

Développement limité, calcul asymptotique

Exercice 1 :

- 1 : Calculer le $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de la fonction $f(x) = \sin x$.
- 2 : Calculer le $DL_4(1)$ de la fonction $f(x) = e^x$.
- 3 : Calculer le $DL_3(2)$ de la fonction $f(x) = 2^x - x^2$.
- 4 : Calculer le $DL_4(1)$ de la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 2 :

- 1 : Calculer le $DL_5(0)$ de la fonction $f(x) = \sinh x \cos x$.
- 2 : Calculer le $DL_5(0)$ de la fonction $f(x) = \arctan^2 x$.
- 3 : Calculer le $DL_5(0)$ de la fonction $f(x) = \sin x \arctan x \ln(1+x)$.

Exercice 3 :

- 1 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \arctan e^x$.
- 2 : Calculer le $DL_{10}(0)$ de la fonction $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Exercice 4 :

- 1 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}$.
- 2 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$.
- 3 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$.

Exercice 5 :

- 1 : Calculer le $DL_6(0)$ de la fonction $f(x) = \cos^3 x$.
- 2 : Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.
- 3 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \sqrt{3 + \cos x}$.

Exercice 6 :

- 1 : Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $f(x) = e^{\cos x}$.
- 2 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \sin(\sinh x)$.
- 3 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \cosh(\ln(1+x))$.

Exercice 7 :

- 1 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$.
- 2 : Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $f(x) = \cos(\sin x)$.
- 3 : Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x})$.

Exercice 8 :

- 1 : Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $f(x) = \ln(1 + \sinh x)$.
- 2 : Calculer le $DL_5(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{e^x \tanh x}{\cosh x}$.
- 3 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x}$.

Exercice 9 :

- 1 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = (1 + \sin x)^x$.
- 2 : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Exercice 10 :

- 1 : Calculer le $DL_3(+\infty)$ de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
- 2 : Calculer le $DL_4(+\infty)$ de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$.
- 3 : Calculer le $DL_5(+\infty)$ de la fonction $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$.
- 4 : Calculer le $DL_3(+\infty)$ de la fonction $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$.

Exercice 11 : Donner le développement asymptotique de la fonction :

1. $f(x) = x^x$ en 0 à la précision $(x \ln x)^2$.
2. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$.
3. $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
4. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
5. $f(x) = \arctan x$ en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle $\mathcal{E} : |x|y' + (x-1)y = x^2$.

1 : Résoudre l'équation \mathcal{E} sur $]0, +\infty[$.

2 : Résoudre l'équation \mathcal{E} sur $] -\infty, 0[$.

3 : Déterminer les solutions de l'équation \mathcal{E} sur \mathbb{R} .

Exercice 13 : Déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

$$1) \sqrt{x} - \sqrt{\sin x} \quad 2) \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \quad 3) (1 + \sin x)^x - (1+x)^{\sin x} \quad 4) \sinh(\sin x) - \sin(\sinh x)$$

Exercice 14 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les limites :

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\ln(1+x) - \sin x} & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cos x - \cosh x)} \\ 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right) & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} \right) \\ 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{a}{x} \right)^x - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{ax} \right) & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^x & \end{array}$$

Exercice 15 :

1 : Déterminer l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ en 0 et étudier sa position relative par rapport à la courbe de f .

2 : Déterminer les asymptotes de la fonction $f(x) = (x-1)^2 \arctan \frac{1}{x}$ en $+\infty$ et $-\infty$ et étudier leurs positions relatives par rapport à la courbe de f .

3 : Déterminer les asymptotes de la fonction $f(x) = \ln \cosh x$ en $+\infty$ et $-\infty$ et étudier leurs positions relatives par rapport à la courbe de f .

Exercice 16 : Soit $m \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction $f_m(x) = \frac{x}{e^x - 1} - m(1 + x + x^2 + x^3)$.

1 : Pour quelles valeurs de m la fonction f_m est-elle positive au voisinage de 0 ?

2 : Étudier les position relative de la courbe de f et sa tangente en 0 suivant les valeurs de m .

3 : Pour quelles valeurs de m la fonction f_m admet-elle un extrema en 0 ?

4 : Pour quelles valeurs de m la fonction f_m admet-elle un point d'inflexion en 0 ?

Exercice 17 :

1 : Montrer que la fonction $f(x) = 2x + \cos x$ est bijective et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2 : Montrer que f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 : Déterminer un $DL_4(0)$ de la fonction f .

Exercice 18 : On considère la fonction $f(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x^2}$.

1 : Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction dérivable en 0.

2 : Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .