} = 180° - 2 \times 75° = 30°$$

b. $\widehat{BAD}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc que $\widehat{BMD}$.

c. Si deux angles inscrits interceptent le même arc alors leurs mesures sont égales.

Donc $\widehat{BMD} = 30°$

3. D'après le **1.** , le triangle BMD est rectangle en D donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BM^2 = BD^2 + DM^2$$

Donc $11{,}2^2 = 5{,}6^2 + DM^2$

Donc $DM^2 = 11{,}2^2 - 5{,}6^2 = 94{,}08$

Donc $DM = \sqrt{94{,}08} \approx 9{,}7$

La longueur DM mesure environ 9,7 cm

15

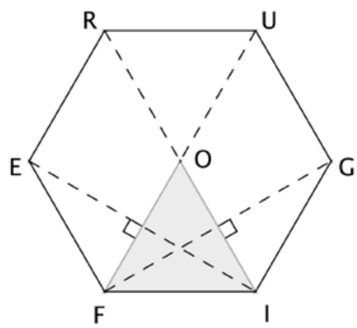


FIGURE semble être un hexagone régulier

7. Exercices à l'oral

16 L'angle marqué est un angle inscrit au **b.**

17 L'angle marqué est un angle au centre dans les cas **b.** et **d.**

18 L'angle inscrit et l'angle au centre interceptent le même arc dans les cas **a.** et **d.**

19 $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc :

a. $\widehat{AMB} = 146° : 2 = 73°$

b. $\widehat{AMB} = 62° : 2 = 31°$

c. $\widehat{AMB} = 198° : 2 = 99°$

20 Manon a tort. Une mesure n'est pas précise. $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc :

$$\widehat{AOB} = 36° \times 2 = 72°$$

21 **a.** $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{BOC} = 50° \times 2 = 100°$

b. c. OBC est un triangle isocèle en O donc ses deux angles à la base ont même mesure :

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180° - 100°}{2} = 40°$$

22 **a.** Les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc. Or si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales. Donc :

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 65°.$$

b. De la même façon, on prouve que :

$$\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 40°.$$

c. $\widehat{BIC} = 180° - (65° + 40°) = 180° - 105° = 75°$

23 **a.** Ce polygone a 5 côtés de même longueur et 5 angles de même mesure.

Donc, c'est un pentagone régulier.

b. Ce triangle isocèle n'a pas tous ses côtés de même longueur.

Donc, ce n'est pas un polygone régulier.

c. Un carré a 4 côtés de même longueur et 4 angles de même mesure.

Donc, c'est un polygone régulier.

d. Ce losange a 4 côtés de même longueur mais ses angles ne sont pas de même mesure.

Donc, ce n'est pas un polygone régulier.

e. Un triangle équilatéral a 3 côtés de même longueur et 3 angles de même mesure.

Donc, c'est un polygone régulier.

f. Ce polygone a 8 côtés de même longueur et 8 angles de même mesure.

Donc, c'est un octogone régulier.

24 **a.** Ce rectangle a 4 angles de même mesure mais ses côtés ne sont pas tous de même longueur.

Donc, ce n'est pas un polygone régulier.

b. Ce polygone a 12 côtés de même longueur mais ses angles ne sont pas tous de même mesure.

Donc, ce n'est pas un polygone régulier.

25 **a.** $360° : 3 = 120°$ **b.** $360° : 4 = 90°$

c. $360° : 5 = 72°$

26 **a.** L'angle rentrant $\widehat{AOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc :

$\widehat{AMC} = 240° : 2 = 120°$. Donc, Léa a raison.

b. On prouve de la même façon que :

$$\widehat{AMB} = 120° : 2 = 60°.$$

Donc [MB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.

27 **a.** $\widehat{FOA} = 360° : 6 = 60°$

b. $\widehat{FCA}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc que $\widehat{FOA}$. Donc $\widehat{FCA} = 60° : 2 = 30°$.

c. Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle donc :

$$\widehat{FAC} = 90°$$

d. $\widehat{CFA} = 180° - (90° + 30°) = 60°$

e. $\widehat{FED}$ est un angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre $\widehat{FOD}$.

Donc $\widehat{FED} = 240° : 2 = 120°$

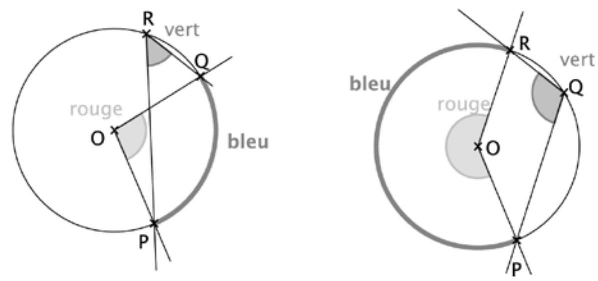
Autres réponses possibles :

d. Le triangle FOA est équilatérale, donc $\widehat{CFA} = 60°$

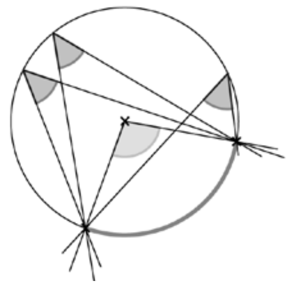
e. $\widehat{FED} = \widehat{FEO} + \widehat{OED}$ donc $\widehat{FED} = 60° + 60° = 120°$

8. Exercices d'application

28 **a.** **b.**



29



30

Angle inscrit	Angle au centre
$\widehat{AKJ}$	$\widehat{JOA}$
$\widehat{JAK}$	$\widehat{JOK}$
$\widehat{JAO}$	$\widehat{JOC}$
$\widehat{KAO}$	$\widehat{COK}$

31 **1. b.** **2. a.** **3. c.**

32 **a.** $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc $\widehat{BAC} = 110° : 2 = 55°$.

b. $\widehat{AOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ABC}$.

On utilise la même propriété que dans le **a.**

Donc $\widehat{AOC} = 74° \times 2 = 148°$.

33 Les quatre angles inscrits (que l'on peut noter $\widehat{BJ_1U}$, $\widehat{BJ_2U}$, $\widehat{BJ_3U}$, $\widehat{BJ_4U}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BU}$.

Or si des angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales.

Donc les quatre joueurs ont le même angle de tir.

34 **a.** ACBD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et qui ont le même longueur donc ACBD est un rectangle.

b. • $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BAD}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{BD}$.

Or si des angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales.

Donc $\widehat{BAD} = 34°$.

• $\widehat{BOD}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BCD}$.

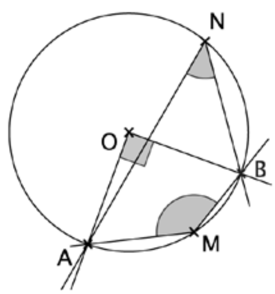
Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{BOD} = 34° \times 2 = 68°$.

• $\widehat{COA}$ et $\widehat{BOD}$ sont opposés par le sommet. Ils sont donc égaux. Donc $\widehat{COA} = 68°$.

• ACBD est un rectangle donc $\widehat{BDA} = 90°$.

35 **a.**



b. • $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ANB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc $\widehat{ANB} = 90° : 2 = 45°$.

• L'angle rentrant $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

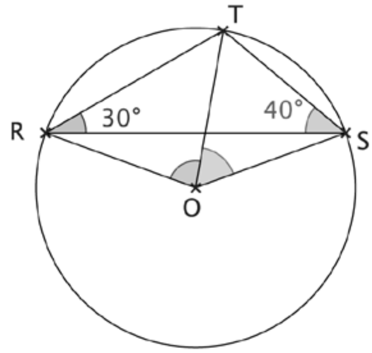
On utilise la même propriété que précédemment.

Donc $\widehat{AMB} = 270° : 2 = 135°$.

c. $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 135° + 45° = 180°$. Donc $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont des angles supplémentaires.

Nina a tort.

36 **a.**



b. Le centre du cercle circonscrit au triangle RST est le point de concours des médiatrices du triangle.

c. • $\widehat{TOR}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{TSR}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{TOR} = 40° \times 2 = 80°$.

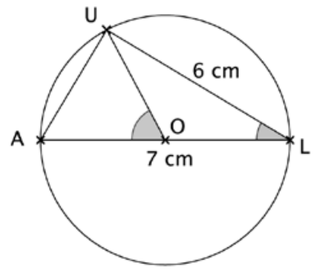
• $\widehat{TOS}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{TRS}$.

Donc, d'après la même propriété :

$$\widehat{TOS} = 30° \times 2 = 60°$$

• $\widehat{ROS} = \widehat{ROT} + \widehat{TOS} = 80° + 60° = 140°$

37 **a.**



b. Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle. Donc ALU est rectangle en U.

c. • Dans le triangle ALU rectangle en U :

$$\cos \widehat{ALU} = \frac{LU}{LA} = \frac{6}{7}.$$

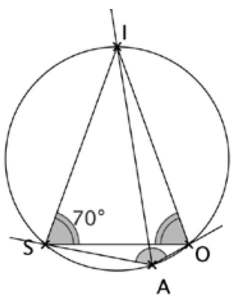
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ALU} \approx 31°$.

• $\widehat{AOU}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ALU}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{AOU} \approx 31° \times 2 \approx 62°$.

38 **a. b.**



c. SOI est isocèle en I donc ses deux angles à la base ont même mesure donc $\widehat{IOS} = \widehat{ISO} = 70°$.

De plus, $\widehat{IAS}$ et $\widehat{IOS}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc.

Or si des angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales.

Donc $\widehat{IAS} = 70°$.

De même, $\widehat{IAO}$ et $\widehat{ISO}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc.

Donc, d'après la même propriété $\widehat{IAO} = 70°$.

Donc [AI) est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{SAO}$. Arthur a raison.

39 Le triangle REF est un triangle isocèle ayant un angle de 60°. Donc REF est un triangle équilatéral.

Donc ED = RE = EF.

On montre de même que les six côtés de l'hexagone sont de même longueur.

De plus, $\widehat{REF} = 60°$. Donc $\widehat{FED} = 180° - 60° = 120°$.

On montre de même que les six angles de l'hexagone ont une mesure égale à 120°.

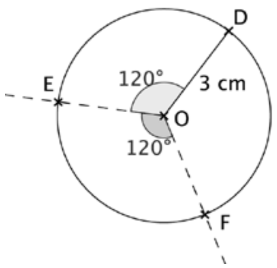
Finalement, ABCDEF est donc un hexagone régulier.

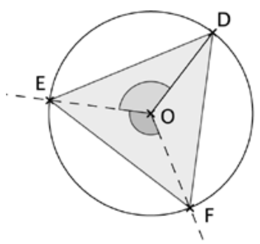
40 DEC est un triangle équilatéral donc $\widehat{DEC} = 60°$.

$$\widehat{ECF} = 60° + 90° + 60° = 210°$$

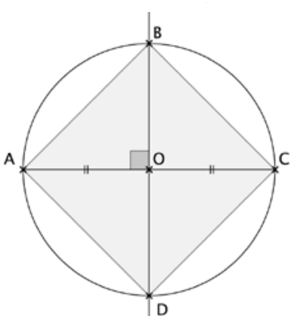
Les angles de cet octogone n'ont pas tous la même mesure. Donc l'octogone AGBFCEDH n'est pas régulier.

41



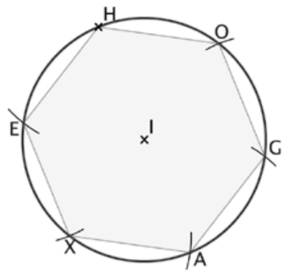


42 **a. b.**



c. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, qui sont perpendiculaires et qui sont de même longueur, alors ce quadrilatère est un carré. Donc ABCD est un carré.

43 **a.**



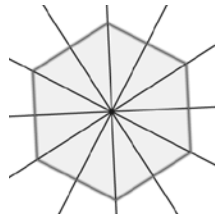
b. HE = HI = IE donc HEI est équilatéral.

De même, on montre que EXI, XAI, AGI, GOI sont équilatéraux. Donc $\widehat{HIO} = 60°$ Et OHI est équilatéral aussi.

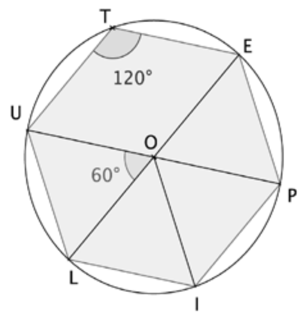
HEXAGO a donc six côtés égaux et six angles égaux (à 120°).

Donc HEXAGO est un hexagone régulier.

c. Un polygone régulier a bien un centre de symétrie. Mais il a six axes de symétrie. Océane a partiellement tort.



44 **a.**



b. $\widehat{UOL} = 360° : 6 = 60°$

c. • *1re méthode :*

$\widehat{UTE}$ est un angle inscrit dans le cercle de centre O. L'angle au centre qui intercepte le même arc est $\widehat{UOE}$ et $\widehat{UOE} = 60° \times 4 = 240°$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{UTE} = 240° : 2 = 120°$.

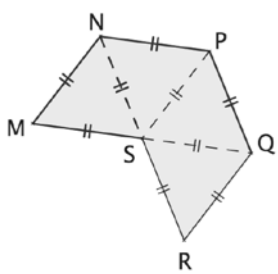
• *2e méthode :*

UTO est un triangle isocèle en O (il est même équilatéral).

Donc $\widehat{UTO} = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Donc $\widehat{UTE} = 2 \times 60° = 120°$

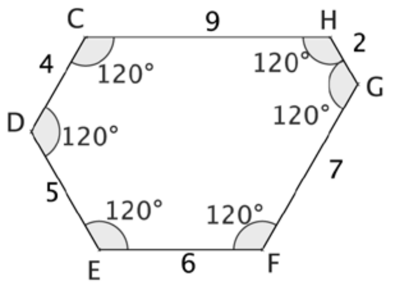
45 **a.**



MNPQRS a ses six côtés de même longueur mais ses angles n'ont pas tous la même mesure.

Il n'est donc pas régulier

b.



CDEFGH a ses six angles de même mesure mais ses côtés ne sont pas tous de même longueur.

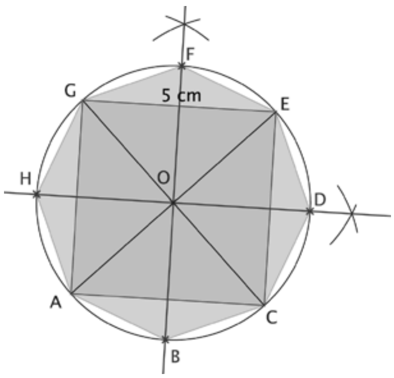
Il n'est donc pas régulier.

46 *Une méthode :*

On construit les points d'intersection du cercle et des bissectrices des angles $\widehat{AOC}$; $\widehat{COE}$; $\widehat{EOG}$; $\widehat{GOA}$.

Une autre méthode :

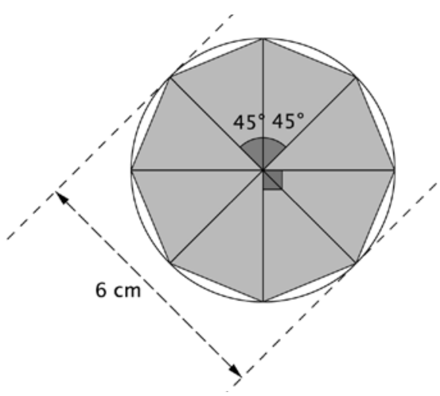
On construit les points d'intersection du cercle et des médiatrices des segments [GE] et [EC].



47 600 m correspondent à 60 000 cm.

60 000 cm × 1/10 000 = 6 cm.

On trace un cercle de diamètre 6 cm et on en trace quatre diamètres faisant entre eux des angles de 45° (360° : 8 = 45°).



48 **a.** Dans l'octogone régulier ABCDEFGH :

$$\widehat{AOB} = 360° : 8 = 45°$$

b. $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AEB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{AEB} = 45° : 2 = 22{,}5°$.

c. $\widehat{AOE} = 45° \times 4 = 180°$. Donc [AE] est un diamètre du cercle.

ABE est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés donc ABE est rectangle en B ;

Donc $\widehat{AEB} = 90°$.

d. Le triangle OAB est isocèle en O. Ses deux angles à la base ont donc même mesure.

$$\widehat{OAB} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$$

e. L'angle rentrant $\widehat{AOG}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AHG}$.

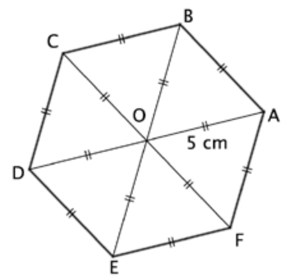
Et $\widehat{AOG} = 6 \times 45° = 270°$

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{AHG} = 270° : 2 = 135°$

Autre démarche : $\widehat{AHG} = 2 \times 67{,}5° = 135°$

49



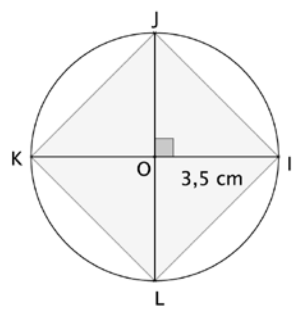
Dans l'hexagone régulier ABCDEF, les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OAF sont équilatéraux.

Donc les six côtés de l'hexagone ont pour longueur OA = 5 cm.

$$6 \times 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}.$$

L'hexagone a pour périmètre 30 cm.

50 **a.**



Un carré a ses diagonales perpendiculaires, se coupant en leur milieu et de même longueur.

b. Le triangle OIJ est rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $IJ^2 = IO^2 + OJ^2$

Donc $IJ^2 = 3{,}5^2 + 3{,}5^2$

Donc $IJ^2 = 24{,}5$

Donc $IJ = \sqrt{24{,}5}$

c. Aire du carré IJKL $= IJ^2 = 24{,}5$

L'aire du carré IJKL est de 24,5 cm^2

51 Le triangle OAB est isocèle en O. [OI) en est à la fois une médiatrice et une bissectrice.

Dans le triangle OIA, rectangle en I, $\widehat{AOI} = 22{,}5°$ et

$\sin \widehat{AOI} = \dfrac{IA}{OA}$

$\sin 22{,}5° = \dfrac{IA}{3}$

$IA = 3 \times \sin 22{,}5°$. Donc $AB = 2 \times 3 \sin 25° = 6 \times \sin 25°$.

Donc $AB \approx 2{,}3$ cm

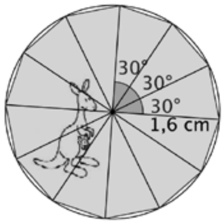
52 **a.** Un **hexa**gone

b. Un vers **octo**syllabe ou **octo**syllabique

c. Un **penta**thlon

d. Un **déca**litre

53 Cette pièce australienne de 50 cents est un dodécagone régulier (12 côtés) inscrit dans un cercle de diamètre 32 mm.

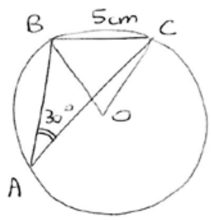


À l'échelle 2, traçons un cercle de diamètre 64 mm.

Si A et B sont deux sommets consécutifs du dodécagone de centre O, $\widehat{AOB} = 360° : 12 = 30°$.

Traçons dans ce cercle 6 diamètres faisant entre eux un angle de 30°.

54 Observons une figure à main levée.



O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

$\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

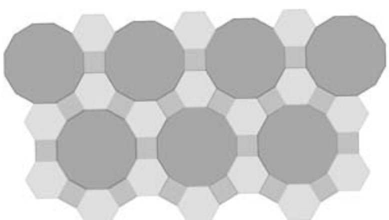
Donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC} = 2 \times 30° = 60°$.

Donc BOC, qui est isocèle en O a de plus un angle $\widehat{BOC}$ de 60°. C'est donc un triangle équilatéral donc :

$OC = OB = 5$ cm.

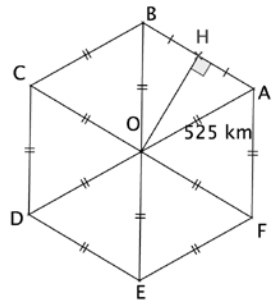
Estelle a raison : Le rayon du cercle circonscrit est de 5 cm.

55



56 **a.** La France continentale peut être assimilée à l'hexagone régulier ABCDEF suivant.

Dans le triangle équilatéral OAB, on a $OA = AB = 525$ km.



On considère [OH] la hauteur issue de O, elle est aussi médiatrice et $AH = 525 \text{ km} : 2 = 262{,}5$ km.

OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OA^2 = OH^2 + HA^2$

$525^2 = OH^2 + 262{,}5^2$

$OH^2 = 525^2 - 262{,}5^2 = 206\,718{,}75$

$OH = \sqrt{206\,718{,}75} \approx 454{,}7$

Aire du triangle OAB : $\dfrac{AB \times OH}{2} \approx \dfrac{525 \times 454{,}7}{2}$

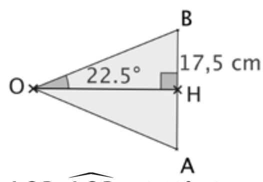
$\approx 119\,349$

Aire de l'hexagone ABCDEF $\approx 6 \times 119\,349 \approx 716\,095$.

L'aire de l'hexagone dans lequel la France est inscrite est d'environ 716 095 km^2.

b. La superficie effective de la France continentale est de 552 000 km^2. *(source :* ***http://www. insee. fr****)*

57 La base du composteur est un octogone régulier, composé de huit triangles isocèles identiques au triangle OAB ci-dessous.



Dans le triangle AOB, $\widehat{AOB} = 360° : 8 = 45°$.

On considère la hauteur [OH], elle est aussi médiatrice et bissectrice.

Donc $AH = 17{,}5$ cm et $\widehat{AOH} = 22{,}5°$.

Dans le triangle AOH, rectangle en H, on a :

$\tan \widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OH}$

$\tan 22{,}5° = \dfrac{17{,}5}{OH}$

$OH = \dfrac{17{,}5}{\tan 22{,}5°} \approx 42{,}2$. Donc $OH \approx 42{,}2$ cm.

Aire du triangle OAB $\approx \dfrac{35 \times 42{,}2}{2} \approx 739$

Aire de l'octogone $\approx 739 \times 8 \approx 5\,915$

L'aire de base du prisme droit est d'environ 5 915 cm^2.

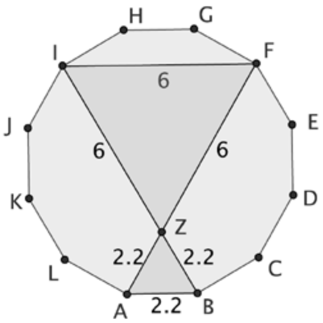
Volume du composteur $\approx 5\,915 \times 70 \approx 414\,038$ cm^3.

Le volume du composteur est d'environ 414 038 cm^3.

Sa capacité est donc d'environ 414 litres.

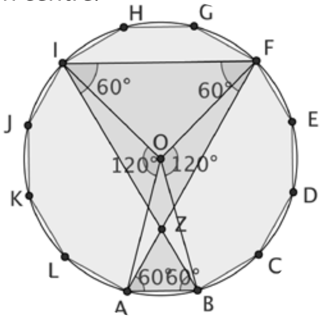
Le fournisseur donne un bon ordre de grandeur en annonçant une capacité de 400 litres.

58 **a. b. et c.**



c. Il semble que les triangles IFZ et ABZ soient équilatéraux.

d. On trace le cercle circonscrit au dodécagone et on nomme O son centre.



• $\widehat{FOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{IFZ}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{FIZ} = \frac{1}{2} \times \widehat{FOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{360°}{12} = 60°$.

• De même, $\widehat{IOA}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{IFZ}$.

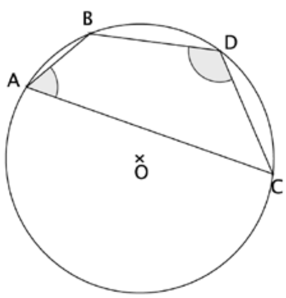
Donc $\widehat{IFZ} = \frac{1}{2} \times \widehat{IOA} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{360°}{12} = 60°$.

• IFZ a ses deux angles $\widehat{FIZ}$ et $\widehat{IFZ}$ égaux à 60°, il est donc équilatéral.

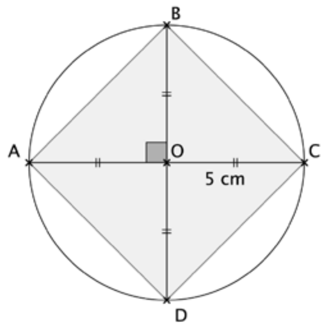
On prouve de la même façon que ABZ a ses deux angles $\widehat{ZAB}$ et $\widehat{ZBA}$ égaux à 60° et qu'il est donc équilatéral aussi.

9. Vrai Faux

59 **Faux .** Exemple : Si A et D ne sont pas sur le même arc $\overset{\frown}{BC}$, alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ n'interceptent pas le même arc et ne sont pas égaux.



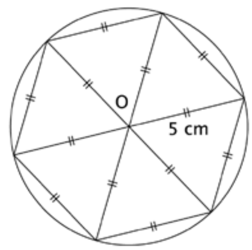
60 **Faux .** Dans un carré, les diagonales sont perpendiculaires, se coupent el leur milieu et sont de même longueur.



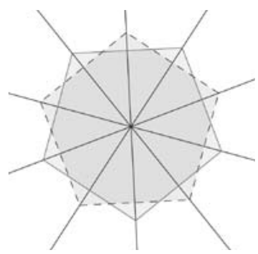
Donc le triangle OBC est rectangle et isocèle en O.

Donc son hypoténuse [BC] a une longueur supérieure à 5 cm.

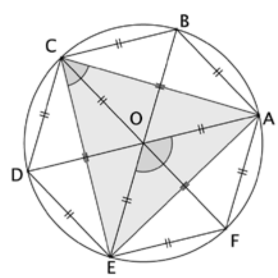
61 **Vrai.** Un hexagone régulier est formé de six triangles équilatéraux.



62 **Faux.** Un pentagone régulier a bien 5 axes de symétrie (les médiatrices de ses côtés) mais il n'a pas de centre de symétrie.



63 **Vrai.** Appelons O le centre du cercle circonscrit à l'hexagone régulier ABCDEF.



• $\widehat{EOA}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ECA}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{ECA} = \widehat{EOA} : 2 = 120° : 2 = 60°$

• On prouve de même que $\widehat{CAE} = \widehat{COE} : 2 = 120° : 2 = 60°$
Le triangle ACE a deux angles de mesure 60°, donc ACE est équilatéral.

10. Calcul mental et réfléchi

64 • $\widehat{EOL} = 180° - 42° = 138°$

• $\widehat{OEL} = \dfrac{180° - 138°}{2} = 21°$

• $\widehat{EMC} = 42° : 2 = 21°$

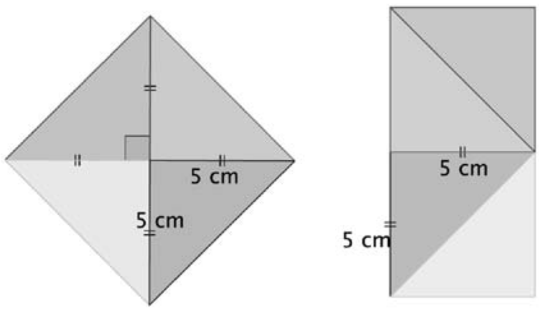
65

n	4	**10**	6	**9**	5
$\widehat{AOB}$	**90°**	36°	**60°**	40°	**72°**

66 • $\widehat{AOB} = 72°$ • $\widehat{ACB} = 36°$

• $\widehat{EDC} = 108°$ • $\widehat{OEA} = 54°$

67



$$\mathscr{A} = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50.$$

L'aire de ce carré est de 50 cm^2.

11. Présenter, argumenter, communiquer

68 Dans le pentagone régulier PENTA, le triangle ONT est isocèle en O, donc la médiane [OH] est aussi hauteur et bissectrice. Donc le triangle NHO est rectangle en H et on a : $\widehat{NOH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{360°}{5} = 36°$.

Dans ce triangle rectangle, on a : $\sin \widehat{NOH} = \dfrac{NH}{NO}$.

Donc $\sin 36° = \dfrac{NH}{4}$.

Donc $NH = 4 \times \sin 36°$. Donc $NT = 8 \times \sin 36°$.

Donc $p = 5 \times 8 \times \sin 36° = 40 \times \sin 36°$.

La valeur exacte en cm du périmètre du pentagone régulier est de $40 \sin 36°$.

69 • $\widehat{IOJ}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{IKJ}$.

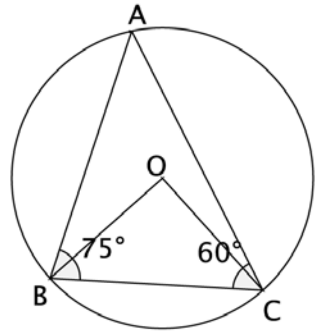
Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{IKJ} = \widehat{IOJ} : 2 = 180° : 2 = 90°$.

Donc Marie a raison et elle peut ainsi prouver que l'angle $\widehat{IKJ}$ est un angle droit.

• On peut également utiliser ici la propriété suivante : Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle donc Paul a raison aussi et il peut ainsi prouver que l'angle $\widehat{IKJ}$ est un angle droit.

70 Construisons le triangle ABC et le centre O de son cercle circonscrit.



Dans le triangle ABC, $\widehat{CAB} = 180° - (60° + 75°) = 45°$.

• $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{BOC} = \widehat{BAC} \times 2 = 45° \times 2 = 90°$.

De plus, [OB] et [OC] sont deux rayons du cercle circonscrit.

Donc BOC est rectangle et isocèle en O.

71 Dans le triangle RAP, $\widehat{RPA} = \widehat{RPJ} + \widehat{JPA}$.

• $\widehat{ROJ}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{RPJ}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc $\widehat{RPJ} = \dfrac{1}{2}\widehat{ROJ} = \dfrac{1}{2} \times (180° - 120°) = 30°$.

• Les angles inscrits $\widehat{JPA}$ et $\widehat{JNA}$ interceptent le même arc. Or si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales. Donc $\widehat{JPA} = \widehat{JNA} = 29°$.

• Finalement $\widehat{RPA} = 30° + 29° = 59°$.

Donc le triangle RAP n'est pas équilatéral donc Dylan se trompe.

72 **a. Étape 1 :**

1. Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
2. Tracer un diamètre [AA′] de $\mathscr{C}$.
3. Dans $\mathscr{C}$, tracer un rayon [OB′] perpendiculaire à [AA′].
4. Placer K milieu du segment [OA′] et tracer [KB′].

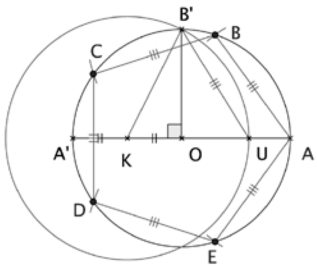
Étape 2 :

1. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre K et de rayon [KB′].
2. Le point U est le point d'intersection entre $\mathscr{C}'$ et [AA′], placer U.
3. Tracer le segment [B′U].

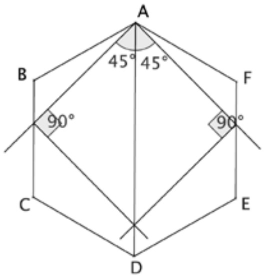
Étape 3 :

1. Sur le cercle $\mathscr{C}$, placer les points B, C, D et E tels que AB = BC = CD = DE = UB′
2. Tracer le pentagone ABCDE.

b.



73 **1. a. b.**



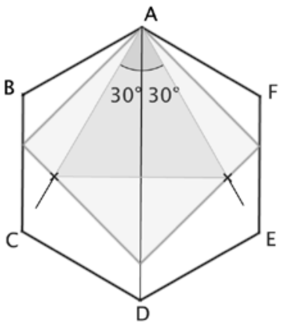
2. b. • Dans l'hexagone régulier, on trace la diagonale [AD].

• On trace deux angles de 45° de part et d'autre de cette diagonale.

• On place alors les sommets du carré sur les côtés [BC] et [FE].

• On termine le carré en traçant deux angles droits en chacun de ces sommets.

1. c.



2. c. • Dans l'hexagone régulier, on trace la diagonale [AD].

• On trace deux angles de 30° de part et d'autre de cette diagonale.

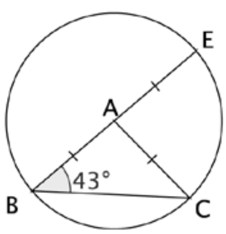
• On place alors les sommets du triangle équilatéral sur les côtés du carré.

12. QCM pour s'évaluer

74 **b.**	75 **c.**	76 **c.**	77 **a.**	78 **a.**
79 **a.**	80 **a. b. c.**	81 **a. b.**	82 **a. b.**	

13. Objectif Brevet

83 **1. a.**



b. Si dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté correspondant, alors ce triangle est rectangle. Donc BCE est rectangle en C.

c. Considérons le cercle de centre A passant par B, il passe aussi par C et E.

Dans ce cercle, $\widehat{EAC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{EBC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{EAC} = 2 \times \widehat{EBC} = 2 \times 43° = 86°$.

2. On considère encore le cercle de centre A passant par B.

Dans ce cercle, $\widehat{EAC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{EBC}$.

Donc $\widehat{EAC} = 2 \times \widehat{EBC} = 2 \times \widehat{ABC}$. Jean a raison.

84 **1.** On sait que $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AEC}$. Ils ont donc la même mesure.

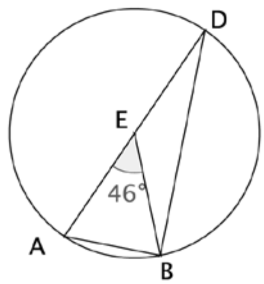
Donc $\widehat{ABC} = \widehat{AEC} = 60°$.

Dans un triangle la somme des mesures des trois angles vaut 180° donc :

$$\widehat{BAC} = 180° - (60° + 20°) = 100°$$

Donc BAC n'est pas rectangle en A.

85 **a.**



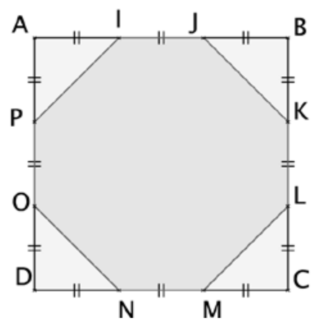
b. [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$. Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle donc ABD est rectangle en B.

c. $\widehat{AEB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ADB}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Donc $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} : 2 = 46° : 2 = 23°$.

86 **1.**



2. a. Le triangle JBK est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore,

on a : $JK^2 = JB^2 + BK^2$

$JK^2 = 3^2 + 3^2$

$JK^2 = 18$

$JK = \sqrt{18}$

b. Prenons deux côtés consécutifs de l'octogone : [IJ] et [JK]. On a IJ = 3 cm et $JK = \sqrt{18}$ cm

Toutes les longueurs de l'octogone ne sont pas égales. Donc IJKLMNOP n'est pas un octogone régulier.

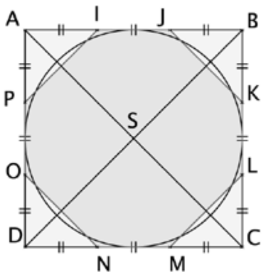
c. Aire de l'octogone

= Aire du carré ABCD – 4 × Aire de JKB

$= 9^2 - 4 \times \frac{3 \times 3}{2} = 81 - 18 = 63$

L'aire de l'octogone IJKLMNOP est de 63 cm^2.

3. a.



b. Aire du disque : $\pi \times 4{,}5^2 \approx 63{,}6$.

L'aire du disque est d'environ 63,6 cm^2, il a donc une aire supérieure à l'aire de l'octogone.

87 **1. a.** OA = OB donc le triangle OAB est isocèle en O. De plus, dans l'hexagone régulier ABCDEF, $\widehat{AOB} = 360° : 6 = 60°$.

Donc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Donc le triangle OAB est équilatéral.

b. $6 \times 10 = 60$

Le périmètre de la scène est donc de 60 mètres.

2. OCB est équilatéral aussi, donc :

OC = CB = OB = OA = AB.

OABC a ses quatre côtés égaux, c'est donc un losange.

3. a. [FC] est un diamètre du cercle . Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle donc FAC est rectangle en A.

b. FAC est un triangle rectangle donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$FC^2 = FA^2 + AC^2$

$20^2 = 10^2 + AC^2$

$AC^2 = 20^2 - 10^2 = 300$

$AC = \sqrt{300}$ (valeur exacte)

$AC \approx 17{,}32$ m (valeur arrondie au centième)

4. L'aire d'un losange est :

$$\frac{\text{Grande diagonale} \times \text{petite diagonale}}{2}$$

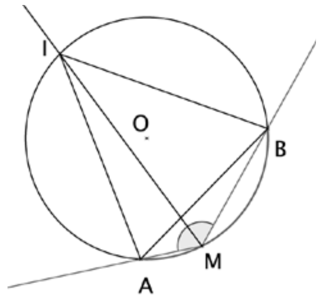
Donc aire de OABC $= \frac{\sqrt{300} \times 10}{2} = 5\sqrt{300}$.

Donc aire de ABCDEF $= 15\sqrt{300}$ (valeur exacte).

Donc l'aire de la scène est d'environ 259,81 m^2.

14. Exercices d'approfondissement

88 **a.**



b. Il semble qu'en bougeant le point M le point I ne bouge pas. Il semble aussi que (OI) soit la médiatrice de [AB].

c. Considérons le triangle IAB.

Les angles inscrits $\widehat{IAB}$ et $\widehat{IMB}$ interceptent le même arc. Or si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors leurs mesures sont égales. Donc $\widehat{IAB} = \widehat{IMB}$.

De la même façon on prouve que $\widehat{IBA} = \widehat{IMA}$.

Or, [MI) est la bissectrice de $\widehat{AMB}$ donc $\widehat{IMA} = \widehat{IMB}$.

Donc $\widehat{IAB} = \widehat{IBA}$. Donc le triangle AIB est isocèle en I.

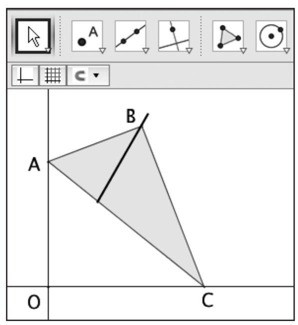
Donc IA = IB.

Donc I appartient à la médiatrice de [AB].

De plus, O appartient aussi à la médiatrice de [AB].

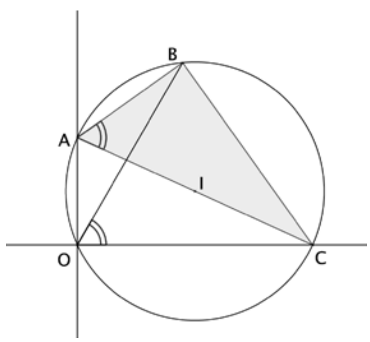
Donc la médiatrice de [AB] est (OI) et le point I est donc fixe.

89 Avec un logiciel de géométrie, on construit la figure et l'on fait bouger le point A .



En utilisant la fonction « Trace activée » on observe que le point B semble se déplacer sur un segment de la droite (OB).

Démonstration :



On considère le cercle circonscrit au triangle OAC rectangle en O. Ce cercle a pour centre le point I milieu de [AC] et pour rayon IA. Le triangle ABC, rectangle en B a pour cercle circonscrit le même cercle de centre I et de rayon IA.

Dans ce cercle, les angles inscrits $\widehat{COB}$ et $\widehat{CAB}$ interceptent le même arc. Donc $\widehat{COB} = \widehat{CAB}$ (angle de mesure fixe).

90 **1. a.** On considère le triangle OAB, isocèle en O et [OH] sa hauteur issue de O. Dans l'icosagone régulier $\widehat{AOB} = 360° : 20 = 18°$.

Comme OAB est isocèle en O, [OH] est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$, donc $\widehat{AOH} = 18° : 2 = 9°$.

Dans le triangle AOH, rectangle en H, on a :

$$\sin \widehat{AOH} = \frac{AH}{OA}$$

Donc $\sin 9° = \dfrac{AH}{28,5}$.

Donc $AH = 28,5 \times \sin 9°$ cm

Comme OAB est isocèle en O, [OH] est aussi la médiane issue de O, donc AB = 2AH.

Donc $AB = 57 \sin 9° \approx 8,9$ cm.

La largeur d'une bande de marbre noir est donc d'environ 8,9 cm.

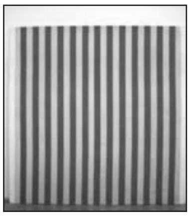
b. Volume de dix bandes de marbre noir :

$$10 \times 61 \times 2 \times 57 \sin 9° \approx 69\,540 \sin 9° \approx 10\,878$$

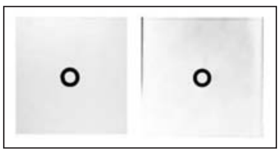
Le volume de marbre noir présent sur cette colonne de Buren est d'environ 10 878 cm^3.

2. BMTP sont les initiales de quatre artistes : Buren, Mosset, Parmentier et Toroni qui ont formé un groupe en 1966 et 1967.

• Daniel Buren raye verticalement ses toiles de façon uniforme et répétitive.

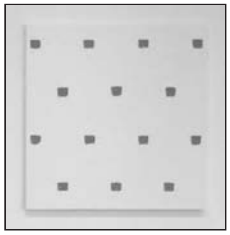


• Olivier Mosset répète des cercles noirs identiques sur des fonds blancs.



• Michel Parmentier peint à la bombe des bandes horizontales de couleur s'alternant avec des bandes blanches

• Niele Toroni utilise l'empreinte d'un pinceau comme unique motif sur la toile cirée à intervalle régulier



Source Wikipedia

91 Appelons ABCDEFGH l'octogone régulier de base de la tour des vents. $\widehat{AOB} = 360° : 8 = 45°$.

On considère le triangle OAB, isocèle en O et [OH] sa hauteur issue de O.

Comme OAB est isocèle en O, [OH] est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$, donc $\widehat{AOH} = 45° : 2 = 22,5°$.

Dans le triangle AOH, rectangle en H, on a :

$$\sin \widehat{AOH} = \frac{AH}{OA}$$

Donc $\sin 22,5° = \dfrac{AH}{4}$.

Donc $AH = 4 \sin 22,5°$ m.

Comme OAB est isocèle en O, [OH] est aussi la médiane issue de O, donc AB = 2AH.

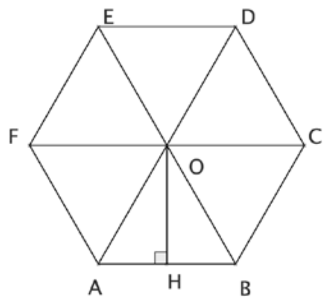
Donc $AB = 8 \sin 22,5°$.

Périmètre : $8 \times \text{côté} = 64 \sin 22,5 \approx 24,5$.

Le périmètre de la Tour des Vents est d'environ 24,5 mètres.

92 **a. Aire d'un hexagone :**

• Appelons ABCDEF un hexagone, de centre O. Dans le triangle OAB, isocèle en O, on note (OH) la hauteur (et médiatrice et bissectrice) issue de O.



$\widehat{AOH} = 30°$. Dans le triangle AOH rectangle en H, $\cos \widehat{AOH} = \dfrac{OH}{OA}$. Donc $\cos 30° = \dfrac{OH}{4,6}$.

Donc $OH = 4,6 \cos 30°$.

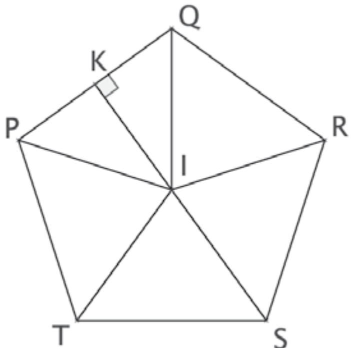
$$\bullet\ 6 \times \frac{AB \times OH}{2} = 6 \times \frac{4,6 \times 4,6 \cos 30°}{2}$$

$$= 63,48 \cos 30° \approx 54,98.$$

L'aire d'un hexagone est d'environ 54,98 cm^2.

Aire d'un pentagone :

• Appelons PQRST un pentagone de centre I. Dans le triangle IPQ, isocèle en I, on note (OK) la hauteur (et médiatrice et bissectrice) issue de I.

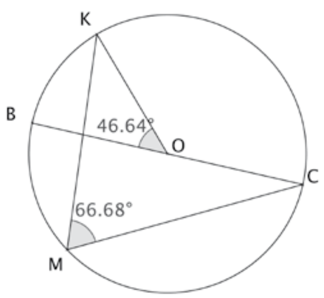


$\widehat{KIQ} = 72° : 2 = 36°$. KQ = 4,6 cm : 2=2,3 cm.
Dans le triangle KIQ rectangle en K, $\tan \widehat{IKQ} = \dfrac{KQ}{IK}$.
Donc $\tan 36° = \dfrac{2,3}{IK}$.
Donc $IK = \dfrac{2,3}{\tan 36°}$.
- $5 \times \dfrac{PQ \times KI}{2} = 5 \times \dfrac{4,6 \times 2,3}{2 \times \tan 36°} \approx 36,41$

L'aire d'un hexagone est d'environ 36,41 cm².
Aire de 20 hexagones et de 12 pentagones :
$$20 \times 54,98 + 12 \times 36,41 \approx 1\,536$$
L'aire de cet assemblage est d'environ 1 536 cm².
b. • Notons R le rayon de cette sphère.
$4\pi R^2 \approx 1\,536$
Donc $R^2 \approx \dfrac{1536}{4\pi} \approx 122,26$
Donc $R \approx \sqrt{122,26} \approx 11,1$
- Circonférence : $2\pi R \approx 2\pi \times 11,1 \approx 69,5$

La circonférence de ce ballon est d'environ 69,5 cm, il est donc reconnu par la FIFA.

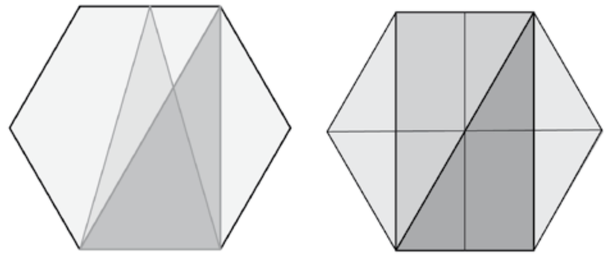
93 **a. b. c.**



	A	B	C
1	46.64°	66.68°	90°
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

On constate que, quelque soit la position du point K sur le demi-cercle, la somme $\widehat{BOK} : 2 + \widehat{KMC}$ semble valoir 90°.
d. $\widehat{BOK}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BMK}$. Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Donc $\widehat{BMK} = \widehat{BOK} : 2$.
Donc $\widehat{BOK} : 2 + \widehat{KMC} = \widehat{BMK} + \widehat{KMC} = \widehat{BMC}$.
Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle donc BMC est rectangle en C et $\widehat{BMC} = 90°$.
Finalement on a donc $\widehat{BOK} : 2 + \widehat{KMC} = 90°$.

94 **Un défi**
À l'intérieur de l'hexagone, les deux triangles colorés ci-dessous ont la même aire. (fig. ❶)



❶ ❷

Et en observant le découpage ❷, on observe que l'aire du triangle vert vaut $\dfrac{1}{3}$ de l'aire de l'hexagone.

15. Tâche complexe : Préparer un spectacle

95 1. Des aides possibles

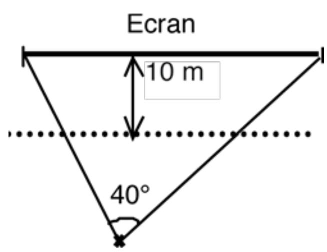
Aide n° 1 : Imaginer un spectateur assis sur son siège, devant l'écran. Peut-on réaliser un schéma traduisant cette situation ?

Aide n° 2 : Réaliser une figure à l'échelle 1/500 pour indiquer une position possible d'un siège devant l'écran.

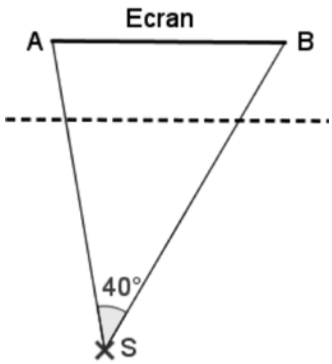
Aide n° 3 : Peut-on trouver plusieurs positions possibles pour les sièges ?

2. Quelques commentaires

- La situation est aisée à comprendre, il y a peu d'informations à prendre en compte : la consigne (faire un plan à l'échelle 1/500), la longueur de l'écran (30 m) et deux contraintes (voir l'écran sous un angle de 40° et être à plus de 10 m de l'écran). Néanmoins elle risque de ne pas être résolue aisément.
- On pourra dans un premier temps laisser les élèves réfléchir individuellement à la situation-problème.
- On peut penser que les élèves commenceront par faire un schéma traduisant la situation.



Comment réaliser une telle figure ?
Si l'on peut penser que le tracé à l'échelle 1/500 de l'écran et de la parallèle à cet écran située à 10 m ne pose pas de réel problème aux élèves, il en va tout autrement pour placer un point S tel que l'angle $\widehat{ASB}$ mesure 40°.



Les élèves effectuant une recherche par tâtonnement, avec rapporteur et règle, vont sans doute rapidement en percevoir les limites.

Il est possible que certains élèves se souviennent avoir utilisé des gabarits d'angles lorsqu'ils étaient plus jeunes. Ce type de démarche pourra être valorisé !

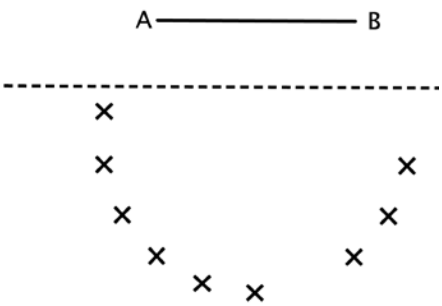
Une autre démarche consiste à s'intéresser aux angles $\widehat{ABS}$ et $\widehat{BAS}$ du triangle SAB.

• Après avoir laissé du temps aux élèves pour cette appropriation de la situation, on pourra proposer un moment de synthèse collectif, où on recueillera les premières idées. On pourra aussi y faire un point sur la longueur de l'écran sur le plan à l'échelle 1/500 pour les élèves en difficulté sur ce sujet, afin que cela ne vienne pas perturber la recherche future.

Les élèves pourront ensuite travailler par groupes, pour échanger leurs idées, remarques ou questions et concevoir une démarche de résolution de la situation-problème.

• Une clé de cette tâche complexe est de penser à envisager plusieurs positions possibles pour le spectateur et d'observer la disposition de ces différentes positions. Il se passera sans doute du temps avant que des élèves ne conjecturent que les points trouvés appartiennent à un cercle.

Voici par exemple ce qui peut être obtenu avec une dizaine de positions possibles :

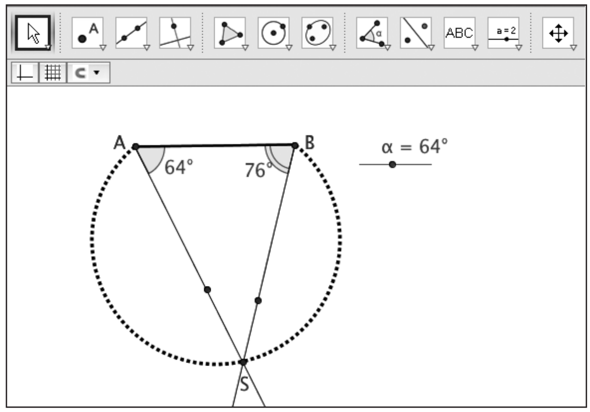


• L'utilisation d'un logiciel de géométrie peut s'avérer intéressante.

On crée un segment [AB], puis un curseur (angle α) dans l'intervalle 0 – 140 (incrément 1).

On trace un angle de mesure α de sommet A, puis un angle de mesure 140° - α de sommet B. Le point S est le point d'intersection des deux demi-droites.

En choisissant « Trace activée » du point S et en faisant varier le curseur, on peut observer et conjecturer que les sièges semblent être situés sur un arc de cercle.



• La validation de cette conjecture est liée à la propriété des angles inscrits, toutefois la présence d'une même corde et non d'un même arc peut troubler certains élèves.

• À ce stade de la recherche, il reste encore à tracer le cercle et donc à trouver la position de son centre. Là aussi, les élèves auront à concevoir un programme de construction s'ils réalisent la figure avec les instruments de géométrie.

Pour des raisons de symétrie, certains élèves penseront sans doute à tracer la médiatrice du segment [AB].

Certains élèves chercheront à tracer le cercle circonscrit à un de leurs triangles déjà tracés. On pourra éventuellement envisager des cas particuliers (cas d'un triangle ABS rectangle en A ou en B, cas d'un triangle ABS isocèle en S).

Remarque : si des élèves réalisent la figure avec un logiciel de géométrie, ils peuvent tracer le cercle passant par trois points non alignés sans déterminer son centre.

• A l'issue de la recherche, il pourra être intéressant de demander aux élèves d'exposer leur démarche. Un travail écrit individuel pourra être ensuite demandé, avec calculs et justifications.

• Il n'est pas impossible que certains élèves fassent le lien avec l'exercice 33.

3. Éléments de réponse

• $30 \text{ m} \times \dfrac{1}{500} = 0{,}06 \text{ m}$ soit 6 cm

$10 \text{ m} \times \dfrac{1}{500} = 0{,}02 \text{ m}$ soit 2 cm

Sur le plan, la longueur de l'écran est 6 cm.

Aucun siège ne peut être placé entre l'écran et la parallèle à l'écran située à une distance de 2 cm.

• Recherche de positions possibles pour les sièges :

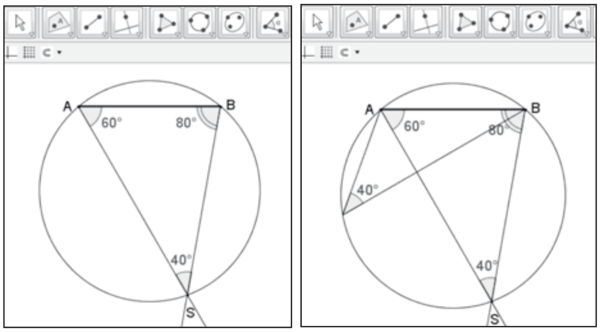
Dans le triangle ABS, la somme des angles est égale à 180°. Or l'angle $\widehat{ASB}$ mesure 40°.

Donc $\widehat{SAB} + \widehat{SBA} = 180° - 40° = 140°$.

On choisit une mesure pour l'angle $\widehat{SAB}$ (par exemple 60°), on en déduit la mesure de l'angle $\widehat{SBA}$ (80° dans ce cas), ce qui permet de construire un point S.

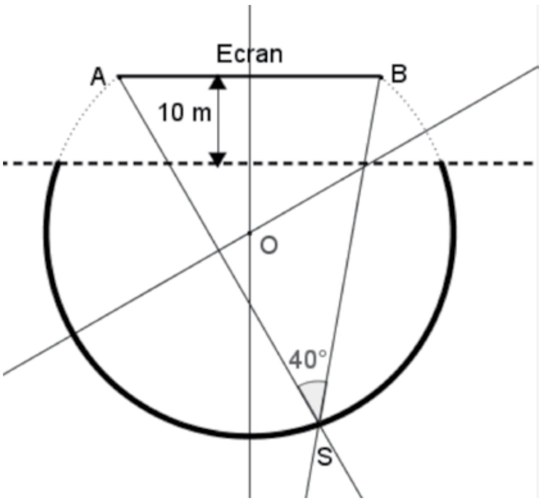
• Conjecture : il semble que les positions possibles des points d'où l'on voit l'écran [AB] sous un angle de 40° sont des points d'un arc de cercle d'extrémités A et B (si on ne tient pas compte de la contrainte « être à plus de 10 m de l'écran »).

Par exemple, avec un logiciel de géométrie, obtention d'un triangle ABS et de son cercle circonscrit, puis, après avoir placé un point sur le cercle circonscrit au triangle SAB et tracé l'angle inscrit :



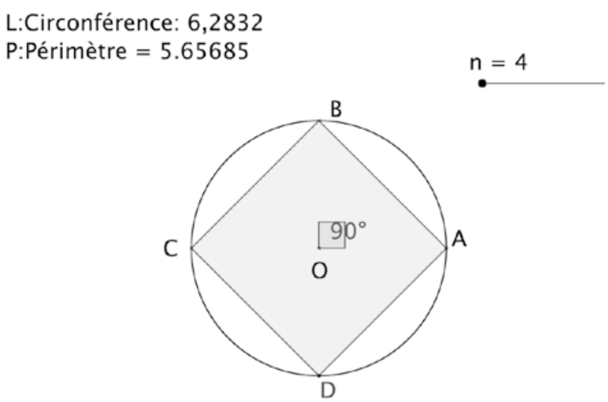
• Validation de la conjecture : Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

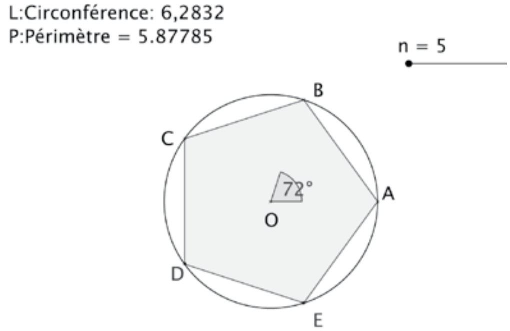
• Conclusion : les sièges pourront être placés sur l'arc de cercle en trait épais ci-contre.

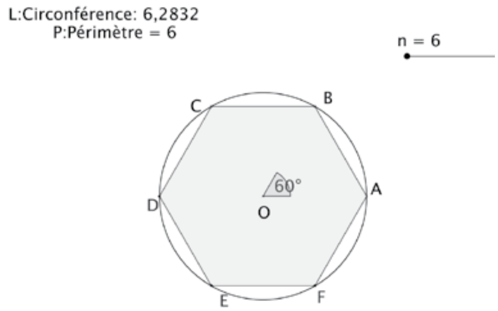


16. En route vers la Seconde

96 **1.**







L – P $<$ 0,001 si P $>$ 6,282

En déplaçant le curseur, on observe que n doit valoir au minimum 94.

2. Dans un polygone régulier à *n* côtés, l'angle au centre mesure 360°/*n* . A et B étant deux sommets consécutifs du polygone régulier et A son centre, le triangle AOB est isocèle en O. On considère (OH) la hauteur issue de O dans ce triangle (c'est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB]).

Dans AOH rectangle en H, on a $\sin \widehat{AOB} = \dfrac{AH}{OA}$.

Donc $\sin \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{AH}{1}$.

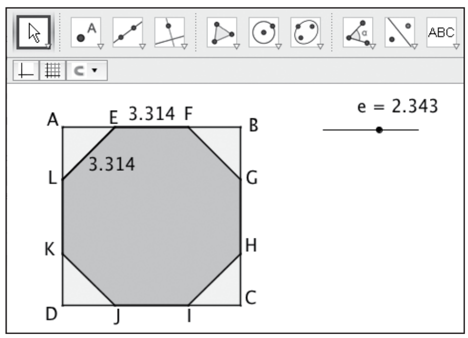
Donc $AH = \sin \dfrac{360°}{2n} = \sin \dfrac{180°}{n}$.

Donc $AB = 2 \times \sin \dfrac{180°}{n}$.

Donc Périmètre $= 2n \sin \dfrac{180°}{n}$.

97 **1.** Sur GeoGebra : construire un carré de côté 8 cm ; construire un curseur variant de 0 à 4 avec un incrément de 0,001 (par exemple) ; construire quatre cercles de centres A, B, C et D et leurs points d'intersection I, H, G, F, E, L, K, et J avec les côtés du carré.

Faire afficher les longueurs EL et EF.



En faisant varier le curseur, on observe que les longueurs EL et EF semblent environ égales pour $x = 2{,}343$.

2. Calculons la mesure de $\widehat{\text{KLE}}$ par exemple.

Dans le triangle ALE, rectangle et isocèle en A, les deux angles à la base ont une mesure de 45°.

Donc $\widehat{\text{KLE}} = 180° - 45° = 135°$.

En faisant le même calcul pour tous les angles de l'octogone, on prouve qu'ils mesurent tous 135°.

3. a. OM = 8 cm : 2 = 4 cm

$\widehat{\text{EOM}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{360°}{8} = 22{,}5°$

b. Dans le triangle EOF isocèle en O, la médiane (OM) est aussi hauteur.

Dans le triangle OME, rectangle en M, on a :

$\tan \widehat{\text{EOM}} = \dfrac{\text{EM}}{\text{MO}}$ donc $\tan 22{,}5° = \dfrac{\text{EM}}{4}$

donc $\text{EM} = 4 \tan 22{,}5°$. Donc $\text{EF} = 8 \tan 22{,}5°$.

Donc $x = \dfrac{8 - 8\tan 22{,}5°}{2} \approx 2{,}3$

Pour que EFGHIJKL soit un octogone régulier il faut que x vaille environ 2,3 cm.

4. a. Dans le triangle ALE, rectangle isocèle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$\text{LE}^2 = \text{LA}^2 + \text{AE}^2$

Donc $\text{LE}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

Donc $\text{LE} = \sqrt{2x^2}$ donc, comme x est positif

$\text{LE} = x\sqrt{2}$.

b. Si EL = EF alors $x\sqrt{2} = 8 - 2x$.

c. Donc $2x + x\sqrt{2} = 8$.

Donc $x(2 + \sqrt{2}) = 8$.

Donc $x = \dfrac{8}{2 + \sqrt{2}} \approx 2{,}3$.

Pour que EFGHIJKL soit un octogone régulier il faut que x vaille environ 2,3 cm.