TD - séries numériques - Correction

Exercice 1 : Étudier les séries :

$$1) \sum \cos \frac{1}{n^2} \quad 2) \sum \frac{(-1)^n n}{n+1} \quad 3) \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad 4) \sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Solution de l'exercice 1 :

– Étude de la série $\sum \cos \frac{1}{n^2}$: On a :

$$\cos \frac{1}{n^2} \to 1 \neq 0$$

donc la série $\sum \cos \frac{1}{n^2}$ est divergente car elle ne vérifie pas *la condition nécessaire de convergence*.

– Étude de la série $\sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$: On a :

$$\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$$

donc la série $\sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$ est divergente car elle ne vérifie pas *la condition nécessaire de convergence*.

– Étude de la série $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: On a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+o(1) \to 1$$

donc :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$$

d'où la série $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est divergente car elle ne vérifie pas *la condition nécessaire de convergence*.

– Étude de la série $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$: On a :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = n^2 \ln\cos\frac{1}{n} = n^2\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n^2\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2}+o(1) \to -\frac{1}{2}$$

donc :

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

d'où la série $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ est divergente car elle ne vérifie pas *la condition nécessaire de convergence*.

Exercice 2 : Soit $a>0$. Étudier les séries :

$$1) \sum \frac{1}{a^{\ln n}} \quad 2) \sum \frac{1}{(\ln n)^n} \quad 3) \sum \frac{a^{\sqrt{n}}}{n!} \quad 4) \sum \frac{a^{(-1)^n}}{n}$$

Solution de l'exercice 2 :

– Étude de la série $\sum \frac{1}{a^{\ln n}}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln a^{\ln n} = \ln a \ln n = \ln n^{\ln a}$ donc $a^{\ln n} = n^{\ln a}$ d'où $\frac{1}{a^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln a}}$.
On déduit qu'il s'agit d'une *série de Riemann* donc la série $\sum \frac{1}{a^{\ln n}}$ est convergente si, et seulement si, $\ln a > 1$ si, et seulement si, $a > e$.

- Étude de la série $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^n}$: On a $\forall n \geq e^2, \ln n \geq 2$ donc $\forall n \geq e^2, (\ln n)^n \geq 2^n$ d'où $\forall n \geq e^2, \frac{1}{(\ln n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ est positive et $\sum \dfrac{1}{2^n}$ convergente donc, d'après *le critère de comparaison*, la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ est convergente.
- Étude de la série $\sum \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$:
  - Si $a \leq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!} \leq \dfrac{1}{n!}$, or $\sum \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$ est positive et $\sum \dfrac{1}{n!}$ est convergente donc, d'après *le critère de comparaison*, la série $\sum \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$ est convergente.
  - Si $a > 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!} \leq \dfrac{a^n}{n!}$, or $\sum \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$ est positive et $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ est convergente donc, d'après *le critère de comparaison*, la série $\sum \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$ est convergente.

  On déduit que, dans tous les cas, la série $\sum \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$ est convergente.
- Étude de la série $\sum \dfrac{a^{(-1)^n}}{n}$: On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a^{(-1)^n}}{n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{a} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a^{(-1)^n}}{n} \geq \frac{b}{n}$$

  avec $b = \min\left(a, \frac{1}{a}\right)$. Or la série $\sum \dfrac{b}{n}$ est divergente positive donc, d'après *le critère de comparaison*, la série $\sum \dfrac{a^{(-1)^n}}{n}$ est divergente.

Exercice 3 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$. Étudier les séries :

$$1) \sum n^a b^n \quad 2) \sum \frac{(3n)!}{(n!)^3} \quad 3) \sum \frac{n^n n!}{(2n)!} \quad 4) \sum \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=1}^{n} (a+k)$$

Solution de l'exercice 3 :

- Étude de la série $\sum n^a b^n$: On a :

$$\frac{(n+1)^a b^{n+1}}{n^a b^n} = \frac{(n+1)^a}{n^a} b \to b$$

  - Si $b > 1$ alors, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum n^a b^n$ est divergente.
  - Si $b < 1$ alors, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum n^a b^n$ est convergente.
  - Si $b = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^a b^n = n^a = \dfrac{1}{n^{-a}}$ donc il s'agit d'une *série de Riemann* d'où la série $\sum n^a b^n$ est convergente si, et seulement si, $-a > 1$ si, et seulement si, $a < -1$.

  On déduit que la série $\sum n^a b^n$ est convergente si, et seulement si, $b = 1$ ou $b < 1$ ou ($b = 1$ et $a < -1$).
- Étude de la série $\sum \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$: On a :

$$\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \times \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \times \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \to 27 > 1$$

  donc, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$ est divergente.
- Étude de la série $\sum \dfrac{n^n n!}{(2n)!}$: On a :

$$\frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{n^n n!} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{n^n n!} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)}{n^n(2n+2)(2n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{e}{4} < 1$$

  donc, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum \dfrac{n^n n!}{(2n)!}$ est convergente.

– Étude de la série $\sum \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$: On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n=\frac{1}{(2n)!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ donc :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(2(n+1))!}\prod_{k=1}^{n+1}(a+k)\times\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(a+k)}=\frac{1}{(2n+2)!}\prod_{k=1}^{n+1}(a+k)\times\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(a+k)}=\frac{a+n+1}{(2n+2)(2n+1)}\to 0<1$$

donc, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ est convergente.

Exercice 4 : On considère la série :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1 : Montrer que la série est convergente.
2 : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

3 : Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\le\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\le\frac{1}{n+2}$$

4 : En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$$

5 : Donner une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3}.

Solution de l'exercice 4 :

1 : La série $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ est alternée, or la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente.

2 : Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-(-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

or :

$$\forall t\in[0,1], 1-(-t)^{n+1}=(1-(-t))\sum_{k=0}^{n}(-t)^k=(1+t)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$$

donc :

$$\forall t\in[0,1], \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$$

d'où :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^k\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

6 : Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\forall t\in[0,1], 0\le\frac{t^{n+1}}{1+t}\le t^{n+1}$$

donc :

$$0\le\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\le\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}$$

7 : On a :

$$0\le\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\le\frac{1}{n+2}\to 0$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

D'autre part :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

donc, par *passage à la limite* :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

3 : La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est alternée, or la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *la majoration du reste dans le critère spécial des séries alternées*, :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \le \frac{1}{n+2}$$

or :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \left|\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \le \frac{1}{n+2}$$

On déduit que pour que $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$ soit une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3} il faut que :

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \le 10^{-3}$$

donc, il suffit que :

$$\frac{1}{n+2} \le 10^{-3}$$

donc, il suffit que $n \ge 10^3 - 2 = 998$ d'où il suffit de prendre $n = 998$.
Sous *Python* :

```
In [1]: S=0

In [2]: for k in range(999):
   ...:     S += pow(-1, k) /(k + 1)
   ...:

In [3]: S
Out[3]: 0.6936474305598223
```

On va comparer avec la valeur de $\ln 2$ proposée par *Python* :

```
In [4]: from math import log

In [5]: log(2)
Out[5]: 0.6931471805599453

In [6]: abs(log(2) - S)
Out[6]: 0.0005002499998769672
```

On voit bien que :

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k+1}\right| \approx 0.0005 \leq 10^{-3}$$

Exercice 5 : Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Étudier les séries :

$$\sum \frac{1}{\sigma(n)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n\sigma(n)}$$

Solution de l'exercice 5 :

- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est positive convergente donc elle est commutativement convergente d'où la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ est convergente.
- On a :

$$\forall a, b \geq 0, 0 \leq ab \leq 2ab \leq a^2 + b^2$$

donc :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2}$$

Or les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ sont convergente donc, d'après *le critère de comparaison*, la série $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ est convergente.

Exercice 6 : Étudier les séries :

$$1) \sum \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\exp\frac{1}{n} - 1} \qquad 2) \sum \frac{2^n + 5n3^n}{4^n - 7n^2 + 3^n \ln n} \qquad 3) \sum \frac{\ln n}{n^2}$$

$$4) \sum \left(\frac{1}{n} + \ln\frac{n-1}{n}\right) \qquad 5) \sum \left(\cos\frac{1}{n} - n\sin\frac{1}{n}\right) \qquad 6) \sum \left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$7) \sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) \qquad 8) \sum \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \qquad 9) \sum \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)$$

Solution de l'exercice 6 :

- Étude de la série $\sum \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\exp\frac{1}{n}-1}$: On a :

$$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \text{ et } e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

donc :

$$\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\exp\frac{1}{n}-1} \sim \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}$$

Or la série $\sum \frac{1}{2n}$ est divergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\exp\frac{1}{n}-1}$ est divergente.

- Étude de la série $\sum \frac{2^n + 5n3^n}{4^n - 7n^2 + 3^n \ln n}$: On a :

$$\frac{2^n + 5n3^n}{4^n - 7n^2 + 3^n \ln n} \sim \frac{5n3^n}{4^n} = 5\frac{n3^n}{4^n}$$

Or :

$$\frac{(n+1)3^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n3^n} = \frac{3(n+1)}{4n} \to \frac{3}{4} < 1$$

donc, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum \frac{n3^n}{4^n}$ est convergente.

La série $\sum \frac{n3^n}{4^n}$ est convergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \frac{2^n + 5n3^n}{4^n - 7n^2 + 3^n \ln n}$ est convergente.

– Étude de la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$: On a :

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$$

donc :

$$\frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Or la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente.

– Étude de la série $\sum \left(\frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}\right)$: On a :

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x + O(x^2)$$

donc :

$$\frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \left(\frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}\right)$ est convergente.

– Étude de la série $\sum \left(\cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n}\right)$: On a :

$$\cos x \underset{0}{=} 1 + O(x^2) \text{ et } \sin x \underset{0}{=} x + O(x^3)$$

donc :

$$\cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - n\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \left(\frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}\right)$ est convergente.

– Étude de la série $\sum \left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$: On a :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \text{ et } \cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

donc :

$$\begin{aligned}
n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

car $O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Or la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

– Étude de la série $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$: On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + O(x^2) \underset{0}{==} 1 + O(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} &= \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}-\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

– Étude de la série $\sum\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$: On a :

$$\ln(1+x)\underset{0}{=}x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ \text{ et } e^x\underset{0}{=}1+x+o(x)$$

donc :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e-\frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On déduit que :

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e-\left(e-\frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{e}{2n}$$

Or la série $\sum\frac{1}{n}$ est divergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ est divergente.

– Étude de la série $\sum\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)$: On a :

$$\ln(1+x)\underset{0}{=}x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ \text{ et } e^x\underset{0}{=}1+x+o(x)$$

donc :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\exp\left(2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^2\exp\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^2\exp\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^2-\frac{e^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De même, on a :

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=2-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc :

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\exp\left(2-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^2\exp\left(-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^2\exp\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^2-\frac{2e^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On déduit que :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\left(e^2-\frac{e^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(e^2-\frac{2e^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{e^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{e^2}{n}$$

Or la série $\sum\frac{1}{n}$ est divergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)$ est divergente.

Exercice 7 : Étudier les séries :

$$1) \sum\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right) \quad 2) \sum(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n} \quad 3) \sum\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

Solution de l'exercice 7 :

– Étude de la série $\sum\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$: On a :

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$$

donc :

$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1 = \left(1+\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)-1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où :

$$\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)-\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} = -\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{8n}$$

Or la série $\sum\frac{1}{n}$ est divergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum\left(\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)-\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ la est convergente.

Supposons que la série $\sum\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$ est convergente donc la série $\sum\left(\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)-\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right)$ est convergente comme combinaison des deux séries convergentes $\sum\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$ et $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Absurde car la série $\sum\left(\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)-\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right)$ est divergente donc la série $\sum\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$ est divergente.

– Étude de la série $\sum(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$: On a :

$$\sin x \underset{0}{=} x+O(x^2)$$

donc :

$$(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n} = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Or :

- La série $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $\frac{3}{2}>1$ donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est convergente.
- La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ la est convergente.

donc, la série $\sum(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$ est convergente car somme de deux séries convergente.

– Étude de la série $\sum\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$: On a :

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1+O(x)$$

donc :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or :

– La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $2 > 1$ donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.
– La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ la est convergente.

donc, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente car somme de deux séries convergente.

Exercice 8 : Montrer que les séries :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

sont à termes équivalents mais de natures différentes.

Solution de l'exercice 8 :

– On a :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

donc :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

On déduit que les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sont à termes équivalents.

– Étude de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$: La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ la est convergente.

– Étude de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$: On a :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ la est convergente.

Supposons que la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente donc la série $\sum \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente comme combinaison linéaire des deux séries convergentes $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Absurde car la série $\sum \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

On déduit que les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sont à termes équivalents mais de natures différentes.

Exercice 9 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la série :

$$\sum \left(\ln \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}\right)^\alpha$$

Solution de l'exercice 9 : On a :

$$\forall n \geq 1, \ln \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} = -\ln \cos \frac{1}{n} = -\ln \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc :

$$\left(\ln \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}} (1 + o(1))^{\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}} (1 + o(1)) = \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}}$$

Or la série positive $\sum \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}}$ est convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$ donc la série $\sum \left(\ln \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}\right)^{\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$ si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 10 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la série :

$$\sum \frac{x^n}{x^n + 1}$$

Solution de l'exercice 10 :

- Si $|x| > 1$ alors $\frac{x^n}{x^n + 1} \to 1 \neq 0$ donc la série $\sum \frac{x^n}{x^n + 1}$ diverge.
- Si $x = 1$ alors $\frac{x^n}{x^n + 1} = \frac{1}{2} \to 1 \neq 0$ donc la série $\sum \frac{x^n}{x^n + 1}$ diverge.
- Si $x = -1$ alors la série $\sum \frac{x^n}{x^n + 1}$ n'est pas définie.
- Si $|x| < 1$ alors $\left|\frac{x^n}{x^n + 1}\right| \sim |x|^n$, or $\sum |x|^n$ est positive convergente donc la série $\sum \frac{x^n}{x^n + 1}$ converge absolument.

Exercice 11 : Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$$

Solution de l'exercice 11 :

- Si $a < 0$ alors $\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} \to 1 \neq 0$ donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ diverge grossièrement.
- Si $a = 0$ alors la série n'est pas définie car $\forall n \in \mathbb{N}$ impaire, $n^a + (-1)^n = 1 - 1 = 0$.
- Si $a > 0$ alors :

$$\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)} = \frac{(-1)^n}{n^a} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

donc :

$$\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^a} = -\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{n^{2a}}$$

or la série $\sum \frac{1}{n^{2a}}$ est positive d'où, d'après *les relations de comparaison*, les séries $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^{2a}}$ sont de même nature.

La suite $\left(\frac{1}{n^a}\right)$ est décroissante de limite 0 donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ est convergente, or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \left(\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a}$$

donc les séries $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ sont de même nature.

On déduit que les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ et $\sum \frac{1}{n^{2a}}$ sont de même nature.

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2a}}$ est convergente si, et seulement si, $2a > 1$ si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$ donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ est convergente si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

On déduit que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ est convergente si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 12 : Étudier la série :

$$\sum \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right)$$

Solution de l'exercice 12 : On a :

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

donc :

$$\begin{aligned} \ln \frac{n}{n-1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right) &= \cos\left(\pi n^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x \text{ et } \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

donc :

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right) &= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

On a :

$$\sin x \underset{0}{=} x + O(x)$$

donc :

$$\cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right) = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $2 > 1$ donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.
- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

On déduit que la série $\sum \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right)$ est convergente car combinaison linéaire des deux séries convergentes $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 13 : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Étudier la série :

$$\sum \frac{n^n}{a^n\, n!}$$

Solution de l'exercice 13 : On a :

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{a^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{a^n\, n!}}\right| = \frac{(n+1)^n}{|a| n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{|a|} \to \frac{e}{|a|}$$

- Si $|a| > e$ alors $\frac{a}{|a|} < 1$ donc, d'après *la règle de D'Alembert*, la série $\sum \frac{n^n}{a^n\, n!}$ converge absolument donc elle est convergente.
- Si $|a| < e$ alors, d'après *la formule de Stirling* :

$$\frac{n^n}{a^n\, n!} \sim \frac{n^n}{a^n \left(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\right)} = \frac{e^n}{a^n\sqrt{2\pi n}} \to +\infty$$

  donc la série $\sum \frac{n^n}{a^n\, n!}$ diverge grossièrement.
- Si $a = e$ alors $\frac{n^n}{e^n\, n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ est positive divergente donc la série $\sum \frac{n^n}{e^n\, n!}$ diverge.
- Si $a = -e$ alors, d'après *la formule de Stirling* :

$$\frac{n^n}{e^n\, n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$$

  On a :

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{e^n\, n!}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

  Or, on sait que $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1$ d'où $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

  On déduit que la suite $\left(\frac{n^n}{e^n\, n!}\right)$ est décroissante.

  la suite $\left(\frac{n^n}{e^n\, n!}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum \frac{n^n}{(-e)^n n!}$ est convergente.

On déduit que la série $\sum \frac{n^n}{a^n n!}$ converge si, et seulement si, $|a| \geq e$ ou $a = -e$.

Exercice 14 : Séries de nombres complexes :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Étudier la série :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+z}$$

Solution de l'exercice 14 : On a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{z+n}\right| = \frac{1}{|z+n|} \sim \frac{1}{n}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente positive donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\left|\frac{(-1)^n}{z+n}\right|$ est divergente d'où la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+z}$ n'est pas absolument convergente.

On pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ donc :

$$\frac{(-1)^n}{z+n} = \frac{(-1)^n}{(a+ib)+n} = \frac{(-1)^n}{(a+n)+ib} = (-1)^n\frac{(a+n)-ib}{(a+n)^2+b^2} = (-1)^n\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} + ib\frac{(-1)^n}{(n+a)^2+b^2}$$

d'où la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+z}$ converge si, et seulement si, les séries $\sum (-1)^n \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^2+b^2}$ convergent.

- Étude de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^2+b^2}$: On a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+a)^2+b^2}\right| = \frac{1}{(n+a)^2+b^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

  et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après *les relations de comparaison*, la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^2+b^2}$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

– Étude de la série $\sum(-1)^n\dfrac{n+a}{(n+a)^2+b^2}$: On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x+a}{(x+a)^2+b^2}$. On a :

$$\forall x>0, f'(x)=\frac{b^2-(x+a)^2}{((x+a)^2+b^2)}$$

donc f est décroissante pour x assez grand. On déduit que la suite $\left(\dfrac{(n+a)}{(n+a)^2+b^2}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang et puisque $\dfrac{(n+a)}{(n+a)^2+b^2}\to 0$ donc, d'après *le critère spécial des séries alternées*, la série $\sum(-1)^n\dfrac{n+a}{(n+a)^2+b^2}$ est convergente.

On déduit que la série $\sum\dfrac{(-1)n}{z+n}$ est convergente mais pas absolument.

Exercice 15 : Séries de Bertrand :

1 : Montrer que :

$$\forall n\geq 2, \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\geq \ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 2)$$

2 : En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\ln n}$.

3 : Montrer que :

$$\forall n\geq 3, \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln^2 k}\leq\frac{1}{\ln 2}$$

4 : En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Solution de l'exercice 15 :

1 : Soit $n\geq 2$. La fonction $f(t)=\dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc :

$$\forall k\geq 2, \forall t\in[k,k+1], \frac{1}{t\ln t}\leq\frac{1}{k\ln k}$$

d'où :

$$\forall k\geq 2, \int_k^{k+1}\frac{dt}{t\ln t}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{k\ln k}=\frac{1}{k\ln k}\int_k^{k+1}dt=\frac{1}{k\ln k}[t]_k^{k+1}=\frac{1}{k\ln k}(k+1-k)=\frac{1}{k\ln k}$$

On déduit que :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\geq\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t\ln t}=\int_2^{n+1}\frac{dt}{t\ln t}=\int_2^{n+1}\frac{(\ln t)'}{\ln t}dt=\int_2^{n+1}(\ln(\ln t))'\,dt=[\ln(\ln t)]_2^{n+1}=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 2)$$

2 : On a :

$$\forall n\geq 2, \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\geq \ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 2)$$

et $\ln(\ln(n+1))\to+\infty$ donc la série positive $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\ln n}$ est divergente car sa suite des sommes partielles n'est pas majorée.

3 : Soit $n\geq 3$. La fonction $f(t)=\dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc :

$$\forall k\geq 2, \forall t\in[k,k+1], \frac{1}{t\ln t}\geq\frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$$

d'où $\forall k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} &\geq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(k+1)\ln^2(k+1)} \\
&= \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \int_k^{k+1} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} [t]_k^{k+1} \\
&= \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}(k+1-k) = \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} &\leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} \\
&= \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} \\
&= \int_2^{n+1} \frac{(\ln t)'}{\ln^2 t}\mathrm{d}t \\
&= -\int_2^{n+1} \left(\frac{1}{\ln t}\right)' \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{\ln t}\right]_2^{n+1} \\
&= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln 2}
\end{aligned}$$

4 : On a :

$$\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leq \frac{1}{\ln 2}$$

donc la série positive $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente car sa suite des sommes partielles est majorée.

Exercice 16 : Règle d'Abel :

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k + \varepsilon_{n+1}A_n$.

2 : En déduire que si (A_n) est bornée et (ε_n) décroissante de limite nulle alors la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

3 : Application : Étudier la série : $\sum \frac{e^{in}}{\sqrt{n}}$.

Solution de l'exercice 16 :

4 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_0 = A_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = A_k - A_{k-1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k &= \varepsilon_0 a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k \\
&= \varepsilon_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) \\
&= \varepsilon_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_{k-1} \\
&= \varepsilon_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} A_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} A_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1} A_k + \varepsilon_{n+1} A_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k + \varepsilon_{n+1} A_n
\end{aligned}$$

5 : La suite (A_n) est bornée donc $\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |A_n| \leq M$.

– La suite (A_n) est bornée et $\varepsilon_n \to 0$ donc $\varepsilon_{n+1}A_n \to 0$.

– On a $\forall n \in \mathbb{N}, |(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k| = |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|\,|A_k| \leq M\,|\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| = M(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$ car la suite (ε_n) est décroissante. On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} |(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k| \leq \sum_{k=0}^{n} M(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) = M\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) = M(\varepsilon_0 - \varepsilon_{n+1}) \leq M\varepsilon_0$$

La série positive $\sum |(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})A_n|$ est alors convergente car sa suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} |(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc la série $\sum(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})A_n$ est absolument convergente d'où la série $\sum(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})A_n$ est convergente.

On déduit que sa suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k + \varepsilon_{n+1}A_n$ et les suites $(\varepsilon_{n+1}A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente comme somme de deux suites convergentes. Or $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum \varepsilon_n a_n$ donc la série $\sum \varepsilon_n a_n$ est convergente.

6 : Étude de la série $\sum \dfrac{e^{in}}{\sqrt{n}}$: On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}\right| = \frac{\left|1 - e^{i(n+1)}\right|}{|1 - e^{i}|} \leq \frac{|1| + \left|e^{i(n+1)}\right|}{|1 - e^{i}|} = \frac{2}{|1 - e^{i}|}$$

donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)$ est bornée.

D'autre part, la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après la question précédente, la série $\sum \dfrac{e^{in}}{\sqrt{n}}$ est convergente.