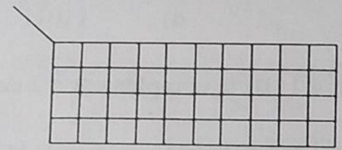
1-30 Coder en binaire réfléchi

a) les colonnes; b) les lignes de la table suivante:



1-31 Écrire en B C D les nombres décimaux suivants:

a) 8732; b) 4149;

c) 7032; d) 4096.

1-32 Écrire l'équivalent décimal des nombres binaires B C D suivants:

a) 0111 0101 1001 1000 0110;

b) 0010 0101 0111 0001 0001.

1-33 Donner le code ASCII de F.

1-34 Donner le symbole correspondant à 1001110 en ASCII.

1-35 Donner le nombre standard de colonnes d'une carte perforée.

1-36 Faire le schéma de la lettre A sur un ruban perforé en code ASCII (huit *moments*).

1-37 Déterminer le nombre de fils requis pour envoyer le nombre 11010: a) en série; b) en parallèle et c) dire quel mode de transmission est le plus rapide.

# 2

# Algèbre de Boole

## 2-1 OBJECTIFS

1. Savoir définir l'ensemble d'application de l'algèbre de Boole ainsi que les trois opérations de base: Négation, ET (intersection), OU (union). Connaître la table de vérité de chacune de ces opérations et leur symbole graphique (porte).
2. Connaître les huit lois fondamentales de l'algèbre de Boole, savoir implanter chacune d'elles à l'aide de portes, savoir les prouver par une table de vérité et savoir les appliquer.
3. Savoir dresser la table de vérité d'une fonction logique et savoir l'implanter.
4. Savoir donner une définition sous forme algébrique ou d'une table de vérité des opérations NON-OU, OU exclusif et NON-ET.
5. Savoir démontrer, implanter et appliquer les relations de base de l'algèbre de Boole.
6. Connaître les deux théorèmes de De Morgan, savoir les prouver, les appliquer et les implanter.
7. Savoir utiliser la dualité de l'algèbre de Boole pour transposer une relation en une autre.
8. Savoir simplifier algébriquement une fonction logique.

## 2-2 INTRODUCTION

Nous allons étudier maintenant une algèbre semblable, sous certains aspects, à l'algèbre «classique» dont elle diffère cependant de manière caractéristique. D'importantes applications du domaine des ordinateurs et des appareils de mesure numériques reposent sur elle. Cette algèbre, objet de ce chapitre, porte divers noms: algèbre des propositions, algèbre de la logique ou, le plus souvent, *algèbre de Boole* son inventeur vers 1850.

L'algèbre de Boole est un ensemble de variables à deux états, de *valeurs de vérité* 1 (*vrai*), 0 (*faux*), muni d'un nombre limité d'*opérateurs*: NON, ET, OU. La manipulation de ces *variables* dites *booléennes* à l'aide de ces opérateurs donne des *fonctions*, booléennes elles-aussi, car leur résultat est une variable booléenne.

Nous verrons ci-dessous les opérateurs et les lois fondamentales, ou axiomes, sur lesquelles reposent cette algèbre. La variable «le circuit est ouvert» vraie (1) ou fausse (0), selon le cas, est un exemple de variable booléenne.

## 2-3 OPÉRATIONS, OU FONCTIONS, DE BASE DE L'ALGÈBRE DE BOOLE

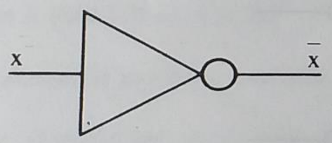
### 2-3-1 OPÉRATION À UNE VARIABLE: OPÉRATION NON

Soit x une variable booléenne: sa *négation*, NON x, appelée aussi *complément* de x, sera notée $\bar{x}$ (lire x barre). NON x sera également une variable booléenne.

Il est commode d'indiquer sous forme de tables les valeurs des variables soumises aux opérateurs et ce pour toutes les *combinaisons* possibles des valeurs de ces variables. Ces tables s'appellent des *tables de vérité*. Nous les introduirons de façon axiomatique. Par définition x peut prendre la valeur 0 ou 1. On aura pour l'opération NON la table de vérité ci-dessous. L'on voit que $\bar{x}$ est une variable booléenne «inversée» par rapport à x, d'où le nom d'*inverseur* donné au dispositif effectuant cette opération appelée aussi de ce fait *inversion*.

| Entrée | Sortie |
|---|---|
| x | $\bar{x}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Table de vérité




Symbole graphique

Pour concrétiser le cours, nous choisirons une technologie, parmi beaucoup d'autres, d'implantation des fonctions de base étudiées. La technologie retenue est le *circuit intégré* TTL série 74 de la société Texas Instruments Incorporated. C'est la plus répandue et, de plus, elle se prête bien à l'expérimentation. TTL est l'abréviation de «*Transistor Transistor Logic*». Toutes les fonctions sont *implantées* à l'aide de «*portes*» de la série TTL logées dans ses boîtiers rectangulaires normalisés comportant, pour la plupart, quatorze *broches*. La tension d'alimentation est de +5 V par rapport à la masse. Les tensions de sortie possèdent deux niveaux: un *niveau bas* «L» compris entre 0 et 0,8 volt et un *niveau haut* «H» compris entre 3 et 5 volts.

Le circuit 7404 d'*implantation* de l'inversion ou négation comporte six inverseurs. L'assignation des broches est donnée par le *schéma de brochage* de la figure 2-1. (Tous les schémas proviennent du catalogue de la société Texas Instruments Incorporated).



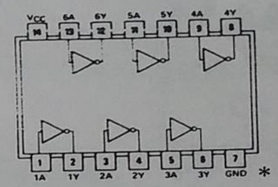



**Figure 2-1** Implantation de l'inversion par le CI 7404 comprenant six inverseurs.

### 2-3-2 OPÉRATIONS À DEUX VARIABLES

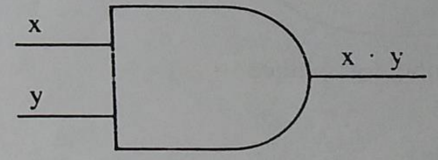
#### 2-3-2-1 Opération ET

Soit x et y deux variables booléennes. Le résultat de x ET y est, selon la table de vérité ci-dessous, une variable booléenne.

| Entrées | | Sortie |
|---|---|---|
| x | y | x ET y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Les combinaisons possibles des entrées apparaissent dans l'ordre binaire naturel.

L'opérateur ET est aussi noté «·», la table justifie cette notation, d'où x ET y = x · y. Le résultat peut être désigné par une autre lettre, z par exemple, d'où l'on aura x ET y = z.




Symbole graphique

*Dans le but de préserver, dans toute la mesure du possible, l'intégrité des schémas et fiches signalétiques de la société Texas Instruments Incorporated, nous laisserons tels quels les termes anglais y figurant. Nous prions le lecteur peu familiarisé avec ces expressions de se reporter au lexique anglais-français figurant à l'appendice B.

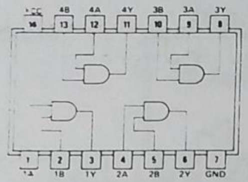


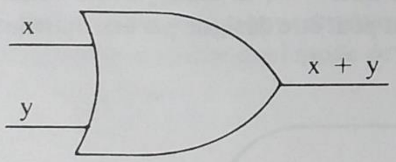
**Figure 2-2** Implantation de la fonction ET par le CI 7408 comprenant quatre portes ET à deux *entrées*.

### 2-3-2-2 Opération OU

Soit x et y deux variables booléennes. Le résultat de x OU y est, selon la table de vérité ci-dessous, une variable booléenne.

| x | y | x OU y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

L'opérateur OU est aussi noté « + », on aura donc x OU y = x + y. Le résultat peut être désigné par une autre lettre, z, par exemple, d'où l'on aura x OU y = z.




Symbole graphique

REMARQUE Éviter de confondre l'opérateur + et l'opérateur ET. En langage courant, l'expression «2 et 3 font 5» signifie «2 + 3 = 5» tandis qu'en logique «x ET y» est une *intersection* revenant à une *multiplication*. Le résultat de l'opération ET est 1 si et seulement si tous les opérandes valent 1. Le résultat de l'opération OU est 1 si au moins l'un des opérandes vaut 1. L'opération OU est une *union* revenant à une *addition*.



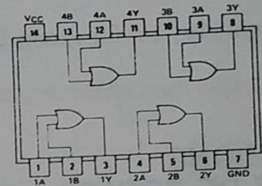
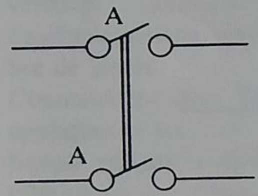
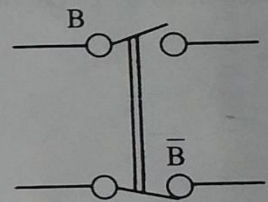


**Figure 2-3** Implantation de la fonction OU par le CI 7432 comprenant quatre portes OU à deux entrées.

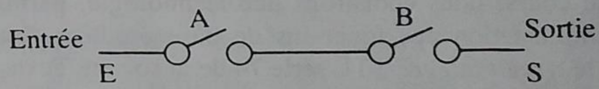
## 2-4 APPLICATION À UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE

L'algèbre de Boole permet d'analyser ou de synthétiser un réseau de contacts électriques. Chaque contact est désigné par une lettre A, B, C, . . . Si deux contacts sont jumelés, ils porteront la même lettre. Si les deux sont ouverts ou fermés en même temps, on les désignera simplement par la même lettre. Par contre, si l'un est ouvert pendant que l'autre est fermé on les désignera par la même lettre mais l'une sera le complément de l'autre. Par exemple:



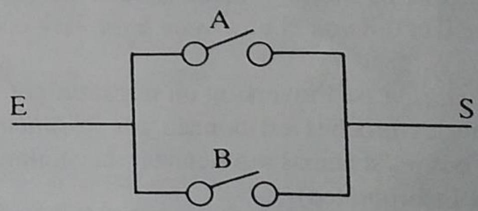

Les contacts peuvent être montés en série:




Si on a une tension en E on n'aura une tension en S que si A et B sont fermés. On notera ce cas par l'équation:

S = A · B : ET logique

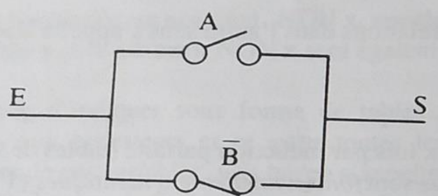
Si les contacts sont montés en parallèle on aura le schéma:



Si on a une tension en E, on aura une tension en S si A ou B est fermé ou si les deux le sont. Ce cas sera représenté par l'équation:

$$S = A + B : \text{OU logique}$$

Si un des contacts est normalement fermé, il sera désigné par sa lettre complémentée. Le réseau ci-dessous, par exemple, aura pour équation $S = A + \overline{B}$.




## 2-5 AXIOMES OU LOIS FONDAMENTALES DE L'ALGÈBRE DE BOOLE

Soit A, B et C trois variables booléennes, les opérateurs NON, ET et OU et les tables de vérité axiomatiques vues ci-dessus. Nous pouvons dès lors énoncer les lois suivantes vérifiables par les tables de vérité correspondantes.

### 2-5-1 LOIS DE FERMETURE

a) $A \cdot B$ est une variable booléenne définie par la table de vérité de l'opération ET vue ci-dessus.

b) $A + B$ est une variable booléenne définie par la table de vérité de l'opération OU vue ci-dessus.

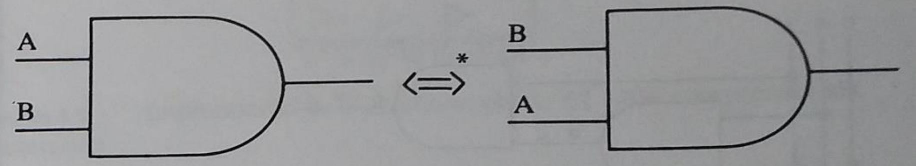
### 2-5-2 LOIS DE COMMUTATIVITÉ

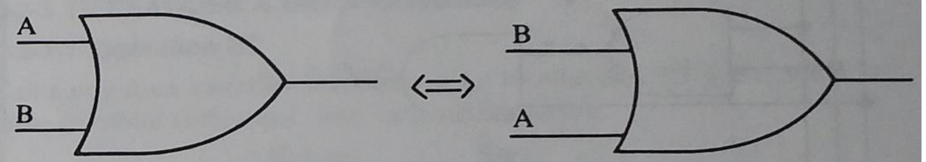
a) $A \cdot B = B \cdot A$

b) $A + B = B + A$



L'observation des tables de vérité nous donne ce résultat immédiat. On n'aura donc pas à distinguer les entrées des portes. Symboliquement on aura:




### 2-5-3 LOIS D'ASSOCIATIVITÉ

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

Vérifions la loi b) par *induction parfaite*, c'est-à-dire par vérification dans tous les cas possibles en utilisant les tables de vérité:

| A | B | C | B + C | A + (B + C) | A + B | (A + B) + C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

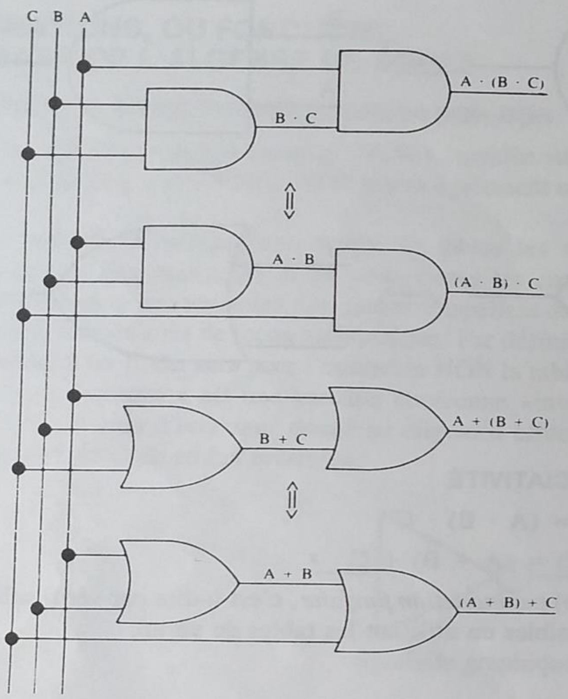
Entrées en binaire naturel

Identité de ces deux colonnes. On a donc vérifié que $A + (B + C) = (A + B) +$

*Mis pour équivalent à

On peut vérifier de la même façon que: A · (B · C) = (A · B) · C

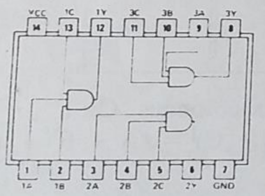
Cela nous permet de faire les schémas des circuits à trois entrées ci-dessous.




On peut donc écrire respectivement les fonctions · et + à trois variables sous les formes: P = ABC et S = A + B + C puisque le regroupement des variables n'a pas d'importance.

Dans la série TTL, le CI 7411 comporte trois portes ET à trois entrées et le CI 7421 en comporte deux à quatre entrées.

7411




7421

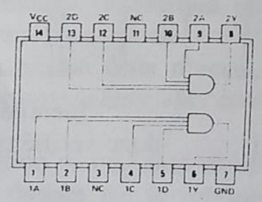



**Figure 2-4** Portes ET à trois entrées (7411) et à quatre entrées (7421)



## 2-5-4 LOIS DE DISTRIBUTIVITÉ

a) de l'opération ET sur l'opération OU

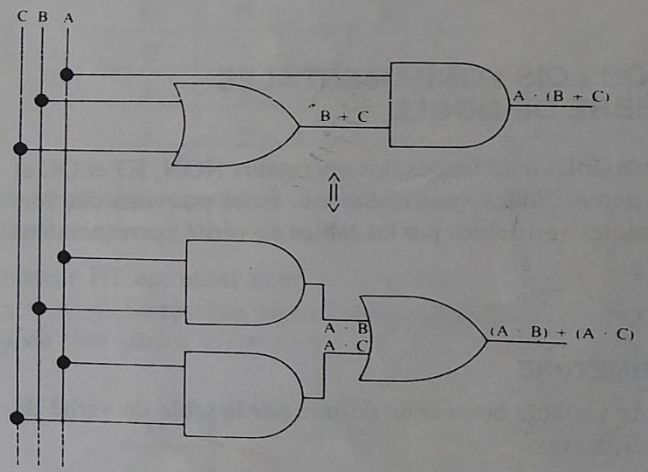
A · (B + C) = (A · B) + (A · C)

b) de l'opération OU sur l'opération ET

A + (B · C) = (A + B) · (A + C)

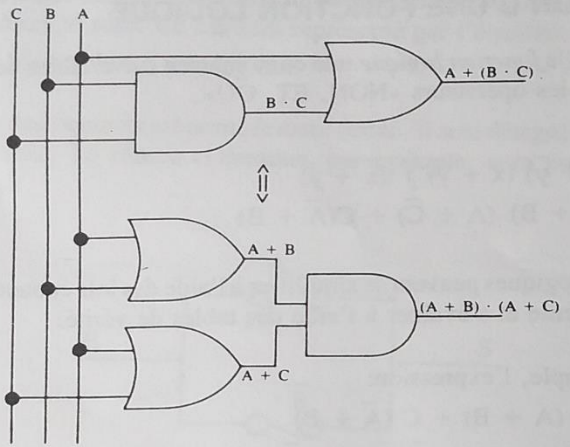
La loi d'écriture de ces relations dans l'autre sens s'appelle la *mise en facteur* ou *en évidence*.

EXERCICE Vérifier ces deux lois par induction parfaite (tables de vérité). Les deux montages ci-dessous sont *fonctionnellement identiques* (1[re] loi de distributivité).




Il est important de noter que le deuxième circuit exige trois portes au lieu de deux pour le premier. Il n'est donc pas indifférent de réaliser les circuits d'une façon ou d'une autre. Pour minimiser les coûts, il peut être utile de minimiser le nombre de portes.

La même remarque s'applique aux circuits suivants fonctionnellement identiques (2[e] loi de distributivité).




Par induction parfaite, puisque la variable booléenne A ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, on a les lois 5, 6 et 7 suivantes:

### 2-5-5 LOIS D'IDEMPOTENCE

a) $A + A = A$, en effet:

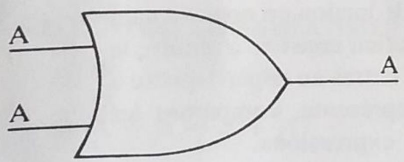
$$\begin{array}{l} A + A \\ 0 + 0 = \\ 1 + 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}} = A$$

b) $A \cdot A = A$, en effet:

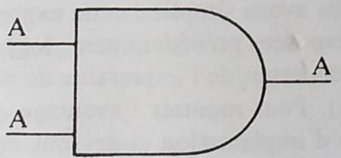
$$\begin{array}{l} A \cdot A \\ 0 \cdot 0 = \\ 1 \cdot 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}} = A$$

Symboliquement:

a)




b)






### 2-5-6 LOIS DE COMPLÉMENTARITÉ

a) $A + \bar{A} = 1$, en effet:

$$\begin{array}{l} A + \bar{A} \\ 1 + 0 = \\ 0 + 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} = 1$$

b) $A \cdot \bar{A} = 0$, en effet:

$$\begin{array}{l} A \cdot \bar{A} \\ 0 \cdot 1 = \\ 1 \cdot 0 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}} = 0$$

### 2-5-7 IDENTITÉS REMARQUABLES

a) $1 \cdot A = A$, en effet:

$$\begin{array}{l} 1 \cdot \bar{A} \\ 1 \cdot 0 = \\ 1 \cdot 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}} = A$$

b) $1 + A = 1$, en effet:

$$\begin{array}{l} 1 + A \\ 1 + 0 = \\ 1 + 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} = 1$$

c) $0 \cdot A = 0$, en effet:

$$\begin{array}{l} 0 \cdot A \\ 0 \cdot 0 = \\ 0 \cdot 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}} = 0$$

d) $0 + A = A$, en effet:

$$\begin{array}{l} 0 + A \\ 0 + 0 = \\ 0 + 1 = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}} = A$$

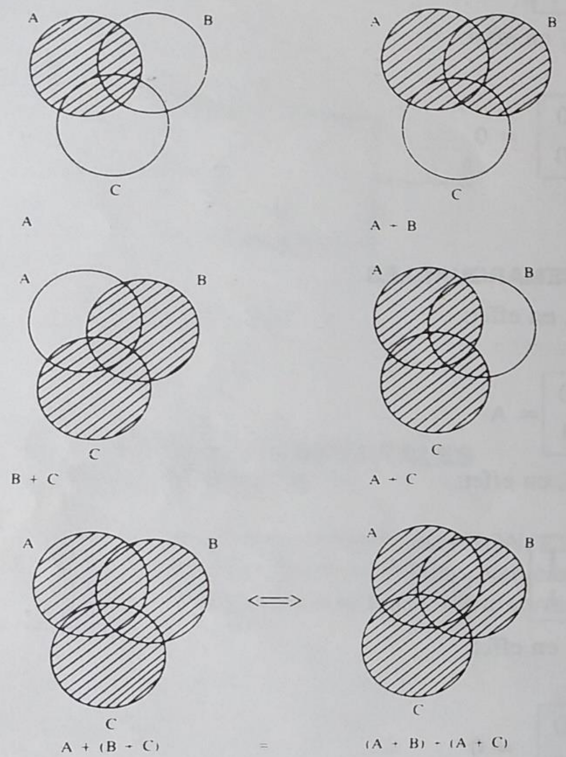
REMARQUE. Les circuits intégrés TTL présentent la caractéristique suivante: laisser une entrée d'une porte ouverte, (c'est-à-dire en l'air: non reliée à une tension ou à la masse) revient à avoir un 1 à cette entrée. Cette remarque est très utile pour les séances de laboratoire.

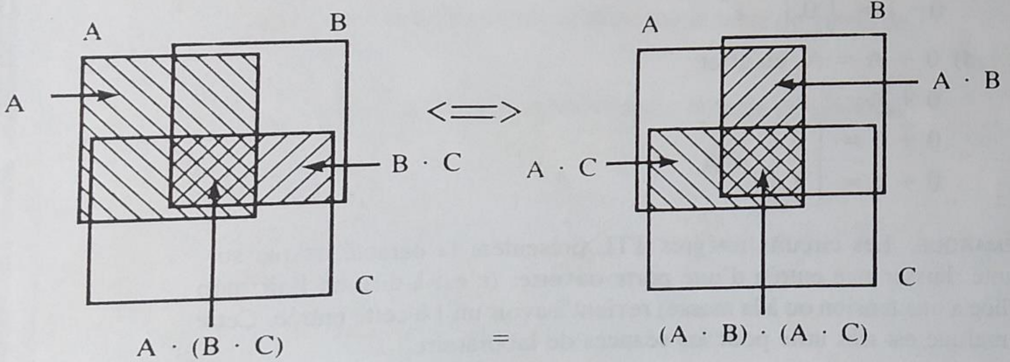
### 2-5-8 LOIS DE DISTRIBUTIVITÉ INTERNE

a) $A + (B + C) = (A + B) + (A + C)$

b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot (A \cdot C)$

Autre façon de vérifier ces lois: par la méthode des *diagrammes de Venn*. On aura, par exemple:






## 2-6 ÉVALUATION D'UNE FONCTION LOGIQUE

**Définition** On appelle *fonction logique* une combinaison de variables booléennes reliées par les opérateurs «NON, ET, OU».

**Exemples** $z = (x + \bar{y})\ (x + y)\ )\ t(\bar{x} + y)$

$S = (A + B)\ (A + \bar{C}) + C(\bar{A} + B)$

Ces fonctions logiques peuvent se simplifier à l'aide des lois énoncées à la section précédente et s'évaluer à l'aide des tables de vérité.

Soit, par exemple, l'expression:

$Y = (A + \bar{B})\ (A + B) + C\ (\bar{A} + B)$

$= (A + \bar{B})\ A + (A + \bar{B})\ B + C\ (\bar{A} + B)$ (distributivité)

$= AA + \bar{B}A + AB + \bar{B}B + C\bar{A} + CB$ (distributivité)

or $AA = A$ (idempotence)

$B\bar{B} = 0$ (complémentarité)

d'où:

$Y = A + \bar{B}A + AB + C\bar{A} + CB$

Or $A + \bar{B}A = A\ (1 + \bar{B})$ (mise en facteur)

$= A\ (1)$

$= A$ (identités remarquables)

d'où

$Y = A + AB + C\bar{A} + CB$

or

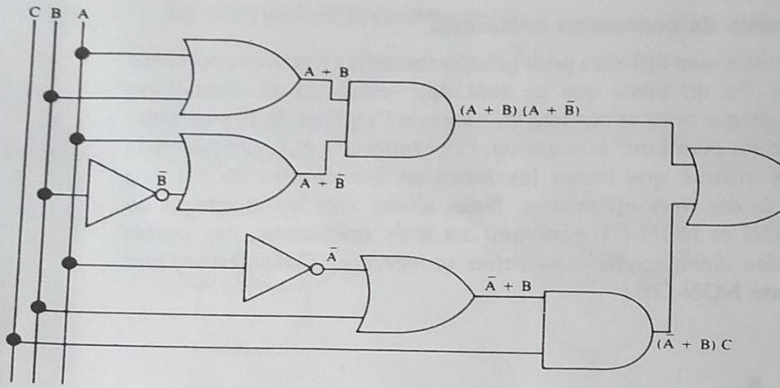
$(A + AB) = A\ (1 + B)$

$= A \cdot (1)$

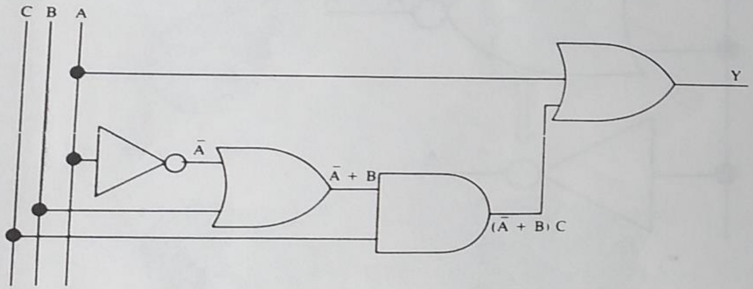
$= A$

donc $Y = A + (\bar{A} + B)\ C$ (mise en évidence)

Nous avons simplifié cette expression par déduction en nous servant de lois exposées précédemment. Ici la simplification consiste à réduire le nombre de lettres de l'expression de départ (sept lettres au départ, quatre à l'arrivée). Pour montrer l'avantage que cela représente, comparons les schémas d'implantation ci-dessous de ces deux expressions.




$Y = (A + B)(A + \bar{B}) + (\bar{A} + B)C$: total huit portes




$Y = A + (\bar{A} + B)C$: total quatre portes

La deuxième implantation économise quatre portes.

Cette expression simplifiée nous permet de dresser une table de vérité plus simple:

| A | B | C | $\bar{A}$ | $\bar{A} + B$ | $(\bar{A} + B)C$ | $A + (\bar{A} + B)C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |



Comme en algèbre «ordinaire» les expressions de l'algèbre booléenne sont innombrables. Mais les fonctions de deux variables prenant seulement les valeurs 0 et 1 sont dénombrables. C'est ce que nous verrons maintenant.

## 2-7 TABLE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Nous avons vu jusqu'à maintenant trois opérations sur les variables booléennes. D'autres opérations sont définies, nommées et utilisées en techniques numériques. Les trois opérations que nous avons étudiées sont la *négation logique* (NON), l'*addition logique* (OU) et la *multiplication logique* (ET). Chacune a été définie axiomatiquement par une table de vérité. Il y a seize fonctions possibles pour deux variables. Voici la liste des valeurs de ces seize fonctions (deux variables permettent quatre combinaisons ($2^2$) et ces quatre combinaisons donnent $2^4 = 16$ combinaisons différentes pour la fonction).

Pour retrouver ces seize fonctions, il suffit d'écrire tous les nombres entiers de 0 à 15 dans l'ordre binaire naturel.

| x | y | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Plusieurs de ces fonctions sont très simples. Par exemple $F_0$ est égale à 0 et $F_{15}$ est égale à 1. Toutes ces fonctions peuvent être exprimées au moyen des opérateurs élémentaires définis précédemment.

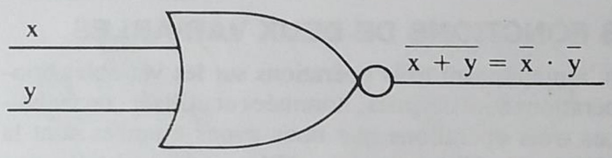
Vérifier si le tableau ci-dessous vous donne la table ci-dessus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $F_0 = 0$ | $F_4 = x\bar{y}$ | $F_8 = xy$ | $F_{12} = x$ |
| $F_1 = \bar{x}\bar{y}$ | $F_5 = \bar{y}$ | $F_9 = \bar{x}\bar{y} + xy$ | $F_{13} = x + \bar{y}$ |
| $F_2 = \bar{x}y$ | $F_6 = x\bar{y} + \bar{x}y$ | $F_{10} = y$ | $F_{14} = x + y$ |
| $F_3 = \bar{x}$ | $F_7 = \bar{x} + \bar{y}$ | $F_{11} = \bar{x} + y$ | $F_{15} = 1$ |

Nous connaissons déjà les fonctions $F_3$, $F_5$ (négations d'une variable), $F_8$ (fonction ET) et $F_{14}$ (fonction OU).

### 2-7-1 AUTRES FONCTIONS TRÈS SOUVENT UTILISÉES

**2-7-1-1** $F_1 = \bar{x}\,\bar{y} = \overline{x + y}$ (selon le deuxième théorème de De Morgan vu plus loin) est appelée fonction ou opération NON-OU, voici son symbole graphique:




Cette fonction est implantée par le circuit intégré 7402 représenté ci-dessous.

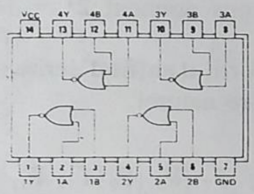
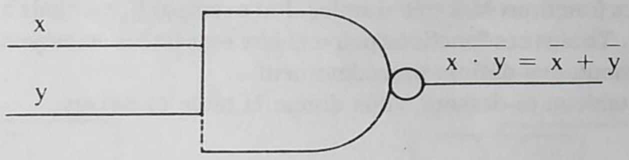


**Figure 2-5** Implantation de la fonction NON-OU par le CI 7402 comprenant quatre portes NON-OU à deux entrées.

**2-7-1-2** $F_7 = \bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ (selon le premier théorème de De Morgan vu plus loin) est appelée fonction ou opération NON-ET, voici son symbole graphique et son circuit intégré:



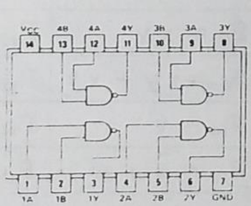



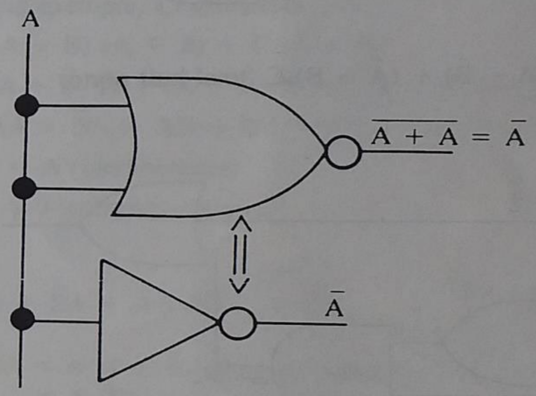
**Figure 2-6** Implantation de la fonction NON-ET par le CI 7400 comprenant quatre portes NON-ET à deux entrées.



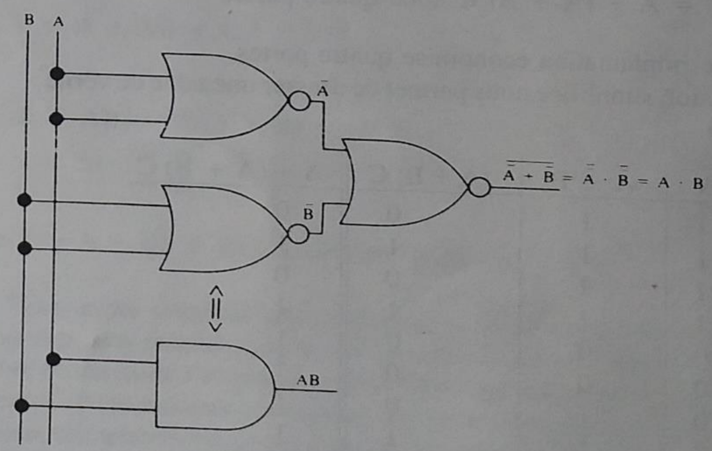
#### 2-7-1-3 Éléments de connexion universels

Ces deux fonctions sont utilisées pour générer toutes les fonctions booléennes possibles. On dit aussi que ce sont des «éléments de connexion universels». Lorsque nous avons jeté les bases de l'algèbre de Boole, nous avons défini trois opérations: la négation, l'opération ET et l'opération OU et nous avons affirmé que toutes les fonctions booléennes étaient une combinaison de ces trois opérations. Nous allons voir les montages de portes NON-OU et NON-ET générant ces trois opérations, ces portes seront donc des *éléments de connexion universels*. Considérons tout d'abord la porte NON-OU.

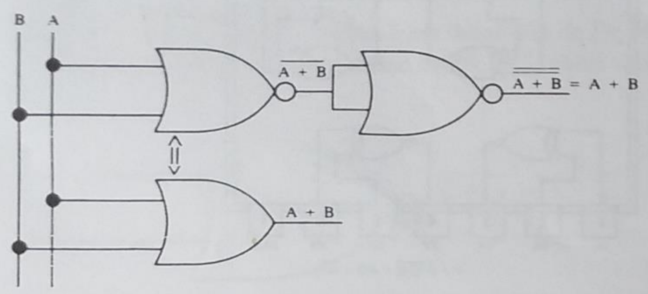
a) Négation




b) Opération ET

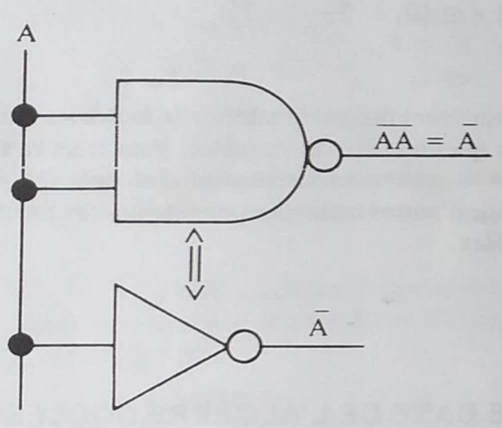


c) Opération OU

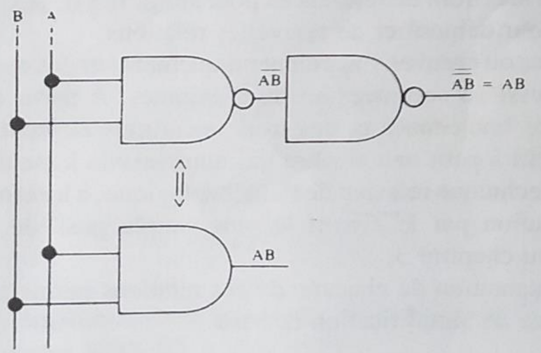



La porte NON-OU est donc un élément de connexion universel. Il en est de même de la porte NON-ET.

a) Négation

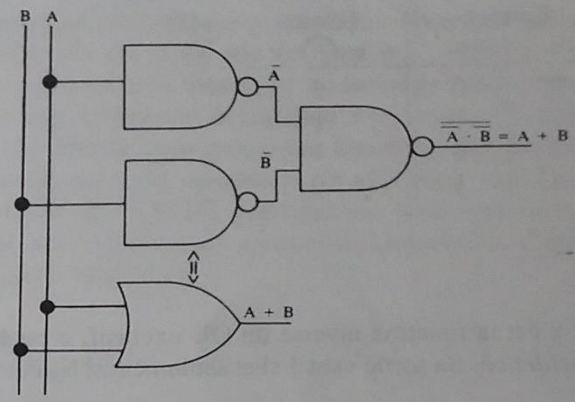



b) Opération ET






c) Opération OU




Un des avantages de ces éléments de connexion universels est de permettre l'implantation de n'importe quelle fonction logique à l'aide d'un seul type de porte. On peut donc en acheter une grande quantité pour bénéficier d'un prix de vente plus bas ou bien en stocker en prévision d'éventuelles pannes.

**2-7-1-4** $F_6 = x\overline{y} + \overline{x}y$ est la fonction OU *exclusif*. Son symbole opératoire est $\oplus$, donc $F_6 = x \oplus y$.

L'usage quotidien de OU est ambigu, il peut signifier «l'un ou l'autre ou les deux» ou «l'un ou l'autre et non les deux».

On peut être élancé ou intelligent ou les deux mais on est à Sorel ou à Montréal et non aux deux endroits à la fois. Il faut donc définir cette opération avec rigueur. C'est pour cela qu'on l'exprime à l'aide d'un opérateur différent.

Symbole graphique du OU exclusif:

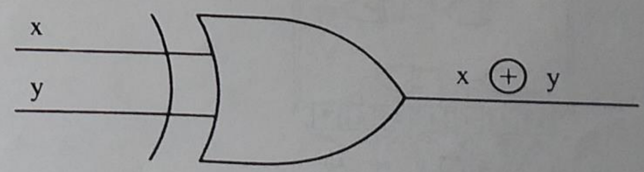
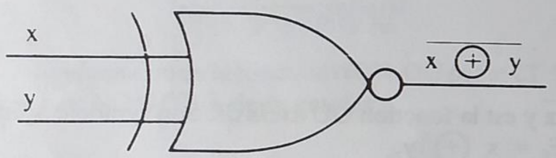


Table de vérité du OU exclusif:

| Entrées | | Sorties |
|---|---|---|
| x | y | $x \oplus y$ |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**2-7-1-5** $F_9 = \bar{x}\,\bar{y} + x\,y$ est la fonction inverse du OU exclusif, c'est la fonction *égalité* ou *coïncidence*. Sa sortie vaut 1 si et seulement si les deux entrées sont égales.

Son symbole graphique est:




Ces deux fonctions sont implantées par des circuits intégrés: le 7486 pour le OU exclusif et le 74266 pour la fonction égalité.

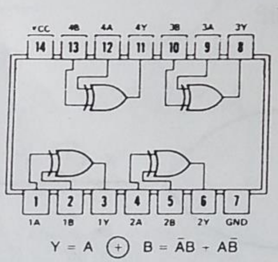



**Figure 2-7** Implantation de la fonction OU exclusif par le CI 7486 comportant quatre portes OU exclusif à deux entrées.



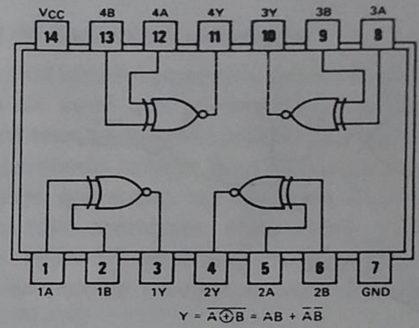



**Figure 2-8** Implantation de la fonction égalité par le CI 74266 comprenant quatre portes NON-OU exclusif à deux entrées.

REMARQUES

1) $F_a = \overline{F_{15-a}}$ avec $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$:

$F_0 = \overline{F_{15}}$ $\quad F_1 = \overline{F_{14}}$

$F_2 = \overline{F_{13}}$ $\quad$ etc . . . $\quad F_7 = \overline{F_8}$

2) On ne peut pratiquement dresser le tableau de toutes les fonctions possibles pour n'importe quel nombre de variables. Pour trois variables, par exemple, on a $2^3 = 8$ combinaisons possibles et donc $2^8 = 256$ fonctions. Il nous faut donc d'autres méthodes pour étudier ces fonctions à trois, quatre, cinq variables.

## 2-8 RELATIONS DE BASE DE L'ALGÈBRE BOOLÉENNE

Nous allons démontrer un certain nombre de relations de base de l'algèbre de Boole. Ces relations serviront de références pour simplifier des expressions booléennes ou pour démontrer de nouvelles relations.

Ces démonstrations ou preuves s'appuient uniquement sur des expressions prouvées elles-aussi ou acceptées à titre d'axiomes. À partir de la définition des variables booléennes et des trois opérations élémentaires nous échafauderons petit à petit une algèbre qui nous servira à mettre en équation un problème technique relevant de l'algèbre logique, à le résoudre et à implanter sa solution par le circuit le plus simple possible. Les applications figurent au chapitre 3.

Le schéma d'implantation de chacune de ces relations permettra de constater leur puissance de simplification de visu.

**Les relations de base:**

$$\boxed{\text{I) } x\,y + x\,\bar{y} = x \qquad \text{I') } (x + y)\,(x + \bar{y}) = x}$$

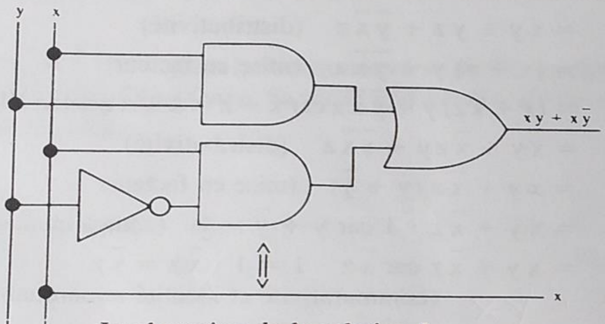
**Preuves**

I) $x\,y + x\,\bar{y} = x$

$= x\,(y + \bar{y})$ (mise en facteur)

$= x \cdot 1$ car $y + \bar{y} = 1$ (complémentarité)

$= x$ car $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (commutativité et identité remarquable)




Implantation de la relation I

I') $(x + y)\,(x + \bar{y}) = x$

$= x\,x + x\,\bar{y} + y\,x + y\,\bar{y}$ (distributivité)

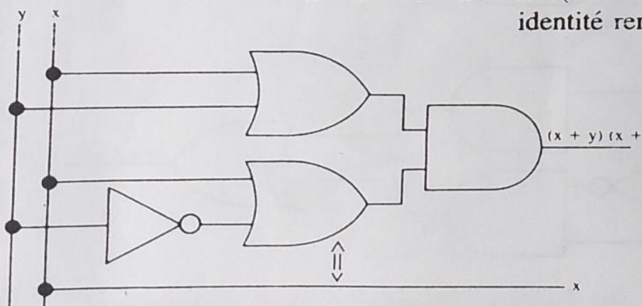
$= x + x\,\bar{y} + y\,x$ car $x\,x = x$ (idempotence) et $y\,\bar{y} = 0$ (complémentarité)

$= x\,(1 + \bar{y} + y)$ (mise en facteur)

$= x\,(1 + 1)$ car $\bar{y} + y = 1$ (complémentarité)

$= x$ car $1 + 1 = 1$ (idempotence)

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (commutativité et identité remarquable)




Implantation de la relation I'



$$\boxed{\text{II) } x + xy = x \qquad \text{II') } x\,(x + y) = x}$$

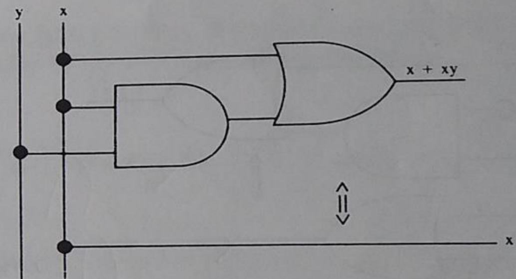
**Preuves**

II) $x + xy = x$

$= x\,(1 + y)$ (mise en facteur)

$= x \cdot 1$ car $1 + y = 1$ (identité remarquable)

$= x$ car $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (commutativité et identité remarquable)



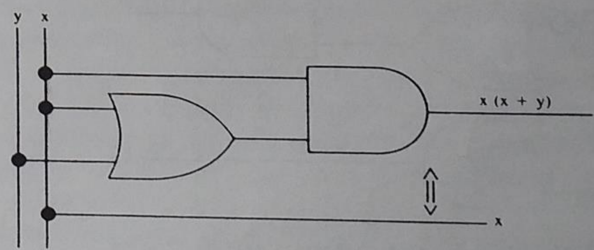

Implantation de la relation II

II') $x\,(x + y) = x$

$= xx + xy$ (distributivité)

$= x + xy$ car $xx = x$ (idempotence)

$= x$ selon II)




Implantation de la relation II'

| III) $x + \bar{x}\, y = x + y$ | III′) $x\,(\bar{x} + y) = x\, y$ |
|---|---|

**Preuves**

III) $x + \bar{x}\, y = x + y$

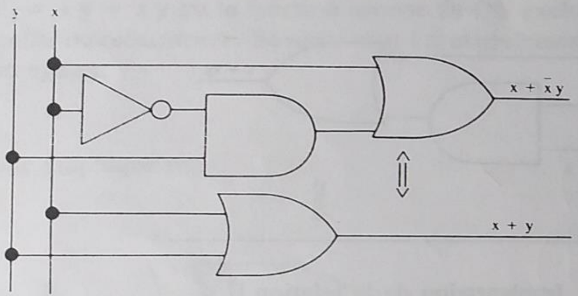
$= x + x\, y + \bar{x}\, y$ car $x + x\, y = x$ selon II)

$= x + y\,(x + \bar{x})$ (mise en facteur)

$= x + y \cdot 1$ car $x + \bar{x} = 1$ (complémentarité)

$= x + y$ car $y \cdot 1 = 1 \cdot y = y$

(commutativité et identité remarquable)



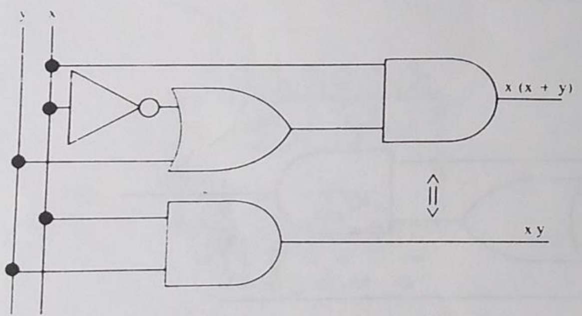

Implantation de la relation III

III′) $x\,(\bar{x} + y) = x\, y$

$= x\, \bar{x} + x\, y$ (distributivité)

$= 0 + x\, y$ car $x\, \bar{x} = 0$ (complémentarité)

$= x\, y$ car $0 + x\, y = x\, y$ (identité remarquable)




Implantation de la relation III′



IV) $x\, y + \bar{x}\, z + y\, z = x\, y + \bar{x}\, z$

IV′) $(x + y)\,(\bar{x} + z)\,(y + z) = (x + y)\,(\bar{x} + z)$

**Preuves**

IV) $xy + \bar{x}\, z + y\, z = x\, y + \bar{x}\, z$

$= x\, y + (y + \bar{x})\, z$ (mise en facteur)

$= x\, y + (y + \bar{y}\, \bar{x})\, z$

car $y + \bar{x} = y + \bar{y}\, \bar{x}$ selon III)

$= x\, y + y\, z + \bar{y}\, \bar{x}\, z$ (distributivité)

$= (x + z)\, y + \bar{y}\, \bar{x}\, z$ (mise en facteur)

$= (x + \bar{x}\, z)\, y + \bar{y}\, \bar{x}\, z$ car $x + z = x + \bar{x}\, z$ selon III)

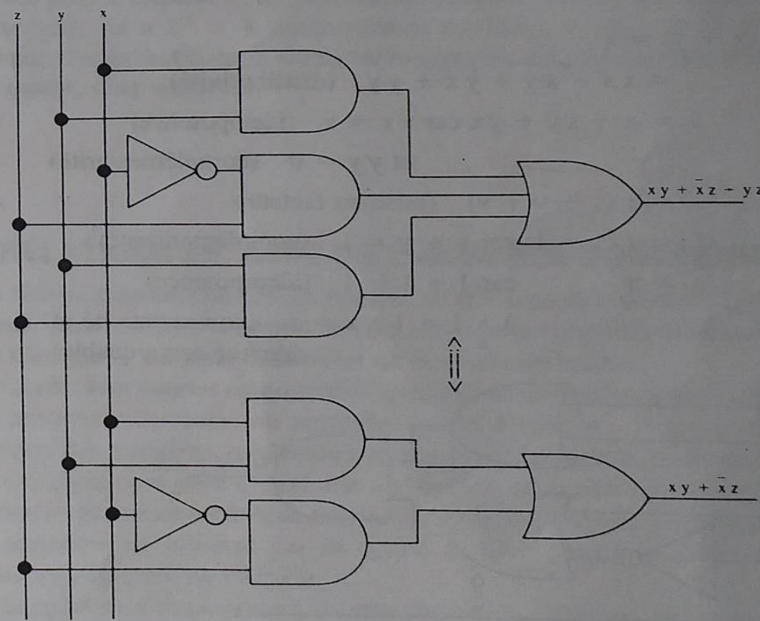
$= x\, y + \bar{x}\, z\, y + \bar{y}\, \bar{x}\, z$ (distributivité)

$= x\, y + \bar{x}\, z\,(y + \bar{y})$ (mise en facteur)

$= x\, y + \bar{x}\, z \cdot 1$ car $y + \bar{y} = 1$ (complémentarité)

$= x\, y + \bar{x}\, z$ car $\bar{x}\, z \cdot 1 = 1 \cdot \bar{x}\, z = \bar{x}\, z$

(commutativité et identité remarquable)




Implantation de la relation IV

IV′) $(x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$

$= (x + y)(\bar{x}y + \bar{x}z + zy + zz)$ (distributivité)

$= (x + y)(\bar{x}y + \bar{x}z + zy + z)$ car $zz = z$ (idempotence)

$= (x + y)\left[(\bar{x}y + \bar{x}z + z(y + 1))\right]$ (mise en facteur)

$= (x + y)(\bar{x}y + \bar{x}z + z)$ car $y + 1 = 1$ (identité remarquable) et $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (commutativité et identité remarquable)

$= (x + y)\left[\bar{x}y + (\bar{x} + 1)z\right]$ (mise en facteur)

$= (x + y)(\bar{x}y + z)$ (voir plus haut)

$= x\bar{x}y + xz + \bar{x}yy + yz$ (distributivité)

$= xz + \bar{x}y + yz$ car $x\bar{x}y = 0y = 0$ (complémentarité et identité remarquable) et $yy = y$ (idempotence)

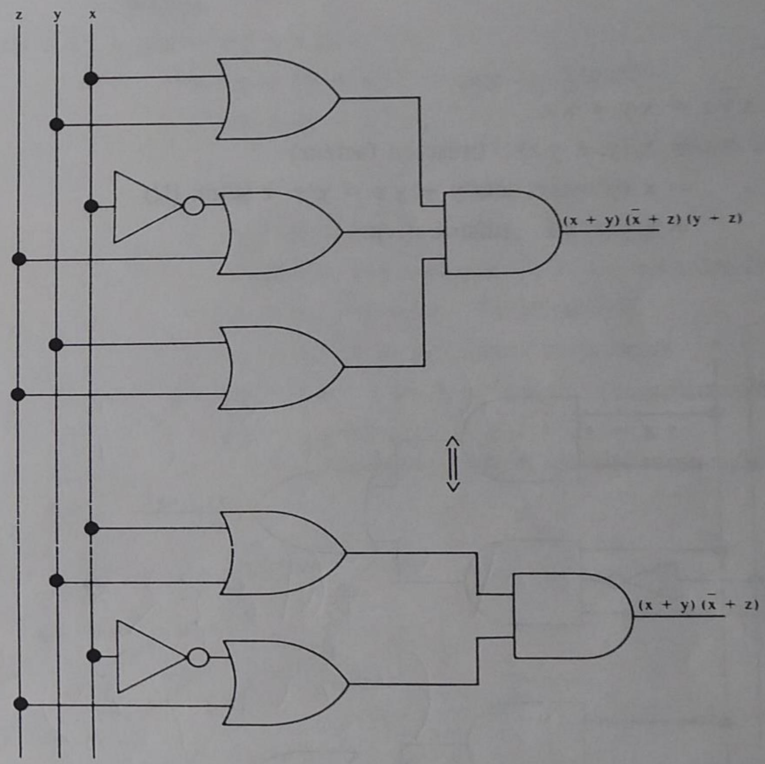
$= 0 + xz + \bar{x}y + yz$ (identité remarquable)

$= x\bar{x} + xz + \bar{x}y + yz$ car $0 = x\bar{x}$ (commutativité et complémentarité)

$= x(\bar{x} + z) + y(\bar{x} + z)$ (mise en facteur)

$= (x + y)(\bar{x} + z)$ (mise en facteur)






Implantation de IV′

V) $x\,y + x\,\bar{y}\,z = x\,y + x\,z$
V') $(x + y)\,(x + \bar{y} + z) = (x + y)\,(x + z)$

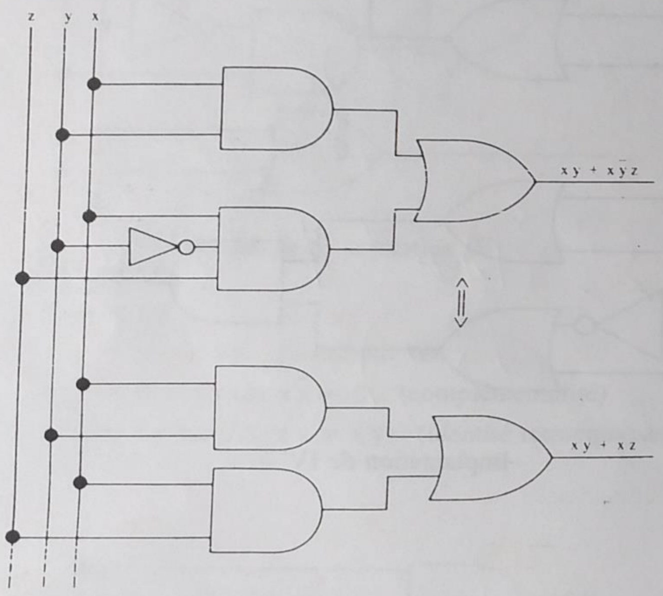
**Preuves**

V) $x\,y + x\,\bar{y}\,z = x\,y + x\,z$

$= x\,(y + \bar{y}\,z)$ (mise en facteur)

$= x\,(y + z)$ car $y + \bar{y}\,z = y + z$ selon III)

$= x\,y + x\,z$ (distributivité)




Implantation de la relation V



V') $(x + y)\,(x + \bar{y} + z) = (x + y)\,(x + z)$

$= x\,x + x\,\bar{y} + x\,z + y\,x + y\,\bar{y} + y\,z$ (distributivité)

$= x + x\,\bar{y} + x\,z + y\,x + y\,z$
car $x\,x = x$ (idempotence)
et $y\,\bar{y} = 0$ (complémentarité)

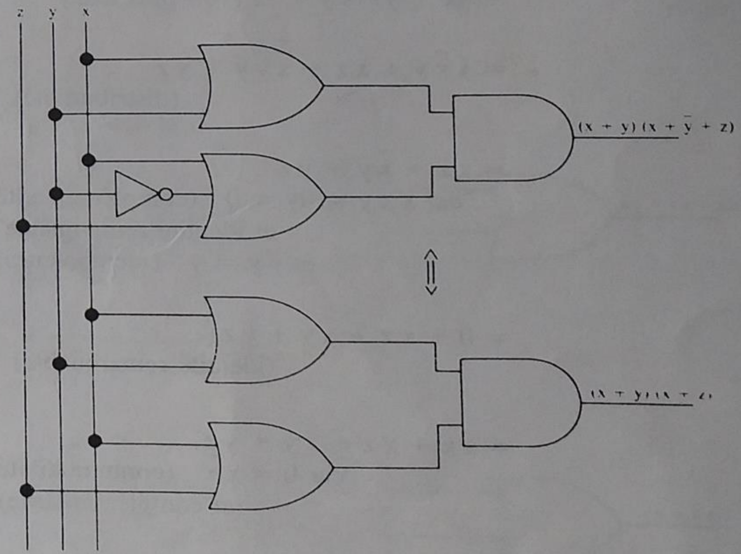
$= x\,(1 + \bar{y}) + x\,z + y\,x + y\,z$ (mise en facteur)

$= x + x\,z + y\,x + y\,z$
car $1 + \bar{y} = 1$ (identité remarquable)
et $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
(commutativité et identité remarquable)

$= x\,x + x\,z + y\,x + y\,z$ (idempotence)

$= x\,(x + z) + y\,(x + z)$ (mise en facteur)

$= (x + y)\,(x + z)$ (mise en facteur)




Implantation de la relation V'

## 2-9 THÉORÈMES DE DE MORGAN

THÉORÈME 1 La négation d'un produit de variables est égale à la somme des négations des variables.

$$\overline{xyz} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

**Preuve par induction parfaite**

| x | y | z | xyz | $\overline{xyz}$ | $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

THÉORÈME 2 La négation d'une somme de variables est égale au produit des négations des variables.

$$\overline{x + y + z} = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$$

**Preuve par induction parfaite**

| x | y | z | x + y + z | $\overline{x + y + z}$ | $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |



REMARQUE On a déjà vu quelque chose de semblable lors de l'étude de circuits NON-ET et NON-OU.

On peut généraliser ces résultats à n'importe quel nombre de variables.

Ces deux théorèmes sont très utiles pour les circuits logiques. Il permettent entres autres de transformer un produit de sommes ou un somme de produits. Prenons un exemple:

Soit l'expression $Z = (x + \bar{y} + z)(x + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y})$, produit de trois sommes, à transformer.

On peut écrire $Z = \bar{\bar{Z}}$ puisqu'une double inversion est une opératio d'effet nul, d'où:

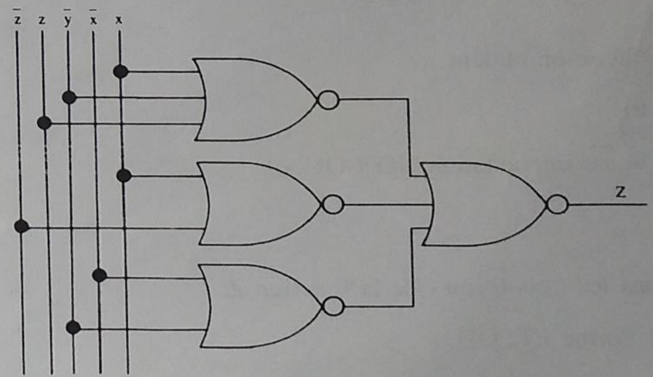
$$Z = \bar{\bar{Z}}$$

$$= \overline{\overline{(x + \bar{y} + z)(x + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y})}}$$

$$= \overline{\overline{x+\bar{y}+z} + \overline{x+\bar{z}} + \overline{\bar{x}+\bar{y}}}$$

D'après le théorème 1 de De Morgan, on remarquera que l'expressic obtenue est une implantation différente de la même fonction.

En supposant que les variables et leur complément sont disponible l'expression originale nécessite, pour être implantée, trois portes OU $(x + \bar{y} + z)$; $(x + \bar{z})$; $(\bar{x} + \bar{y})$ et une porte ET à trois entrées pour faire le produ des trois sorties des portes OU. Par contre, l'expression finale nécessi quatre portes NON-OU suivant le schéma ci-dessous:




REMARQUE: L'expression ci-dessus n'est pas simplifiée.

Prenons $Z = \overline{\overline{\overline{x+\bar{y}+z} + \overline{x+\bar{z}} + \overline{\bar{x}+\bar{y}}}}$

D'après le théorème 2 de De Morgan, on obtient:

$$Z = \overline{\bar{\bar{x}}\, y\, \bar{z} + \bar{x}\, z + x\, y}$$
$$= \overline{\bar{\bar{x}}\,(z + \bar{z}\, y) + x\, y}$$
$$= \overline{\bar{\bar{x}}\,(z + y) + x\, y} \quad \text{d'après la relation de base III)}$$
$$= \overline{\bar{\bar{x}}\, z + \bar{x}\, y + x\, y}$$
$$= \overline{\bar{\bar{x}}\, z + y\,(\bar{x} + x)}$$
$$= \overline{\bar{\bar{x}}\, z + y}$$

On a alors une expression simplifiée qui peut aussi s'écrire:

$$Z = \overline{\bar{\bar{x}}\, z}\quad \bar{y}$$
$$= (x + \bar{z})\ \bar{y}$$
$$= \bar{y}\, x + \bar{y}\, \bar{z}$$
$$= \bar{y}\,(x + \bar{z}): \quad \text{implantation ET, OU.}$$

On peut aussi écrire:

$Z = \bar{\bar{Z}}$ puisqu'une double inversion est une opération d'effet nul.

$$= \overline{\overline{\bar{y}\, x + \bar{y}\, \bar{z}}}$$
$$= \overline{\overline{\bar{y}\, x}\quad \overline{\bar{y}\, \bar{z}}}: \text{ implantation NON-ET.}$$

De la même façon on obtient:

$$Z = \overline{\overline{\bar{y}\,(x + \bar{z})}}$$
$$= \overline{y + \overline{\overline{(x + \bar{z})}}}: \text{ implantation NON-OU.}$$

En résumé, retenons les trois formes de la fonction Z:

a) $Z = \bar{y}\,(x + \bar{z})$: forme ET, OU.

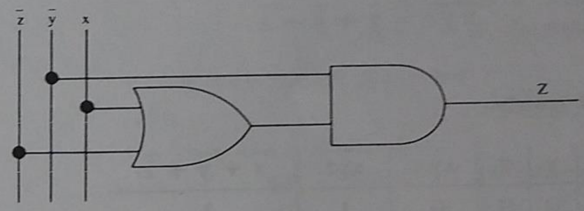
b) $Z = \overline{\overline{\bar{y}\, x}\quad \overline{\bar{y}\, \bar{z}}}$: forme NON-ET.

c) $Z = \overline{y + \overline{\overline{(x + \bar{z})}}}$: forme NON-OU.

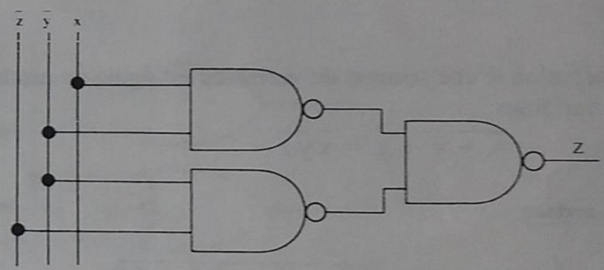


Elles ont chacune une implantation différente.

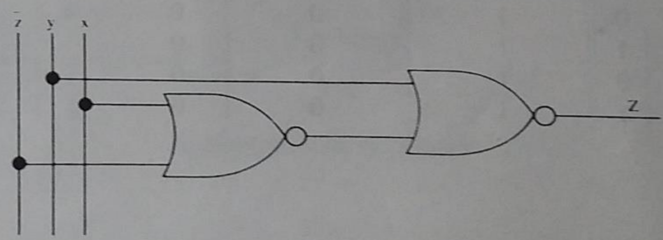
a) Implantation ET, OU




b) Implantation NON-ET




c) Implantation NON-OU



Nous voyons donc qu'en manipulant algébriquement une fonction on peut choisir le type de portes de son implantation. Dans notre cas, l'implantation NON-OU est la plus simple puisqu'elle ne nécessite qu'un seul type de porte (donc un seul type de circuit intégré) et seulement deux portes (donc un seul circuit intégré). C'est un exemple de l'utilité pratique des théorèmes de De Morgan.

## 2-10 DUALITÉ DE L'ALGÈBRE DE BOOLE

En se reportant aux deux paragraphes précédents, on remarque que toutes les fonctions booléennes et les théorèmes de De Morgan vont toujours par deux. Le remplacement dans la première relation des opérations (·) par (+) et (+) par (·) donne la deuxième.

Remarquons que les lois des paragraphes 2-5-5, 6 et 7 se transforment entre elles lorsqu'on remplace 1 par 0, + par · et vice versa.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1 + A = 1$ | $0 \cdot A = 0$ | $1 \cdot A = A$ | $0 + A = A$ |
| $A + A = A$ | $A \cdot A = A$ | $A + \bar{A} = 1$ | $A \cdot \bar{A} = 0$ |

Cette propriété générale est appelée *dualité de l'algèbre de Boole*.

Si donc on démontre une relation on peut écrire immédiatement sa duale en remplaçant les opérations (·) par (+) et (+) par (·), 1 par 0 et 0 par 1.

L'obtention d'une première forme simplifiée d'une expression permet d'écrire immédiatement une autre égalité, duale de la première.

Soit l'expression $Z = a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b$

$= \bar{b}(a + \bar{a}) + \bar{a}b$ (mise en facteur)

$= \bar{b} + \bar{a}b$ puisque $a + \bar{a} = 1$ et $\bar{b} \cdot 1 = \bar{b}$

$= \bar{a} + \bar{b}$ (relation de base III et commutativité)

D'où: $a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b = \bar{a} + \bar{b}$ (1)

On en déduit donc immédiatement la relation:

$$(a + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + b) = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (2)$$

en se servant de la dualité de l'algèbre de Boole.



**Vérification** Développons le premier membre de (2), on aura successivement:

$$(a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b})(\bar{a} + b) = [0 + \bar{b}(1 + a + \bar{a})](\bar{a} + b)$$
$$= \bar{b}(\bar{a} + b)$$
$$= \bar{b}\bar{a} + \bar{b}b$$
$$= \bar{a}\bar{b}, \text{ soit le deuxième membre de (2).}$$

RÉSUMÉ

| | | |
|---|---|---|
| $xy + x\bar{y} = x$ | donne | $(x + y)(x + \bar{y}) = x$ |
| $x + xy = x$ | ,, | $x(x + y) = x$ |
| $x + \bar{x}y = x + y$ | ,, | $x(\bar{x} + y) = xy$ |
| $xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$ | ,, | $(x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$ |
| $xy + x\bar{y}z = xy + xz$ | ,, | $(x + y)(x + \bar{y} + z) = (x + y)(x + z)$ |
| $\overline{xyz} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ | ,, | $\overline{x + y + z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ |

## 2-11 SIMPLIFICATION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS BOOLÉENNES

Pour simplifier algébriquement une fonction booléenne: la développer, effectuer des mises en facteur et simplifier, selon les lois fondamentales et les relations démontrées. Simplifier une fonction revient donc à l'écrire à l'aide d'un nombre minimum de termes.

**Exemple 1** Simplifier $z = (a + b)(\bar{b} + c)(\bar{a} + c)$

**Solution**

Développons, on aura:

$$z = (a\bar{b} + ac + b\bar{b} + bc)(\bar{a} + c)$$

Or, $b\bar{b} = 0$, d'où:

$z = (a\bar{b} + ac + bc)(\bar{a} + c)$ développons, on aura:

$z = a\bar{b}\bar{a} + a\bar{b}c + ac\bar{a} + acc + bc\bar{a} + bcc$

Or, $\bar{a}a = 0$, d'où:

$\bar{a}a\bar{b} = 0$ et $\bar{a}ac = 0$

Mais $cc = c$, d'où l'on tire:

$z = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ac + bc$

a est en facteur dans les 2e et 3e termes, b dans les 1er et 4e et c dans chacun, d'où:

$z = c\left[a(\bar{b} + 1) + b(\bar{a} + 1)\right]$

Or, $\bar{a} + 1 = \bar{b} + 1 = 1$, d'où:

$z = (a + b)c$

**Exemple 2** Simplifier $z = (a + b)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(a + c)$

**Solution**

Développons, on aura:

$z = (a\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + b\bar{b} + b\bar{c})(a + c)$

Or, $a\bar{a} = 0$ et $b\bar{b} = 0$, d'où

$z = (a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + b\bar{c})(a + c)$

$= a\bar{b}a + a\bar{b}c + a\bar{c}a + a\bar{c}c + b\bar{a}a + b\bar{a}c + b\bar{c}a + b\bar{c}c$

Or, $aa = a$, $a\bar{a} = 0$ et $c\bar{c} = 0$, d'où:

$z = a\bar{b} + a\bar{b}c + a\bar{c} + b\bar{a}c + b\bar{c}a$

$= a\bar{b}(1 + c) + a\bar{c}(1 + b) + b\bar{a}c$

$= a\bar{b} + a\bar{c} + \bar{a}bc$

$= a(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}bc$

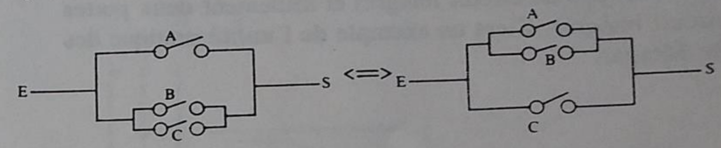
$= a\overline{bc} + \bar{a}bc$, soit

$= a \oplus bc$



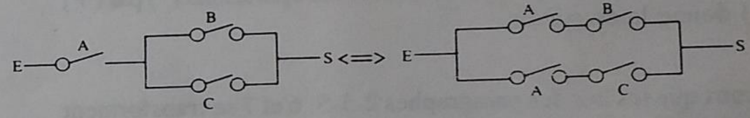
## PROBLÈMES

2-1 a) Mettre les circuits suivants en équation.

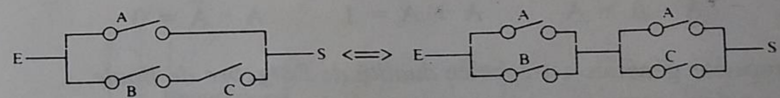



b) Écrire et nommer la loi de l'algèbre Boole établissant leur équivalence.

2-2 Reprendre le problème 2-1 pour les deux circuits suivants:




2-3 Reprendre le problème 2-1 pour les deux circuits suivants:




2-4 Construire les circuits équivalents représentant respectivement les deux membres des équations suivantes:

a) $1 \cdot A = A$; b) $1 + A = 1$; c) $A + A = A$;
d) $0 + A = A$; e) $0 \cdot A = 0$; f) $A \cdot A = A$.

Développer les expressions E suivantes, les simplifier algébriquement, si possible, et dresser leur table de vérité.

2-5 $E = (a + d)(ab + ac)(\bar{a}\bar{c} + b)$

2-6 $E = (a + c)(b + d)$

2-7 $E = (a + c + d)(b + c + d)$

2-8 $E = (a\bar{b} + c + cd)(\bar{a}\bar{c} + bc + d)$

2-9 $E = (a\bar{b} + ab + ac)(\bar{a}\bar{b} + ab + a\bar{c})$

Simplifier, si possible, les expressions E suivantes:

2-10 $E = xyz + x\bar{y}\bar{z}$

2-11 $E = a(b\bar{c} + \bar{b}c)$

2-12 $E = a\bar{b} + ab$

2-13 $E = ab(a\bar{b}c + a\overline{bc} + ab\bar{c})$

2-14 $E = abc + a\overline{bc} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

2-15 $E = (a + b)(a + c)(\bar{a} + \bar{b})$

2-16 $E = a\bar{b} + b\bar{c}$

2-17 $E = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$

2-18 $E = a\overline{bc} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \overline{ab}c$

2-19 $E = abc + \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + a\overline{bc} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$

2-20 $E = a(a + b + c)(\bar{a} + b + c)(a + \bar{b} + c)(a + b + \bar{c})$

2-21 $E = (a + b + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)$

Former le complément $\overline{E}$ des expressions E suivantes:

2-22 $E = a + bc + ab$

2-23 $E = (a + b)(b + c)(a + c)$

2-24 $E = ab + \bar{b}c + c\bar{d}$

2-25 $E = a(b + c)(\bar{c} + \bar{d})$

2-26 $E = ab(\bar{c}d + \bar{b}c)$

Écrire l'égalité duale D des égalités E ci-dessous:

2-27 $E = a + bc + ab = a + bc$

2-28 $E = a(b + c)(\bar{c} + \bar{d}) = (ab\bar{c} + ab\bar{d} + ac\bar{d}$

2-29 $E = ab(\bar{c}d + \bar{b}c) = ab\bar{c}d$