Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Essaidi Ali

26 octobre 2016

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Dérivation :

1.1 Dérivabilité :

Définition 1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : I \to E$.*

— *Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en a et on la note $f'(a)$.*

— *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application $x \in I \mapsto f'(x)$ s'appelle l'application dérivée de f sur I et on la note f'.*

Remarques : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in I$ et $f : I \to E$.

— f est dérivable en a si, et seulement si, la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe. Dans ce cas, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

— f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas, ce développement est $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$.

— Si f est dérivable en a (resp. sur I) alors f est continue en a (resp. sur I).

— La dérivabilité de f en a (resp. sur I) et la valeur de la dérivée (resp. fonction dérivée) ne dépendent pas de la norme choisie sur E.

Définition 1.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in I$ et $f : I \to E$.*

— *On dit que f est dérivable à droite en a si la limite $\lim\limits_{t\to a^+} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f à droite en a et on la note $f'_d(a)$.*

— *On dit que f est dérivable à gauche en a si la limite $\lim\limits_{t\to a^-} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche en a et on la note $f'_g(a)$.*

Remarque : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in I$ et $f : I \to E$.
f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $a \in I$ et $f : I \to E$. On pose $f = f_1e_1 + \dots + f_ne_n$.*

— *Soit $a \in I$. f est dérivable en a si, et seulement si, $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en a. Dans ce cas, les composantes de $f'(a) = f'_1(a)e_1 + \dots + f'_n(a)e_n$.*

— *f est dérivable sur I si, et seulement si, $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables sur I. Dans ce cas, $f' = f'_1e_1 + \dots + f'_ne_n$.*

Remarques : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

— Soit $f : I \to \mathbb{C}$. f est dérivable sur I si, et seulement si, $\Re ef$ et $\Im mf$ sont dérivables sur I. Dans ce cas, $f' = (\Re ef)' + i(\Im mf)'$, $\Re ef' = (\Re ef)'$ et $\Im mf' = (\Im mf)'$.

— Soit $M : I \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M = (m_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$. M est dérivable sur I si, et seulement si, $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, m_{ij}$ est dérivable sur I. Dans ce cas, $M' = (m'_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$.

Exemples :

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (t, t^2, \sin t)$.
Les composantes $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$ et $f_3(t) = \sin t$ de f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)) = (1, 2t, \cos t)$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{i\lambda t}$.
Les composantes $f_1(t) = \cos(\lambda t)$ et $f_2(t) = \sin(\lambda t)$ de f dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) = -\lambda\sin(\lambda t) + i\lambda\cos(\lambda t) = i\lambda e^{i\lambda t}$.

— Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc M est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall t \in \mathbb{R}, R'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$.

— Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $f(t) = P(tX)$.
Les composantes $f_k(t) = a_k t^k, k \in \{0, \dots, n\}$ de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k'(t)X^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} X^k = XP'(tX)$.

1.2 Propriétés de la dérivée :

Proposition 1.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f, g : I \to E$.*
Si f et g sont dérivables sur I alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et on a $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Proposition 1.3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $f : I \to E$.*
Si f est dérivable sur I alors $u \circ f$ est dérivable sur I et on a $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Exemple : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable sur I.
Les applications $X \mapsto \mathrm{tr}X$ et $X \mapsto {}^tX$ sont linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc les applications $f(t) = \mathrm{tr}(M(t))$ et $g(t) = {}^tM(t)$ sont dérivables sur I et on a $\forall t \in I, f'(t) = \mathrm{tr}(M'(t))$ et $g'(t) = {}^tM'(t)$.

Proposition 1.4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $f : I \to E$ et $g : I \to F$.*
Si f et g sont dérivables sur I alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et on a $\forall t \in I, (B(f, g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$.

Corollaire 1.5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace euclidien et $f, g : I \to E$ dérivables sur I.*
— *L'application $u : t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable sur I et on a $\forall t \in I, u'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$.*
— *L'application $v : t \mapsto \|f(t)\|^2$ est dérivable sur I et on a $\forall t \in I, v'(t) = 2\langle f'(t), f(t)\rangle$.*
— *Dans le cas E orienté de dimension 3, l'application $w : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur I et on a $\forall t \in I, w'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t)$.*

Remarque : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace euclidien et $f : I \to E$ dérivable sur I.
Si l'application $t \mapsto \|f(t)\|$ est constante sur I alors $\forall t \in I, f(t) \perp f'(t)$.

Proposition 1.6 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $g : J \to E$.*
Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

1.3 Dérivées d'ordres supérieurs :

Notation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Si $f : I \to E$, on note $f^{(0)} = f$.

Définition 1.3 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que :*
— *f est k-fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I. Dans ce cas, l'application $\left(f^{(k-1)}\right)'$ s'appelle l'application dérivée d'ordre k de f sur I et on la note $f^{(k)}$.*
— *f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k-fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ continue sur I.*
— *f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si $\forall p \in \mathbb{N}^*, f$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

Remarque : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f : I \to E$. On pose $f = f_1e_1 + \cdots + f_ne_n$.
— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est k-fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^k$) sur I si, et seulement si, $f_1, \dots, f_n$ sont k-fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^k$) sur I. Dans ce cas $\forall p \in \{1, \dots, k\}, f^{(p)} = f_1^{(p)}e_1 + \cdots + f_n^{(p)}e_n$.
— f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si, et seulement si, $f_1, \dots, f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Proposition 1.7 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $f : I \to E$ et $g : I \to F$.*
Si f et g sont k-fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^k$) sur I alors l'application $B(f,g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est k-fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^k$) sur I et on a ***la formule de Leibniz*** *:*

$$\forall t \in I, (B(f,g))^{(k)}(t) = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{k} B(f^{(p)}(t), g^{(k-p)}(t))$$

En particulier, si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I alors $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Proposition 1.8 *Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.*
- *L'ensemble $\mathscr{C}^k(I, E)$ des applications de I vers E de classe $\mathscr{C}^k$ sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
- *L'ensemble $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$ des applications de I vers $\mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur I est une $\mathbb{K}$-algèbre. On le note aussi $\mathscr{C}^k(I)$.*

Proposition 1.9 *Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $g : J \to E$.*
Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et g de classe $\mathscr{C}^k$ sur J alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

2 Intégration :

2.1 Intégration :

Définition 2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux sur $[a,b]$. On pose $f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$.*
On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ l'élément $\left(\int_a^b f_1\right) e_1 + \cdots + \left(\int_a^b f_n\right) e_n$ de E. On le note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux sur $[a,b]$.
- Si E est nul alors on convient que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.
- Sinon, l'intégrale de f sur $[a,b]$ ne dépend pas du choix de la base sur E.

Exemples :
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (t, e^t, \sin t)$. On a :
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 t\mathrm{d}t, \int_0^1 e^t\mathrm{d}t, \int_0^1 \sin t\mathrm{d}t\right) = \left(\frac{1}{2}, e-1, 1-\cos 1\right)$$
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$. On a :
$$\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi e^{it}\mathrm{d}t = \int_0^\pi (\cos t + i\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)\mathrm{d}t + i\int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t = 2i$$
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t \\ t^2 & 1 \end{pmatrix}$. On a :
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{d}t & \displaystyle\int_0^1 \sin t\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{d}t & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1-\cos 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Propriétés de l'intégrale :

Proposition 2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.*
- *Linéarité : Si $f, g : [a,b] \to E$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$ alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.*
- *Relation de Chasles : Si $f : I \to E$ est continue par morceaux sur l'intervalle I alors $\forall a, b, c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.*

Proposition 2.2 *(Somme de Riemann :)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a,b] \to E$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors la suite $\left(\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a,b] \to E$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $\forall n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ la suite $\left(\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-n_1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge et on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=n_0}^{n-n_1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$.
En particulier :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$.

Proposition 2.3 *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f : [a,b] \to E$.*
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $u\left(\displaystyle\int_a^b f\right) = \int_a^b (u\circ f)$.

Proposition 2.4 *(Inégalité triangulaire :)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a,b] \to E$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $\left\|\displaystyle\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

2.3 Théorème fondamental du calcul intégral :

Proposition 2.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $f : I \to E$ et $a \in I$.*
Si f est continue sur I alors l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Corollaire 2.6 *(Théorème fondamental du calcul intégral :)*
Toute fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie possède une primitive sur I.

Proposition 2.7 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $f : I \to E$ et $a \in I$.*
Si f est continue sur I alors :
- *L'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.*
- *Si G est une primitive de f sur I alors $\forall x \in I, G(x) = G(a) + \displaystyle\int_a^x f$.*

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
- Si $f : [a,b] \to E$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'$.
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $g : [a,b] \to E$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ d'où $(fg)(b) - (fg)(a) = \displaystyle\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg')$.
  On obtient $\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$ (*Intégration par parties*).

Proposition 2.8 *(Inégalité des accroissements finis :)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a,b] \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Si $M \geq 0$ telle que $\forall t \in [a,b], \|f'(t)\| \leq M$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$.

Remarque : L'égalité des accroissements finis est fausse si $\dim E \geq 2$. En effet, l'application $\varphi(t) = e^{it}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = ie^{it}$.
Pourtant, $\forall c \in \mathbb{R}, \varphi(2\pi) - \varphi(0) \neq (2\pi - 0)\varphi'(c)$. En effet, $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = e^{2i\pi} - 1 = 0$ et $(2\pi - 0)\varphi'(c) = i(2\pi - 0)e^{ic} \neq 0$ car $e^{ic} \neq 0$ puisque $|e^{ic}| = 1$.

Proposition 2.9 *(Formule de Taylor avec reste intégrale :)*
Soit $n \in \mathbb{N}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a, b] \to E$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 2.10 *(Inégalité de Taylor-Lagrange :)*
Soit $n \in \mathbb{N}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a, b] \to E$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ alors $\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$

Proposition 2.11 *(Formule de Taylor-Young :)*
Soit $n \in \mathbb{N}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $f : I \to E$ et $a \in I$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$

3 Arcs paramétrés :

Définition 3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $k \in \mathbb{N}^*$.*
On appelle arc paramétré sur E de classe C^k toute application $\gamma : I \to E$ de classe C^k où I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\{\gamma(t)/t \in I\}$ s'appelle le support de γ. On le note γ^* ou $\mathrm{Supp}\gamma$.
γ s'appelle un paramétrage de $\mathrm{Supp}\gamma$.

Exemples :
- Soit A un point de $\mathbb{R}^2$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^2$. $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto A + tu$ est un arc paramétré de support est la droite $\mathscr{D}(A, u)$.
- $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$ est un arc paramétré de support est le cercle $\mathscr{C}((0, 0), 1)$.

Remarques : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $k \in \mathbb{N}^*$.
- Un arc paramétré sur E s'appelle aussi un chemin ou une courbe paramétrée sur E.
- Le support d'un arc paramétré s'appelle aussi l'arc ou la courbe ou la trajectoire de l'arc paramétré.
- Pour un même support, il peut y avoir plusieurs paramétrages. Par exemple, $\gamma_1 : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t))$, $\gamma_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin 2t, \cos 2t))$ et $\gamma_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin t, \cos t))$ sont trois paramétrages différents du cercle $\mathscr{C}((0, 0), 1)$.
- Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ alors la courbe d'équation $y = f(x)$ est le support de l'arc paramétré $\gamma : x \in I \mapsto (x, f(x))$.

Interprétation cinématique : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $\gamma : I \to E$ un arc paramétré sur E de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geq 2)$ et on considère le point mobile M tel que $\forall t \in I, M(t) = \gamma(t)$.
- Pour $t \in I, \gamma(t)$ représente le vecteur position de M à l'instant t. C'est-à-dire $\overrightarrow{OM}$.
- Pour $t \in I, \gamma'(t)$ représente le vecteur vitesse de M à l'instant t.
- Pour $t \in I, \gamma''(t)$ représente le vecteur accélération de M à l'instant t.
- $\mathrm{Supp}\gamma$ représente la trajectoire de M.

Définition 3.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $\gamma : I \to E$ un arc paramétré et $t_0 \in I$. Le point $M_0 = \gamma(t_0)$ est dit :*
- *Simple si* $\mathrm{Card}\{t \in I/\gamma(t) = M_0\} = 1$.
- *Double si* $\mathrm{Card}\{t \in I/\gamma(t) = M_0\} = 2$.
- *Triple si* $\mathrm{Card}\{t \in I/\gamma(t) = M_0\} = 3$.
- *Multiple si* $\mathrm{Card}\{t \in I/\gamma(t) = M_0\} \geq 2$.

interprétation cinématique : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $\gamma : I \to E$ un arc paramétré, $t_0 \in I$ et on considère le point mobile M tel que $\forall t \in I, M(t) = \gamma(t)$.
- Le point $M_0 = \gamma(t_0)$ est simple si le mobile M passe une seule fois par M_0.
- Le point $M_0 = \gamma(t_0)$ est double si le mobile M passe deux fois par M_0.
- Le point $M_0 = \gamma(t_0)$ est multiple si le mobile M passe au moins deux fois par M_0.

Définition 3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $\gamma : I \to E$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$. On dit que le point $M_0 = \gamma(t_0)$ est régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Dans ce cas, la droite qui passe par M_0 de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$ s'appelle la tangente à la courbe de γ au point M_0.*

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension 2, $\gamma : I \to E$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$ tel que le point $M_0 = \gamma(t_0)$ soit régulier. On pose $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ et $M_0 = (x_0, y_0)$.
L'équation de la tangente à la courbe de γ au point M_0 est $\gamma_2'(t_0)(x - x_0) - \gamma_1'(t_0)(y - y_0) = 0$.
L'équation de la normale à la courbe de γ au point M_0 est $\gamma_1'(t_0)(x - x_0) + \gamma_2'(t_0)(y - y_0) = 0$.
Exemple : (Équation de la tangente à une ellipse :)
Soit une ellipse ξ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et cherchons l'équation de la tangente (T) à ξ en un point $M(x_0, y_0) \in \xi$.
Soit l'application $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ est un paramétrage de l'ellipse ξ donc si $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t_0) = M_0$ alors l'équation de (T) est :

$$(T) : 0 = \gamma_2'(t_0)(x - x_0) - \gamma_1'(t_0)(y - y_0) = b\cos t_0(x - x_0) + a\sin t_0(y - y_0)$$

Or $\gamma(t_0) = M_0$ donc $(a\cos t_0, b\sin t_0) = (x_0, y_0)$ donc $(\cos t_0, \sin t_0) = (\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$ donc :

$$(T) : \frac{b}{a}x_0(x - x_0) + \frac{a}{b}y_0(y - y_0) = 0$$

En divisant par ab :

$$(T) : \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

On déduit que :

$$(T) : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

car $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ puisque $M_0 \in \xi$.