Matematik A, STX, gl
25. maj 2018
Delprøve 2, Maple format

Delprøve 1 læses i det andet dokument.

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Alle oplysninger defineres, og da modellen er $f(x) = b \cdot x^a$, så er det en potensregression.

$P1 := [1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5]$:

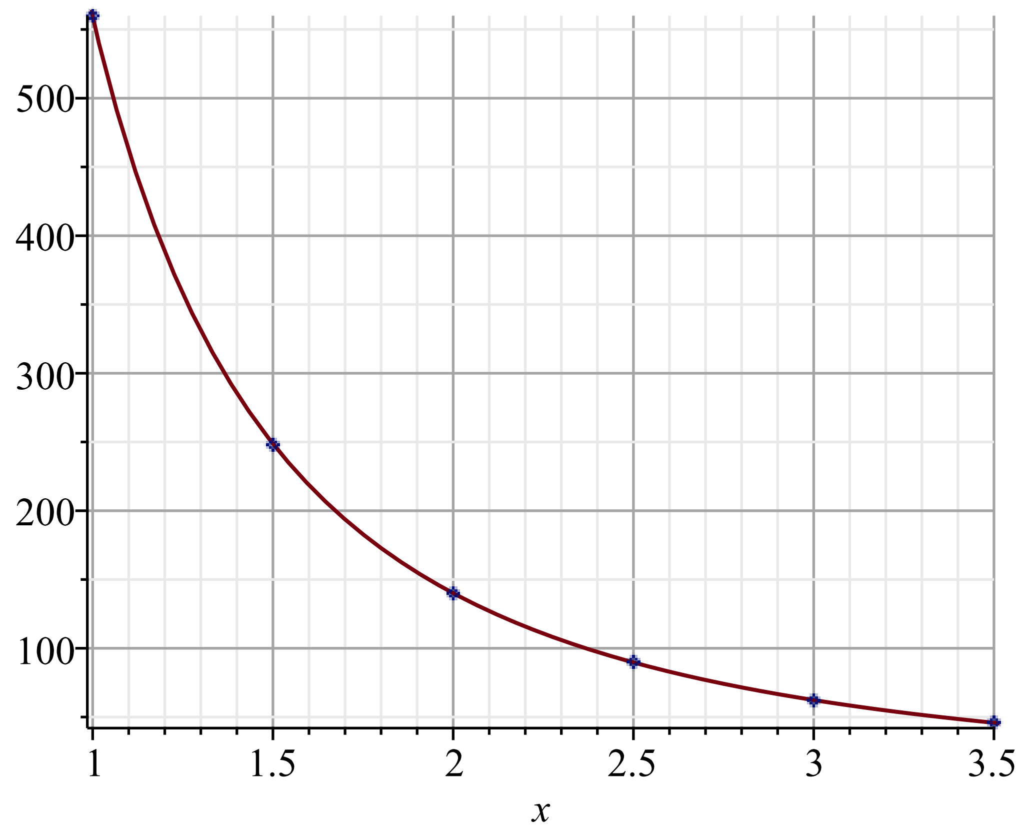
$P2 := [560, 248, 140, 90, 62, 46]$:

PowReg(*P1*, *P2*)

Potens Regression

$$y = 558.85 \cdot \frac{1}{x^{1.9964}}$$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99998$



Så modellen er

$f(x) := 558.85 \cdot x^{-1.9964}$

$$f := x \mapsto \frac{558.85}{x^{1.9964}} \quad (1.1.1)$$

Hvor $a = -1.9964$ og $b = 558.85$ ifølge regressionen i Maple.

Spgm. b

Her løses ligningen
$f(x) = 5$

$$\frac{558.85}{x^{1.9964}} = 5 \quad (1.2.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 10.61718641]] \quad (1.2.2)$$

Afstanden fra lyskilden skal være 10.62 meter for, at lysintensiteten er $5W/m^2$.

Spgm. c

Afstanden er x, og når afstanden øges med 40 %, så er $r_x = 0.4$, og dermed er r_y den ubekendte. Her er $a = -1.9964$, så
$r_y = \left((1+0.4)^{-1.9964} - 1\right) \cdot 100$

$$r_y = -48.91775337 \quad (1.3.1)$$

Så når afstanden til lyskilden øges med 40%, så falder lysintensiteten med 48.9%

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vektorerne defineres.
$\vec{a} := \langle 2, -5\rangle$:; $\vec{b} := \langle 3, 4\rangle$:
Ligningen for l ønskes. Det vides, den er parallelt med $\vec{a}$, så man finder tværvektoren til $\vec{a}$, hvilket er
$\hat{a} := \langle -(-5), 2\rangle$

$$\hat{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Så er linjens ligning med punktet P for l, givet ved
$5 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-3) = 0$

$$5x - 11 + 2y = 0 \quad (2.1.2)$$

Som er parallelt med $\vec{a}$

Spgm. b

Man benytter sig af kommandoen
$proj(\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{bmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

Eller udregner.

$$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{len(\vec{b})^2} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Opgave 9

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Alle oplysninger defineres.

$B := 89 :; c := 58 :; a := 94 :$

Vinkel A bestemmes vha. cosinusrelationerne til en side, og dernæst vinkel, så først findes b.

$$b := \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot Cos(B)}$$

$$b := 109.5887721 \quad (3.1.1)$$

Og nu kan vinklen findes.

$$A := invCos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$

$$A := 59.05056101 \quad (3.1.2)$$

Så vinkel $A = 59.05^o$.

Arealet af trekanten er

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot Sin(A)$$

$$T = 2725.584816 \quad (3.1.3)$$

Så arealet er 2725.58

Spgm. b

Længden af medianen betegnes med m_a, så

$$m_a = \sqrt{c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot Cos(B)}$$

$$m_{94} = 74.01249542 \quad (3.2.1)$$

Som er den ønskede længde.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Funktionen defineres.

$f(x) := (x^2 + 5x + 500) \cdot \exp\left(-\frac{x}{100}\right)$

$$f := x \mapsto (x^2 + 5x + 500)\, e^{-\frac{x}{100}} \qquad (4.1.1)$$

Ligningen for tangenten i punktet $P(0, f(0))$ bestemmes. Da funktionen er defineret, så er tangentligningen

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$$y = 500 \qquad (4.1.2)$$

Så tangentligningen er $y = 500$.

Spgm. b

Monotoniforholdene bestemmes. Først differentieres $f(x)$, og ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$f'(x) = 0$

$$(2x + 5)\, e^{-\frac{x}{100}} - \frac{(x^2 + 5x + 500)\, e^{-\frac{x}{100}}}{100} = 0 \qquad (4.2.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 195]] \qquad (4.2.2)$$

Den anden afledede udregnes.

$f''(x)$

$$2\, e^{-\frac{x}{100}} - \frac{(2x + 5)\, e^{-\frac{x}{100}}}{50} + \frac{(x^2 + 5x + 500)\, e^{-\frac{x}{100}}}{10000} \qquad (4.2.3)$$

Når $f''(x_0) < 0$, så er der lokalt maksimum i x_0

Når $f''(x_0) > 0$, så er der lokalt minimum i x_0.

Så løsningerne fra $f'(x) = 0$ benyttes.

$f''(0)$

$$\frac{39}{20} \qquad (4.2.4)$$

evalf[5](**(4.2.4)**)

$$1.9500 \qquad (4.2.5)$$

$f''(195)$

$$-\frac{39\, e^{-\frac{39}{20}}}{20} \qquad (4.2.6)$$

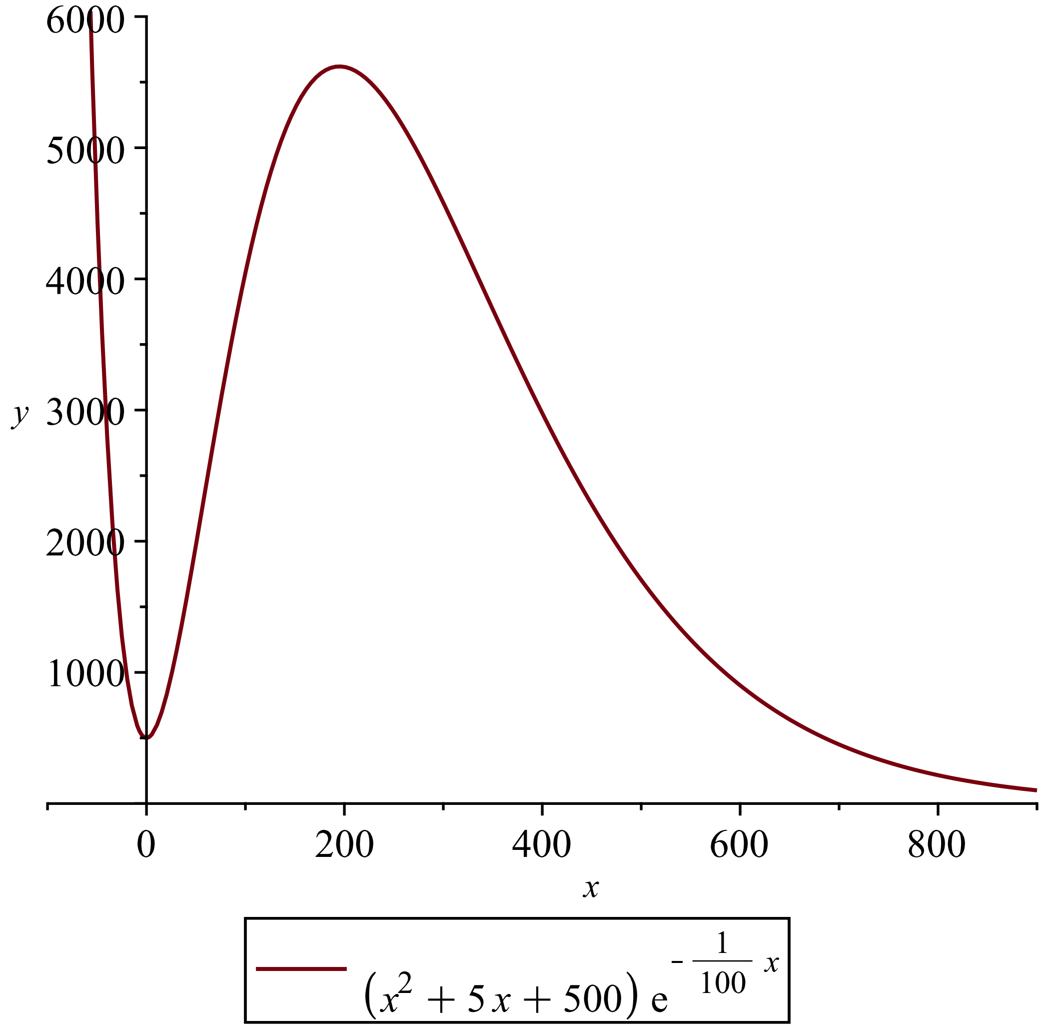
evalf[5](**(4.2.6)**)

$$-0.27743 \qquad (4.2.7)$$

Så man ser, at ved $x = 0$ er der lokalt minimum og ved $x = 195$ er der lokalt maksimum. Dermed er funktionen $f(x)$

- aftagende i intervallet $]\infty; 0]$ og $[195; \infty[$
- voksende i intervallet $[0; 195]$.

En tegning over grafen laves i Maple.
$plot(f(x), x = -100..900, y = 0..6000, legend = [f(x)])$



Som er en passende størrelse.

Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Modellen defineres.

$$c(x) := \frac{12500 \cdot x - 2500 \cdot x^2}{150 + 7.8^x} + 90$$

$$c := x \mapsto \frac{-2500\, x^2 + 12500\, x}{150 + 7.8^x} + 90 \tag{5.1.1}$$

Hvor $0 \leq x \leq 7$. Når der søges efter den maksimale koncentration, så løses ligningen $c'(x) = 0$, så
$c'(x) = 0$

$$\frac{-5000\, x + 12500}{150 + 7.8^x} - \frac{2.054123734\, (-2500\, x^2 + 12500\, x)\, 7.8^x}{(150 + 7.8^x)^2} = 0 \tag{5.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$1.619547144 \tag{5.1.3}$$

Ligningen blev løst numerisk. Man får $x = 1.62$. Dette eftertjekkes

$c''((\mathbf{5.1.3}))$

$$-78.95967092 \tag{5.1.4}$$

Som er mindre end 0, altså er $x = 1.62$ det tidspunkt, hvor koncentrationen er maksimal, så konklusionen er, at efter 1.62 timer er glukosekoncentrationen maksimal.

Spgm. b

Man løser ligningen

$c(x) = 130$

$$\frac{-2500\,x^2 + 12500\,x}{150 + 7.8^x} + 90 = 130 \tag{5.2.1}$$

$intervalsolve(c(x) = 130, x = 0 ..7)$

$$[0.5505316428, 2.665889157] \tag{5.2.2}$$

Så man har

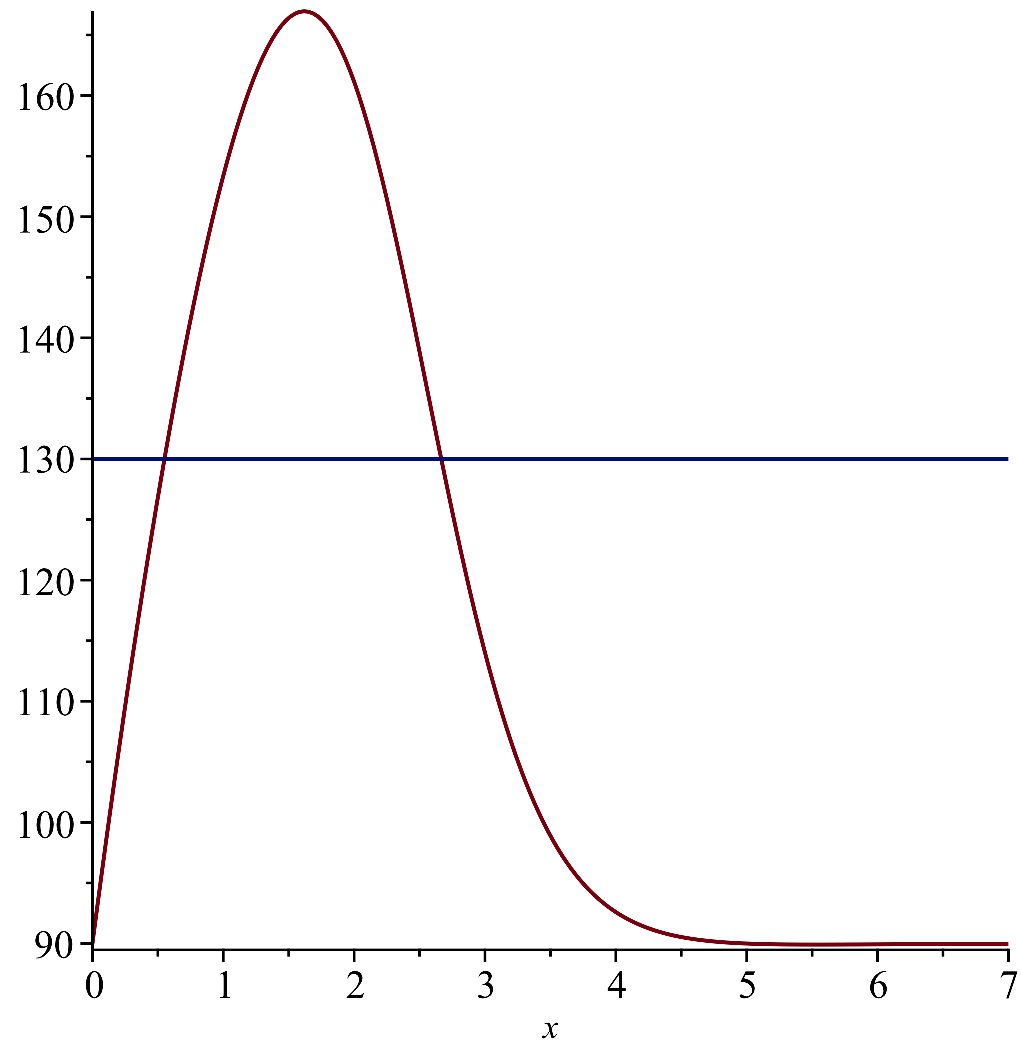
$\Delta x = 2.665889157 - 0.5505316428$

$$\Delta x = 2.115357514 \tag{5.2.3}$$

Dvs. tiden hvor glukosekoncentrationen ligger over $130 mg/dl$ er 2.12 timer. (se tegning).

$d(x) := 130 :$

$plot([c(x), d(x)], x = 0 ..7)$



Så det er den tid gældende over den blå linje der spørges om.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Tredjegradspolynomiet defineres.

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 32$

$$f := x \mapsto x^3 - 6x^2 + 32 \quad \textbf{(6.1.1)}$$

Man ser, at M er fra 0 til 4, så man får

$V_M = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^4 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$

$$V_M = \frac{53248\,\pi}{35} \quad \textbf{(6.1.2)}$$

evalf[5](%)

$$V_M = 4779.6 \quad \textbf{(6.1.3)}$$

Dvs. volumen er $V_M = 4779.6$.

Spgm. b

Arealet af M og N bestemmes.

$M=\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$M=64 \quad (6.2.1)$$

Arealet af N bestemmes, så man parallelforskyder grafen, sådan så man får funktionen

$f_1(x) := x^3-6x^2$

$$f_1 := x \mapsto x^3-6x^2 \quad (6.2.2)$$

Løser ligningen

$f_1(x)=0$

$$x^3-6x^2=0 \quad (6.2.3)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=6],[x=0],[x=0]] \quad (6.2.4)$$

Så får man

$N=\left|\int_0^6 f_1(x)\,\mathrm{d}x\right|$

$$N=108 \quad (6.2.5)$$

Forholdet bestemmes.

$\frac{M}{N}=\frac{64}{108}$

$$\frac{M}{N}=\frac{16}{27} \quad (6.2.6)$$

$evalf[5](\%)$

$$\frac{M}{N}=0.59259 \quad (6.2.7)$$

Opgave 13

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Nulhypotese:

H_0 : Der er ingen sammenhæng mellem kolde fødder og symptomer på forkølelse.

De forventede værdier udregnes ved formlen:

$forventet=\frac{Lodret\ sum \cdot Vandret\ sum}{Sum\ total}$.

Altså er

$forventet_{afkølede, forkølelse}=\frac{18 \cdot 90}{180}$

$$forventet_{afkølede,\ forkølelse}=9 \quad (7.1.1)$$

$forventet_{ikke\ afkølede,\ forkølelse} = \frac{18 \cdot 90}{180}$

$$forventet_{ikke\ afkølede,\ forkølelse} = 9 \quad (7.1.2)$$

$forventet_{afkølede,\ ingen\ forkølelse} = \frac{162 \cdot 90}{180}$

$$forventet_{afkølede,\ ingen\ forkølelse} = 81 \quad (7.1.3)$$

$forventet_{ikke\ afkølede,\ ingen\ forkølelse} = \frac{162 \cdot 90}{180}$

$$forventet_{ikke\ afkølede,\ ingen\ forkølelse} = 81 \quad (7.1.4)$$

Så tabellen er

Forventet	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	9	81	90
Ikke afkølede fødder	9	81	90
Sum	18	162	180

Spgm. b

Fra de observerende værdier ved man, at der var 13 personer som faktisk blev forkølet og havde kolde fødder, så

Observerende (manglende)	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	13	y	90
Ikke afkølede fødder	x	z	90
Sum	18	162	180

Så kan man finde de andre observerende værdier ved at løse følgende ligninger:

$13 + x = 18$

$$13 + x = 18 \quad (7.2.1)$$

$13 + y = 90$

$$13 + y = 90 \quad (7.2.2)$$

$y + z = 162$

$$y + z = 162 \quad (7.2.3)$$

$solve(\{13 + x = 18, 13 + y = 90, y + z = 162\})$

$$\{x = 5, y = 77, z = 85\} \quad (7.2.4)$$

Så har man de observerende værdier.

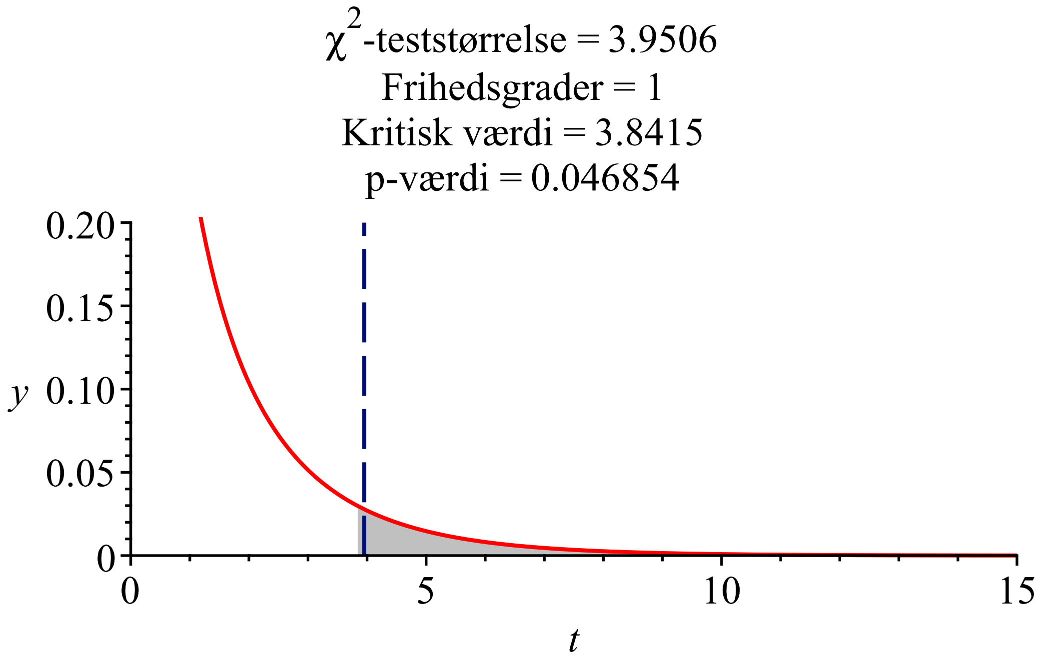
Observerende	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	13	77	90

Ikke afkølede fødder	5	85	90
Sum	18	162	180

Og en matrix defineres.

$obs := \begin{bmatrix} 13 & 77 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}:$

Der benyttes en uafhængighedstest.
ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)



Da p-værdien er 0.04685<0.05, så er nulhypotesen falsk, og dermed skal den forkastes. Der er altså en sammenhæng mellem forkølelse og kolde fødder.

(Man kan faktisk vise de forventede værdier ud fra de fundne observerende værdier)
forventet(*obs*)

$$\begin{bmatrix} 9. & 81. \\ 9. & 81. \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.2.5)}$$

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Differentialliningen med betingelserne løses.

$V'(t) = \frac{1}{7700} \cdot (\mathrm{D} - 40 \cdot V(t))$

$$\mathrm{D}(V)(t) = \frac{\mathrm{D}}{7700} - \frac{2\,V(t)}{385} \quad \textbf{(8.1.1)}$$

Her er $\mathrm{D} = 2800$ og $V(0) = 95$, så $t = 0$. Man får:

$$dsolve\left(\left\{V'(t) = \frac{1}{7700}\cdot(2800 - 40\cdot V(t)),\ V(0) = 95\right\},\ V(t)\right)$$

$$V(t) = 70 + 25\,\mathrm{e}^{-\frac{2t}{385}} \quad \textbf{(8.1.2)}$$

Forskriften defineres.

$$V(t) := 70 + 25\,\mathrm{e}^{-\frac{2t}{385}}$$

$$V := t \mapsto 70 + 25\,\mathrm{e}^{-\frac{2t}{385}} \quad \textbf{(8.1.3)}$$

Lad $t = 45$, så

$V(45)$

$$70 + 25\,\mathrm{e}^{-\frac{18}{77}} \quad \textbf{(8.1.4)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$89.788 \quad \textbf{(8.1.5)}$$

Så efter 45 dage er personens vægt 89.788kg.

Spgm. b

restart

Start: 100kg, slut: 95kg, og $t = 90$, så

$$dsolve\left(\left\{V'(t) = \frac{1}{7700}\cdot(\mathrm{D} - 40\cdot V(t)),\ V(0) = 100\right\},\ V(t)\right)$$

$$V(t) = \frac{\mathrm{D}}{40} + \mathrm{e}^{-\frac{2t}{385}}\left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right) \quad \textbf{(8.2.1)}$$

$$95 = \frac{\mathrm{D}}{40} + \mathrm{e}^{-\frac{2\cdot 90}{385}}\left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right)$$

$$95 = \frac{\mathrm{D}}{40} + \mathrm{e}^{-\frac{36}{77}}\left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right) \quad \textbf{(8.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for D}}$

$$\left[\left[\mathrm{D} = \frac{200\left(20\,\mathrm{e}^{-\frac{36}{77}} - 19\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{36}{77}} - 1}\right]\right] \quad \textbf{(8.2.3)}$$

evalf$[5](\%)$

$$[[\mathrm{D} = 3464.4]] \quad \textbf{(8.2.4)}$$

Så personens daglige energiindtag skal være 3464.4*kcal*

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Alle punkter defineres.

$A := [0, 3, 3] ::; B := [1, 4, 0] ::; C := [6, 0, 3] :$

Man kan gøre dette på mange måder, men for bedst indlæring viser vi, hvordan man kan opstille en ligning for planen.

Opstil to vektorer.

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.1)}$$

$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.2)}$$

Krydsprodukt.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.3)}$$

Og benyt planens ligning samt et fast punkt, evt. punkt A.

$-9 \cdot (x - 0) - 18 \cdot (y - 3) - 9 \cdot (z - 3) = 0$

$$-9\,x - 18\,y + 81 - 9\,z = 0 \quad \textbf{(9.1.4)}$$

$\frac{-9\,x - 18\,y + 81 - 9\,z}{-9} = \frac{0}{-9}$

$$x + 2\,y - 9 + z = 0 \quad \textbf{(9.1.5)}$$

$x + 2\,y - 9 + z + 9 = 0 + 9$

$$x + 2\,y + z = 9 \quad \textbf{(9.1.6)}$$

Så dermed passer den angivende ligning for planen. Alternativt kunne man indsætte punkterne i ligningen.

A:

$0 + 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$$9 = 9 \quad \textbf{(9.1.7)}$$

B:

$1 + 2 \cdot 4 + 0 = 9$

$$9 = 9 \quad \textbf{(9.1.8)}$$

C:

$6 + 2 \cdot 0 + 3 = 9$

$$9 = 9 \quad \textbf{(9.1.9)}$$

Spgm. b

Man anvender planens ligning.

$x + 2\,y + z = 9$

Og parameterfremstillingen. Her er

$x = 3 \cdot k \cdot t$

$y = 3 + t$

$z = 3 - k \cdot t$

Og dermed er planens ligning med parameterfremstillingen indsat:

$(3 \cdot k \cdot t) + 2 \cdot (3 + t) + (3 - k \cdot t) = 9$

$$2\,t\,k + 2\,t + 9 = 9 \tag{9.2.1}$$

Og ligningen løses for k.

$2\,t\,k + 2\,t + 9 = 9$

$$2\,t\,k + 2\,t + 9 = 9 \tag{9.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = -1]] \tag{9.2.3}$$

Så hvis $k = -1$, så ligger l i planen α

Matematik A, STX, gl
30. maj 2018
Delprøve 2, Maple format

Delprøve 1 læses i det andet dokument.

▶ Opgave 7

▶ Opgave 8

▶ Opgave 9

▶ Opgave 10

▶ Opgave 11

▶ Opgave 12

▶ Opgave 13

▶ Opgave 14

▶ Opgave 15

▶ Opgave 16

Matematik A, STX, gl
15. august 2018
Delprøve 2, Maple format

Delprøve 1 læses i det andet dokument.

▶ Opgave 7

▶ Opgave 8

▶ Opgave 9

▶ Opgave 10

▶ Opgave 11

▶ Opgave 12

▶ Opgave 13

▶ Opgave 14

▶ Opgave 15

▶ Opgave 16

Matematik A, STX, gl
07. december 2018
Delprøve 2, Maple format

Delprøve 1 læses i det andet dokument.

▶ Opgave 7

▶ Opgave 8

▶ Opgave 9

▶ Opgave 10

▶ Opgave 11

▶ Opgave 12

▶ Opgave 13

▶ Opgave 14

▶ Opgave 15

▶ Opgave 16