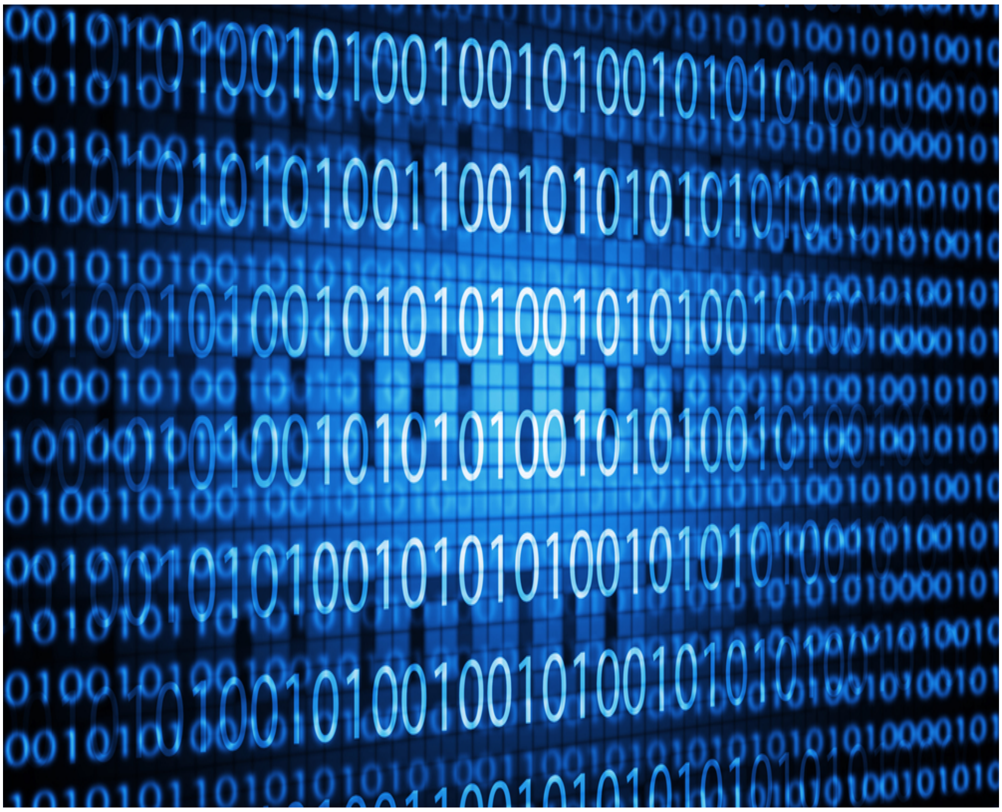
شهادة التقني العالي

BTS

BTS LAÂYOUNE :SRI,DSI :Première année

Fonctions numériques d'une variable réelle



Prof : El hassan BOUKACHE

2016/2017

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions numériques d'une variable réelle

1.1 Ensemble des nombres réels

1.1.1 Ordre et opérations algèbriques

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation $\ll$ inférieur ou égal $\gg$ est un ensemble totalement ordonné. De plus, on a la propriété suivante : si x, y et z sont trois nombres réels, alors :

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } z > 0 \text{ alors :} & x \leq y \Rightarrow xz \leq yz \\ \text{Si } z < 0 \text{ alors :} & x \leq y \Rightarrow xz \geq yz \end{array}$$

1.1.2 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint les deux symboles $+\infty$ et $-\infty$. Soit :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'addition, la multiplication et la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ de la façons suivante :

- Pour $l \in \mathbb{R}$ on pose :

$$l + (+\infty) = +\infty \ ; \quad l + (-\infty) = -\infty \ ; \quad -(+\infty) = -\infty \ ; \quad -(-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \ ; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty \ ; \quad -\infty < l < +\infty.$$

- Pour $l \in \mathbb{R}^*$ on pose :

$$l \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad l > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad l < 0 \end{cases} \ ; \quad l \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad l > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad l < 0 \end{cases} \ ;$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \ ; \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty.$$

Malgré tout, certaines expressions ne sont pas définies :

$$0 \times (+\infty); 0 \times (-\infty), (+\infty) + (-\infty)$$

Ces expressions sont appelées formes indéterminées.

1.1.3 Intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$

Définitions

Définition 1.1.1 *Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.*
On appelle intervalle ouvert d'extrémités a et b le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $]a; b[$ défini par :

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x < b\}$$

Définition 1.1.2 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$.*
On appelle intervalle fermé d'extrémités a et b le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $[a; b]$ défini par :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x \leq b\}$$

Définition 1.1.3 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$.*
On définit de même l'intervalle semi-ouvert à droite (resp à gauche) d'extrémités a et b par :

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x < b\} \quad \textit{(resp }]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x \leq b\}\textit{)}$$

Définition 1.1.4 *Soit a un nombre réel.*
On appelle intervalle ouvert de centre a tout intervalle de type : $]a + \epsilon; a + \epsilon[$ où ϵ désigne un nombre réel strictement positif.

Enfin, on pose :

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq a\}$$
$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x > a\}$$
$$]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x < a\}$$
$$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq a\}$$

1.1.4 Valeur absolue

Définition 1.1.5 *Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x est le nombre positif noté $\mid x \mid$, défini par :*

$$\mid x \mid = \sup\{x; -x\}$$

Il en résulte immédiatement de la définition que : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$| x | \geq 0$$
$$| x | = | -x |$$
$$| x | \geq x$$

Proposition 1.1.1 *Soient x et y deux nombres réels, on a :*
- $| xy | = | x || y |$
- $| x + y | \leq | x | + | y |$ *(Inégalité triangulaire).*

1.2 Notion de fonction numérique d'une variable réelle

Définition 1.2.1 *Une fonction numérique d'une variable réelle est une relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'à tout élément de $\mathbb{R}$ est associé un élément au plus de $\mathbb{R}$. On note :*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Définition 1.2.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On appelle domaine de définition (ou ensemble de définition) de f, la partie de $\mathbb{R}$ constituée des éléments ayant (exactement) une image ; nous la noterons désormais D_f.*

Remarque 1.2.1 *,*
- *Les éléments de $f(D)$ sont appelés les images des éléments de D.*
- *Les éléments de D sont appelés les antécédents des éléments de $f(D)$.*

Exemple 1.2.1 *,*
1. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \frac{1}{x}$.   On a : $D = \mathbb{R}^*$ et $f(D) = \mathbb{R} - \{0\}$*
2. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.   On a : $D = \mathbb{R}^{*+}$ et $f(D) = \mathbb{R}^{*+}$.*

1.2.1 Opérations sur les fonctions

Définition 1.2.3 *Soient f et g deux fonctions définies sur $I \subseteq \mathbb{R}$.*
1. $f = g \Leftrightarrow \forall x \in I : f(x) = g(x)$
2. $\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
3. $\forall x \in I : (fg)(x) = f(x)g(x)$
4. $\forall x \in I : (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *si* $\forall x \in I : g(x) \neq 0$

Définition 1.2.4 *Soient f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$.*
1. *Si f est inversible ($\forall x \in I : f(x) \neq 0$), alors : $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$.*

2. $\forall x \in I, \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

En particulier, $\forall x \in I : (-f)(x) = -f(x)$.

1.2.2 Fonction composée - Fonctions réciproque

Définition 1.2.5 *(Fonction composée)*
Soient f et g deux fonctions, f définie sur un intervelle $I \subseteq \mathbb{R}$ et g définie sur un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I : f(x) \in J$ (càd $f(I) \subset J$).
La fonction composée gof est la fonction définie sur I par :

$$gof(x) = g(f(x)) \text{ où } x \in I \text{ et } f(x) \in J.$$

Définition 1.2.6 *(Fonction réciproque)*
Soit $f : I \longrightarrow J$. On dit que f admet une fonction réciproque s'il existe $g : J \longrightarrow I$ telle que :

$$fog = Id_J \quad \text{et} \quad gof = Id_I$$

On dit alors que g est la fonction réciproque de f et on note $g = f^{-1}$.

Exemple 1.2.2 *Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$*
La fonction réciproque g de f est alors définie par : $g(x) = \frac{1+2x}{1-x}$

Remarque 1.2.2 *Il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} avec la fonction inverse $\frac{1}{f}$.*

1.3 Continuité et limites

1.3.1 Rappel

Continuité

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 1.3.1 *Une fonction f est continue en x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*

Proposition 1.3.1 *f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0.*

Théorème 1.3.2 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.*
- *Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.*
- *Si f est continue en a, alors les fonctions αf avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mid f \mid$ et $f^n (n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.*
- *Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continue en a.*
- *Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.*
- *Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.*

Remarque 1.3.1 *,*
- *Toute fonction polynôme est continue en tout réel.*
- *Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son domaine de définition.*

– *les fonctions* $x \longrightarrow \cos x$ *et* $x \longrightarrow \sin x$ *sont continues en tout réel.*

Exemple 1.3.1 *Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction* f *et justifier la continuité de* f *en tout réel de son ensemble de définition :*

$$f : x \longrightarrow 1 - x + x^2$$

$$f : x \longrightarrow |\frac{-5x+1}{x^2+4}|$$

$$f : x \longrightarrow x - \frac{1}{x-1}$$

Limite d'une fonction

Théorème 1.3.3 *Soit* f *une fonction définie au voisinage de* x_0 *(sauf peut être en* x_0*) et* $l \in \mathbb{R}$*.*
On a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

Théorème 1.3.4 *(Unicité de la limite) Soit* f *une fonction réelle et* $x_0 \in \mathbb{R}$*.*
Si f *admet une limite* l *en* x_0 *alors cette limite est unique.*

Théorème 1.3.5 *Soient* f *et* g *deux fonctions et soient* x_0, l, l' *trois éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$*, alors :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to l} g(x) = l' \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} gof(x) = l'$$

Théorème 1.3.6 *,*

– *La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.*
– *La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle quotient des termes de plus haut degré.*

Exemple 1.3.2 *Déterminer les limites ci-dessous :*

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x + \frac{1}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-5x+1} - 3x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2 - x)^2 + \sqrt{2}x$

Théorème 1.3.7 *(Prolongement par continuité)*
Soit f *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I*, sauf en un réel* a *de* I*, si la fonction* f *admet une limite finie* l *lorsque* x *tend vers* a*, alors la fonction* g *définie par :* $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ l & si \quad x = a \end{cases}$
est continue en a*.*
On dit alors que f *est prolongeable par continuité en* a *et* g *son prolongement.*

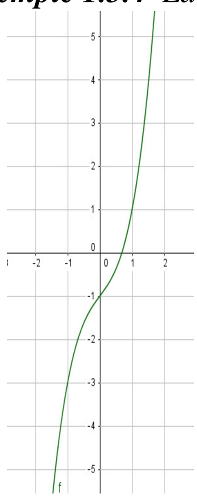
Exemple 1.3.3 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{\sin 2x}{x}$ Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer sont prolongement.*

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème 1.3.8 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.*
En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Théorème 1.3.9 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.*
Soit a et b deux réel de I tel que $a < b$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Exemple 1.3.4 *La courbe ci-dessous est celle de la fonction $f : x \longrightarrow x^3 + x - 1$*



1. *Donner l'ensemble de définition de f.*
2. *Justifier la continuité de f sur D_f.*
3. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.*
4. *On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α en divisant à chaque fois l'intervalle contenant α en deux intervalle de même amplitude (ce procédé est appelé <u>méthode de dichotomie</u>)*
   - *(a) Calculer $f(\frac{1}{2})$ et en déduire que $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$.*
   - *(b) Calculer $f(\frac{3}{4})$ et en déduire que $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.*
   - *(c) Poursuivre le procédé pour déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.*

1.4 Dérivabilité

1.4.1 Rappel

Définition 1.4.1 *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel noté $f^{'}(a)$ tel que :* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f^{'}(a)$.

Proposition 1.4.1 *f est dérivable en $a \Leftrightarrow f^{'}_d(a)$ et $f^{'}_g(a)$ existent et $f^{'}_d(a) = f^{'}_g(a)$.*

$$\text{Avec : } f^{'}_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } f^{'}_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Théorème 1.4.2 *f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.*

Exemple 1.4.1 *Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la dérivée de la fonction f en précisant son ensemble de définition :*

$$f : x \longrightarrow (2 - x^3)^4$$

$$f : x \longrightarrow \cos x \sin^4 x$$

$$f : x \longrightarrow \frac{1 + x^4}{x^2 - 1}$$

1.4.2 Dérivées successives

Définition 1.4.2 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*
- *La dérivée $f^{'}$ de f est appelée la dérivée première de f.*
- *Si la fonction $f^{'}$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou $f^{''}$.*
- *Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}(n \geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée n^{me} de f et est notée $f^{(n)}$.*

Exemple 1.4.2 *Donner dans chacun des cas ci-dessous, les dérivées d'ordre $1, 2$ et 3 de f :*

$$f : x \longrightarrow 2x^3 - 4x^2 + x - 1$$

$$f : x \longrightarrow \sin x$$

$$f : x \longrightarrow \cos x$$

Exercice *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x^2$*

1. *Déterminer* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$
2. *Vérifier que :* $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{f(x)-f(0)}{x} = x\frac{\sin x^2}{x^2}$
   En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f^{'}(0)$.

1.4.3 Théorème de Rolle

Théorème 1.4.3 *Soit a et b deux réels tels que $a < b$, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f^{'}(c) = 0$*

Remarque 1.4.1 *Si $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à $(\mathcal{C}_f)$ parallèle à l'axe des abscisses.*

Exemple 1.4.3 *Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x + 2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.*

1. *Calculer $f(1)$ et $f(-1)$*
2. *En déduire que $(\mathcal{C})$ admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.*

1.4.4 Théorème des accroissements finis

Théorème 1.4.4 *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a,b]$.*
Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a)$$

Remarque 1.4.2 *Si $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à $(\mathcal{C}_f)$ parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisses respectives a et b.*

Exemple 1.4.4 *Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = x^2\sqrt{x^2-1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.*
Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB), où A et B sont de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(2;4\sqrt{3})$.

1.4.5 Inégalité des accroissements finis

Théorème 1.4.5 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a,b[$, soient deux réels m et M.*
Si : $\quad \forall x \in]a,b[: m \leq f^{'}(x) \leq M \quad$ *alors :* $\quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Exemple 1.4.5 *Soit* $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$
, $\quad x \longrightarrow \sin x$

1. *Montrer que :* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : 0 \leq f^{'}(x) \leq 1$.
2. *En déduire que :* $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin t \leq t$.

Exercice *Soit* $f : x \longrightarrow \sqrt{1+x}$

1. *Montrer que* f *est dérivable sur* $[0, \frac{1}{2}]$.
2. *Montrer que :* $\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : \frac{1}{\sqrt{6}} \leq f^{'}(x) \leq \frac{1}{2}$.
3. *Montrer que :* $\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : 1 + \frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2}$.
4. *En déduire un encadrement de* $\sqrt{1+10^{-10}}$.

1.5 Comparaison des fonctions

Les théorèmes sur les limites font apparaître l'existence de certaines formes indéterminées. Pour lever l'indétermination, les fonctions vont être remplacées par des fonctions équivalentes.

1.5.1 Fonctions équivalentes

Soit x_0 *un point de* $\overline{\mathbb{R}}$ *(*x_0 *peut donc être soit un réel, soit* $-\infty$*, soit* $+\infty$*).*
soient f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0*, sauf peut être en* x_0*.*

Définition 1.5.1 *On dit que* f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* x_0*, s'il existe une fonction* α *définie au voisinage de* x_0*, telle que :*

$$f(x) = \alpha(x)g(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$$

On note $f \underset{x_0}{\sim} g$ *ou plus simplement* $f \sim g$.

Autre écriture *On peut remplacer la fonction* α *par la fonction* ε *définie par :*

$$\varepsilon(x) = \alpha(x) - 1 \text{ d'où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi f *et* g *sont équivalentes, si et seulement si :* $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ *avec* $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 1.5.1 *Si* $g(x) \neq 0$ *au voisinage de* x_0 *(sauf peut être en* x_0*), alors :*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Théorème 1.5.2 *Si* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ *alors* $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$.

En particulier : $f_1^n \underset{x_0}{\sim} g_1^n \quad (n \in \mathbb{N})$.
Si de plus $f_2(x) \neq 0$ *et* $g_2(x) \neq 0$ *au voisinage de* x_0 *alors :* $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Attention : *En général* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ *n'implique pas forcément que* $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$
En effet, citons un contre exemple :

$$f_1(x) = x^3 - x$$

$$f_2(x) = x$$

$$g_1(x) = -x$$

$$g_2(x) = x$$

On a : $f_1 \underset{0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{0}{\sim} g_2$

$$f_1(x) + f_2(x) = x^3$$

$$g_1(x) + g_2(x) = 0$$

Alors $f_1 + f_2$ *et* $g_1 + g_2$ *ne sont pas équivalentes.*

Théorème 1.5.3 *Soit* l *un élément de* $\overline{\mathbb{R}}$.
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Exemple 1.5.1

$$x^2 + x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2 + x$$

$$x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$$

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\sqrt{1 + x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

1.5.2 Fonctions négligeables

Soit x_0 un point de $\overline{\mathbb{R}}$ (x_0 peut donc être soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$). soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut être en x_0.

Définition 1.5.2 *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que :*

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On note : $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou plus simplement $f = o(g)$

Proposition 1.5.4 *Si g ne s'annulle pas au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0), alors :*

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

En particulier : $f \underset{x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

Théorème 1.5.5 *On a l'équivalence suivante :* $\quad f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{x_0}{=} o(g).$

Théorème 1.5.6 *(Les croissances comparées)*

1. $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ *et même* $\forall \beta \in \mathbb{N}^* : \ln x \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$
2. $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ *et même* $\forall \beta \in \mathbb{N}^* : x^\beta \underset{+\infty}{=} o(e^x)$

1.6 Règle de l'Hôpital

Théorème 1.6.1 *Soient f et g deux fonctions définies et continues sur le segment $[a, b]$ ($a < b$), on suppose de plus que :*

1. *f et g sont dérivables sur $]a, b[$*
2. $\forall x \in]a, b[: g^{'}(x) \neq 0$

Alors,

$$\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{g(x) - g(x_0} = l\right)$$

Exemple 1.6.1 *Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$*

On a : $x \longrightarrow \sin x - x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \longrightarrow x^2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x}$
On a : $x \longrightarrow \cos x - 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \longrightarrow 2x$ est continue et dérivable sur

$\mathbb{R}^*$.
Alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$

De même, on vérifie facilement que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$

1.7 Les fonctions trigonométriques (circulaires) et leurs réciproques

1.7.1 Les fonctions trigonométriques

Fonction sinus

– *La fonction sinus est définie sur* $\mathbb{R}$*, elle est une fonction périodique de période* 2π *:*

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

– *La fonction sinus est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin x$
– *La fonction sinus est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(\sin x)' = \cos x$

Variation de $\cos x$ **:**

Fonction cosinus

– *La fonction cosinus est définie sur* $\mathbb{R}$*, elle est une fonction périodique de période* 2π *:*

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

– *La fonction cosinus est paire :* $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(-x) = \cos x$
– *La fonction cosinus est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(\cos x)' = -\sin x$

Variation de $\cos x$ **:**

Fonction tangente

– $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *est définie pour* $\cos x \neq 0$ *c'est à dire* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
– *La fonction tangente est impaire et périodique de période* π *:*

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \tan(x + k\pi) = \tan x$$

– $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0 \Rightarrow$ *la fonction tangente est strictement croissante.*

Variation de $\tan x$ **:**

Fonction cotangente

- $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ *est définie pour* $\sin x \neq 0$ *c'est à dire* $x \neq 0 + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
- *La fonction cotangente est impaire et périodique de période* π *:*

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \cot(x + k\pi) = \cot x$$

- $(\cot x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x < 0 \Rightarrow$ *la fonction tangente est strictement décroisante.*

Variation de $\cot x$ **:**

1.7.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Fonction $\arcsin x$

La fonction $f(x) = \sin x$ *est définie et continue dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *à valeurs dans* $[-1, 1]$ *et strictement croissante, elle admet donc une fonction réciproque appelée* arcsin *(qu'on lit angle dont le sinus est) telle que :*

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \longrightarrow \arcsin$$

Elle est continue et strictement croissante. On a :

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Remarque 1.7.1 $\sin(\arcsin x) = x$ *;* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ *;* $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{1-x^2}$

- *Elle est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\forall x \in]-1, 1[: (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Fonction $\arccos x$

La fonction $f(x) = \cos x$ *est définie et continue dans* $[0, \pi]$ *à valeurs dans* $[-1, 1]$ *et strictement décroissante, elle admet donc une fonction réciproque appelée* arccos *(qu'on lit angle dont le cosinus est) telle que :*

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$
$$x \longrightarrow \arccos$$

Elle est continue et strictement décroissante. On a :

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

Remarque 1.7.2 $\cos(\arccos x) = x$; $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

– *Elle est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[: (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Fonction $\arctan x$

La fonction $f(x) = \tan x$ *est définie et continue dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et strictement croissante, elle admet donc une fonction réciproque appelée* arctan *(qu'on lit angle dont la tangente est) telle que :*

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Remarque 1.7.3 $\tan(\arctan x) = x$; $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

– *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Proposition 1.7.1

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

1.8 Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques

1.8.1 Fonctions hyperboliques

Définition 1.8.1 *On appelle cosinus hyperbolique, et l'on note* chx *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Définition 1.8.2 *On appelle sinus hyperbolique, et l'on note* shx *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Proposition 1.8.1
– *La fonction* chx *est paire :* $ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = chx$
– *La fonction* shx *est impaire :* $sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{2} = -\frac{e^x-e^{-x}}{2} = -shx$
– *Par l'addition et soustraction on a :*

$$chx + shx = e^x$$

$$chx - shx = e^{-x}$$

– *En multipliant membre à membre on a :*

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

– *On a :* $(chx)' = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})' = shx$; $(shx)' = (\frac{e^x-e^{-x}}{2})' = chx$

Définition 1.8.3 *On appelle tangente hyperbolique, et l'on note* thx *et cotangente hyperbolique, et l'on note* $\coth x$*, les fonctions :*

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ et impaire.}$$

$$\coth x = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \text{ définie sur } \mathbb{R}^* \text{ et impaire.}$$

On a :

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = 1 - th^2x = \frac{1}{th^2x}$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{sh^2x}$$

1.8.2 Variations de chx, shx, thx et $\coth x$

– *Vu que* chx *est paire et* shx *est impaire, leur étude se fera sur* $\mathbb{R}^+$
  On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} chx = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} shx = +\infty$$

De plus : $\forall x \in \mathbb{R} : chx > 0$ *(car* $e^x > 0$ *et* $e^{-x} > 0$*)*

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (shx)' = chx > 0 \Rightarrow shx$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (chx)' = shx > 0 \Rightarrow chx$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$.

– *Vu que la fonction* thx *est impaire, son étude se fera sur* $\mathbb{R}^+$ *:*

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2x} > 0 \Rightarrow thx \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} thx = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ est asymptote horizentale.}$$

– *Vu que la fonction* $\coth x$ *est impaire, son étude se fera sur* $\mathbb{R}_+^*$ *:*

$$(\coth x)' = -\frac{1}{sh^2x} < 0 \Rightarrow \coth x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\lim_{x\to+\infty} \coth x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ est asymptote horizentale.}$$

1.8.3 Fonctions hyperboliques réciproques

argch x : *La fonction chx est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $[1, +\infty[$;*

$$ch(\mathbb{R}^+) = [ch(0), \lim_{x \to +\infty} chx[= [1, +\infty[$$

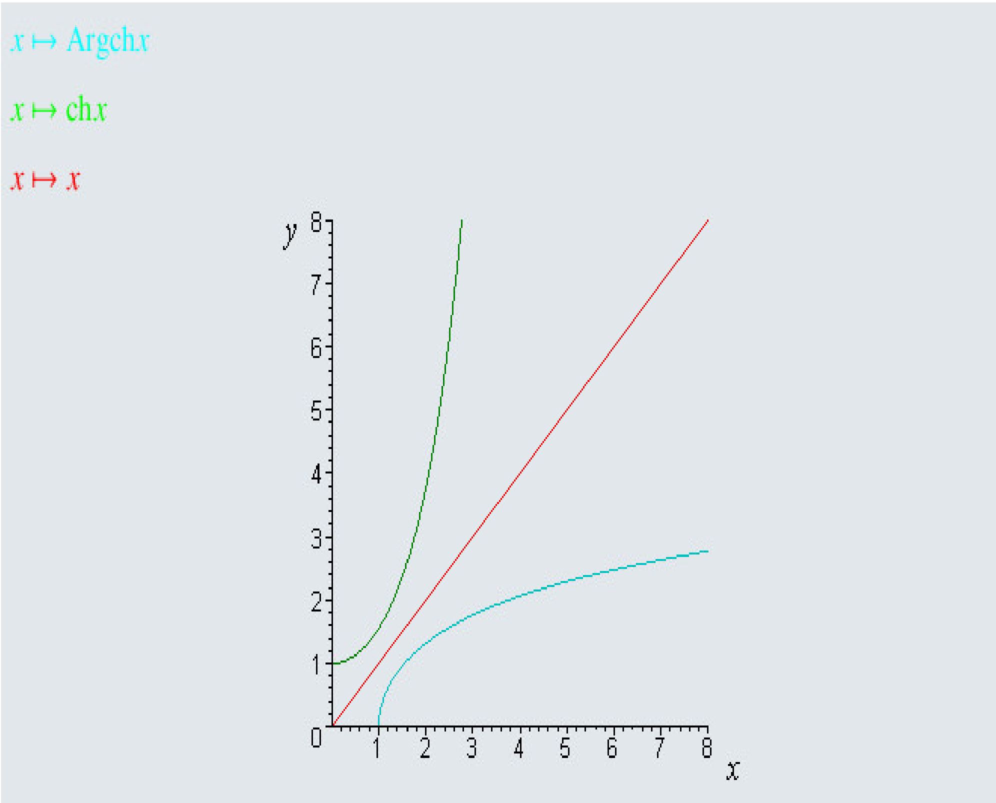
Elle admet donc une fonction réciproque notée $argchx$ (qu'on lit argument cosinus hyperbolique) de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ continue et strictement croissante :

$$\begin{cases} y = argchx \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = chy \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Proposition 1.8.2

$$\forall x \in [1, +\infty[: (argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$



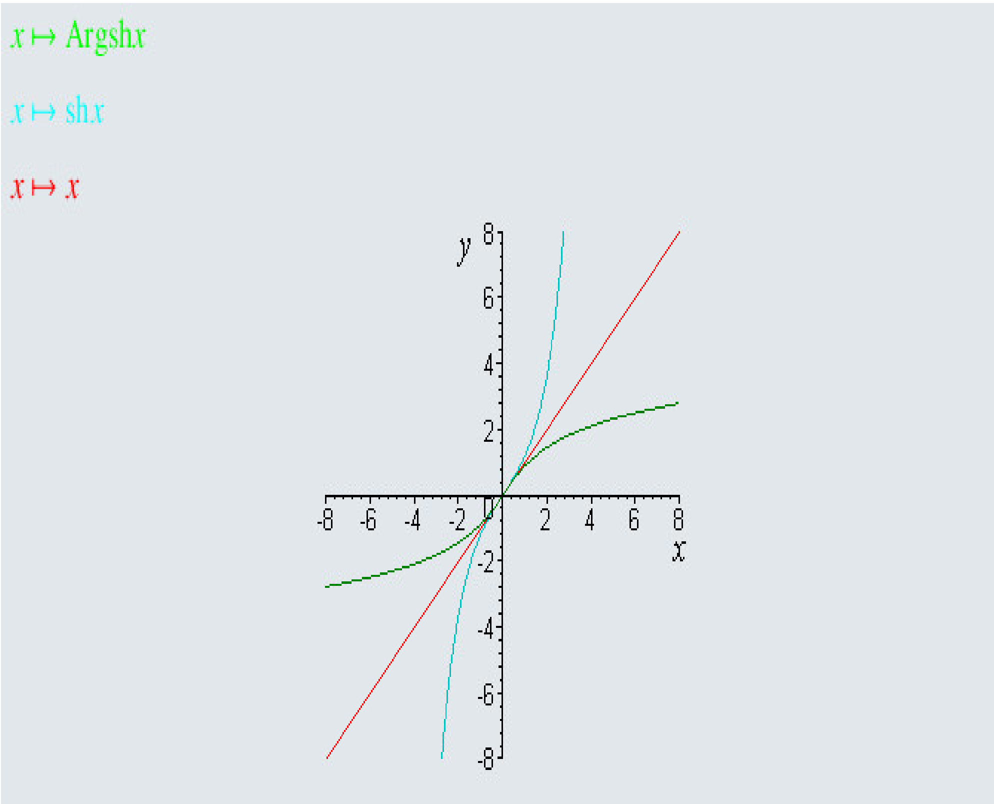
argsh x : *La fonction shx est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée $argshx$ (qu'on lit argument sinus hyperbolique) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante :*

$$\begin{cases} y = argshx \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = shy \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proposition 1.8.3

$$\forall x \in \mathbb{R} : (argchx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$argshx = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$



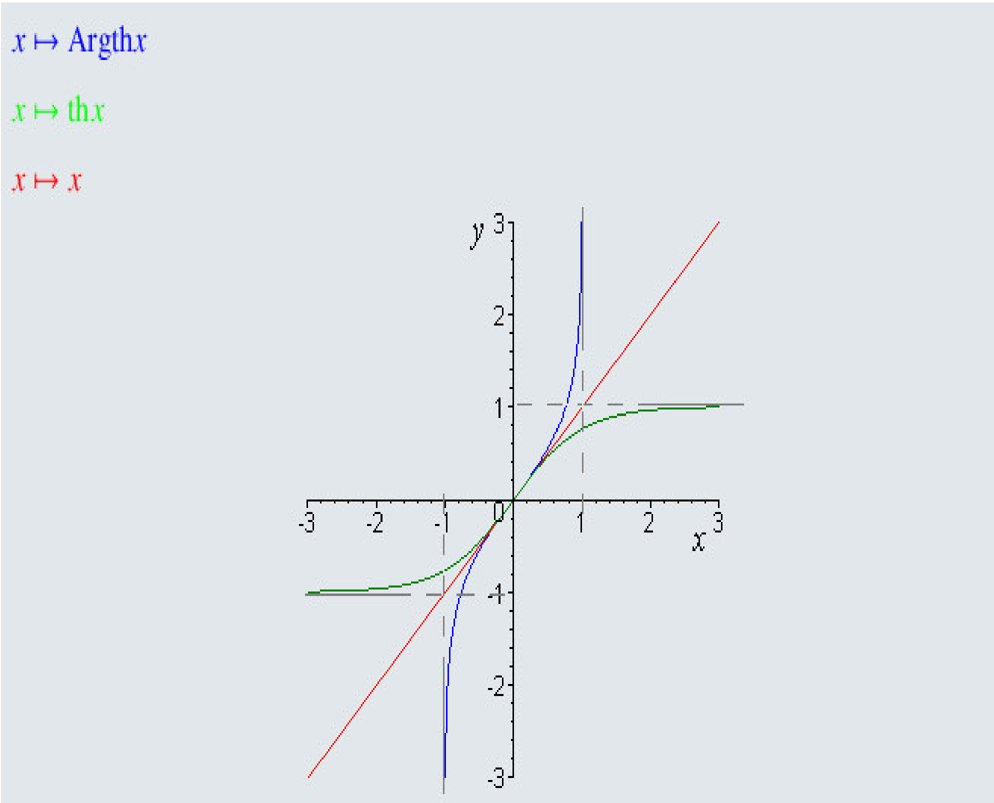
argth x : *La fonction thx est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$. Elle admet donc une fonction réciproque notée $argthx$ (qu'on lit argument tangente hyperbolique) de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante :*

$$\begin{cases} y = argthx \\ x \in]-1,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = thy \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proposition 1.8.4

$$\forall x \in \mathbb{R} : (argthx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$argthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$



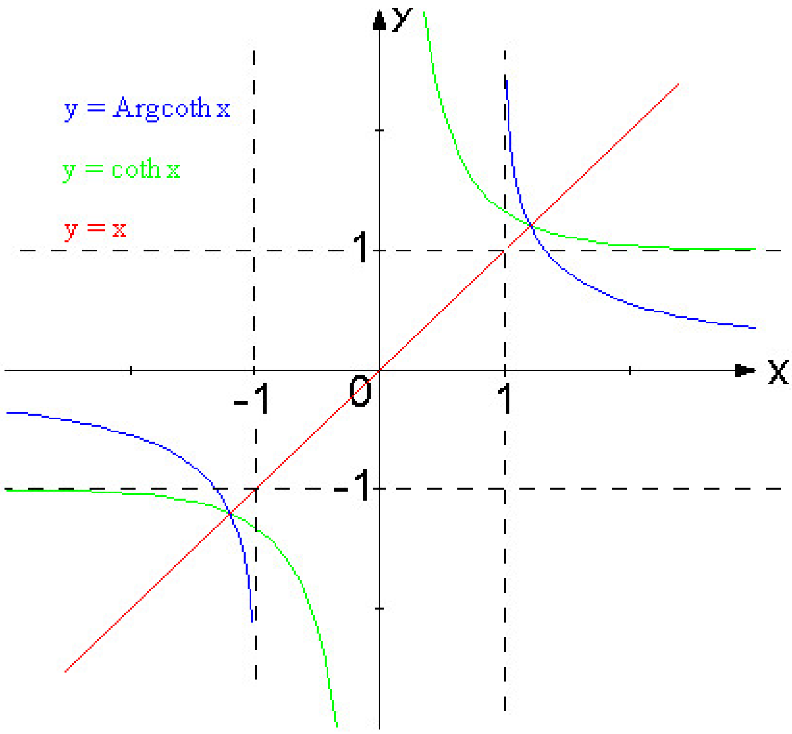
argcoth x : *La fonction* $cothx$ *est continue et strictement décroissante de* $\mathbb{R}^*$ *à valeurs dans* $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
Elle admet donc une fonction réciproque notée $argcothx$ *(qu'on lit argument cotangente hyperbolique) de* $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}^*$ *continue et strictement décroissante :*

$$\begin{cases} y = argcothx \\ x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = cothy \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Proposition 1.8.5

$$\forall x \in \mathbb{R} : (argcothx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$argthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$$


y = Argcoth x
y = coth x
y = x
Y
X
1
-1
0
1
-1