BTS Laayoune : DSI 1	Série 3 :Fonction d'une variable réelle	Prof : El hassan BOUKACHE

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x^2-1)=\ln(4x-1)-2\ln 2$
2. $e^{2x}+4e^x-21=0$

Exercice 2

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{2x-\ln(1+2x)}{x}$$

1. Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble D_f.
3. Etudier la continuité de f sur D_f.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0$, interpréter les résultats obtenus.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $I=[0;4]$ par : $f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2\\ \frac{2x-1}{x+1} & \text{si} \quad 2<x\leq 4\end{cases}$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $I=[0;4]$.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;2[$ et sur $]2;4]$ et calculer $f^{'}(x)$ sur chacun de ces deux intervalles.
   (b) La fonction f est-elle dérivable en 2 ? (Justifier votre réponse)
3. (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;2]$ et sur $[2;4]$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur I. (Justifier votre réponse)
4. (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un ensemble J que vous préciserez.
   (b) Déterminer alors la fonction réciproque f^{-1} : domaine de définition et expression.
   (c) Sans aucun calcul, étudier la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de la fonction f^{-1}.

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \longrightarrow \frac{x^2-2x+3}{x-1}$, $x \neq 1$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$; $\quad x \neq 1$
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Montrer que C admet une asymptote oblique D que l'on déterminera.
   (b) Etudier la position relative de C et D.
   (c) Tracer D et C.
4. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left[1+\sqrt{2}; +\infty\right[$ réalise une bijection de $\left[1+\sqrt{2}; +\infty\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.
   (a) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
   (b) Résoudre l'équation $g(x) = x$. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes C et C', où C' est la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (c) Tracer la courbe C'.

Exercice 6

1. Montrer que les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + \sin^3 x$ et $g(x) = x^2 - x^5$ sont équivalentes à x^2 au voisinage de 0.
   En déduire que f et g sont équivalentes au voisinage de 0.
2. Montrer qu'il existe au moins une solution de l'équation : $x^7 + 3x^4 - x - 1 = 0$ appartenant à l'intervalle $]0; 1[$
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation : $\ln x + x^2 + x - 3 = 0$ admet une solution unique $x_0 \in]1; 2[$.
4. Montrer que l'équation : $4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ admet trois racines réelles distinctes dans $]-1; 1[$ et encadrer chacune de ces racines dans un intervalle.

Exercice 7

Soit la fonction $f : x \longrightarrow \tan x$

1. Montrer que $\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}] : 1 \leq f'(x) \leq 2$.
2. En déduire que : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}] : x \leq \tan x \leq 2x$.

Exercice 8

1. Montrer à l'aide du théorème des inégalité des accroissement finis, que :

$$\forall x \geq 0 : 0 \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

2. En déduire que : $\forall x > 0 : x \leq \sqrt{1+x^2} \leq x + \frac{1}{2x}$

.

***** La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes *****