Πανελλαδικές Εξετάσεις Επαγγελματικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά (Άλγεβρα)**

Ημερομηνία: **4 Ιουνίου 2022**

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 28-29

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 87

Α3.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

Α4.

α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x > 0$

β. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά, έστω: $x_1, \dots, x_5$

Β1. Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_5}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{75}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 15$$

και για το εύρος:

$$R = x_5 - x_1 \Leftrightarrow R = 25 - 5 = 20$$

Β2. Για τη διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{5}[(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_5 - \bar{x})^2]$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{5}(10^2 + 5^2 + 0 + 5^2 + 10^2)$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{5} \cdot 250$$

$\Leftrightarrow s^2 = 50$

Β3. Είναι: $s = 5\sqrt{2}$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι :

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{10}$$

Πράγματι

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} > \frac{1}{100}$$

Άρα το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 - 18x + a, x \in \mathbb{R}$

Γνωρίζουμε ότι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + a = 0 \Leftrightarrow a = 15$

Γ2. Είναι $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ και $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Οπότε για $x = 2$ είναι: $f(2) = 8 - 36 + 30 + 1 \Leftrightarrow f(2) = 3$

Ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2,3)$

Είναι $f'(2) = 12 - 36 + 15 \Leftrightarrow f'(2) = -9$

Οπότε $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$\Leftrightarrow y - 3 = -9(x - 2)$

$\Leftrightarrow y - 3 = -9x + 18$

$\Leftrightarrow y = -9x + 21$

Γ3. Είναι $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5)$

Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$

Και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 5$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	1		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$ και γνησίως αύξουσα στο $[5, +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$, το $f(1) = 8$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 5$ το $f(5) = -24$.

Γ4. Είναι

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{3(x^2-6x+5)}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-5)}{x+1} = 3\cdot\frac{-4}{2} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f ορίζεται για $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Οπότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x \neq -1$

Δ2. Έχουμε: $f'(2) = \frac{1}{9}$ οπότε $\bar{x} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Και $f'(1) = \frac{1}{4}$ οπότε $s = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Δ3. Είναι $\bar{x} - 2s = 9 - 4 = 5$ και $\bar{x} + s = 9 + 2 = 11$

Ζητείται πόσοι μαθητές είναι στο διάστημα 5 έως 11 λεπτά,

δηλαδή στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$

Στο διάστημα αυτό ανήκει το 81,5% των μαθητών, δηλαδή $\frac{81{,}5}{100}\cdot 2000 = 1630$ μαθητές

Πάνω από 15 λεπτά, δηλαδή στο διάστημα $(\bar{x} + 3s, +\infty)$ ανήκει το 0,15% των μαθητών,

δηλαδή $\frac{0{,}15}{100}\cdot 2000 = 3$ μαθητές.

Δ4. Έστω Ψ_i οι τιμές του χρόνου επιστροφής των μαθητών του νέου δείγματος. Τότε από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει ότι:

$\bar{\psi} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$ λεπτά

$S_\psi = S = 2$ λεπτά

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!