3. א. (8 נקודות) תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית ויהיו $v_1, v_2, \cdots, v_n$ וקטורים ב- V.
הוכיחו: אם $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ בת"ל אזי $v_1, v_2, \cdots, v_n$ בת"ל.

ב. (9 נקודות) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(a,1,a-2) = (2,-2,1), T(-a,-1,1) = (-1,2,-1), T(4,a,-a) = (2,2,1)$$

ג. (8 נקודות) עבור אחד מהערכים של a שמצאתם בסעיף ב. בנו את T.

סעיף א'

שאלה 3. סעיף א'

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית ויהיו $v_1, \dots v_n$ ווקטורים מ-V
ידוע כי $T(v_1), T(v_2), \dots T(v_n)$ בת"ל . נניח בשלילה כי $v_1, \dots, v_n$ לא בת"ל , כלומר ת"ל.

מכך ש $v_1, \dots, v_n$ ת"ל לכן קיימים $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$ שעבורם למשוואה זאת קיים β כלשהו אשר אינו אפס.
בה"כ נניח שזה β_1 ואז

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = \vec{0}$$

נחלק β_1

$$v_1 + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_1} v_n = \vec{0}$$

נפעיל T:

$$T\left(v_1 + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_1} v_n\right) = T(\vec{0})$$

ידוע כי העתקה לינארית ולכן:

$$1_F \cdot T(v_1) + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_1} T(v_n) = \vec{0}$$

אבל זאת סתירה כי נתון כי $T(v_1), \dots T(v_n)$ היא בת"ל ולמשוואה שלנו קיים סקלר אשר שונה מאפס $1_F \in F$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ בת"ל.

ב. (9 נקודות) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(a,1,a-2) = (2,-2,1), T(-a,-1,1) = (-1,2,-1), T(4,a,-a) = (2,2,1)$$

ג. (8 נקודות) עבור אחד מהערכים של a שמצאתם בסעיף ב. בנו את T.

סעיף ב'

טיוטה לי:

$$\mathrm{T}(a,1,a-2) + T(-a,-1,1) = T(a-a, 1-1, a-2+1) =$$

$$T(0,0,a-1) =$$

$$(2,-2,1) + (-1,2,-1)$$

$$= (1,0,0)$$

עבור $a = 1$ ודאי כי $\mathrm{T}(0,0,0)$ ואז צריך להתקיים $T(0,0,0) = (0,0,0)$.

אז אם ידוע כי $T(0,0,a-1) = (1,0,0)$ בהכרח $a \neq 1$.

נתון כי מתקיים עבור T:

$$T(a,1,a-2)=(2,-2,1)\quad,\quad T(-a,-1,1)=(-1,2,-1)\quad,T(4,a,-a)=(2,2,1)$$

ראשית אבדוק לאיזה ערכים a הקבוצה

$$\{(a,1,a-2),(-a,-1,1),(4,a,-a)\}$$

בסיס ל $\mathbb{R}^3$. עבור ערכי a אשר עבורם הקבוצה אינה בסיס בהכרח לא קיימת העתקה לינארית T
נבדוק מתי בת"ל :

$$\begin{pmatrix} a & -a & 4 \\ 1 & -1 & a \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

נחלק למקרים אם $a\neq 0$ ואם $a=0$. אם $a\neq 0$ אז נוכל לחלק בהופכי:

$$R_1\leftarrow \frac{1}{a}R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{a} \\ 1 & -1 & a \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$R_2\leftarrow R_2-R_1$$

$$R_3\leftarrow R_3+2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{a} \\ 0 & 0 & a-\frac{4}{a} \\ 0 & -1 & -a+\frac{8}{a} \end{pmatrix}$$

$$R_2\leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{a} \\ 0 & -1 & -a+\frac{8}{a} \\ 0 & 0 & a-\frac{4}{a} \end{pmatrix}$$

$$R_2\leftarrow -1R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{a} \\ 0 & 1 & a-\frac{8}{a} \\ 0 & 0 & a-\frac{4}{a} \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{a} + a - \frac{8}{a} \\ 0 & 1 & a - \frac{8}{a} \\ 0 & 0 & a - \frac{4}{a} \end{pmatrix}$$

פישוט:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8 - a^2 - 4}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a^2 - 8}{a} \\ 0 & 0 & \frac{a^2 - 4}{a} \end{pmatrix}$$

וזה שווה ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a^2 - 4}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a^2 - 8}{a} \\ 0 & 0 & \frac{a^2 - 4}{a} \end{pmatrix}$$

ANSWER

The reduced matrix is $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a - \frac{4}{a} \\ 0 & 1 & a - \frac{8}{a} \\ 0 & 0 & a - \frac{4}{a} \end{array}\right]$ A .

עבור $a = \pm 2$ למטריצה יש רק 2 משתנים מובילים ולכן עבור הקבוצה תהיה ת"ל ומכך אינה בסיס ל$\mathbb{R}^3$

כעת נבדוק את המקרה קצה $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -\frac{1}{2} R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R}_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ובדרוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לסיכום עבור $a \neq \pm 2$ קיימת העתקה לינארית מ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$