TD - Calcul différentiel

***Exercice 1*:** Étudier si la fonction $f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est continue, différentiable, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 2*:** Étudier si la fonction $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est continue, différentiable, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 3*:** Étudier si la fonction $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est continue, différentiable, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 4*:** Étudier si la fonction $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Sinon}\end{cases}$ est continue, différentiable, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. vérifier qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 5*:** Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}^*$ l'application $f(x,y)=\begin{cases} \frac{|xy|^a}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ est-elle continue ? différentiable ?

***Exercice 6*:** Pour quelles valeurs de $p,q\in\mathbb{N}^*$ la fonction $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^py^q}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est-elle continue ? différentiable ? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

***Exercice 7*:** Pour quelles valeurs de $p\in\mathbb{N}^*$ la fonction $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^py}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est-elle continue ? différentiable ? de classe $\mathscr{C}^1$? de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

***Exercice 8*:** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(x^2-y^2,2xy)$.
Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle et ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

***Exercice 9*:** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
1: Montrer que la fonction $g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(y,x)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle et ses dérivées partielles.
2: En déduire que si $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=f(y,x)$ alors $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$.

***Exercice 10*:** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $h:x\in\mathbb{R}\mapsto g(f(x),x)$.
Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée en fonction de la dérivée de f et de la différentielle de g.

***Exercice 11*:** Soit E,F,G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, U un ouvert de E, $f:U\to E$, $g:U\to F$ différentiables sur U et $B:E\times F\to G$ une application bilinéaire. Montrer que l'application $h:x\in U\mapsto B(f(x),g(x))$ est différentiable sur U et calculer sa différentielle.

***Exercice 12*:** Soient $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et $g:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto f(x-y,y-z,z-x)$. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}=0$.

***Exercice 13*:** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall t>0,\forall x\in U, tx\in U$ (On dit que U est un cône ouvert) et $f:U\to\mathbb{R}$.
On dit que f est α-homogène sur U si $\forall x\in U,\forall t>0, f(tx)=t^\alpha f(x)$.
1: On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Montrer que f est α-homogène si, et seulement si, $\forall x=(x_1\dots,x_n)\in U,\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\alpha f(x)$.
2: On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Montrer que si f est α-homogène alors $\forall x=(x_1\dots,x_n)\in U,\displaystyle\sum_{k,l=1}^n x_kx_l\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(x)=\alpha(\alpha-1)f(x)$.

***Exercice 14*:** Soient E est euclidien. Montrer que l'application $f:x\in E\mapsto\frac{x}{1+\|x\|}$ est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.

***Exercice 15*:** On suppose que E est euclidien et soit $u\in\mathcal{L}(E)$ autoadjoint.
1: Montrer que $f:x\in E\mapsto\langle x,u(x)\rangle$ est différentiable sur E. Calculer $\mathrm{d}f(x)$ pour tout $x\in E$.
2: Montrer que $g:x\in E\mapsto\frac{\langle x,u(x)\rangle}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E\setminus\{0\}$. Calculer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x\in E\setminus\{0\}$.
3: Soit $x\in E\setminus\{0\}$. Montrer que $\mathrm{d}g(x)=0$ si, et seulement si, x est un vecteur propre de u.
4: En déduire que $\forall v\in\mathcal{L}(E),\ \displaystyle\sup_{\|x\|=1}\|v(x)\|=\max_{\lambda\in\mathcal{S}p(v*v)}\sqrt{\lambda}$.

***Exercice 16*:** Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et $g:(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

***Exercice 17*:** Soit $f,g\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et $h:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto g(x+f(y))$.
Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}=0$.

***Exercice 18*: ** Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(xy, x^2 + y^2)$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer ses dérivées partielles d'ordre deux en fonction des dérivées partielles de f.
***Exercice 19*: ** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$ (Considérer le changement de variables $(u, v) = (x, y - x)$).
***Exercice 20*: ** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(]0, +\infty[^2)$ telles que : $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$ (Considérer le changement de variables $(u, v) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2\right)$).
***Exercice 21*: ** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ telles que : $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f$ (Passer aux coordonnées polaires).
***Exercice 22*: ** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ telles que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$.
***Exercice 23*: ** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 - y^2)$ (Considérer le changement de variables $(u, v) = (x + y, x - y)$).
***Exercice 24*: ** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(]0, +\infty[^2)$ telles que $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (Considérer le changement de variables $(u, v) = (xy, \frac{x}{y})$).
***Exercice 25*: ** Donner une équation du plan tangent à la surface $x^2 z + 3xyz = 0$ au point $(-3, 1, 1)$.
***Exercice 26*: ** Donner l'équation de la tangente à la limniscate de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0$ au point $A(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.
Étudier sa position relative par rapport la limniscate.
***Exercice 27*: ** Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^1(I)$. Montrer que $g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I^2.
***Exercice 28*: ** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ convexe.
1: Montrer que si f est différentiable sur U alors $\forall a \in U, \forall h \in E, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) \geq f(a) + \mathrm{d}f(a)(h)$.
***Exercice 29*: ** Soit $f : E \to F$ telle que $\exists \lambda > 0, \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|^2$. Montrer que f est constante sur E.
***Exercice 30*: **
1: Montrer que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det M$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que $\forall A, H \in \mathcal{M}_n R, \mathrm{d}f(A)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(A)H)$.
2: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi'_A = -\mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A - XI_n))$. En déduire $\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)X + \cdots - \mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A))X + \det(A)$.
***Exercice 31*: ** Déterminer les extremums de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants :

$$1)f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \quad 2)f(x, y) = e^{x \sin y} \quad 3)f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad 4)f(x, y) = 6xy + (y - x)^3$$

***Exercice 32*: ** Montrer que $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ admet un minimum en $(0, 0)$ suivant toute direction mais que $(0, 0)$ n'est pas un minimum de f.
***Exercice 33*: ** Déterminer $\inf\limits_{a,b,c \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_{-1}^{1} (|x| - ax^2 - bx - c)^2 \mathrm{d}x$.
***Exercice 34*: ** Soit la fonction $f : (x, y) \in [0, 1]^2 \mapsto \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
1: Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. On pose $M = \sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} f(x, y)$.
2: On suppose que f atteint sa borne supérieur en un point (a, b) de $]0, 1[^2$. Montrer que $f(a, b) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.
3: Calculer $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(0, x)$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(1, x)$.
4: En déduire que la valeur de M.
***Exercice 35*: ** *Séries de fonctions à deux variables :* Soit $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos ny}{n^x}$ sur $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$.
1: Montrer que f est continue sur $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$.
2: Soit $x > 2$. Montrer que $g(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos ny}{n^x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer g'.
3: Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $]2, +\infty[\times\mathbb{R}$.
4: Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos ny}{n^x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]2, +\infty[$ et déterminer h'.
5: Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]2, +\infty[\times\mathbb{R}$.
6: Étudier la différentiabilité de la fonction f sur $]2, +\infty[\times\mathbb{R}$.
***Exercice 36*: ** *Intégrale à deux paramètres :* Soit $f(x, y) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{y^2 + t^2}\mathrm{d}t$.
1: Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$.
2: Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.