USTHB – Faculté de Mathématiques — Année 2012 / 2013

Lic 1 ST – Sections 25 et 26 — Rattrapage — Module : Math1

**Exercice 1 :** 1) Montrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

2) $\mathbb{Z}$ est-il un sous-corps du corps $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ?

3) On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\Delta$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \,\Delta\, y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$

a) Montrer que $\Delta$ est une relation d'équivalence

b) Déterminer les classes d'équivalence suivantes : $\dot{\tfrac{1}{2}}, \dot{1}, \dot{x}$

**Exercice 2 :** Soit la suite $(u_n)$ telle que : $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k(k-1)} (-1)^k, \ n \geq 2$

1) Vérifier que $\frac{2k-1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$ $\quad (*)$

2) En utilisant le $(*)$, exprimer $u_n$ sous la forme : $u_n = 1 + v_n$. En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$

3) Les suites $(a_n = u_{2n})$ et $(b_n = u_{2n+1})$ sont-elles adjacentes ?

**Exercice 3 :** Soit $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

1) Ecrire Z sous forme <u>algébrique</u> puis sous forme <u>trigonométrique</u>.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2) a. Déterminer, sous forme <u>trigonométrique</u>, les racines carrées de $\sqrt{3} + i$

b. Déterminer a et b tels que : $\sqrt{3} + i = (a + i\,b)^2$

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$

**Exercice 4 :** Soit : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 25$

1) Calculer $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$ et $f'''(3)$

2) Ecrire, à l'ordre 2, la formule de Taylor-Lagrange de f au voisinage de $x_0 = 3$.

3) f admet-elle un extrémum en $x_0 = 3$ ?

4) Donner l'équation de la tangente en $x_0 = 3$ puis étudier la position de la courbe de f par rapport à cette tangente au voisinage de $x_0 = 3$.

**Barème :** 6, 4, 6, 4

Maths 1

2012 - 2013

Section . 25-26

## Corrigé rattrapage

**Ex 1 :**

1°/ $\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \text{ sous-anneau} \\ \text{de } (\mathbb{Q},+,\cdot)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z} \text{ sous-groupe de } (\mathbb{Q},+) \\ \text{"}\cdot\text{" stable dans } \mathbb{Z}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall a,b \in \mathbb{Z} \\ a-b \in \mathbb{Z} \\ a\cdot b \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$ (vérifiées) (1)

2°/ $\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \text{ sous-corps} \\ \text{de } (\mathbb{Q},+,\cdot)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z} \text{ sous-anneau de } (\mathbb{Q},+,\cdot) \text{ (vérifiée)} \\ (\mathbb{Z}-\{0\},\cdot) \text{ groupe (non vérifiée)}\end{array}\right.$ $2 \in \mathbb{Z}-\{0\}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}-\{0\}$ (1)

3°/ $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x \Delta y \Leftrightarrow x^2-x = y^2-y$

a/ $\Delta$ relation d'équivalence

i/ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2-x = x^2-x \Leftrightarrow x \Delta x$ (réflexive)

ii/ $\forall x,y \in \mathbb{R} : x \Delta y \Leftrightarrow x^2-x = y^2-y \Rightarrow y^2-y = x^2-x \Leftrightarrow y \Delta x$ (symt)

iii/ $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : \left.\begin{array}{l}x \Delta y \\ y \Delta z\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-x = y^2-y \\ y^2-y = z^2-z\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-x = z^2-z \Leftrightarrow x \Delta z$ (transi) (2)

b/ $\dot{\overline{1/2}} = \{x \in \mathbb{R} / x \Delta 1/2\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2-x = \underbrace{(1/2)^2-(1/2)}_{-1/4}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x^2-x+1/4 = 0\} = \{1/2\}$ car $\Delta = 0$ (0,5)

$\dot{1} = \{x \in \mathbb{R} / x \Delta 1\} = \{x \in \mathbb{R} / \underbrace{x^2-x = 1^2-1}_{x(x-1)=0}\} = \{0,1\}$ (0,5)

$\dot{x} = \{y \in \mathbb{R} / y \Delta x\} = \{y \in \mathbb{R} / y^2-y = x^2-x\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / y^2-y+(x-x^2) = 0\}$ $\quad \Delta = 1-4(x-x^2) = 4x^2-4x+1 = 4(x-1/2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$= \left\{\frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}\right\} = \left\{\frac{1 \pm 2|x-1/2|}{2}\right\}$ (1)

**Ex 2 :** $U_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{2k-1}{k(k-1)}, \quad n \geq 2$

1°/ $\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} = \frac{(k-1)+k}{k(k-1)} = \frac{2k-1}{k(k-1)}$ (1)

2°/ $U_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)$

$= \left(\cancel{\frac{1}{2}}+1\right) + \left(\cancel{-\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(-\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\frac{(-1)^n}{n} + \cancel{\frac{(-1)^n}{n-1}}\right)$

$\Rightarrow U_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ (1)

On a : $\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim \underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} U_n = 1$ (1)

3) $a_n = U_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \searrow$ (car $a_{n+1} < a_n$)

$a_{n+1} = U_{2(n+1)} = U_{2n+2} = 1 + \frac{1}{2n+2} < 1 + \frac{1}{2n} = a_n$

$b_n = U_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} \nearrow$ (car $b_{n+1} > b_n$)

$b_{n+1} = U_{2(n+1)+1} = U_{2n+3} = 1 - \frac{1}{2n+3} > 1 - \frac{1}{2n+1} = b_n$

$a_n - b_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

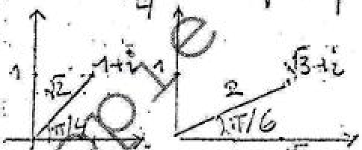
$\Rightarrow (a_n), (b_n)$ adjacentes (1)

Ex3.

1°/ $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \Rightarrow z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ forme algébrique (1)

$1+i = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$

$\sqrt{3}+i = 2\,(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$ $\Rightarrow$



$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)$ (1) forme trigon

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$ ; $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$ (1)

2°/

a/ $\sqrt{3}+i = [r(\cos\theta + i \sin\theta)]^2$

$\Rightarrow 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right] = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$\Rightarrow r = \sqrt{2}$, $2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k = 0, 1$

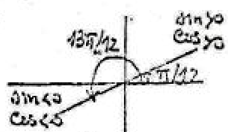
D'où les racines carrées sont : $\begin{cases} \sqrt{2}\,(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12) \\ \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \sin\frac{13\pi}{12}\right) \end{cases}$ (1)

b/ $\sqrt{3}+i = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{3}, \; 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ D'où $\begin{cases} \text{ou } a = \sqrt{(2+\sqrt{3})/2} \Longrightarrow b = \frac{1}{2a} = (\sqrt{2}/2\sqrt{2+\sqrt{3}}) \\ \text{ou } a = -\sqrt{(2+\sqrt{3})/2} \Longrightarrow b = -(\sqrt{2}/2\sqrt{2+\sqrt{3}}) \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow \sin\frac{13\pi}{12} = \frac{-1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (1)




Ex4

1°/ $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 25 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 2, \; f'(x) = 3x^2 - 18x + 27 \to f'(3) = 0 \\ f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow f''(3) = 0, \; f'''(x) = 6, \forall x \end{cases}$ (1)

2°/ $f(x) = \overset{=2}{f(3)} + (x-3)\overset{=0}{f'(3)} + \frac{(x-3)^2}{2!}\overset{=0}{f''(3)} + \frac{(x-3)^3}{3!}\overset{=6}{f'''(c)} = 2 + (x-3)^3$ (1)

3°/ comme $f'(3) = f''(3) = 0$ et $f'''(3) \neq 0$ ($n=3$ impair donc pas d'extremum) (1)

4°/ L'équation de la tangente en $x_0 = 3$ est $y = f(3) + (x-3)f'(3) = 2$

$f(x) - 2 = (x-3)^3$, La courbe est au-dessus si $x > 3$

" " " au-dessous si $x < 3$ (1)

U.S.T.H.B. S.M. Section 3 Février 2013

**Rattrapage de Math I**

**Exercice 1:** a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2x + 4$ peut s'écrire sous la forme: $f(x) = (x-a)^2 + b^2$ où $a$ et $b$ sont des réels que l'on déterminera. $f$ est-elle injective? Surjective? Justifier.

b) Donner un exemple de deux parties $A$ et $B$ de $\mathbb{R}$ telles que la fonction $g : A \to B$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$ soit bijective.

**Corrigé:** a) $f(x) = (x-1)^2 - 1 + 4 = (x-1)^2 + 3 = (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2$. $f$ n'est pas injective car $f(0) = f(2)$ alors que $0 \neq 2$. Elle n'est pas surjective non plus puisque $-1$ (par exemple) n'a pas d'antécédent car $f(x) > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

b) Pour "rendre" $f$ injective, il faut, par exemple, prendre comme ensemble de départ seulement les $x \geq 1$ (ou seulement les $x \leq 1$). C'est-à-dire prendre $A = [1, +\infty[$. Pour la rendre surjective, il faut agir sur l'ensemble d'arrivée en éliminant les réels qui n'ont pas d'antécédents. Or $f(x) = (x-1)^2 + 3$, lorsque $x$ varie entre 1 et $+\infty$, prend les valeurs, et toutes les valeurs, entre 3 et $+\infty$. On prend donc $B = [3, +\infty[$.

**Exercice 2:** a) Utiliser la formule du binôme pour donner $(1+x)^n$ en fonction de $n, n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire la valeur de $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10}$.

**Corrigé:** a) $(1+x)^n = C_n^0 1^n x^0 + C_n^1 1^{n-1} x^1 + \ldots + C_n^n 1^0 x^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i 1^{n-i} x^i$.

b) En posant $n = 10$ et $x = 1$, on obtient:
$(1+1)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10}$. Donc $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$.

**Problème:** Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence suivante:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1) a) Montrer par récurrence que l'on a: $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Calculer $u_1, u_2$ et $u_3$. La suite est-elle monotone?
c) Si la limite de $(u_n)_n$ existe, quelle serait sa valeur?
2) On considère les deux sous-suites $(v_n)_n : v_n = u_{2n}$ et $(w_n)_n : w_n = u_{2n+1}$.
a) Vérifier que:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+v_n} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} w_0 = \dfrac{3}{2} \\ w_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+w_n} \end{cases}$$

b) Vérifier que la fonction $f$ : $f(x) = 2 - \dfrac{1}{1+x}$ est définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En déduire les variations des suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$.

c) Montrer que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent. Vers quoi? Qu'en déduit-on pour $(u_n)_n$?

d) On note $V = \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $W = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$. Donner $Sup$ et $Inf$ de $V$ et $W$ ainsi que leurs $Max$ et $Min$ s'ils existent.

**3)** Ici, on veut démontrer la convergence de $(u_n)_n$ d'une autre manière.

a) Montrer que l'on a: $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$ puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq (\dfrac{4}{9})^n \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

b) Si $p$ et $q$ sont deux entiers naturels tels que $p \geq q$, montrer que:

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - u_{p-1} + u_{p-1} - u_{p-2} + u_{p-2} - \ldots + u_{q+1} - u_q| \\ &\leq \frac{1}{2}\left[(\frac{4}{9})^q + \ldots + (\frac{4}{9})^{p-1}\right] \leq \frac{1}{2}(\frac{4}{9})^q \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{10}(\frac{4}{9})^q \end{aligned}$$

c) Expliquer alors pourquoi la suite $(u_n)_n$ est convergente.

**4)** (Facultative) Vérifier que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

**Corrigé:** **1)** a) La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'à l'ordre $n$. On a alors $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$. D'où: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{2}{3}$ ce qui donne en ajoutant 1: $\dfrac{3}{2} \leq 1 + \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{5}{3}$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{5}{3} \leq 2$.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $u_1 = \dfrac{3}{2}, u_2 = \dfrac{5}{3}$ et $u_3 = \dfrac{8}{5}$. La suite n'est pas monotone.

c) Comme la fonction $x \to 1 + \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$, la limite $l$ de la suite récurrente $(u_n)_n$, si elle existe, vérifierait $l = 1 + \dfrac{1}{l}$ c'est-à-dire $l^2 - l - 1 = 0$. On trouve $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mais $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ est impossible car la suite est positive, donc $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**2)** a) On a $v_0 = u_0 = 2$ et $v_{n+1} = u_{2n+2} = 1 + \dfrac{1}{u_{2n+1}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{u_{2n}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{v_n}} = 1 + \dfrac{v_n}{v_n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+v_n}$. De même, on a $w_0 = u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $w_{n+1} = u_{2n+3} = 1 + \dfrac{1}{u_{2n+2}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{u_{2n+1}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{w_n}} = 1 + \dfrac{w_n}{w_n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+w_n}$.

b) La fonction $f$ est clairement définie et continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions continues. Comme la fonction $x \to \dfrac{1}{1+x}$ est strictement décroissante sur cet intervalle, $x \to -\dfrac{1}{1+x}$ est strictement croissante et $f$ aussi.

On en déduit que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont monotones. Pour connaitre leurs sens de variations, il suffit pour chacune des deux de comparer les deux premiers termes. On a $v_0 = 2 > v_1 = \dfrac{5}{3}$ et

$w_0 = u_1 = \frac{3}{2} < w_1 = u_3 = \frac{8}{3}$. Par conséquent, $(v_n)_n$ est strictement décroissante et $(w_n)_n$ est strictement croissante.

c) La suite $(u_n)_n$ étant bornée, les sous-suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ le sont aussi. D'après b) $(v_n)_n$ est donc décroissante minorée et $(w_n)_n$ est croissante majorée. Elles sont donc toutes les deux convergentes.

On trouve la même limite $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ solution de l'équation $l = 2 - \frac{1}{1+l}$.

On en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge aussi et vers cette limite.

d) La suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $Sup(V) = Max(V) = v_0 = 2, Inf(V) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $Min(V)$ n'existe pas.

Quant à la suite $(w_n)_n$, elle est strictement croissante et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ce qui implique que $Inf(W) = Min(W) = w_0 = \frac{3}{2}, Sup(W) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $Max(W)$ n'existe pas.

3) a) On a $|u_{n+1} - u_n| = \left|(1+\frac{1}{u_n}) - (1+\frac{1}{u_{n-1}})\right| = \left|\frac{u_{n-1}-u_n}{u_n u_{n-1}}\right| = \left|\frac{1}{u_n u_{n-1}}\right| |u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}|u_n - u_{n-1}| = \frac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$. Mais $|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{4}{9}|u_{n-1} - u_{n-2}|$ et ainsi de suite, ce qui donne $|u_{n+1} - u_n| \leq (\frac{4}{9})^n |u_1 - u_0| = (\frac{4}{9})^n \times \frac{1}{2}\ \forall n \geq 1$.

b) Si $p$ et $q \in \mathbb{N}$ et vérifient $p \geq q$, on a:

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |(u_p - u_{p-1}) + (u_{p-1} - u_{p-2}) + (u_{p-2} - \ldots + (u_{q+1} - u_q)| \\ &\leq \frac{1}{2}\left[(\frac{4}{9})^q + \ldots + (\frac{4}{9})^{p-1}\right] \leq \frac{1}{2}(\frac{4}{9})^q \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{10}(\frac{4}{9})^q. \end{aligned}$$

c) D'après b), on voit que si $p$ et $q$ tendent vers $+\infty$, $|u_p - u_q|$ tend vers 0. La suite $(u_n)_n$ est donc de Cauchy. Donc elle est convergente. (Vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'après 1)c).)

4) On vérifie facilement (par récurrence) que $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $(u_n)_n$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ vu que sa limite en tant que suite réelle est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui n'est pas rationnelle. On dit que $\mathbb{Q}$ n'est pas un corps *complet* (pour la valeur absolue usuelle), contrairement à $\mathbb{R}$.

| | | |
|---|---|---|
| Faculté de Mathématiques<br>USTHB<br>$1^{ère}$ année ST | MATH I<br>Examen Final<br>Section 23 | Année Universitaire<br>2012-2013<br>Durée 1 h 30 min |

**Exercice 1 (8 points)** *Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles définies par :*

$$\begin{cases} a_0 = 3 \text{ et } b_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

1. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.*
2. *Prouver que $(a_n)_n$ est croissante et que $(b_n)_n$ est décroissante.*
3. *On pose $u_n = b_n - a_n$. Vérifier que $(u_n)_n$ est une suite géométrique puis déterminer son terme général.*
4. *En déduire que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.*
5. *On pose $v_n = a_n + b_n$. Vérifier que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique puis déterminer son terme général.*
6. *Déterminer les termes généraux de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, puis calculer leur limite.*

**Exercice 2 (5 points)** *Soit $f$ la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ a & si\ x = 1 \end{cases}$$ => ex 10 page 05

1. *Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ puis calculer $f'$.*
2. *Pour quelle valeur de $a$, $f$ est elle continue en $x_0 = 1$ ?.*
3. *Pour la valeur de $a$ trouver en 2, $f$ est elle dérivable en $x_0 = 1$ ? Si oui donner la valeur de $f'(1)$*

**Exercice 3 (3 points)** *En justifiant votre réponse, dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$.
2. *Une suite strictement décroissante à termes positifs converge vers 0.*
3. *Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
4. *Si une fonction $f$ est continue sur $[a, b]$ et $]b, c]$ alors elle est continue sur $[a, c]$.*
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin x) = \sin x$.
6. *La fonction $f(x) = x + x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x}$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.*

**Exercice 4 (4 points)**

1. *Peut on appliquer la règle de L'Hôpitale pour calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$ ?. Calculer cette limite.*
2. *Donner les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $\sin x^3$; $e^{\sin x}$.*
3. *En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x^3}$.*

***Indication :** On donne les developpement limités suivants :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x) \quad ; \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\epsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x)$$

Bon Courage

Faculté de Mathématiques
USTHB
$1^{\text{ère}}$ année ST

*corrigé*

MATH I
Examen Final
Section 23

Année Universitaire
2012-2013
Durée 1 h 30 min

**Exercice 1 (8 points)**

1. *Pour $n = 0$, on a $a_0 = 3 < b_0 = 5$. on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$. On a $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n) < 0$, donc par le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.* **(1 points)**

2. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n) > 0$ *et* $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) < 0$ *donc $(a_n)_n$ est croissante et $(b_n)_n$ est décroissante.* **(1 points)**

3. *On a $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - a_n) = \frac{1}{3}u_n$ d'où $(u_n)_n$ est une suite géométrique et son terme général est $\boxed{u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.* **(0.5 + 0.5 points)**

4. *On a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. $(a_n)_n$ est croissante et $(b_n)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.* **(1+1 points)**

5. *On a $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = v_n$ et donc $(v_n)_n$ est une suite constante et son terme général est $v_n = v_0 = 8$.* **(0.5 + 0.5 point)**

6. $a_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}\left(8 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *et* $b_n = \frac{1}{2}(v_n + u_n) = \frac{1}{2}\left(8 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *et on a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 4$. **(1+1 points)**

---

**Exercice 2 (5 points)**

*$f$ est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Un simple calcul de déivée nous donne $f'(x) = \frac{2\pi(x-1)\sin\pi x\cos\pi x - \sin^2\pi x}{(x-1)^2}$.* **(1+1+1 points)**

*Pour que $f$ soit continue au point $x_0 = 1$ il faut et il suffit que $a = f(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin^2(\pi(y+1))}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \sin(\pi y)\frac{\sin(\pi y)}{y} = 0\pi = 0$.* **(1 points)**

3. *Pour f soit dérivable en* $x_0 = 1$ *il faut et il suffit que* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *existe et est finie.*

*On a* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{sin^2(\pi x)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{y\to 0} \left(\frac{sin(\pi(y+1))}{y}\right)^2 = \boxed{\lim\limits_{y\to 0} \left(\frac{sin(\pi y)}{y}\right)^2} = \pi^2$ *donc f est dérivable en* $x_0 = 1$ *et* $f'(1) = \pi^2$. *(0.5+0.5 points)*

---

**Exercice 3 (3 points)**

1. *Fausse car* $a = -1$ *vérifie* $x^2 = 1$ *mais* $a \neq 1$. *(0.5 points)*
2. *Fausse* $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ *est strictement décroissante à termes positifs mais ne converge pas vers* 0. *(0.5 points)*
3. *Fausse* $u_n = -1 + \frac{1}{n}$ *et Si* $v_n = \frac{1}{n}$ *on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$, *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, *mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$. *(0.5 points)*
4. *Fausse on prend* $f(x) = 1$ *sur* $[a, b]$ *et* $f(x) = -1$ *sur* $]b, c]$ *et n'est pas continue sur* $[a, c]$. *(0.5 points)*
5. *Fausse car pour* $x = \frac{\pi}{2}$ *ona* $arcsin(sin\frac{\pi}{2}) = arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \neq 1 = \sin\frac{\pi}{2}$. *(0.5 points)*
6. *Fausse car* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.* *(0.5 points)*

---

**Exercice 4 (4 points)**

1. *On a* $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ *et* $g(x) = \sin x$ *sont continues et dérivables aau voisinage de* 0 *et* $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ *et* $g'(x) = \cos x \neq 0$ *au voisinage de zéro cependant* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ *n'existe pas donc on ne peut pas applique la régle de L'Hôpital. pour calculer cette limite il suffit de l'écrire d'une façon plus simple :* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$ *car* $\sin\frac{1}{x}$ *est bornée.* *(1+0.5 points)*
2. $\sin x^3 = x^3 + x^3\varepsilon(x)$ $\quad e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ *(0.5 +1 points)*
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2)-(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}) + x^3\varepsilon(x)}{x^3+x^3\varepsilon(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{x^3+x^3\varepsilon(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)} = -\frac{1}{6}$. *(1 points)*

---

**U.S.T.H.B**
**FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES**

**Math 1 Lic ST**
**Section 6, 2012-2013**

# Examen final:

## Exercice 1 [3 pts ]:

Pour tout $x, y$ dans $\mathbb{R}^+$, on pose $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dans $\mathbb{R}^+$, $*$ est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? admet-elle un élément neutre ? Est-ce que $(\mathbb{R}^+, *)$ est un groupe ?

## Exercice 2 [2 pts ]:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1$.

## Exercice 3 [10 pts ]:

I-Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, l'application définie par $h(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1) Vérifier que $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
2) $h$ est-elle injective ? surjective ?

II-Soit la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ pour $n \geq 0$ (ie $u_{n+1} = h(u_n)$).

1) Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4$.
2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq u_n \leq 2$.
3) Montrer que si $\lim u_n = l$, alors $l \in [0, 2]$.
4) En déduire que si $\lim u_n = l$, alors $l = \sqrt{2}$.

III-Soit la suite de nombres réels définie par $w_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.

1) Montrer que $w_{n+1} = (2\sqrt{2} - 3) w_n$.
2) En déduire $\lim w_n$ et $\lim u_n$.

IV-Montrer que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (\sqrt{2} - 1)|u_n - \sqrt{2}|$, puis retrouver $\lim u_n$.

V-On pose $U = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Donner $\sup U$ et $\inf U$.

## Exercice 4 [5 pts ]:

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$.
Étudier la fonction $f$, puis donner son tableau de variation et son graphe.

(On pourra utiliser que $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{5}{10}$ et que $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{8}{10}$)

**U.S.T.H.B** Math 1 Lic S1

**FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES** Section 6, 2012-2013

# Correction de l'examen final:

**Exercice 1 [3 pts ]:**

Si $x, y \in F = \mathbb{R}^+$, alors $x * y \in F$ (le vérifier!), donc, $*$ est une loi interne dans $F$ 0,5. Comme $x * y = y * x$, donc $*$ est une loi commutative 0,5. Comme $(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x * (y * z)$, donc $*$ est associative 0,5. De plus $*$ admet $e = 0$ comme élément neutre, car si $x \in F$; alors on a , $x * 0 = x$ 0,5. Comme pour tout $x \in F$, on a $x * 1 \neq 0 = e$, donc 1 n'est pas inversible; en particulier $(F, *)$ n'est pas un groupe 1.

**Exercice 2 [2 pts ]:**

notons $S$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I)$ : $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1$ et $\mathcal{D}$ le domaine de définition de $(I)$. Alors $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$.

Par suite si $x \in \mathcal{D} = ]-1, 1[$, alors :

$x \in S \Leftrightarrow x < \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow (x < 0) \vee [(x \geq 0) \wedge (x^2 < 1 - x^2)]$ 1.

Comme $(x^2 < 1 - x^2) \Leftrightarrow 2x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Donc $S = ]-1, 0[\cup[0, \frac{1}{\sqrt{2}}[ = ]-1, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ 1.

**Exercice 3 [10 pts ]:**

I- 1) On a $1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = h(x)$ 0,5.

2) Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, alors $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Donc $f$ est injective 0,5.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 1$, donc $f$ n'est pas surjective 0,5.

II-Si $u_0 = 0, u_{n+1} = h(u_n)$ pour $n \geq 0$ :

1) Le calcul donne $u_1 = 2, u_2 = 4/3, u_3 = 10/7, u_4 = 24/17$, ie $u_0 < u_2 < u_4 < u_3 < u_1$ 1.

2) On fait une démonstration par récurrence. On a $u_0 = 2$ et si $n \in \mathbb{N}$ et que $0 \leq u_n \leq 2$, alors $u_n + 1 \geq 1$ et donc $\frac{1}{u_n+1} \leq 1$ ie $0 < 1 < u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n+1} \leq 2$ 1

3) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$, si $\lim u_n = l$, alors le principe du prolongement des inégalités entraîne que $l \in [0, 2]$ 1.

4) Comme $h$ est continue dans $[0, 2]$, et que $\lim u_n = l \in [0, 2]$, on en déduit que $l = \lim u_{n+1} = \lim h(u_n) = h(\lim u_n) = h(l) = \frac{2+l}{1+l}$ ie $l^2 + l = l + 2$ ie $l^2 = 2$ ie $l = \pm\sqrt{2}$. Comme $l \in [0, 2]$, donc $l = \sqrt{2}$ 1.

III-Soit la suite de nombres réels définie par $w_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.

1) On a $w_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{2+u_n}{1+u_n} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{2+u_n}{1+u_n} + \sqrt{2}\right)^{-1}$

$$= \left(\frac{2 + u_n - \sqrt{2} - \sqrt{2}u_n}{1+u_n}\right)\left(\frac{2 + u_n + \sqrt{2} + \sqrt{2}u_n}{1+u_n}\right)^{-1}.$$

Comme $u_n + 1 \neq 0$, donc on a $w_{n+1} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(u_n + \sqrt{2})(1+\sqrt{2}}$.

Comme $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3$, donc, on a $w_{n+1} = (2\sqrt{2}-3)w_n$ 1,5.

2) On vérifie que $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$ et que $w_n = (2\sqrt{2}-3)^n w_0$ où $w_0 = -1$ (le faire !). On en déduit que $\lim w_n = 0$. Comme $w_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$, donc on a $w_n u_n + w_n\sqrt{2} = u_n - \sqrt{2}$ ie $w_n\sqrt{2} + \sqrt{2} = u_n - u_n w_n = u_n(1 - w_n)$ ie $u_n = \sqrt{2}\left(\dfrac{1+w_n}{1-w_n}\right)$ (vu que $w_n \neq 1$ pour $n$ grand). On en déduit que $\lim u_n = \lim \sqrt{2}\left(\dfrac{1+w_n}{1-w_n}\right) = \sqrt{2}$ 1.

IV-On a $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{2+u_n}{1+u_n} - \sqrt{2} = \dfrac{2+u_n-\sqrt{2}-\sqrt{2}u_n}{1+u_n} = \dfrac{(u_n-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{1+u_n}$.

Comme $|u_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2}-1)\dfrac{|u_n - \sqrt{2}|}{1+u_n}$ et que $\dfrac{1}{1+u_n} < 1$, on en déduit que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (\sqrt{2}-1)|u_n - \sqrt{2}|$, et donc que $|u_n - \sqrt{2}| \leq (\sqrt{2}-1)^n |u_0 - \sqrt{2}| = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^n$. On vérifie que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ (le faire !), on en déduit que $\lim |u_{n+1} - \sqrt{2}| = 0$ (par le théorème des deux gendarmes). Donc $\lim(u_{n+1} - \sqrt{2}) = 0$, ie on retrouve que $\lim u_n = \sqrt{2}$ 1.

V-On pose $U = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Comme $2 = u_1 = \max U$, donc $\sup U = 2$ et comme $0 = u_0 = \min U$, donc $\inf U = 0$ 1.

**Exercice 4 [6 pts ]:**

$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier. Comme $f$ est impaire il suffit de l'étudier dans $\mathbb{R}^+$, puis de compléter le tableau et le graphe par symétrie. Comme pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x g(x)$ où $g(x) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x g(x) = +\infty$ 0,5 et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ 0,5. Comme $(g(x)-1)(g(x)^2+g(x)+1) = -1/x^2$, donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x(g(x)-1) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{-1/x^2}{g(x)^2+g(x)+1}\right) = (1/3)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$, donc $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (de plus l'asymptote est au-dessus de la courbe puisque $g(x) < 1$) 0,5. Comme $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, donc pour $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$, on a $f'(x) = [(x^3-x)^{(1/3)}]' = (1/3)(x^3-x)^{(-2/3)}(x^3-x)' = (1/3)\left(\dfrac{3x^2-1}{f(x)^2}\right)$ 1.

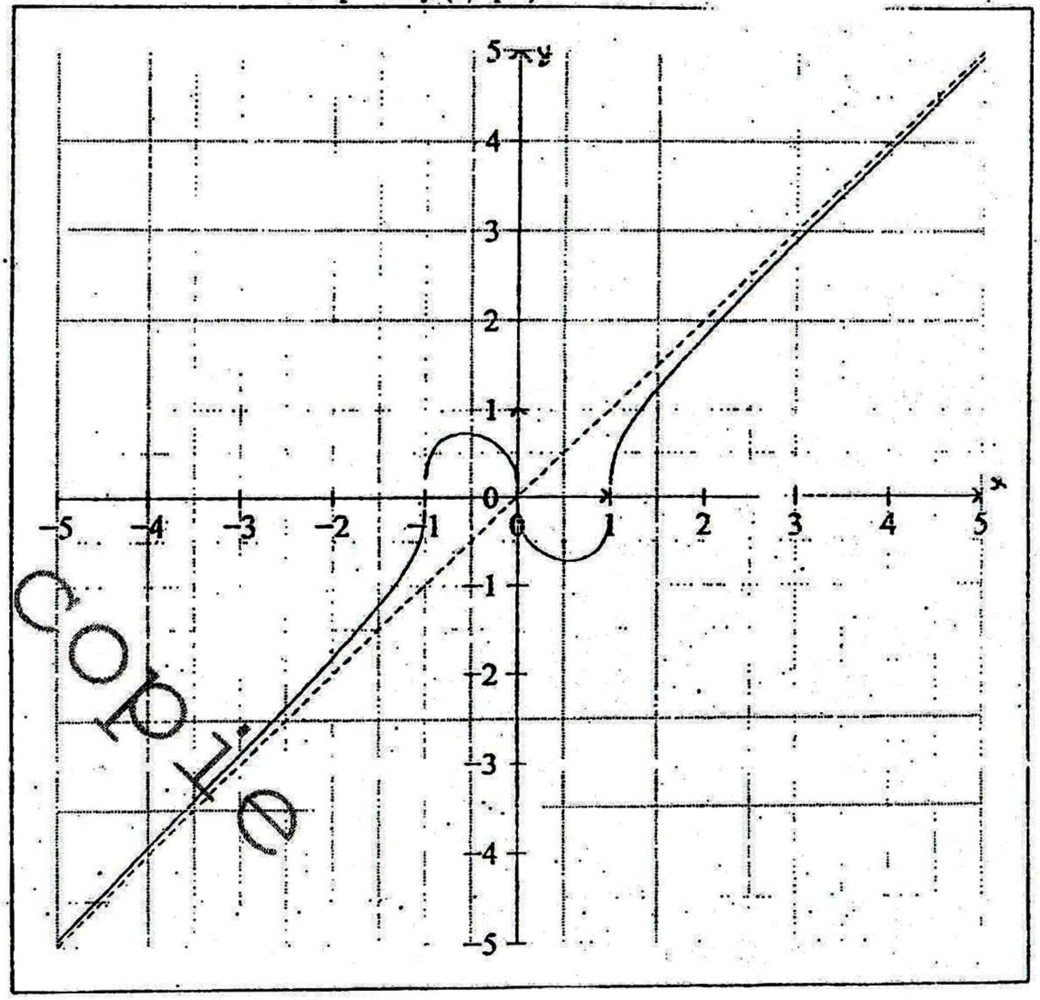
Par suite $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq (1/3) \Leftrightarrow |x| \leq (1/\sqrt{3})$; ie $f$ admet un minimum en $1/\sqrt{3} \approx \frac{5}{10}$ et le calcul donne que $\gamma = f(1/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \approx \frac{8}{10}$ 1.

D'autre part, on a $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ 0,5 et $f'(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}} = +\infty$ 0,5. Enfin le calcul donne que $f''(x) = \left(\dfrac{2(3x^2+1)}{9f(x)^2}\right)\left(\dfrac{-1}{f(x)^3}\right)$, ce qui montre que les points 0 et 1 sont des points d'inflexion 0,5. Donnons le tableau de variation de $f$ et son graphe.

**Tableau de variation de $f$ (0,5 pts) :**

| $x$ | $0$ | | $1/\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\gamma$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Graphe de $f$ (0,5 pts) :**



**U.S.T.H.B** **Math 1 Lic ST**

**FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES** **Section 6, 2012-2013**

# Rattrapage:

## Exercice 1 [3 pts ]:

Pour tout $x, y$ dans $\mathbb{R}$, on pose $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Dans $\mathbb{R}$, $*$ est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? admet-elle un élément neutre ?
Est-ce que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe ?

## Exercice 2 [2 pts ]:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x-1}{\sqrt{|x| - x^2}} > 1$.

## Exercice 3 [10 pts ]:

Calculer les limites suivantes :

$$l_1 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad l_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3},$$

$$l_3 = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+7} - 3)}, \quad l_4 = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2\sin x},$$

$$l_5 = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}{(\sqrt{|x| + 1} - 2)(x-3)}, \quad l_6 = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\sin x},$$

$$l_7 = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{(x-1)(\sqrt{|x| + 8} - 3)}, \quad l_8 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{Log}(1 + \sqrt{x})},$$

$$l_9 = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{x - \sqrt{x+1} - 1}, \quad l_{10} = \lim_{x \to e} \frac{\operatorname{Log} x - 1}{x - e}.$$

(où $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de $x$ et $\operatorname{Log} e = 1$).

$l_3, \dots l_{10}$ peuven aussi se calculer en règle de l'Hôpital

## Exercice 4 [5 pts ]:

Soit la fonction définie par $g(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Étudier la fonction $g$, puis donner son tableau de variation et son graphe.

(On pourra utiliser que $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx \dfrac{8}{10}$, $g\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \approx \dfrac{2}{10}$, $g'\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \approx \dfrac{8}{10}$)

**U.S.T.H.B** **Math 1 Lic ST**

**FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES** **Section 6, 2012 2013**

# Correction du rattrapage:

## Exercice 1 [3 pts ]:

Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors $x * y \in \mathbb{R}$ (le vérifier !), donc, $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$ 0,5. Comme $x * y = y * x$, donc $*$ est une loi commutative 0,5. Comme $(x*y)*z = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3} = x*(y*z)$, donc $*$ est associative 0,5. De plus $*$ admet $e = 0$ comme élément neutre, car si $x \in \mathbb{R}$, alors on a , $x * 0 = x$ 0,5. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x * (-x) = 0 = e$, donc $x$ est inversible dans $\mathbb{R}$ pour la loi $*$ ; en particulier $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien 1.

## Exercice 2 [2 pts ]:

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I) : \dfrac{2x-1}{\sqrt{|x|-x^2}} > 1$ et $\mathcal{D}$ le domaine de définition de $(I)$. Alors $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |x|(1-|x|) = |x| - x^2 > 0 \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge (|x| < 1)$. Par suite si $x \in \mathcal{D} = ]-1, 1[-\{0\}$, alors :
$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 2x - 1 > \sqrt{|x| - x^2} \Leftrightarrow (2x-1 > 0) \wedge [(2x-1)^2 > |x| - x^2)] \Leftrightarrow [(x > 1/2) \wedge (5x^2 - 5x + 1 > 0)]$ 1. Comme $\Delta(5x^2 - 5x + 1) = 5$, donc $\mathcal{S} = (]-1, 1[-\{0\}) \cap ]1/2, +\infty[ \cap (\mathbb{R} - [(5-\sqrt{5})/10, (5+\sqrt{5})/10])$. Comme $1/2 < (5+\sqrt{5})/10 < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{5} < 5$, donc $\mathcal{S} = ](5+\sqrt{5})/10, 1[$ 1.

## Exercice 3 [10 pts ][1 × 10]:

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1} = 1/2,$$

$$l_2 = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1/2.$$

$$l_3 = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}-3)} = \lim_{x\to2^+} \frac{(\sqrt{x+7}+3)(x-2)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)(x-2)} = +\infty,$$

$$l_4 = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x} = (1/2) \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x - \sin(\pi/6)}{x-\pi/6}\right)^{-1} \left(\frac{\sin(\pi/6-x)}{\pi/6-x}\right) = (1/2)\left((\sin x)'_{x=\pi/6}\right)^{-1} = \sqrt{3}/3.$$

$$l_5 = \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{|x|+1}-2)(x-3)} = \lim_{x\to3^+} \frac{(\sqrt{|x|+1}+2)(x-3)}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})(|x|-3)(x-3)} = +\infty,$$

$$l_6 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\pi/4}{x-\pi/4} \, \frac{x-\pi/4}{\sin x - \sin\pi/4} = \left((\cos x)'_{\pi/4}\right)\left((\sin x)'_{\pi/4}\right)^{-1} = -\operatorname{tg}\pi/4 = -1.$$

$l_7 = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)(\sqrt{|x|+8}-3)} - \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{|x|+8}+3)}{(\sqrt{x+3}+2)(x-1)(|x|-1)} =$
$+\infty$, $l_8 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{Log}\,(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{Log}\,(1+\sqrt{x})}\right) = 0.$
$l_9 = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{x-\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)(x-1+\sqrt{x+1})}{(x-1)^2-(x+1)} = \lim_{x\to 3}(x-1+\sqrt{x+1}) = 4$, $l_{10} = \lim_{x\to e} \frac{\mathrm{Log}\,x-1}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\mathrm{Log}\,x-\mathrm{Log}\,e}{x-e} = (\mathrm{Log}\,x)'_{x=e} = (1/x)_{x=e} = 1/e.$
(Vous devez détailler les calculs comme en TD ! )

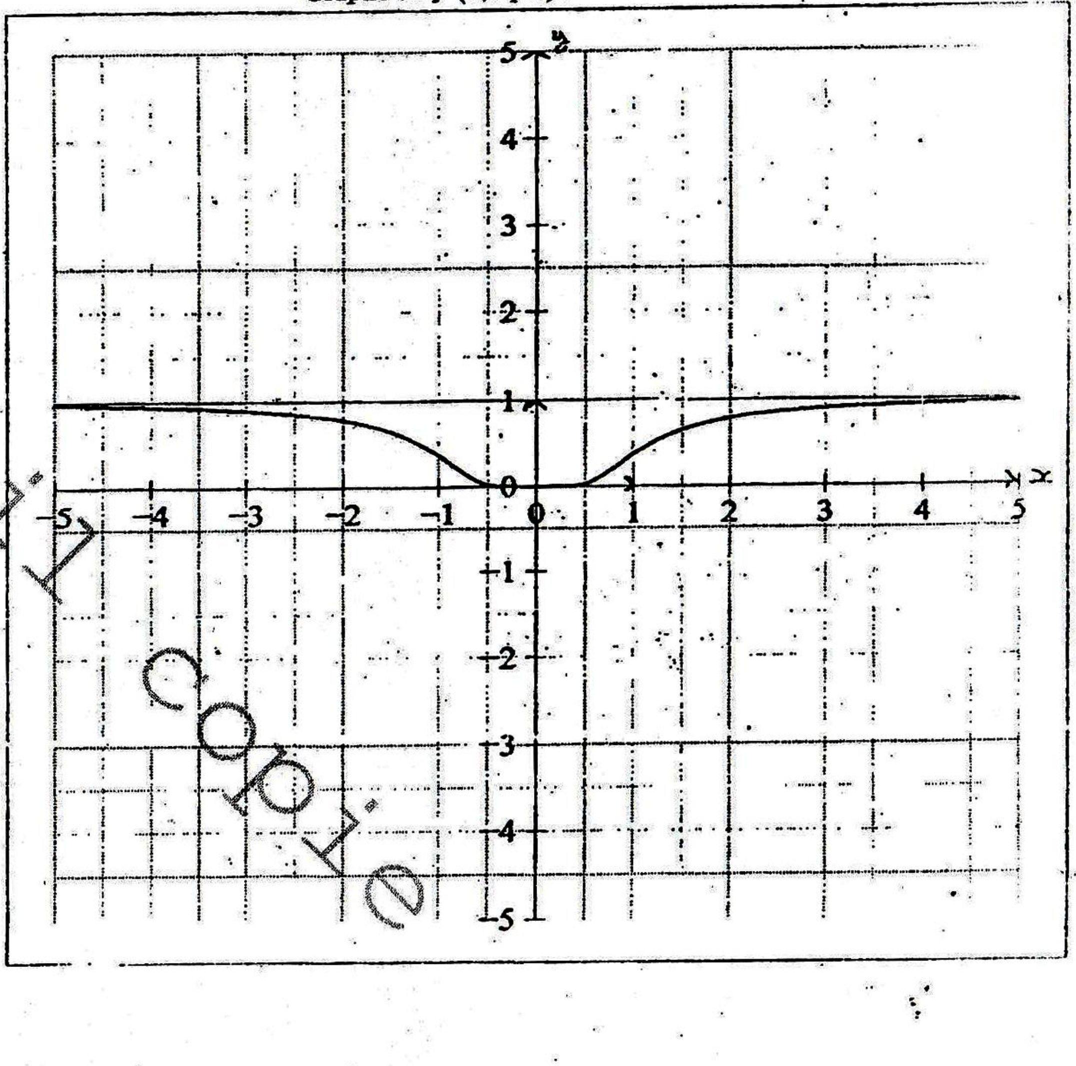
**Exercice 4 [5 pts ]:**

Soit la fonction définie par $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
$g(x)$ est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier. Comme $g$ est paire il suffit de l'étudier dans $\mathbb{R}^+$; puis de compléter le tableau et le graphe par symétrie. On remarque aussi que pour $x \geq 0$, on a $g(x) \geq 0$ (ie $g$ est positive). Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \exp(-\infty) = 0 = g(0)$, donc $g$ est continue en 0 0,5. Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \exp 0 = 1$, donc la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (de plus la courbe de $g$ est en dessous de l'asymptote vu que $g(x) \leq \exp 0 = 1$) 0,5.
Comme $(x^{-2})' = 2x^{-3}$, donc pour $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ 1.
Donc pour $x > 0$, on a, $g'(x) > 0$ (ie $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$) 0,5. De plus, $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0$, car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^u} = 0$ (où $u = \frac{1}{x^2}$) 0,5.
Cherchons alors les points d'inflexions pour préciser l'allure de la courbe. On a pour $x > 0$, que $g''(x) = [-6x^{-4} + (2x^{-3})^2]\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{2-3x^2}{x^6}\right)g(x)$
0,5. Donc pour $x > 0$, on a $g''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2/3 \Leftrightarrow 0 < x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ ie $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est un point d'inflexion 0,5. Enfin, on a $g''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\lim_{t\to+\infty} \frac{t^4}{\exp(t^2)} = 0$, (où $t = \frac{1}{x}$) 0,5.
Donnons le tableau de variation de $g$ et son graphe.

**Tableau de variation de $f$ (0,5 pts) :**

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
| $g'$ | $+$ | |
| $g$ | $0 \nearrow$ | $1$ |

**Graphe de $f$ (0,5 pts) :**



U.S.T.H.B — Math 1 Lic ST

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES — Section 7, 2011-2012

# Examen final:

## Exercice 1 [ 3 pts ]:

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, on pose $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$. Est-ce que $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ ? dans $\mathbb{R}^+ - \{0\}$, est-ce que $*$ est associative ? commutative ? admet un élément neutre ?

## Exercice 2 [2 pts ]:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}} \leq \dfrac{1}{x-3}$.

## Exercice 3 [3 pts ]:

1) Donner une suite bornée non convergente.
2) Donner une suite croissante non convergente.
3) Donner une suite convergente qui n'est ni croissante ni décroissante.

## Exercice 4 [7 pts ]:

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(2x))^2}{\cos x - 1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Log}|x|}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{Log} x,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin\sqrt{x}}{3x - \cos\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to -\infty} x^2 \exp(-x^2 - x).$$

## Exercice 5 [5 pts ]:

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2) Montrer que : i) si $x \geq 1$, alors $f(x) \geq x$ ;
   ii) si $x \leq -1$, alors $f(x) < 0$.
3) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$.
4) En déduire le tableau de variation et le graphe de $f(x)$.

# Correction de l'examen final:

**Remarques et rectifications (test 2 et td) :**

Test 2, sujet 6, Question 2 : $l_2 = -\infty$ ; sujet 7, Question 2 : $l_1 = 4$ ; sujet 8, Question 1 : Pour le contre exemple on peut prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 8 de la série : Si $l = \lim_{x\to(\pi/4)^-} \frac{\sqrt{\cos 2x}}{x-\pi/4}$, alors, comme $(x-\pi/4)' = 1 \neq 0$, la règle de l'Hôpital, donne que $l = \lim_{x\to(\pi/4)^-} \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} = -1/(0^+) = -\infty$. D'autre part, si $g(x) = \sqrt{\cos 2x}$, alors on voit que $g$ est définie pour $\cos 2x \geq 0$ ie $x \in D_g = \cup_{k\in\mathbb{Z}} [-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$, et que $g'_g(\pi/4) = l$, ie $g$ n'est pas dérivable en $\pi/4$. Comme $g$ est paire de période $\pi$, on en déduit que le domaine de dérivabilité de $g$ est $\cup_{k\in\mathbb{Z}} ]-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi[$.

**Exercice 1 [ 3 pts ]:**

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, on pose $x * y = \frac{xy}{x+y}$. Si $x, y \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, alors $x * y \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ ; donc, $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ (0,5 pts). Comme $x * y = x * x$, donc $*$ est une loi commutative (0,5 pts). Comme $(x*y)*z = \left(\frac{xy}{x+y}\right) z \left(\frac{xy}{x+y} + z\right)^{-1} = \frac{xyz}{xy+yz+zx}$, et qu'on vérifie de la même façon que $x*(y*z) = \frac{xyz}{xy+yz+zx}$, donc $*$ est associative (1 pt). Par contre $*$ n'admet pas d'élément neutre, car si $e$ est l'élément neutre alors on a $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $x * e = x$, ie $xe = (x+e)x$, et donc $e = x + e$ ie $x = 0$ ce qui est absurde (1 pt).

**Exercice 2 [2 pts ]:**

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \leq \frac{1}{x-3}$.

D'abord, il faut se placer dans le domaine de définition ie $x^2 - 4 > 0$ et $x - 3 > 0$. Donc $x \in ]3, +\infty[$. Dans $]3, +\infty[$, notre inéquation équivaut à $(x-3)^2 \leq x^2 - 4$ ie à $x \geq 13/6$. Finalement $]3, +\infty[$ est l'ensemble des solutions.

**Exercice 3 [3 pts ](3 × 1):**

1) $(-1)^n$ est une suite bornée non convergente.
2) $n^2$ est une suite croissante non convergente.
3) $\frac{(-1)^n}{n}$ est une suite convergente qui n'est ni croissante ni décroissante.

**Exercice 4 [7 pts ](1+1+1+1,5+1,5):**

Calculons les limites suivantes :

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1,$

$l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(2x))^2}{\cos x - 1} = 16 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(2x))^2}{(2x)^2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x/2)^2}{-2\sin^2(x/2)} = -8,$

$l_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Log}\,|x|}{x-1} = +\infty,\ l_4 = \lim\limits_{x\to 0^+} x \,\mathrm{Log}\, x = -\lim\limits_{t\to+\infty} (\mathrm{Log}\, t)/t = 0$

(où $t = 1/x$), $l_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \sin\sqrt{x}}{3x - \cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + (\sin\sqrt{x})/x}{3 - (\cos\sqrt{x})/x} = 1/3,$

$l_6 = \lim_{x\to-\infty} x^2 \exp(-x^2 - x) = \lim_{x\to-\infty} \exp[2\,\mathrm{Log}\, x - x^2 - x]$

ie $l_6 = \lim_{x\to-\infty} \exp[-x^2(+1 - ((2\,\mathrm{Log}\, x)/(x^2)) + 1/x)] = \exp[-\infty] = 0.$

**Exercice 5 [6 pts ](1+1+1+3):**

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ (*). $f$ est définie pour $|x| \geq 1$.

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et comme on a $f(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$ (**), donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2) Montrons que : (si $x \geq 1$, alors $2x \geq f(x) \geq x$) et que, (si $x \leq -1$, alors $f(x) < 0$). En effet, (*) entraîne que si $|x| \geq 1$ (ie si $x$ est dans le domaine de définition de $f$), alors $f(x) \geq x$, et si $x \geq 1$, on a aussi que $2x \geq f(x)$. Si $x \leq -1$, alors (**) entraîne que $f(x) < 0$.

3) Vérifions que $\forall\, x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$. En effet,

$f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}.$

4) Déduisons le tableau de variation et le graphe de $f(x)$. i) D'après la question 3, on a ($f'(x) > 0$, si $x > 1$), et ($f'(x) < 0$, si $x < -1$). D'autre part, on a $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$ (0,5 pts).

ii) De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2-1} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, ie $y = 2x$ est asymptote en $+\infty$ (le graphe de $f$ étant dessous) (0,5 pts).

iii) De même $y = 0$ est une asymptote en $-\infty$ (le graphe de $f$ étant dessous) (0,5 pts).

iv) Enfin, puisque $(x-1)' \neq 0$ on a d'après la règle de l'Hôpital que $f'_d(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = +\infty$. (on voit de même que $f'_g(-1) = -\infty$) (0,5 pts).

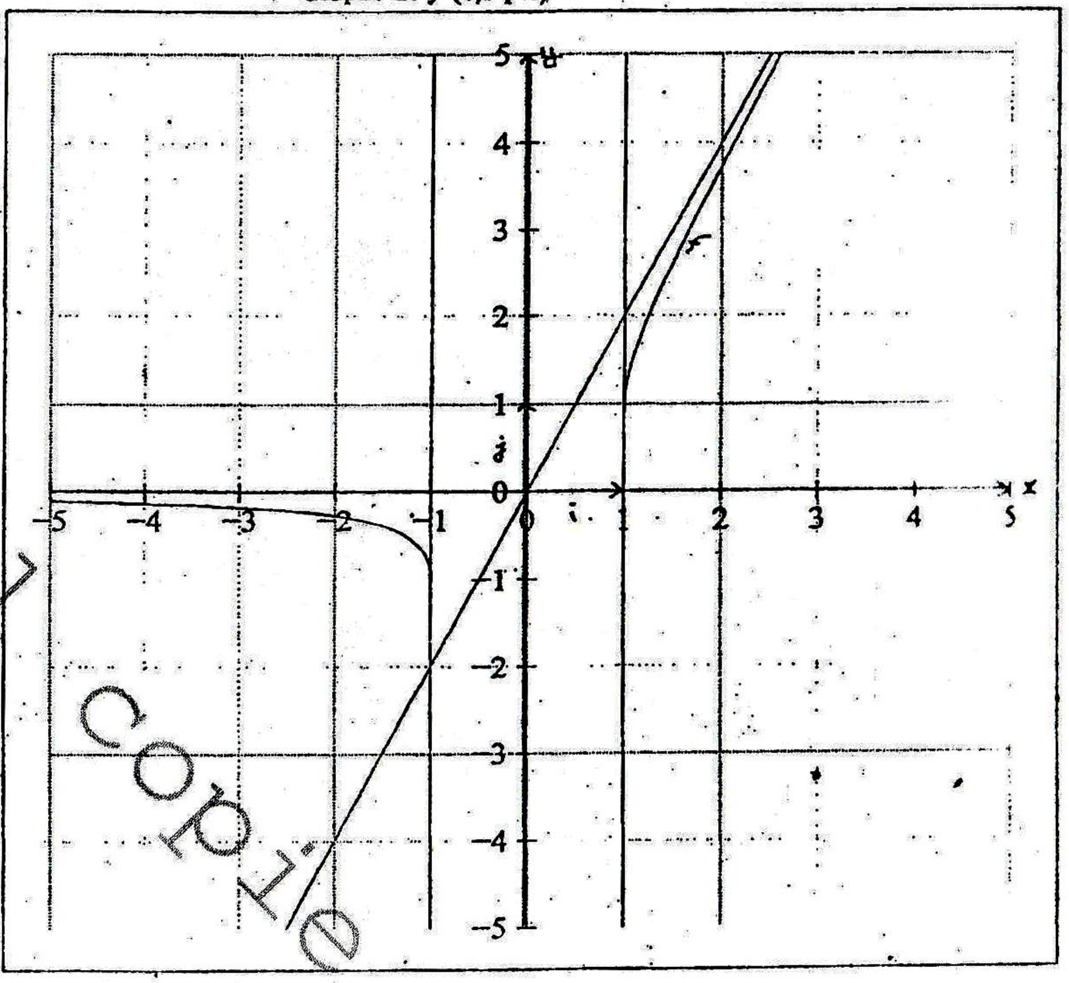
**Remarque :**

La correction de certaines questions n'est pas détaillée; dans ce cas il faut faire comme on a vu en TD.

Tableau de variation de $f$ (0,5 pts) :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Graphe de $f$ (0,5 pts) :



USTHB LMD ST SECTIONS 22/28

Faculté de mathématiques 2010/2011

## Epreuve finale Math1

**Exercice 1** :Soit l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5$$

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, calculer $\dot{0}$ $et$ $\dot{2}$.

**Exercice 2** : On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 1 \quad ; \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a^2}{U_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{où } 0 < a < 1$$

1/ Montrer que $a < U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2/ Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente. Calculer sa limite.

**Exercice 3** : Soit $a$ un réel strictement positif, on considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{a} & si\ x \leq 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} + (x - a)E(x) - \sqrt{x} & si\ 0 < x \leq a \end{cases}$$

1/ Déterminer le domaine de définition de $f$.

2/ Pour quelle valeur de $a$ la fonction $f$ est-elle continue en $x_0 = 0$ ?

3/ Pour la valeur de $a$ trouvée en 2/ montrer qu'il existe au moins un réel $c$ dans l'intervalle $]0, a[$ solution de l'équation $f(x) = 0$.

**Exercice 4** : Soit la fonction $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1/Donner le D.L de $f$ à l'ordre 3 au voisinage 0.

2/ En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point $x_0 = 0$, sa position par rapport à celle-ci et que le point (0,0) est un point d'inflexion.

**Indication** : On donne les développements limités suivants au voisinage de 0:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

USTHB LMD Section 22/28

Faculté de mathématiques Corrigé type du EMD 1. ST 2010/2011

EXo1 : 03,5 $f : \mathbb{R} \to [5, +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5$

1) $R$ est une relation d'équivalence

0,5 1) $R$ réf : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x R x$.

$x R x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ vérifiée

0,5 2) $R$ symétrique $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x R y \Rightarrow y R x$

$x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow f(y) = f(x) \Leftrightarrow y R x$.

0,5 3) $R$ transitive $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$.

$\left\{\begin{array}{ll} x R y & \Rightarrow f(x) = f(y) \\ y R z & \Rightarrow f(y) = f(z) \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x R z$.

$R$ réf, sym et transitive $\Rightarrow$ $R$ est une relation d'équiv.

$\dot{0} = \{x \in \mathbb{R} / x R 0\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = f(0) = 8^2 + 5\}$ 1pt

$= \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 8)^2 + 5 = 8^2 + 5\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 8 = \pm 8\}$

$= \{x^2 = 0 \vee x^2 = 16\} = \{x = 0, x = \pm 4\} = \{-4, 0, 4\}$.

$\dot{2} = \{x \in \mathbb{R} / x R 2\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = f(2) = (-4)^2 + 5\}$ 1pt

$= \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 8)^2 + 5 = 4^2 + 5\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 8 = \pm 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 12 \vee x^2 = 4\} = \{\pm 2\sqrt{3}, \pm 2\}$.

Exo 2: 6pts
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a^2}{U_n}\right) \end{cases} \quad 0 < a < 1$$

1) $U_n > a$.

par récurrence: $U_0 = 1 > a$ vérifiée.

on suppose que $U_n > a$ et on démontre que $U_{n+1} > a$.

Calculons $U_{n+1} - a = \frac{1}{2U_n}(U_n - a)^2$. 2pts

comme $U_n > a > 0 \Rightarrow U_{n+1} - a > 0$.

$\Rightarrow U_{n+1} > a$

donc $U_n > a$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

2) $(U_n)_n$ est décroissante:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a^2}{U_n}\right) - U_n = \frac{a^2 - U_n^2}{2U_n} = \frac{(a-U_n)(a+U_n)}{2U_n} < 0 \quad (1)$$

car $U_n > a > 0$. 1pt

En déduire:

$(U_n)_n$ suite décroissante, minorée par $a$ (1) $\Rightarrow$ elle c.v vers $l$.

tq $f(l) = l$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right)$.

calculer $l$:

$$f(l) = l \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a^2}{l}\right) \Leftrightarrow \frac{(a-l)(a+l)}{2l} = 0. \quad 0{,}5$$

$\Rightarrow l = a$ ou $l = -a$

Comme ~~Comme~~ $U_n > a > 0$ alors $l = a$. 1 1,5

Exo 3 : (6pts) $a>0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1/a & x \leq 0 \\ \dfrac{\sin(ax)}{x} + (x-a)\,E(x) - \sqrt{x} & 0 < x \leq a. \end{cases}$$

1) $D_f = \mathbb{R}_- \cup \,]0,a] = \,]-\infty, a]$. (1)

2) $f$ continue en $x_0 = 0 \iff \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{a}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} x^2 + x + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}$. (0,5)

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} + (x-a)\,E(x) - \sqrt{x}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} a \cdot \dfrac{\sin(ax)}{ax} + \underbrace{(x-a)\,E(x)}_{0} - \underbrace{\sqrt{x}}_{0}$

$= a$. (1)

$\dfrac{1}{a} = a \iff a^2 = 1 \implies a = \pm 1 \implies a = 1$ car $a>0$. (0,5)

3) $a = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + (x-1)\,E(x) - \sqrt{x}$. $\quad 0 < x \leq 1$.

Appliquons le théorème des V.I à $f$ sur $[0,1]$.

$f$ est continue en $0$ d'après 2).

* Continuité de $f$ sur $]0,1[$. (1)

$\forall x \in \,]0,1[ \quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + \sqrt{x}$.

$f$ est cont comme quotient et somme de fcts continues.

* continuité de $f$ à gauche de $1$. (1)

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{\sin(x)}{x} + (x-1)\,E(x) - \sqrt{x} = \sin(1) - 1 = f(1)$.

* $f$ cont sur $[0,1]$. (0,5) $\begin{cases} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = \sin 1 - 1 < 0 \end{cases}$

d'après le T.V.I il existe $c \in \,]0,1[$ tq $f(c) = 0$ (0,5)

(3)

Exo 4 : (4,5)

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1) Effectuons la division suivant les puissances croissantes des D.L de $\arcsin x$ et de $\sqrt{1-x^2}$ au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 3.

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}.$$

$$\begin{array}{r|l} x + \frac{1}{6}x^3 & 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ \hline -x \pm \frac{1}{2}x^3 & x + \frac{2}{3}x^3 \\ \hline \frac{2}{3}x^3 & \end{array}$$

$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ (1)

2) L'équation de la tangente à la courbe est

$y = x$. (1)

Position : regardons $f(x) - y = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

comme $\frac{2}{3} > 0$ alors si $x \in \mathcal{V}(0^+)$

(1) le graphe de la fct est au-dessus de la tangente

(1) si $x \in \mathcal{V}(0^-)$ le graphe " au-dessous " "

ainsi $(0, f(0)) = (0,0)$ est un point d'inflexions (0,5)

$f'(x) = 0$ et ne change pas de signe.