Calcul algébrique - Nombres complexes

Exercice 1 :

1. (2 points) Construire une fonction *Python* qui permet de calculer la somme d'une famille de nombres complexe.
2. (2 points) Construire une fonction *Python* qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel.

Exercice 2 : On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n, p \in \mathbb{N}, \mathcal{S}(n,p,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} x^k$$

1. (1 point) Justifier que :
$$\forall p, k \in \mathbb{N}, \binom{p+k}{k} = \binom{p+k}{p}$$
2. (a) (1 point) Montrer que :
$$\forall p, k \in \mathbb{N}, \binom{p+k}{k} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$$
   (b) (1 point) En déduire que :
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \mathcal{S}(n,p,1) = \binom{p+n+1}{p+1}$$
3. Applications : Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) (1 point) En considérant le cas $p = 1$, calculer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k$$
   (b) (2 points) En considérant le cas $p = 2$, calculer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2$$
   (c) (2 points) En considérant le cas $p = 3$, calculer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3$$
4. (1 point) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathcal{S}(n,0,x)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (a) (2 points) Calculer $(1-x)\mathcal{S}(n,1,x)$.

(b) (1 point) En déduire que :

$$\mathcal{S}(n,1,x) = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

(c) (1 point) Application : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k$$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, n, p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) (2 points) Montrer que :

$$(1-x)\mathcal{S}(n,p,x) = \mathcal{S}(n,p-1,x) - \binom{n+p}{p} x^{n+1}$$

   (b) (1 point) En déduire $\mathcal{S}(n,2,x)$ et $\mathcal{S}(n,3,x)$.

   (c) (1 point) Application : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 2^k$$

Exercice 3 :

1. (2 points) Déterminer les nombres complexes z tels que :

$$\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$$

2. (2 points) Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a+b+c|^2$$

Exercice 4 :

1. (2 points) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-252 - 64i$.
2. (1 point) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\mathscr{E} : z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$.
3. (1 point) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}^2$, du système :

$$\begin{cases} x + y &= 8 - 8i \\ xy &= 63 - 16i \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. (1 point) Calculer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$.
2. (2 points) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

Exercice 6 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soient les points $A\left(2 + 2i\sqrt{3}\right), B\left(2 - 2i\sqrt{3}\right), C(-4), D\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ et $E\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$.

1. (2 points) Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B, C, D et E.
2. (2 points) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
3. (1 point) Montrer que D est le milieu du segment $[AC]$.
4. (2 points) Montrer que le triangle BDA est rectangle.
5. (2 points) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
6. (2 points) Montrer que les points A, B, D et E sont cocycliques.