ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 06/06/22

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά ο.π.

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α.

Α1. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ 186

Α2. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ 142

Α3. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ 161

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad D_f = (-\infty, 1]$

$g(x) = \sqrt{x} \quad D_g = [0, +\infty)$

B1 $D_{f\circ g} = \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$= [0, 1]$

$h(x) = (f\circ g)(x) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 =$

$= (x-1)^2$ με $x \in [0, 1]$

B2 Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow$

$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow$

$-(x_1 - 1) = -(x_2 - 1) \Leftrightarrow -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Leftrightarrow$

$-x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \underline{x_1 = x_2}$

Επομένως η h είναι 1-1 επομένως

ορίζεται η αντίστροφη της

$h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y, \ y \geq 0 \Leftrightarrow$

$|x - 1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{y}, \ y \geq 0 \Leftrightarrow$

$x = 1 - \sqrt{y} \quad y \geq 0$

Έχουμε $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow$

$0 \le 1-\sqrt{y} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\sqrt{y} \le 0 \Leftrightarrow$

$0 \le \sqrt{y} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le y \le 1$

$f^{-1}(y) = 1-\sqrt{y}$ $\quad 0 \le y \le 1$ Επομένως

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x} \quad x \in [0,1]}$$

B3) $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$

i) Αρκεί νδο. φ συνεχής στο $[0,1]$ και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$.

φ συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών, επομένως αρκεί νδο φ συνεχής στο 1 δηλ ότι

$$\lim_{x \to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1^2 - \sqrt{x}^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$\varphi(1) = 1/2$

Επομένως η φ συνεχής στο 1, άρα φ συνεχής στο $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 1/2 \end{array}\right\} \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

ii) $\eta\mu \frac{\pi}{6} = 1/2$

$\eta\mu\, \pi/2 = 1.$

Η ημα είναι γν. αύξουσα στο $(\pi/6, \pi/2)$ επομένως θα έχουμε

$$\pi/6 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\, \pi/6 < \eta\mu\alpha < \eta\mu\, \pi/2 \Leftrightarrow$$

$$1/2 < \eta\mu\alpha < 1.$$

Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (0,1) : \varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θεμα Γ

Γ1) $f'(x) = \begin{cases} -2 & x<-1 \\ 3x^2-1 & x>-1 \end{cases}$

Απο συνεπεια θεωρήματος μεσης τιμής. Εχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & , x<-1 \\ x^3 - x + c_2 & , x>-1 \end{cases}$$

- Η f διερχεται απο την αρχή των αξόνων συνεπώς: $f(0)=0 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = 0}$

- Η f συνεχής στο −1 συνεπώς:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

$$\Leftrightarrow -2(-1)+c_1 = (-1)^3-(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1+2=0 \Leftrightarrow \boxed{c_1=-2}$$

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$$

Συνεπώς: $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & x\leq -1 \\ x^3-x & x>-1 \end{cases}$

Γ2) Για $x>-1$ η $f(x)=x^3-x$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

$f'(x) = 3x^2 - 1$ συνεπώς $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$

Άρα: (ε): $y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

$\Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

Το $B(0, -2) \in (\varepsilon)$: $-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0)$

$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 \cancel{+ x_0} = -3x_0^3 \cancel{+ x_0}$

$\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_0 = 1}$

Συνεπώς: (ε): $y - 1^3 + 1 = (3 \cdot 1^2 - 1)(x - 1)$

$y = 2x - 2$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

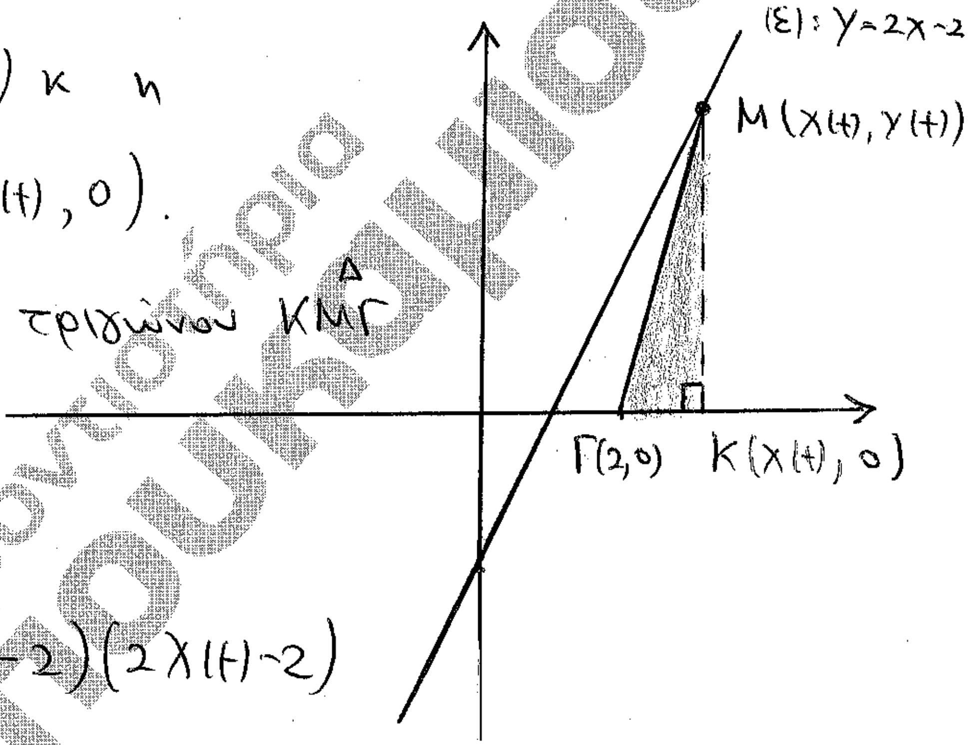
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

$\boxed{Γ3}$

Έστω $M(x(t), y(t))$ κ η προβολή του $K(x(t), 0)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{KMΓ}$ είναι:



$$E(KMΓ) = \frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2)$$

$$= (x(t)-2)(x(t)-1)$$

$$= x^2(t) - 3x(t) + 2$$

Άρα $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

$$E'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 3x'(t)$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Την χρονική στιγμή $t=t_0$ έχουμε:

$$X(t_0)=3$$

$$X'(t_0)=2$$

$$E'(t_0)=2X(t_0)\cdot X'(t_0)-3X'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=$$

$$=6 \text{ τ.μ/sec}$$

$\boxed{Γ4}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{ημ f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$$

- $$\left|\frac{ημ f(x)}{f(x)}\right|=\frac{|ημ f(x)|}{|f(x)|}\leq\frac{1}{|f(x)|}$$

Άρα: $$-\frac{1}{|f(x)|}\leq\frac{ημ f(x)}{f(x)}\leq\frac{1}{|f(x)|}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Για $x<-1$ ισχύει $f(x)=-2x-2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ κ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$

Όμοιως $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{|f(x)|}\right]=0$. Συνεπώς

από Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(-x)}{1-x^3} \overset{u=-x}{\underset{u\to+\infty}{=\!=}} \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f(u)}{1+u^3} =$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{u^3-u}{1+u^3} = \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{u^3}{u^3} = 1$

Άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \dfrac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0+1=1$

Θέμα Δ

Δ1. i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\searrow$	min	$\nearrow$	

Η $f(x)$ παρουσιάζει στο $x = 1$ ελάχιστο το $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \ln(3x)\right) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(3x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln(3x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty$

γιατί $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(3x))'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3x} \cdot 3\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

• Στο διάστημα $(0,1]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και $\downarrow$.

Άρα $f((0,1]) = [f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = [1-\ln 3, +\infty)$

$0 \in f((0,1])$. Άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$: $f(x_1)=0$

Επειδή $f \downarrow$, το x_1 είναι μοναδικό.

• Στο διάστημα $[1,+\infty)$ η $f(x)$ είναι συνεχής και $\uparrow$.

Άρα $f([1,+\infty)) = [f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)) = [1-\ln 3, +\infty)$

$0 \in f([1,+\infty))$. Άρα υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$: $f(x_2)=0$.

Επειδή $f \uparrow$, το x_2 είναι μοναδικό.

Τελικά, υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$

με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) $f''(x) = \dfrac{(x-1)'\cdot x-(x-1)(x)'}{x^2} = \dfrac{x-x+1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} > 0,$

για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. $E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx$.

• Για $x_1 \le x \le 1$ η f είναι $\downarrow$

Άρα $f(x_1) \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) \le 0$.

• Για $1 \le x \le x_2$ η f είναι $\uparrow$

Άρα $f(x) \le f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Τελικά, $f(x) \le 0$, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Άρα $E=\int_{x_1}^{x_2} -f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}(\ln(3x)-x)\,dx =$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \int_{x_1}^{x_2}(x)'\cdot\ln(3x)\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \left[x\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\cdot(\ln(3x))'\,dx - \left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} x\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3\,dx - \left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} 1\cdot dx - \left(\frac{x_2^3}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$= x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - \left[x\right]_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right).$$

Τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f. Άρα

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$$

Άρα $E = x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - (x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) =$

$$= x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} =$$

$$= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - x_2 + x_1 = \frac{x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1}{2} =$$

$$= \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2).$$

Δ3. Από το Δ2 έχουμε ότι:

$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$ Αφού $x_2 - x_1 > 0$.

Άρα $x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$

$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$.

και $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$

Άρα $f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$.

Δ4. $2f(x) = (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$

ε_1: $y - \cancel{f(x_2)} = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από

την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(x_2, f(x_2))$

Άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (1) και το " = " ισχύει

μόνο για $x = x_2$.

• Η $f(x)$ παρουσιάζει στο $x=1$ ολικό ελάχιστο.

Άρα $f(x) \geq 1-\ln 3$ ② και το "=" ισχύει μόνο για $x=1$.

όπου $x_2>1$.

Από ① και ② έχουμε με πρόσθεση κατά μέλη

$$2f(x) > 1-\ln 3 + f'(x_2)(x-x_2),$$

για κάθε $x \in (0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.