الدالة الأصلية و التكامل

Primitives et intégrale d'une fct continue

Déf : on dit qu'une fct $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si :

1. la fct F est dérivable sur I.
2. sa dérivée est égale à f $\forall x \in I$

Exemple : la primitive de la fct $f(x) = x$ est $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ / $F'(x) = f(x)$.

Corollaire : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b] \subset I$ soit F une primitive de f sur $[a,b]$ alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est donnée par : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Exemple : $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^x - e^0 = e^x - 1$.

Remarque : dans l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ la variable t est "muette", ce qui vérifie que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ et le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fct $f(x)$ ou $f(t)$.

Méthodes de calcul des intégrales

1 Intégration par parties :

Proposition : Soit I un intervalle sur $\mathbb{R}$ on suppose que u, v deux fcts de classe C^1 sur I alors : $\int_a^b u'(x) v(x)\,dx = \left[u(x).v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)\,dx$

Exemple 1 : déterminer $\int x e^{-x} dx$

on pose $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

alors $\int x e^{-x} dx = uv - \int u'v\,dx = -xe^{-x} - \int 1.(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \;/ C \in \mathbb{R}$

qui sont les primitives de xe^{-x}.

Exemple 2 : déterminer $\int_1^e \ln x\, dx$

on pose $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$ alors $\int_1^e \ln x\,dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}\,dx$

$= e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e 1\,dx$

$= e\ln e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$.

Exemple 3 : déterminer $\int_0^1 (x+2) e^x dx$

on pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \underset{u'}{(x+2)}\underset{v}{e^x}\,dx = (x+2)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (1+2)e - (0+2)e^0 - e^x\Big]_0^1$$

$$= 3e - 2 - (e^1 - e^0) = 3e - 2 - e + 1 = 2e - 1.$$

Exemple ④ : déterminer $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$

on pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = -\sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx = e^x\cos x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\sin x . e^x\,dx = e^x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$$

une deuxième intégration par partie de $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$.

on pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \cos x. \end{cases}$

$$\Rightarrow I = e^x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + e^x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx = e^x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + e^x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - I$$

$$\Rightarrow 2I = e^{\pi/2}\cos\frac{\pi}{2} - e^0\cos 0 + e^{\pi/2}\sin\frac{\pi}{2} - e^0\sin 0$$

$$2I = -1 + e^{\pi/2} \Rightarrow I = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}.$$

2) changement de variables:

Proposition: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application sur I, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq : $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une application de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$

alors: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

Exemple ① : calculer $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

en utilisant le changement de variable $x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to \sin t = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to \sin t = 1 \to t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

et $dx = \cos t\,dt$.

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\,.\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos t . \cos t\,dt \quad \text{car pour } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \cos t > 0$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \quad \text{on sait que : } \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

donc $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t}{2}\,dt \left[\text{car : } \int_a^b [f(t) + g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt\right]$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{t}{2}\Big]_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\sin\pi}{4} - \frac{\sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple ② : calcule de l'intégrale $I_2 = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

en utilisant le changement de variable $t = e^x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to t = e^0 = 1 \\ x = \ln\sqrt{3} \to t = e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$

et $dt = e^x\,dx \Rightarrow dt = t.dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$.

$$I_2 = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}.\frac{1}{t}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Exemple ③: Calcul de l'intégrale $I_3 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,.\cos x\,dx$.

on pose $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to t = \sin 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$ et $dt = \cos x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}dt$.

$$\Rightarrow I_3 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,.\cos x\,dx = \int_0^1 \sqrt{t}\,.\cos x\,.\frac{1}{\cos x}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left.\frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left.\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Exemple ④: Calcule de l'intégrale $I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

on pose : $t = \ln x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \to t = \ln 1 = 0 \\ x = e \to t = \ln e = 1. \end{cases}$ et $dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = x\,dt$.

$$\Rightarrow I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{x}\,x\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left.\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

③ Primitives des Fractions rationnelles:

Déf : les fractions rationnelles sont des quotients de deux polynômes.

L'outil fondamental est la décomposition d'une fraction rationnelle en élément simple, qui permet d'écrire une fraction comme somme :

1) • d'un polynome.

2) • d'élément simple de 1ère espèce : $\frac{\lambda}{(x-a)^n}$

3) • d'élément simple de 2ème espèce : $\frac{\lambda x + \mu}{((x-a)^2+b^2)^n}$ avec $b \neq 0$.

1) Les primitives de polynome sont faciles à calculer

Exemple : $I = \int (x^3 + x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + c.$ / $c \in \mathbb{R}$.

2) les primitives d'élément simple de 1ère espèce :

$$\int \frac{\lambda}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & n \neq 1 \\ \lambda \ln|x-a| \end{cases}$$

Exemple ①: Déterminer la primitive $J_1 = \int \frac{2}{(x-1)^3}\,dx$.

$$J = \int \frac{2}{(x-1)^3}\,dx = 2\int (x-1)^{-3}\,dx = 2\,.\frac{1}{-3+1}(x-1)^{-3+1} + c = -\frac{1}{(x-1)^2} + c.$$

Exemple ②: determiner la primitive $J_2 = \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx$.

$$J_2 = \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + c_1 + \operatorname{arctg} x + c_2 = \frac{1}{2}x^2 + \operatorname{arctg} x + c \ / \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemple ③: determiner la primitive $J_3 = \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$.

$$J_3 = \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x+3}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{-4}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right)dx = \int \frac{-4}{x-1}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx$$

$$= -4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + c.$$

Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Théorème : Tout fractionnelle P/q se présente sous la forme :

$$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{q(x)} = S(x) + (\text{somme d'éléments simple})$$

les polynomes S et R sont respectivement le quotient et le reste de la division de P par q, $d^\circ R < d^\circ q$.

Exemple ①: décomposition la fraction rationnelle $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ en éléments simple.

étape ① .) on cherche les racines de l'équation $x^2-x-6=0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1+24 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2 \ \wedge \ x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3.$$

$$\Rightarrow x^2-x-6 = (x-(-2))(x-3) = (x+2)(x-3).$$

étape ② .) $$\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \left(\frac{1/5}{x+2} + \frac{4/5}{x-3} \right).$$

étape ③ .) on cherche A, B :

Pour obtenir A : on multiplie l'égalité par $x+2$ puis on fait $x \to -2$ on trouve :

$$\frac{(x+1)}{(\cancel{x+2})(x-3)} \cdot (\cancel{x+2}) \Big|_{x=-2} = \frac{A}{(\cancel{x+2})} \cdot (\cancel{x+2}) \Big|_{x=-2} + \frac{B}{(x-3)}(x+2) \Big|_{x=-2} \iff \frac{-2+1}{-2-3} = A \iff A = \frac{1}{5}.$$

Pour obtenir B : on multiplie l'égalité par $x-3$ puis on fait $x \to 3$ on obtient :

$$\frac{(x+1)}{(x+2)(\cancel{x-3})} (\cancel{x-3}) \Big|_{x=3} = \frac{A}{(x+2)} (x-3) \Big|_{x=3} + \frac{B}{(\cancel{x-3})} (\cancel{x-3}) \Big|_{x=3} \iff B = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5}.$$

Exemple ②: décomposition de $$\frac{-x+5}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x+1)} = \frac{-2/3}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2/3}{(x+1)}$$

on détermine A, B, C :

Pour obtenir B : on multiplie l'égalité par $(x-2)^2$ puis on fait $x \to 2$ on obtient $B = 1$

Pour obtenir C : on multiplie l'égalité par $(x+1)$ puis on fait $x \to -1$ on obtient $C = 2/3$.

Pour obtenir A : on donne à x une valeur particulière la plus simple $x = 0$

on obtient : $\frac{5}{4} = \frac{A}{-2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \Rightarrow A = -2/3$.

Exemple ③: décomposition de $\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{x^6}{x^4+2x^2+1}$ $\quad$ $\deg P = 6 > \deg q = 4$

Pour trouver la partie entière on fait la division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l} x^6 & x^4+2x^2+1 \\ -\ x^6+2x^4+x^2 & \hline x^2-2 \\ \hline =\ -2x^4-x^2 & \\ -\ -2x^4-4x^2-2 & \\ \hline \quad 3x^2+2 & \end{array}$$

donc : $$\frac{x^6}{x^4+2x^2+1} = x^2-2 + \frac{3x^2+1}{x^4+2x^2+1} = x^2-2+\frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

décomposition en élément simple de :

$$\frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2}, \text{ on a : } \frac{3x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

on remarque que $\frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{3(-x)^2+1}{((-x)^2+1)} \Rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{A(-x)+B}{(-x)^2+1} + \frac{C(-x)+D}{((-x)^2+1)^2}$

$\Rightarrow -A = A$ et $-C = C \Rightarrow A = C = 0$.

on a donc $\frac{3x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{B}{x^2+1} + \frac{D}{(x^2+1)^2}$

- pour le calcul de D : on multiplie par $(x^2+1)^2$ puis on prend $x = i$ on trouve $D = -1$
- Pour le calcul de B : si $x = 0$ on trouve $2 = B - 1 \Rightarrow B = 3$.

Méthode de calcul de la primitive d'une fraction rationnelle :

la décomposition P/q se présente sous la forme :

$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$

- L'intégration de $S(x)$ est facile (c'est un polynôme).
- L'intégration d'élément simple de 1ère espèce : $\int \frac{A}{(ax+b)^n}$

$n = 1$: on pose $t = ax+b \Rightarrow dt = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{at}\,dt = \frac{1}{a}\ln|t| + c = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$.

$n \neq 1$: on pose $t = ax+b \Rightarrow dt = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$.

$\Rightarrow \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \int \frac{dt}{a t^n} = \frac{1}{a}\int t^{-n}\,dt = \frac{1}{a}\frac{t^{-n+1}}{(-n+1)} + c = \frac{-1}{a(n-1)t^{n-1}} + c$.

$= \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c$.

- L'intégration d'élément simple de 2ème espèce : $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$

avec $b^2 - 4c < 0$ donc $x^2 + bx + c > 0$ car $a = 1 > 0$.

on écrit le trinôme x^2+bx+c sous la forme $(x-M)^2 + N^2$.

$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}^{\,2} \Rightarrow \begin{cases} M = -b/2 \\ N = \sqrt{c - (b/2)^2} \end{cases}$.

$I = \int \frac{\alpha x+\beta}{[(x-M)^2+N^2]^n}\,dx = \int \frac{\alpha x+\beta}{N^{2n}\left[\left(\frac{x-M}{N}\right)^2+1\right]^n}\,dx \Rightarrow t = \frac{x-M}{N} \Rightarrow x = Nt+M \Rightarrow dx = N\,dt$

$I = \frac{1}{N^{2n}}\int \frac{\alpha(Nt+M)+\beta}{(t^2+1)^n}\,N\,dt = \frac{1}{N^{2n}}\int \frac{\alpha N t + \alpha M + \beta}{(t^2+1)^n}\,dt = \int \frac{\gamma t + \lambda}{(t^2+1)^n}$ $\begin{cases} \frac{\alpha N}{N^{2n}} = \gamma . \\ \frac{\alpha M+\beta}{N^{2n}} = \lambda . \end{cases}$

$= \gamma \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt + \lambda \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$.

ce qui revient au calcul des intégrales :

$I_n = \int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

calcul de I_n : on pose $v = 1+t^2 \Rightarrow dv = 2t\,dt$.

si $n=1$: $I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln|v| + c = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)+c$.

si $n>1$: $I_n = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^n} = \frac{1}{2}\int v^{-n}\,dv = \frac{-1}{2(n-1)v^{n-1}} + c = \frac{-1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + c$

Calcul de J_n : $\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ on fait une intégration par parties

on pose $\begin{cases} u = (t^2+1)^{-n} \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -n(t^2+1)^{-n-1}(2t) = -2nt(t^2+1)^{-(n+1)} \\ v = t. \end{cases}$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int u v'\,dt = uv - \int u'v\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt.$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} - 2n\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow 2n\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} \Rightarrow 2nJ_{n+1} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)J_n.$$

$$\Rightarrow 2(n-1)\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}$$

Le calcul de $J_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ se ramène à celui de $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \text{arctg}\, t + c$

on a par exemple : $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right] = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{\text{arctg}\, t}{2} + c$.

Exemple ① : $\int \frac{x^6}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int (x^2-2)\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (voir les pages 4,5)

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + 3\,\text{arctg}\, x - \left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\text{arctg}\, x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{2x^5 - 10x^3 - 15x}{6(x^2+1)} + \frac{5}{2}\,\text{arctg}\, x + c.$$

Exemple ② : $\int \frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1}$ Voir la page ④

$$= \frac{-1}{x-2} - \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + c.$$

Exemple ③ : $I = \int \frac{dx}{1+x^3}$ on a $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \left(= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right).$$

Pour obtenir A : on multiplie l'égalité par $(x+1)$ puis on fait $x=-1$ on trouve $A = \frac{1}{3}$

pour obtenir B : on multiplie l'égalité par x puis on fait $x \to +\infty$ trouve $B = -\frac{1}{3}$

pour obtenir C : on donne à x la valeur 0 on trouve $1 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

on a $x^2-x+1=(x+\frac{b}{2})^2+c-(b/2)^2=(x-\frac{1}{2})^2+1-(\frac{1}{2})^2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

au cas où $\Delta<0$ $\quad = (x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=(x-M)^2+N^2 \;;\; M=\frac{1}{2} \;,\; N=\sqrt{3}/2$

on pose $x=M+Nt=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t \Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$\Rightarrow \int\frac{2-x}{x^2-x+1}dx=\int\frac{2-x}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx=\int\frac{3/2-\frac{\sqrt{3}}{2}t}{(\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}dt.$$

$$=\frac{(\sqrt{3}/2)^2}{(\sqrt{3}/2)^2}\int\frac{\sqrt{3}-t}{t^2+1}dt=\sqrt{3}\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t\,dt}{t^2+1}=\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,t-\frac{1}{2}\log(t^2+1)+c$$

$$=\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}(x^2-x+1)+c=\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+c'$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\log|1+x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+c$$

$$I=\frac{1}{3}\log\frac{|1+x|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles:

soit f une fraction rationnelle

1/ $\int f(e^x)dx$, on pose $t=e^x$

Exemple: $I=\int\frac{dx}{1+e^x}$, on pose $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$.

$\Rightarrow I=\int\frac{dt}{t(1+t)}$ on sait que $\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{1}{t}+\frac{-1}{t+1}$

$\Rightarrow I=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\log|t|-\log|t+1|+c=\log|\frac{t}{t+1}|+c=\log\frac{e^x}{e^x+1}+c$

2) $\int f(\sin x,\cos x)\,dx$, on pose $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases}\sin x=2t/(1+t^2)\\ \cos x=(1-t^2)/(1+t^2)\\ dx=2dt/(1+t^2)\end{cases}$

Exemple: $I=\int\frac{dx}{\sin x}$, on pose $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{2\,dt}{(1+t^2)}\cdot\frac{(1+t^2)}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+c=\log|\mathrm{tg}\frac{x}{2}|+c.$$

3) $\int f(x,\sqrt{1-x^2})dx$, $|x|<1$ on pose $\begin{cases}t=\arcsin x\\ x=\sin t\end{cases}$, $\begin{cases}x\in]-1,1[\\ t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.\end{cases}$

pour se ramener au calcul de $\int f(\sin t,\cos t)\,dt$

En effet $\begin{cases}x=\sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=(\sin t)'=\cos t \Rightarrow dx=\cos t\,dt.\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t \text{ car } t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.\end{cases}$

Remarque: on peut poser $t=\arccos x \Rightarrow x=\cos t$ où $\begin{cases}x\in]-1,1[\\ t\in]0,\pi[\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\cos t \Rightarrow dx=-\sin t\,dt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=|\sin t|=\sin t \text{ car } t\in]0,\pi[\end{cases}$

Exemple : $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1, 1[$.

on pose $t = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t\, dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-\sin t\, dt}{(1+\cos t)\sin t} = -\int \frac{dt}{1+\cos t}$$

on pose $u = tg\frac{t}{2} \Rightarrow \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dt = \frac{2\,du}{1+u^2}$

$$\Rightarrow I = -\int \frac{2\,du}{1+u^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = -\int \frac{2\,du}{1+u^2+1-u^2} = -\int du = -u + c$$

$$= -tg\frac{t}{2} + c = -tg\left(\frac{\arccos x}{2}\right) + c.$$

Remarque : $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2\frac{t}{2}} = -\int (tg\frac{t}{2})'\, dt = -tg\frac{t}{2} + c$

$= -tg\left(\frac{\arccos x}{2}\right) + c$

4) $\int f(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$, on pose $t = \text{argsh}\, x \Leftrightarrow x = sh\, t$ où $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

pour se ramener au calcul de $\int f(sh\,t, ch\,t)\,dt$.

En effet $\begin{cases} x = sh\,t \Rightarrow dx = ch\,t\,dt \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{sh^2 t + 1} = |ch\,t| = ch\,t \end{cases}$ car $ch^2 t - sh^2 t = 1$.

Exemple : $I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx$, $t = \text{argsh}\,x \Leftrightarrow x = sh\,t \Rightarrow dx = ch\,t\,dt$

$$\Rightarrow I = \int \sqrt{sh^2 t + 1}\cdot ch\,t\,dt = \int |ch\,t| \cdot ch\,t\,dt = \int ch^2 t\,dt = \int \frac{ch\,2t + 1}{2}\,dt.$$

$$= \frac{sh\,2t}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{2}{4} sh\,t\, ch\,t + \frac{t}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(sh(\text{argsh}\,x)\right)\left(ch(\text{argsh}\,x)\right) + \frac{\text{argsh}\,x}{2} + c$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{\text{argsh}\,x}{2} + c$, car $ch(\text{argsh}\,x) = \sqrt{1 + (sh(\text{argsh}(x)))^2} = \sqrt{1+x^2}$

$ch\,2t = ch^2 t + sh^2 t = 2ch^2 t - 1 = 2sh^2 t + 1$.

Équations Différentielles

Déf : Une équation différentielle est une équation liant une fct et sa ou ses dérivées.

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Exemple :
- $\sin x \, y'(x) + 2x\, y(x) = e^{x}$.
- $y''(x) + 3x\, y(x) = x$.

Déf : On appelle ordre d'une équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus elevée contenue dans cette équation.

Exemple :
- $y''(x) - y'(x) = \sin x$ est une équation de 2^{eme} ordre.
- $2y'(x) - y(x) = \operatorname{sh} x$ " " " " 1^{er} ordre.

Déf : on appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fct $y = f(x)$ vérifiant cette équation.

Exemple : $y''(x) + y(x) = 0$

- $y(x) = \sin x$ est une solution de l'équation car :

$y(x) = \sin x \Rightarrow y'(x) = \cos x \Rightarrow y''(x) = -\sin x \Rightarrow y''(x) + y(x) = -\sin x + \sin x = 0$

- $y(x) = \cos x$ une autre solution (a vérifier).

Équation Différentielle d'ordre 1 :

Déf : • Une équation différentielle du premier ordre est de la forme suivante :

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x) \; \dots\dots (E)$$

où $a(x)$, $b(x)$ sont des fcts continues sur un intervalle I

• L'équation différentielle sans second membre, ou encore l'équation homogène associe à (E) est l'équation :

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = 0 \; \dots\dots\dots (E_0).$$

Résolution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -a(x)\, y(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int -a(x)\, dx = -\int a(x)\, dx = -A(x) + c \quad / \; A(x) : \text{es la primitive de } a(x), \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = -A(x) + c \Rightarrow \log|y(x)| = -A(x) + c \Rightarrow e^{\log|y(x)|} = e^{-A(x)+c}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = e^{c} \cdot e^{-A(x)} \Rightarrow y(x) = \pm e^{c} \cdot e^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow y(x) = k\, e^{-A(x)} \quad tq : k = \pm e^{c} \in \mathbb{R}.$$

[**Théorème :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ une fct continue, $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) + a(x)\, y(x) = 0 \ldots\ldots (E_0)$ est l'ensemble des fcts de la forme : $y(x) = k e^{-A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$.]

<u>Exemples :</u> • Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + x^3 y = 0 \ldots\ldots (E_0)$$

(E_0) : est une équation différentielle homogène du 1er ordre

$$y' + x^3 y = 0 \Rightarrow y' = -x^3 y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -x^3 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int -x^3 dx$$

$$\Rightarrow \log|y| = -\frac{x^4}{4} + c \Rightarrow |y| = e^{-\frac{x^4}{4} + c} \Rightarrow y = k e^{-\frac{x^4}{4}} \;/\; k \in \mathbb{R}.$$

donc les solutions de l'équation (E_0) sont toutes les fcts de la forme

$$y(x) = k e^{-\frac{x^4}{4}} \;/\; k \in \mathbb{R}.$$

• Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + y \cos x = 0 \ldots\ldots (E_0)$$

(E_0) : est une E.D.H du 1er ordre

$$y' + y\cos x = 0 \Rightarrow y' = -y\cos x \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\cos x \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int -\cos x\, dx$$

$$\Rightarrow \log|y| = -\sin x + c \Rightarrow y = k e^{-\sin x} \;/\; k \in \mathbb{R}$$

les solutions de (E_0) sont les fcts de la forme : $y(x) = k e^{-\sin x} \;/\; k \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice :</u> Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' - 2xy = 0 \;,\quad y' + y \sin x = 0 \;,\quad y'\sqrt{1 - x^2} - y = 0 .$$

<u>Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants sans second membre :</u>

ses équations sont de la forme : $y' + ay = 0$, tq : constante réelle alors on a : $y = k e^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

<u>Exemple :</u> $y' - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \log|y| = x + c$.

$$\Rightarrow y = k e^{x} \;/\; k \in \mathbb{R}.$$

<u>Condition initiale :</u> soit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ | on dit que la solution φ de (E) vérifie la condition initiale (x_0, y_0) si et seulement si $\varphi(x_0) = y_0$.

<u>Problème de Cauchy :</u>

[**Théorème :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ deux fcts continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une fct et une seule telle que :]

$$(1) \begin{cases} \forall x \in I, \; \varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on dit que l'équation (1) admet une solution unique vérifiant la condition initiale $\varphi(x_0)=y_0$.

Résolution de l'équation différentielle avec second membre :

Proposition : Considérons l'équation différentielles

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \text{ ----- } (E)$$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a & b deux fcts continues sur I, $\varphi_p : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de (E).

Alors les solutions de (E) sont les fcts de la forme $\varphi_p + \varphi_h$ où φ_h est une solution de l'équation différentielle homogène associée à (E)

$$\forall x \in I : \quad y'(x) + a(x)\,y(x) = 0 \text{ ---- } (E_0)$$

Autrement dit : toute solution de (E) est la somme d'une solution φ_h de l'équation homogène (E_0) associe à (E) et d'une solution particulière φ_p de (E)

$$\varphi_g = \varphi_p + \varphi_h \quad \left| \begin{array}{ll} \varphi_g : & \text{solution générale de } (E) \\ \varphi_p : & \text{solution particulière de } (E) \\ \varphi_h : & \text{solution de E.D.H associée à } (E) \end{array} \right.$$

Détermination de solutions particulières :

① Superposition des solutions :

Proposition : Soient a, b, b_1, b_2 4 fcts définies et continues sur I telles que $b = b_1 + b_2$, on considère les équations différentielles :

$$\forall x \in I \quad y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \text{ ---- } (E)$$

$$\forall x \in I \quad y'(x) + a(x)\,y(x) = b_1(x) \text{ --- } (E_1)$$

$$\forall x \in I \quad y'(x) + a(x)\,y(x) = b_2(x) \text{ --- } (E_2)$$

si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1), (E_2) alors $y = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

• 3 cas particuliers : Recherche d'une solution particulière pour des E.D à coefficients constants

① Proposition : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n à coefficient dans $\mathbb{R}$

L'équation : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad y'(x) + \alpha\,y(x) = P(x) \text{ ---- } (E)$

admet comme solution particulière :

- Un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha = 0$.
- Un polynôme de degré n si $\alpha \neq 0$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = x^2 \ldots (E)$$

1) • on commence par résoudre l'équation différentielle homogène associé à (E)

$$y' + 2y = 0 .$$

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx = \int -2dx .$$

$$\Rightarrow \log|y| = -2x + c \Rightarrow y = ke^{-2x} \text{ tq } k \in \mathbb{R} .$$

donc la solution de E.D.H est $y_h = ke^{-2x}$.

2) • on cherche la solution particulière y_p :

le second membre est de la forme d'un polynôme de degré 2 ($P(x) = x^2$)

donc l'équation différentielle (E) admet une solution sous forme d'un polynôme de degré 2 $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.

3) • on détermine A, B, C :

$$y_p'(x) = 2Ax + B \Rightarrow y_p' + 2y_p = x^2 \Rightarrow 2Ax + B + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 .$$

$$\Rightarrow 2Ax^2 + (2A + 2B)x + 2C + B = x^2 .$$

par comparaison on trouve : $\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \\ 2C + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}$.

donc la solution particulière est $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ la solution générale de (E) est $y_g = y_h + y_p = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

2) $\boxed{\text{Proposition :}}$ Soient P un polynome de degré n, $m \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ l'équation :

$$\forall x \in I \quad y'(x) + \alpha y(x) = P(x) e^{mx} \ldots (E)$$

admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x) e^{mx}$ où :

- $Q(x)$ est un polynôme de degré n si $\alpha + m \neq 0$.
- $Q(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha + m = 0$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - y = (x+1)e^{2x} \ldots (E)$$

1. On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E)

$$y' - y = 0 \ldots (E_0)$$

$$y' - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx = \int dx \Rightarrow \log|y| = x + c .$$

$\Rightarrow y_h = ke^x$ (la solution de E.D.H) .

2. On cherche la solution particulière y_p :

(E) admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x) e^{2x}$

tq : $Q(x)$ est un polynôme de degré 1 car :

$\alpha+m=-1+2\neq 0$ / $\alpha=-1$, $m=2$., on détermine a, b :

$\Rightarrow y_p=(ax+b)e^{2x}$, y_p est une solution de (E) $\Rightarrow y_p'-y_p=(x+1)e^{2x}$

$y_p'=ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x} \Rightarrow ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x}-(ax+b)e^{2x}=(x+1)e^{2x}$.

$\Rightarrow a+2ax+2b-ax-b=x+1 \Rightarrow ax+a+b=x+1$.

par comparaison : $\begin{cases} a=1 \\ a+b=1 \Rightarrow b=0. \end{cases} \Rightarrow y_p=xe^{2x}$.

alors la solution générale de (E) est $y_g=y_h+y_p=ke^{x}+xe^{2x}$. / $k\in\mathbb{R}$.

3 Proposition : Soient $\eta_1, \eta_2, \alpha, w\in\mathbb{R}$ avec $w\neq 0$ l'équation différentielle :

$$\forall x\in I \quad y'(x)+\alpha y(x)=\eta_1\cos(wx)+\eta_2\sin(wx) \text{ ----(E)}$$

admet une solution particulière sur I de la forme :

$$y_p=\mu_1\cos(wx)+\mu_2\sin(wx) \quad \text{où } \mu_1, \mu_2\in\mathbb{R}.$$

Exemple : $y'-y=\cos 2x-2\sin 2x$ ---(E).

la solution homogène : $y'-y=0 \Rightarrow y'=y \Rightarrow \frac{y'}{y}=1 \Rightarrow \int\frac{y'}{y}dx=\int dx$.

$\Rightarrow \log|y|=x+c \Rightarrow y_h=ke^{x}$ / $k\in\mathbb{R}$.

la solution particulière :

le second membre est de la forme : $\cos 2x-2\sin 2x$.

alors la solution particulière $y_p=a\cos 2x+b\sin 2x$.

$y_p'=-2a\sin 2x+2b\cos 2x$ et comme y_p est une solution de (E) alors.

$y_p'-y_p=\cos 2x-2\sin 2x \Rightarrow -2a\sin 2x+2b\cos 2x-a\cos 2x-b\sin 2x=$

$=\cos 2x-2\sin 2x$

$\Rightarrow (2b-a)\cos 2x-(2a+b)\sin 2x=\cos 2x-2\sin 2x$.

par comparaison : $\begin{cases} 2b-a=1 \ (1) \\ 2a+b=2 \ (2) \end{cases} \Rightarrow 2\times(1)+(2)=4b-2a+2a+b=2+2$

$\Rightarrow 5b=4 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$ et $2a+\frac{4}{5}=2 \Rightarrow a=\frac{3}{5}$.

$\Rightarrow$ la solution particulière est $y_p=\frac{3}{5}\cos 2x+\frac{4}{5}\sin 2x$.

donc la solution générale $y_g=y_h+y_p=ke^{x}+\frac{3}{5}\cos 2x+\frac{4}{5}\sin 2x$..

Exemple : (application du principe de superposition des solutions).

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'-y=e^{x}+\cos 2x-2\sin 2x \text{ ----(E)}$$

solution : on cherche la solution des équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y'-y=e^{x}$ et (E_2) : $y'-y=\cos 2x-2\sin 2x$.

(*) (E_1) : $y' - y = e^x$.

- la solution homogène : $y' - y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int dx \Rightarrow \log|y| = x + c$.

$\Rightarrow y_h = k_1 e^x$

- la solution particulière de (E_1) : $y_1 f(y) = e^x = P(x) e^x \;/\; P(x) = 1$.

$P(x) = 1$ est un polynôme de degré 0 et $1 - 1 = 0$ on applique la 2^{eme} proposition, donc la solution particulière y_p de (E_1) est de la forme

$y_p = Q(x) e^x \;/\; Q(x)$ est un polynôme de degré $0+1=1$

$\Rightarrow y_p = axe^x$. et y_p est une solution de $(E_1) \Rightarrow y'_p - y_p = e^x$.

$y'_p = ae^x + axe^x \Rightarrow ae^x + axe^x - axe^x = e^x \Rightarrow ae^x = e^x \Rightarrow a = 1$.

$\Rightarrow y_p = xe^x$.

alors la solution generale de (E_1) : $y_{g_1} = y_h + y_p = k_1 e^x + xe^x$.

* (E_2) : $y' - y = \cos 2x - 2\sin 2x$.

d'après l'exemple précédent la solution générale de (E_2) est :

$$y_{g_2} = k_2 e^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x.$$

* (E) : $y' - y = e^x + \cos 2x - 2\sin 2x$.

pour l'équation différentielle (E) on applique le principe de superposition des solution $\Rightarrow$ la solution générale de (E) est :

$$y_g = y_{g_1} + y_{g_2} = k_1 e^x + xe^x + k_2 e^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x.$$

$$\Rightarrow y_g = (k_1 + k_2) e^x + xe^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x.$$

$$\Rightarrow y_g = ke^x + xe^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x \;/\; k = k_1 + k_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Methode de variation de la constante :</u>

On considère l'équation différentielle : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ où $a(x)$ et $b(x)$ deux fcts continue sur un intervalle I.

- 1^{er} étape : on détermine la solution de l'équation homogène associée à (E) une telle solution est de la forme $y_h = k e^{-A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$ sur I.
- 2^{eme} étape : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $\varphi(x) = k(x) e^{-A(x)}$ où $k(x)$ est une fct dérivable sur I.
- 3^{eme} étape : le calcul de $\varphi(x)$ ramène à celui de $k(x)$

Exemple : $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2$ ...... (E)

on écrit l'équation différentielle sous la forme $y' + a(x)\,y = b(x)$.

$$(E) \iff y' - \frac{2x}{(1+x^2)}\,y = (1+x^2)$$

1ère étape

1) • On cherche la solution de E.D.H : $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\,y = 0 \implies y' = \frac{2x}{1+x^2}\,y \implies \frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^2} \implies \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

$$\implies \log|y(x)| = \log(1+x^2) + c.$$

$$\implies e^{\log|y|} = e^{\log(1+x^2)+c} \implies y = k\,(1+x^2)$$

2) • On cherche la solution particulière de (E) : on applique la méthode de la variation de la constante donc on cherche une solution sous la forme $y_p = k(x)\,(1+x^2)$.

3) On détermine $k(x)$:

y_p est une solution $\implies y_p' - \frac{2x}{1+x^2}\,y_p = 1+x^2 \implies y_1' = k'(x)(1+x^2) + 2x\,k(x)$

$$\implies k'(x)(1+x^2) + 2x\,k(x) - \frac{2x}{(1+x^2)}\,k(x)(1+x^2) = 1+x^2$$

$$\implies k'(x)(1+x^2) - 2x\,k(x) - 2x\,k(x) = 1+x^2 \implies k'(x)(1+x^2) = 1+x^2$$

$$\left[\cancel{\implies k'(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies k(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \implies k(x) = \operatorname{arctg} x + c}\right]$$

$$\implies k'(x) = 1 \implies k(x) = x \implies y_p(x) = x\,(1+x^2)$$

la solution générale : $y_g = y_h + y_p = k(1+x^2) + x(1+x^2) = (k+x)(1+x^2)$ / $k \in \mathbb{R}$.

Équations différentielles à variables séparées :

Déf : On appelle "équation différentielle à variables séparées" toute équation de la forme : $f(y)\cdot y' = g(x)$ où f et g sont deux fcts définies et continues respectivement sur I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

l'équation : $f(y)\cdot y' = g(x)$ peut s'écrire aussi comme : $f(y)\cdot dy = g(x)\cdot dx$.

Théorème : Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur J une fct $y(x)$ est une solution de l'équation : $f(y)\,dy = g(x)\cdot dx$ si et seulement si : $F(y) = G(x) + c$ / $c \in \mathbb{R}$.

Exemple ① : résoudre l'équation : $x^2 y' - y^2 = 0$ ---- (E)

cette équation à variables séparées

$$x^2 y' = y^2 \iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \iff \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \implies \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\implies \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c \implies \frac{1}{y} = \frac{1+cx}{x} \implies y = \frac{x}{1+cx} \quad / \ c \in \mathbb{R}.$$

donc la solution de (E) est $y = \frac{x}{1+cx}$ / $c \in \mathbb{R}$.

Exemple ⑥ : $xyy' = y^2+1$

$$xyy' = y^2+1 \iff \frac{y}{y^2+1}y' = \frac{1}{x} \iff \frac{y}{y^2+1}dy = \frac{dx}{x} \iff \int \frac{y}{y^2+1}dy = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\iff \frac{1}{2}\log(y^2+1) = \log x + c \implies \log(y^2+1) = 2\log x + 2c.$$

$$\iff \log(y^2+1) = \log x^2 + 2c \iff e^{\log(y^2+1)} = e^{\log x^2 + 2c} = x^2 . e^{2c}$$

$$\iff y^2+1 = x^2.e^{2c} \iff y = \pm\sqrt{x^2 e^{2c} - 1}$$

__Équations différentielles du second ordre :__

• __Déf :__ ..on appelle " équation différentielle du second ordre", une équation de la forme : $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ ---- (E)

où a, b et f sont des fcts définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

• L'équation : $y'' + a(x)y' + b(x).y = 0$ ---- (E_0) est appelée " équation différentielle homogène" associée à (E) ou " l'équation sans second membre".

Il existe un cas particulier de l'équation (E) lorsque $a(x), b(x)$ sont deux fcts constantes sur I

__Équation différentielle du second ordre à coéfficients constants :__

Déf : on appelle " équation differentielle du second ordre à coefficients constant toute équation de la forme : $ay'' + by' + cy = f(x)$ .... (E)

où a, b sont trois constants réelles et f est une fct continue sur un intervalle I

__Équation caractéristique :__

L'équation $ax^2+bx+c=0$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle (E)

__Condition initiale :__

Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, on dit que la solution φ de (E) vérifie la condition initiale (x_0, y_0, y_1) si à la fois $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$.

__Résolution de l'équation différentielle homogène du second ordre dans $\mathbb{R}$:__

Théorème : On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ ainsi que (E) l'équation différentielle donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E).

• Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique de (E) possede deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fcts de la forme :

$$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fcts :

$$\varphi(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique de (E) admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ ~~et~~ et les solutions de (E) sont les fcts :

$$\varphi(x) = [\alpha \cos \omega x + \beta \sin(\omega x)] e^{rx} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

<u>Exemples :</u> Résoudre les équations différentielles suivantes :

① : $y'' - 3y' + 2y = 0$, ② : $y'' - 4y' + 5y = 0$, ③ : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

① : son équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0 \Rightarrow$ l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = \frac{3-1}{2} = +1$, $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. $\Rightarrow$ les solutions de (E_1) sont les fcts de la forme : $y = \alpha e^{x} + \beta e^{2x}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

② : $y'' - 4y' + 5y = 0$ .... (E_2)

l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = -4 < 0$

$\Rightarrow$ l'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$\Delta = -4 = i^2 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i2$. $\Rightarrow r_1 = \frac{4 - i2}{2} = 2 - i$, $r_2 = \frac{4 + i2}{2} = 2 + i$.

$\Rightarrow$ les solution de l'équation différentielle (E_2) sont les fcts :

$$y = [\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x] e^{rx} = [\alpha \cos x + \beta \sin x] e^{2x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad \text{car :}$$

$(r_1 = 2 - i = r - i\omega \ , \ r_2 = 2 + i = r + i\omega) \ / r = 2, \omega = 1$

③ : $y'' - 2y' + 4y = 0$ .... (E_3).

l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$

l'équation caractéristique possède ~~une~~ racine double $r = -\frac{(-4)}{2 \times 1} = 2$.

$\Rightarrow$ les solution de (E_3) sont les fcts de la forme : $y = (\alpha x + \beta) e^{rx} = (\alpha x + \beta) e^{2x}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Équation différentielle du second ordre avec second membre à coefficients constants :</u>

on considère une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$\forall x \in I : \ a y'' + b y' + c y = f(x) \ \text{.....} (E)$$

<u>Théorème :</u> La solution générale de (E) : E.D. avec second membre est la somme d'une solution de l'équation (E_0) : E.D.H (équation diff homogène) associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

$$y = y_h + y_p.$$

Matrices

Déf : un tableau formé de nombres appartenants à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, s'appelle une matrice à coéfficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 9 \\ 20 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 3 lines, 3 colonnes }, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 2 lines, 3 colonnes}$$

l'ensemble des matrices a n ligne et m colonnes se note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Remarque : si $n = m$ la matrice est dite carée et l'ensemble des matrices carés à n lignes et n colonnes se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Déf : (1) une matrice ligne est une matrice a une ligne

Exemple : $A = (1, 2, 5, -1) \in \mathcal{M}_{1,4}$

Déf : (2) une matrice colonne est une matrice à une colonne.

Exemple : $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}$

Pour définir une matrice a n lignes et m colonnes on utilise deux indices pour les coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})$$

tq : i : le numéro de la ligne, j : le numéro de la colonne.

Déf : si $A = (a_{ij})$ est une matrice carré, les coefficients a_{ii} s'appellent les coefficients diagonaux de A.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$ les coefficients diagonaux sont : $-1, 6, 2$.

quelques matrices carés particulières :

/ **matrice unité :**

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

/ matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple : $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

3/ matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple : $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4/ matrice triangulaire inférieure :

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple : $L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

opérations sur les matrices :

1) Somme de deux matrices :

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille, on définit la matrice $A+B$ en ajoutant coefficient par coefficient autrement dit :

$$A + B = C \quad \text{tel que : } C = (c_{ij}) \ , \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} .$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} .$$

② Produit d'une matrice par un scalaire :

Pour multiplier une matrice A par un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, on multiplie tous les coefficients par λ : si $A = (a_{ij})$ on a donc : $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(7) & 3-2(-2) & 0-2(0) \\ -5-2(0) & 2-2(-1) & 4-2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 7 & 0 \\ -5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

③ Produit de matrices :

Le produit de deux matrices $\overbrace{\ }^{A \text{ et } B}$ est définit seulement à la condition que le nombre de colonne de A soit égal au nombre de ligne de B

Soient 2 matrices A (à n lignes et p colonnes) et B (à p lignes et q colonnes)

$$A = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \quad , \quad B = (b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

le produit :

$$\underset{(n,p)}{A} \times \underset{(p,q)}{B} = C_{(n,q)} \quad , \quad C = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

tel que : $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Exemple : ①

$\underline{A \times B}$: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 + 3.3 & 2.2 + 3(-1) \\ 0.1 - 2.3 & 0.2 - 2(-1) \\ -4.1 + 6.3 & -4.2 + 6(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -6 & 2 \\ 14 & -14 \end{pmatrix}.$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{B \times A}$: $B \times A = B_{(2,2)} \times A_{(3,2)}$ n'existe pas car le nombre de colonnes de B (2) n'égal pas le nombre de lignes de A (3) $\quad (2 \neq 3)$

Exemple : ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \times B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \times A$ n'existe pas

Exemple ③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B \neq B \times A .$$

Remarque : le produit matriciel n'est pas commutatif.

Propriétés : le produit matriciel est :

* Associatif : $A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$.
* distributif par rapport à l'addition (à gauche et à droite)

$$(A+B) \times D = A \times D + B \times D .$$
$$D \times (A+B) = D \times A + D \times B .$$

* $\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
* $A_{nm} = A_{nm} \times I_m = I_n \times A_{nm} = A_{nm}$

tel que I_m : matrice identité de m colonnes et m lignes

I_n : matrice identité de n colonnes et n lignes

Remarque : la matrice identité (unité) est l'élément neutre pour la multiplication des matrices.

Produit de matrices carrées :

- le produit de 2 matrices carrées de même taille est une matrice carrée de même taille.
- si A est une matrice carrée de taille n on peut définir son carré $A \times A = A^2$, son cube $A \times A \times A = A \times A^2 = A^3$ et de proche en proche pour tout entier ≥ 2, sa puissance n-ième A^n en posant : $A^n = A.A^{n-1}$ de plus on pose $A^1 = A$ et $A^0 = I_n$

Matrices qui commutent :

si des matrices carrées A et B de taille n vérifient $AB = BA$, on dit qu'elles commutent

Exemple : pour des matrices diagonales on a l'égalité,

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) . \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n) .$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2 & 0 \\ 0 & 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

* pour tout scalaire λ la matrice

$\lambda I_n = \text{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ commute avec toute autre matrice carré A de taille n.

$$A(\lambda I_n) = \lambda(A I_n) = \lambda A$$

$$(\lambda I_n) A = \lambda (I_n A) = \lambda A.$$

Formule de binôme de Newton :

soient A et B deux matrices carées de même taille si les matrices A et B commutent alors pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i$$

Exemple : Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on remarque que $A = I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et comme $I_3 B = B I_3$ on peut appliquer la formule de binome de Newton

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i I_3^{n-i} B^i$$

* on calcule les puissances de B

$B^0 = I_3$, $B^1 = B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 . B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = 0$$

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i I_3^{n-i} B^i = C_n^0 I_3^n B^0 + C_n^1 I_3^{n-1} B + C_n^2 I_3^{n-2} B^2 + C_n^3 I_3^{n-3} B^3 + C_n^4 I_3^{n-4} B^4 + \cdots + C_n^n I_3^0 B^n$$

pour $i \geq 3$ $B^i = 0$

alors $A^n = C_n^0 I_3^n B^0 + C_n^1 I_3^{n-1} B + C_n^2 I_3^{n-2} B^2 = \frac{n!}{0!\,n!} I_3 + \frac{n!}{1!(n-1)!} B + \frac{n!}{2!(n-2)!} B^2$

$$\Rightarrow A^n = I_3 + nB + \frac{(n-1)n}{2} B^2.$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n & n \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés des matrices transposée :

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice, la transposée de A est la matrice ${}^tA=(a_{ji})$

on peut vérifier les propriétés suivantes :

* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
* ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
* ${}^t({}^tA) = A$
* ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ (lorsque le produit est défini)

Déterminants d'une matrice carrée :

1) Cas d'une matrice de taille 2 :

* le déterminant de la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre $ad-bc$

on le note $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

2) Cas d'une matrice de taille 3 :

* le déterminant de la matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$

est le nombre

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

dans ce cas on dit qu'on a développé le déterminant selon la première colonne.

Remarque : on peut développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.

Propriétés :

* un déterminant qui a deux colonnes ou 2 lignes identiques est nul.
* un déterminant dont une colonne ou ligne est formé de 0 est nul.
* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (A est une matrice de taille n).
* si on multiplie par λ une colonne ou une ligne d'un déterminant, on multiplie par λ la valeur de ce déterminant.
* quand on permute deux colonnes ou deux lignes, on change son signe.
* $\det({}^tA) = \det(A)$.

au produit de ses coefficients diagonaux $\left(\det = \prod_{i=1} a_{ii}\right)$ en particulier $\det I_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemples :

① $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= (45-48) - 4(18-24) + 7(12-15) = 0$

on a développé le déterminant selon la première colonne.

② $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -5 & 20 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ car la ligne ① et ③ sont identique

③ $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ car la $3^{ème}$ colonne est formé de 0.

④ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1$, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.2 & 3.2 \\ 2.2 & 7.2 \end{vmatrix} = 2^2 . \det A = 4.1 = 4.$

$\det A = 1 \Rightarrow \det(2A) = 2^2 \det A = 4.$ $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

⑤ $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4.2 & 6 \\ 2 & 1.2 & 2 \\ -1 & 5.2 & 3 \end{vmatrix} = 2.13 = 26$

car la $2^{ème}$ colonne est multiplie par 2.

⑥ $\det A \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -13$

car on a permuté les lignes 1, 3.

⑦ $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\det {}^tA \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\det A = \det {}^tA = 2.$

Déf : • une matrice carrée A est dite inversible ou régulière s'il existe une matrice carrée A^{-1} (appelée matrice inverse) telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

• si A^{-1} n'existe pas, la matrice A est dite singulière

Propriétés :

* $(A^{-1})^{-1} = A$
* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
* $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
* $\left(dig(D_{ii})\right)^{-1} = dig\left(\frac{1}{D_{ii}}\right)$
* la matrice A est dite orthogonale si $A^{-1} = A$.
* si $\lambda \neq 0$ alors $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

Remarque : A^{-1} existe $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Calcul de la matrice inverse :

Déf : (mineur)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée on appelle mineur d'indice (i,j) le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A

Déf : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée, on appelle comatrice de A et on note $co(A)$ (ou $com(A)$) la matrice $co(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$

1ère méthode de calcul de l'inverse d'une matrice :

proposition : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t co(A) = \begin{pmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & \cdots & (-1)^{1+n} \Delta_{1n} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & \cdots & (-1)^{2+n} \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} \Delta_{n1} & (-1)^{n+2} \Delta_{n2} & \cdots & (-1)^{n+n} \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque : si A est inversible, alors son inverse est unique.

Exemples :

① $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$: $\det A = 1\times 2 - (-1)(-3) = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe.

on calcule $Co(A)$

$$Co(A) = \begin{pmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} \end{pmatrix} \quad tq : \Delta_{11} = 2, \ \Delta_{12} = -3, \ \Delta_{21} = -1, \ \Delta_{22} = 1.$$

$$\Rightarrow Co(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tCo(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^tCo(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

pour vérifier

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: $\det A = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$

on calcule $Co(A)$:

$$Co(A) = \begin{pmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & +\Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ +\Delta_{31} & -\Delta_{32} & +\Delta_{33} \end{pmatrix}$$

tq : $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

alors $Co(A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tCo(A) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot {}^tCo(A) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_3$

2^{eme} méthode de calcul de l'inverse : (méthode de Gauss-Jordan) :

cette méthode consiste par différentes manipulations sur lignes formant la matrice, à introduire des 1 sur la diagonale de la matrice A et des 0 ailleurs, et de faire les mêmes manipulations sur la matrice identité de cette façon on passe de la matrice A à la matrice que l'on cherche A^{-1}.

Exemple ① : calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- 1^{er} étape : pivot 3 (ligne 1)

$$\begin{array}{c} L_1 \\ 3L_2 + L_1 \\ 3L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

- 2^{eme} étape : pivot 10 (ligne 2)

$$\begin{array}{c} 10L_1 - L_2 \\ L_2 \\ 2L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & -12 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & -3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

- 3^{eme} étape : pivot 12 (ligne 3)

$$\begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ 6L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 60 & 0 & 9 & 21 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

- 4^{eme} étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{30}{30} & \frac{0}{30} & \frac{0}{30} & \frac{6}{30} & -\frac{6}{30} & \frac{6}{30} \\ \frac{0}{60} & \frac{60}{60} & \frac{0}{60} & \frac{9}{60} & \frac{21}{60} & -\frac{6}{60} \\ \frac{0}{12} & \frac{0}{12} & \frac{12}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{3}{12} & \frac{6}{12} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

alors la matrice inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1/5 \\ \frac{3}{20} & \frac{7}{20} & -1/10 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1/2 \end{pmatrix}$

Ex — ①: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. $\det A = 1$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1ère étape : pivot 3 (ligne 1)

$$\begin{array}{c} L_1 \\ 3L_2 - 2L_1 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

2ème étape : pivot 2 (ligne 2)

$$\begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ 2L_3 + 11 L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -24 & 33 & 6 \end{array}\right)$$

3ème étape : pivot 3 (ligne 3)

$$\begin{array}{c} L_1 + 0L_3 \\ 3L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -30 & 42 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -24 & 33 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ -8 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

lication aux systèmes d'équation linéaires :

1) Formulation matricielle :

un système de n équations linéaires à n inconnus est de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n . \end{cases}$$

où : a_{ij} : coefficients.
x_i : inconnues
b_i : termes constants.

un tel système peut s'écrire sous forme matricielle : $Ax = B$

avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ex :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 5 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution des systemes linéaires :

Cas d'une matrice régulière :

Systeme de Cramer : Si A est une matrice inversible ($\det A \neq 0$) le systeme est dit de Cramer.

Proposition. un systeme de Cramer possede une et une seul solution qui matriciellement s'écrit $X = A^{-1}B$

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Formule de Cramer :

Si (S) est un systeme de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$ l'unique solution de (S) sont les x_i tels que :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

ou A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i^{eme} colonne de A par B.

Exemple : soit le systeme :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = -1 \end{cases} \quad (S)$$

1 - Écrire (S) sous la forme matricielle, puis montrer que (S) est de Cramer.

2 - Résoudre (S) par la méthode de Cramer.

3 - Resoudre (S) par la méthode matricielle.

Réponse :

1 -
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad AX = B$$

(S) est de Cramer car :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{C_1 \; C_2 \; C_3}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}_{\substack{C_1 \; C_2 - C_1 \; C_3 - C_1}} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -31.$$

Remarque : la valeur du déterminant ne change pas quand on ajoute à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes)
En pratique, on utilise cette propriété (sur les lignes ou sur les colonnes) pour créer le maximum de zéros puis on développe par rapport à la ligne ou à la colonne qui a le plus de zéros

.(S) est de Cramer car : $\det A = -31 \neq 0$

2. on résoudre (S) par la méthode de Cramer :

les solution de (S) sont : $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ $\quad i = 1, 2, 3.$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-31} = -\frac{7}{31} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-31} = \frac{16}{31} \quad , \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-31} = \frac{22}{31}$$

alors la solution est : $X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{31} \\ \frac{16}{31} \\ \frac{22}{31} \end{pmatrix}$.

3) méthode matricielle :

on a : $AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

donc on calcule la matrice inverse A^{-1} : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t co(A)$

$$co(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & -19 \\ -3 & -2 & 5 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t co(A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 \\ -11 & -2 & 5 \\ -19 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-31}\, {}^t co(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{31} & \frac{3}{31} & \frac{8}{31} \\ \frac{11}{31} & \frac{2}{31} & -\frac{5}{31} \\ \frac{19}{31} & -\frac{5}{31} & -\frac{3}{31} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{1}{31} & \frac{3}{31} & \frac{8}{31} \\ \frac{11}{31} & \frac{2}{31} & -\frac{5}{31} \\ \frac{19}{31} & -\frac{5}{31} & -\frac{3}{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{31} - \frac{8}{31} \\ \frac{11}{31} + \frac{5}{31} \\ \frac{19}{31} + \frac{3}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{31} \\ \frac{16}{31} \\ \frac{22}{31} \end{pmatrix}.$$

Cas d'une matrice singulière :

lorsque le déterminant est nul on envisage 2 cas:

1- système indéterminer : si on arrive à exprimer p équation en fonction des autres le système admet une infinité de solutions :.

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \longrightarrow (1) \\ 3x_1 + 3x_2 = 12 \longrightarrow (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 3-3 = 0 \Rightarrow A$ est une matrice singulière

la (2) équation est égale à la première multiplier par 3. en fait on a qu'une seul equation $x_1 + x_2 = 4$ et donc le système admet une infinité de solution et la solution est une droite d'équation

$$y = -x + 4$$

2 système impossible : si les équations ne peuvent pas être exprimer les uns en fonction des autres, le système n'admet aucune solution

Exemple : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \longrightarrow (1) \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \longrightarrow (2) \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ est singulière

$x_1 = 1 - x_2 \Rightarrow 2(1-x_2) + 2x_2 = 3 \Rightarrow 2 \neq 3 \Rightarrow$ on ne peut pas exprimer l'équation (2) en fonction de l'équation (1)

donc le système n'a pas de solution.