الرياضيـــات السوريـــة

سلسلة المتتاليات الممتعة

تأليف الأستاذ

عبد الحميد السيد

الجمهورية العربية السورية - حلب 2018

1 – تعريف المتتالية :

- هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية N .

أو أية مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ حيث n_0 عدد طبيعي

- ترمز المتتالية بالرمز $(u_n)_{n \geq n_0}$ حيث يسمى u_n حد المتتالية ذا الدليل n (الحد العام)

* تذكرة بالعاملي : في حالة $n \geq 1$ يكون $n! = n(n-1)(n-2) .... \times 2 \times 1$ ونصطلح $0! = 1$.

- أمثلة : $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$ و $u_n = (-1)^n$ (متتالية متناوبة) تأخذ قيمتين فقط هما $+1$ و -1

و $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{2^n}$ (متتالية مجاميع) آخر حد يولد كافة حدود المجموع

حيث $u_0 = 1$ و $u_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ و $u_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{7}{4}$ وهكذا ... وأنتبه $u_n \neq \dfrac{1}{2^n}$

2 – طرائق تعريف المتتالية :

1) بتعريف صريح للحد ذي الدليل n : (الحد العام)

- أي يعرف الحد ذو الدليل n بصيغة تتبع العدد n تفيد في حسابه .

- ويكتب : $u_n = f(n)$ حيث f تابع معرف على المجال $[n_0, +\infty[$

- مثل : المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \sqrt{n-1}$ ، تكتب بالصيغة $u_n = f(n)$

حيث f هو التابع المعرف على المجال $[1, +\infty[$ وفق : $x \mapsto \sqrt{x-1}$.

2) بإعطاء حد بدء وعلاقة تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$:

أي يحسب كل حد بدلالة الحد أو الحدود التي سبقته .

- مثل : المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة إنطلاقاً من $u_0 = a$

والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = q \cdot u_n + r$ حيث a و q و r أعداد حقيقية .

في هذه الحالة يعبر عن u_{n+1} كتابع لـ u_n بالصيغة $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث f هو التابع المعرف على R وفق : $x \mapsto q \cdot x + r$

* مناقشة : بحالة $q \cdot r \neq 0$ و $q \neq 1$ ندعوها متتالية تآلفية . تسلك سلوكاً هندسياً أساسه $q \neq 1$ مع إزاحة

بحالة $q = 1$ و $r = 0$ تصبح $u_{n+1} = u_n$ وهي متتالية ثابتة .

بحالة $q = 1$ و $r \neq 0$ تصبح $u_{n+1} = u_n + r$ وهي متتالية حسابية أساسها r .

بحالة $q \neq 1$ و $r = 0$ تصبح $u_{n+1} = q \cdot u_n$ وهي متتالية هندسية أساسها q .

3 – المتتالية الحسابية :

1) علاقتها التدريجية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$: $\begin{cases} u_{n_0} = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ أياً كان العدد الطبيعي n ، والعدد الحقيقي r أساس المتتالية .

- أي ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بإضافة العدد الحقيقي r نفسه أساس المتتالية الحسابية .

- لبرهان أن متتالية معطاة هي متتالية حسابية يمكن أن نبرهن أن الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت .

2) العلاقة بين أي حدين :

أياً كان العددان الطبيعيان m و n حيث $n \geq m$ فإن : $u_n = u_m + r(n-m)$

وبمعرفة حدين من المتتالية نحسب أساسها من : $r = \dfrac{u_n - u_m}{n-m}$ (فرق الحدين على فرق الدليلين)

وبحالة خاصة عند معرفة u_0 وأساسها r يكون : $u_n = u_0 + r \cdot n$.

3) مجموع n حداً متوالياً أولها a وآخرها b :

$$S = \frac{n}{2}(a+b)$$

حالة خاصة : مجموع الأعداد الطبيعية بدءاً من الواحد هو $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

* تذكرة : عدد حدود المجموع $S = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p$ هو : $n = p - m + 1$

ويصلح فقط في حال كون القفزة بين دليل كل حدين متتاليين من المجموع تساوي الواحد .

* مثلاً : عدد حدود المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ لمتتالية حسابية هو $n - 0 + 1 = n + 1$

فيكون المجموع : $S = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

* في حال كانت القفزة بين كل حدين متتاليين من المجموع تساوي الواحد وباعتبار الحد الأول u_1 والحد الأخير u_n من المجموع ، وبمعرفة r أساس المتتالية الحسابية . نحسب عدد الحدود n من :

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

* ملاحظة : في حال وجود قفزات متساوية بين أدلة حدود المجموع لمتتالية ، قيمة كل منها k

أي المجموع : $S = u_m + u_{m+k} + u_{m+2k} + \cdots + u_p$ حيث $k > 1$ عدد طبيعي

فإن الأدلة تؤلف متتالية حسابية أساسها k وحدها الأول v_1 والأخير v_n

عندها نحسب عدد الحدود n من : $v_n = v_1 + k(n-1)$

- بطريقة أخرى : نفرض $u_{k \cdot t} = v_t$

(فرضنا دليل u يساوي $k \cdot t$ حيث k القفزة بين الأدلة)

4 – المتتالية الهندسية :

1) علاقتها التدريجية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$: $\begin{cases} u_{n_0} = a \\ u_{n+1} = q \cdot u_n \end{cases}$ أياً كان العدد الطبيعي n ، والعدد الحقيقي q أساس المتتالية .

أي ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي q نفسه .

- لإثبات أن متتالية معطاة هي متتالية هندسية :

نسعى لكتابتها بالصيغة $u_{n+1} = q \cdot u_n$ حيث q عدد حقيقي ثابت لا يتعلق بـ n .

وإذا كانت حدودها غير معدومة يكفي أن نثبت أن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابتة وهي قيمة q .

2) العلاقة بين أي حدين :

- أياً كان العددان الطبيعيان m و n فإن : $u_n = u_m \cdot q^{n-m}$

- بحالة خاصة بمعرفة u_0 وأساسها $q \neq 0$ فإن : $u_n = u_0 \cdot q^n$ أياً كان العدد الطبيعي n .

أما بمعرفة u_1 وأساسها $q \neq 0$ فإن : $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

3) مجموع n حداً متتالياً أولها a بشرط $q \neq 1$:

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

@ تذكرة : عدد الحدود في المجموع $S = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p$ هو : $n = p - m + 1$

ويصلح فقط في حال كون القفزة بين دليل كل حدين متتاليين من المجموع تساوي الواحد .

* مثلاً : عدد حدود المجموع $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ لمتتالية هندسية هو $n - 2 + 1 = n - 1$

فيكون المجموع : $S = u_2 \cdot \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$

- عندما $a = 1$ يكون : $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ يستفاد منه لإثبات المطابقة :

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + a^2 \cdot x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}\right)$$

@ تذكرة : إذا كانت الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية كان : $b^2 = a \cdot c$.

ويجب أن لا ننسى أن : $b = a \cdot q$ و $c = a \cdot q^2$ أو $c = b \cdot q$

* مجاميع وقوانين مفيدة :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = n(n+1)$$

$$p + (p+1) + \ldots + (q-1)q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}} = \frac{\sqrt{4a+1} + 1}{2}$$

$$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \ldots}}} = \frac{\sqrt{4a+1} - 1}{2}$$

$$\sqrt[n]{a \sqrt[n]{a \sqrt[n]{a \ldots}}} = a^{\frac{1}{n-1}} \; ; n \geq 2$$

$$\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \ldots}}} = a^{\frac{1}{n+1}} \; ; n \geq 2$$

* قواعد وخواص هامة :

1) جمع أو طرح عدد من طرفي متراجحة لا يغير جهة التراجح .

2) ضرب (أو تقسيم) طرفي متراجحة بعدد موجب تماماً لا يغير جهة التراجح .

3) ضرب (أو تقسيم) طرفي متراجحة بعدد سالب تماماً يغير جهة التراجح .

4) تربيع طرفي متراجحة موجبان لا يغير جهة التراجح .

5) قلب طرفي متراجحة :

I) إذا كان طرفي المتراجحة موجبان تماماً أو سالبان تماماً تتغير جهة التراجح :

- مثلاً : أياً يكن $n \geq 1$ فإن : $n^2 < (n+1)^2$ تكافئ $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

II) إذا كان طرفي المتراجحة مختلفان بالإشارة لا تتغير جهة التراجح .

6) إذا كان $a \geq b+c$ حيث b,c مقادير موجبة فإن : $a > b$ و $a > c$

- مثلاً : إذا كان العدد الطبيعي $n \geq 3$ فإن : $n > 2$ حتماً و $n > 1$ حتماً و $n > 0$ حتماً

أيضاً : في حال العدد الطبيعي $n \geq 2$ إذا كان $n^3 \geq 2+2^n$ فإن $n^3 > 2^n$

7) إذا كان $a \geq b \cdot c$ حيث b,c مقادير أكبر من الواحد فإن : $a > b$ و $a > c$

مثلاً : من أجل العدد الطبيعي $n \geq 2$ إذا كان $n^3 \geq 2 \times 2^n$ فإن : $n^3 > 2^n$

8) إذا كان a و b مقدارين موجبين فإن « $a \geq b$ » تكافئ « $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ » تابع الجذر التربيعي متزايد

- مثلاً : أياً يكن $n \geq 0$ فإن : $2n+3 > 2n+1$ تكافئ $\sqrt{2n+3} > \sqrt{2n+1}$

9) إذا كان a,b مقادير موجبة فإن : $a+b > 0$

وفي حال a,b من إشارة واحدة فإن : $a \cdot b \geq 0$ و $\frac{a}{b} \geq 0$ (بشرط $b \neq 0$)

- مثلاً : في حالة $n \geq 1$ يكون $n-1 \geq 0$ و $n^2 \geq 1$ ومنه $n^2+n-1 \geq 1 > 0$

10) مجموع أعدد حقيقية موجبة أكبر من أي منها .

مثلاً : إذا كان $u_n = n^2+n+2$ فإن $u_n \geq n^2$ و $u_n \geq n+2$ أيا ً يكن $n \geq 0$

11) يكبر كسر بتكبير بسطه أو تصغير مقامه والعكس بالعكس .

5 – جهة اطراد متتالية : تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$:

1) متزايدة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} > u_n$

وتكون متزايدة عندما : $u_{n+1} \geq u_n$.

2) متناقصة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} < u_n$

وتكون متناقصة عندما : $u_{n+1} \leq u_n$.

3) ثابتة إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} = u_n$.

* نقول عن المتتالية التي تحقق أحد الشروط الثلاثة السابقة أنها متتالية مطردة .

* ملاحظة : هناك متتاليات غير مطردة مثل المتتالية المتناوبة : $u_n = (-1)^n$ تأخذ قيمتين -1 و $+1$

6 – طرائق دراسة جهة اطراد متتالية :

1) دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

2) مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع الواحد عندما تكون حدود المتتالية موجبة تماماً (وخلاف ذلك لا يستخدم)

3) كتابة $u_n = f(n)$ (إن أمكن) وعندها ندرس اطراد التابع f :

فإذا كان مطرداً على المجال $[n_0, +\infty[$ كانت جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ من جهة اطراد f

* تذكرة بأهم قواعد الاشتقاق : (ضمن شروطها)

التابع	المشتق	القاعدة لفظاً
$f(x) = m \cdot x + p$	$f'(x) = m$	أمثال المتحول (مشتق الثابت = صفر)
g^n	$n\, g^{n-1} \cdot g'$	الأس بالتابع مرفوعاً لأس أقل بواحد بمشتق التابع
$\sqrt{a \cdot x + b}$	$\frac{a}{2\sqrt{a \cdot x + b}}$	مشتق ما تحت الجذر على ضعفي الجذر
$g + h$	$g' + h'$	مجموع المشتقات
$g \cdot h$	$g' \cdot h + h' \cdot g$	مشتق الأول بالثاني + مشتق الثاني بالأول
$\frac{g}{h}$	$\frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2}$	مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام

* ملاحظة : أحياناً لا يمكننا دراسة الإطراد حسب إحدى الطرائق الثلاثة السابقة عندها نلجأ إلى حساب بعض الحدود الأولية للمتتالية لنستشف منها عن التزايد أو التناقص أو الثبات .
ثم نبرهن صحة ذلك بطريقة أخرى مثل مبدأ الإثبات بالتدريج الذي سنشرحه فيما بعد .

- نصادف ذلك على وجه الخصوص في دراسة إطراد المتتالية التآلفية (تم ذكرها فيما سبق) .

- إيجاد صيغة الحد العام لمتتالية تآلفية :

المتتالية التآلفية $(u_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة وفق : $u_0 = a$ و $u_{n+1} = q\cdot u_n + r$

تسلك سلوكاً هندسياً أساسه $q \neq 1$ مع إزاحة b .

يمكننا إيجاد صيغة حدها العام على النحو الآتي :

1) نحل المعادلة $q\,x + r = x$ فنجد حلها $b = \dfrac{r}{1-q}$

2) نفرض متتالية جديدة : $v_n = u_n - b \quad \ldots (*)$

3) نوجد v_{n+1} بدلالة v_n ونستنتج أن $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية في حال $v_0 \neq 0$

4) نكتب المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ بالصيغة : $v_n = v_0 \cdot q^n$ حيث $v_0 = a - b$

5) نعوض في (*) فنجد صيغة الحد العام للمتتالية التآلفية : $u_n = (a-b)q^n + b$

* ملاحظة : في حال $v_0 = 0$ أي $a = b$ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة وصيغة حدها العام $u_n = u_0$

7 – مبدأ الاثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي) :

- نكتب الخاصة $E(n)$ التي تتعلق بالعدد الطبيعي n والتي نرغب بإثبات صحتها في حالة $n \geq n_0$
وفي أغلب الأحيان يكون $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$.

- لإثبات صحة الخاصة $E(n)$:

1) نثبت صحة الخاصة من أجل $n = n_0$.

2) في حالة $n \geq n_0$ نفترض صحة الخاصة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$.

8 – نهاية متتالية :

مقدمة : جميع مبرهنات النهايات على التوابع عندما يسعى المتحول إلى $+\infty$ تسري على المتتاليات .

1) نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ أنها متقاربة من العدد الحقيقي a إذا كان $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = a$.

2) نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ أنها متباعدة نحو $+\infty$ إذا كان $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$

وبالمثل متباعدة نحو $-\infty$ إذا كان $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$.

3) نهاية متتالية هندسية : ليكن q عدداً حقيقياً . عندئذٍ :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & : -1 < q < 1 \\ +\infty & : q > 1 \\ \text{ليس للمتتالية نهاية} & : q \leq -1 \end{cases}$$

* ملاحظة : في حالة $q = 1$ تكون المتتالية ثابتة وجميع حدودها تساوي الواحد فنهايتها تساوي الواحد .

4) مبرهنة :

a . كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة .

عندئذٍ : أصغر عنصر راجح M عليها هو نهايتها ويسمى الحد الأعلى للمتتالية .

b . كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة .

عندئذٍ : أكبر عنصر قاصر m عنها هو نهايتها ويسمى الحد الأدنى للمتتالية .

* ملاحظة : لا تعطي هذه المبرهنة نهاية المتتالية وإنما تثبت فقط وجود نهاية حقيقية لها .

- إذا حققت متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$ شروط المبرهنة السابقة

فإنها تتقارب من عدد حقيقي a .

فإذا كان a ينتمي إلى مجال I وكان التابع $f : x \longmapsto f(x)$ مستمراً على I فسيكون مستمراً عند a

عندئذٍ يتم تحديد قيمة a باعتباره حلاً للمعادلة $f(x) = x$.

5) متتاليات متجاورة : نقول أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ، إذا وفقط إذا :

1 – كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة .

2 – تقاربت المتتالية $(x_n - y_n)_{n\geq 0}$ من الصفر .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 1)

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$

تحقق العلاقتين :
$$\begin{aligned} a+b+c &= 6 \quad \cdots (1) \\ a\cdot b^2 \cdot c &= -48 \quad \cdots (2) \end{aligned}$$
حيث $(a>c)$

احسبها ثم حدد علاقة u_n بدلالة n باعتبار $u_1=6$

واحسب المجموع $u_6+u_9+u_{12}+\cdots+u_{63}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 2)

جــد صيغة الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

وادرس اطرادها في كل حالة من الحالات الآتية :

$$1)\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=6-2u_n \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=6-2u_n \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=6+2u_n \end{cases}$$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 3)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :
$$\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{1-u_n} \end{cases}$$

أثبت أنه أياً يكن العدد الطبيعي n فإن : $u_n=\dfrac{2(2)^n}{1-2(2)^n}$

ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 4)

أثبت بالتدريج صحة العلاقة $(n+2)!\geq 2^{n+1}$ أياً يكن العدد الطبيعي n

استفد من العلاقة السابقة في دراسة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 5)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0=-3 , u_1=-2 \\ u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n-2 \end{cases}$

والمتتاليتان : $x_n=2u_n-u_{n+1}+2$ و $y_n=u_n-u_{n+1}+2$

1) أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ حسابية واكتب عبارة x_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية واكتب عبارة y_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها

4) احسب بدلالة n المجموع : $S=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 6)

ليكن a عدد حقيقي يحقق $a>2$ ، ولنتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$\begin{cases} x_0=a-2 \\ x_{n+1}=\frac{1}{a}[(a-1)x_n+y_n] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_0=a \\ y_{n+1}=\frac{1}{a}[x_n+(a-1)y_n] \end{cases}$$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=x_n-y_n$ هندسية

واكتب عبارة v_n بدلالة n و a ، ثم احسب نهايتها .

2) أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n=x_n+y_n$ ثابتة .

ثم استنتج أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان من عدد b يطلب ايجاده .

4) جد عبارة كل من x_n و y_n بدلالة n و a .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 7)

تبين إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان أم لا ، حيث :

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{(n+1)!} \quad \text{و} \quad y_n=x_n+\frac{1}{2^n}$$

علماً أنه أياً يكن العدد الطبيعي n فإن $(n+2)!\geq 2^{n+1}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 8)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

1) مثل هندسياً على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ دون حسابها ، ثم خمن جهة إطراد المتتالية ونهايتها المحتملة .

2) بفرض المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = 1 - u_n$ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية . جد v_n ثم u_n بدلالة n .

3) ادرس اطراد كل من المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ ، وهل هما متجاورتان ؟ علل .

4) تحقق من صحة تخمينك في الطلب الأول .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 9)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n + 3 \end{cases}$$

1) احسب الحدود : u_4, u_3, u_2, u_1 .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

3) أثبت أن : $u_n = 3n - (2)^n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 10)

$(u_n)_{n\geq 0}$ و $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ ثلاثة متتاليات تحقق :

$$u_n = x_n - y_n \text{ و } x_n = u_n + (3)^n \text{ و } y_n = 2n - u_n$$

1) استنتج صيغة u_n بدلالة n .

2) أثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية وأن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

3) احسب المجموع : $S = u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{12}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 11)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 - (2)^n \end{cases}$$

1) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث : $v_n = u_n + (2)^n$

أثبت أنها متتالية حسابية ثم استنتج صيغة u_n بدلالة n .

2) احسب المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 12)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1 - v_n}{1 + v_n} \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2 - 2u_n}{1 + u_n}$$

أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، جد عبارة v_n بدلالة n

ثم جد عبارة u_n بدلالة n وادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 13)

a و b عددان حقيقيان يحققان $a > b > 0$

لنتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = b\,x_n + a\,y_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_0 = b \\ y_{n+1} = a\,x_n + b\,y_n \end{cases}$$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = x_n + y_n$ هندسية .

وأن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $v_n = x_n - y_n$ هندسية .

ثم جد عبارة كل من x_n و y_n بدلالة n و a و b .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 14)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = 2y_n - n \end{cases} \quad و \quad y_n = x_n + n - 1$$

1) أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، ثم استنتج عبارة x_n بدلالة n .

2) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$

ثم ادرس إطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 15)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$

أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث : $t_n = (x_n)^2 - (y_n)^2$ هندسية .

ثم احسب بدلالة n المجموع : $S_n = t_1 + t_3 + t_5 + ... + t_{2n+1}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 16)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2n^2 + 3n + 1} \end{cases}$

أثبت أنه أياً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$ فإن : $u_n = \dfrac{(2)^n}{(2n)!}$

ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 17)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث : $u_n=(1+2+3+\cdots+n)-\frac{1}{2}\left(n^2-n-2\right)$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n=1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}-\cdots-\frac{2}{3^n}$

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، وأن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

2) ادرس إطراد المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث : $t_n=\frac{v_n}{u_n}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 18)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}} \end{cases} \quad \text{و} \quad y_n=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots+\frac{1}{5^n}$$

1) أثبت أن $x_n=\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ ثم ادرس إطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$.

2) أثبت أن $y_n=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ ثم ادرس إطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$.

3) هل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 19)

ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها (في حال وجودها) حيث :

$$u_n=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{1}{(n+1)!}$$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 20)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة : $u_n=1-\frac{(-1)^n}{n!}$

1) ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

2) أثبت أن : $0\leq u_n\leq 2$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 21)

بفرض a عدد حقيقي يحقق $0<a<1$

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{(a+1)u_n + (a-1)}{(a-1)u_n + (a+1)} \end{cases}$$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$ هندسية .

جـد عبارة v_n بدلالة n و a ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n و a ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أثبت أن $u_n \leq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n .

4) ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 22)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_1 = 0$ و $u_{n+1} = u_n + \ln \dfrac{e\cdot n}{n+1}$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n = u_n + \ln(n)$ حسابية .

2) جـد عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

4) لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ حيث : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

أثبت أن : $S_n = \dfrac{n^2-n}{2} - \ln(n!)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 23)

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالصيغة : $u_n = 2n - 1 - \sin\frac{\pi n}{2}$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

2) أثبت أن : $2n-2 \leq u_n \leq 2n$ ، واستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 24)

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = e(u_n - 1) + 1$

1) أثبت بالتدريج أن $u_n < 1$.

2) جد عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 25)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 2 , u_1 = e \\ u_{n+2} = (e+1)u_{n+1} - e(u_n - 1) - 1 \end{cases}$

1) أثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ حيث : $x_n = \frac{1}{1-e}(u_{n+1} - e u_n + 1)$

متتالية حسابية ، واكتب عبارة x_n بدلالة n .

2) أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث : $y_n = \frac{1}{e-1}(u_{n+1} - u_n + 1)$

متتالية هندسية ، واكتب عبارة y_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها

4) احسب بدلالة n المجموع : $S = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 26)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_0=-\frac{3}{2}$

وتحقق عند كل عدد طبيعي n الشرط : $-2\leq u_{n+1}\leq \frac{1}{2}(u_n-2)$

أثبت بالتدريج أن : $0\leq u_n+2\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ أياً يكن العدد الطبيعي n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 27)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0=3\ ,u_1=2 \\ u_{n+2}=3\,u_{n+1}-2u_n+2 \end{cases}$

والمتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغ :

$x_n=u_{n+1}-u_n+2$ و $y_n=2u_n-u_{n+1}-4$ و $z_n=u_n-x_n-y_n$

1) أثبت أن : $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية و $(y_n)_{n\geq 0}$ حسابية و $(z_n)_{n\geq 0}$ ثابتة .

واكتب عبارة كل من x_n و y_n بدلالة n .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

3) احسب بدلالة n المجموع : $S=u_1+u_3+u_5+\dots+u_{2n+1}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 28)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0=\lambda\neq -2 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

1) عين قيم العدد الحقيقي λ التي من أجلها تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثابتة .

2) بفرض $\lambda=0$:

a . أثبت أنه أياً يكن $n\in N$ فإن : $0\leq u_n<1$.

b . نفرض المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=\dfrac{1+u_n}{1-u_n}$ أثبت أنها هندسية ثم جد v_n بدلالة n

c . جد عبارة u_n بدلالة n ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 29)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{n+2-u_n}{n+1} \end{cases}$

أثبت بالتدريج أن : $u_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n!}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 30)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث :

$u_n = -\dfrac{2\sqrt{n}}{n+1}$ و $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{n+1}{e \cdot n} v_n \end{cases}$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأدنى بالعدد (-1) .

2) أثبت أن : $v_n = n e^{1-n}$.

3) هل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان ؟ ولماذا ؟

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 31)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$x_n = \dfrac{e}{e-1} - 1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e^3} - \cdots - \dfrac{1}{e^n}$ و $y_n = \ln(x_n)$

1) أثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، ثم ادرس اطرادها .

2) أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، ثم ادرس اطرادها .

3) احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$: $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 32)

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ فيها : $u_{n+1}=ln(v_n)^2$

حيث $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $v_0=1$ و $v_{n+1}=e\cdot v_n$

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية .

2) أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث : $t_n=\frac{u_n}{v_n}$ محدودة .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 33)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=1-e(1-u_n) \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن : $u_n\leq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n .

2) بفرض المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=ln(1-u_n)$ أثبت أنها متتالية حسابية .

جد v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) ادرس اطراد المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n=v_n+u_n$.

4) احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ حيث : $S_n=t_3+t_6+t_9+\dots+t_{3n}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 34)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n=3+\frac{1}{2}+\dots+\frac{4}{2^n}$

والمتتاليتين $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ حيث :

$$v_n=u_{n+1}-u_n \quad \text{و} \quad t_n=u_n-4$$

1) أثبت أن $u_n=a+b\left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث a و b حقيقيان يطلب تعيينهما .

2) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية واستنتج أن $0<v_n\leq 1$.

3) أثبت أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 35)

1) لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_0=-1$ و $u_1+u_2+\cdots+u_{n+1}=(n+1)^2$

جـد عبارة u_n بدلالة n .

2) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً وفيها $v_0=2$ و $v_0+v_1+v_2=\frac{7}{2}$

جـد عبارة v_n بدلالة n .

3) ادرس اطراد المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة : $t_n=u_n\times v_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 36)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_0=-1 \text{ و } u_{n+1}=u_n+2+\sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{4}(2n+1)\right]$$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية حيث : $v_n=u_n+\cos\frac{\pi n}{2}$

ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 37)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_{n+1}=\dfrac{n+x_n}{n+1}\end{cases} \text{ و } \begin{cases} y_0=3 \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1+y_n)\end{cases}$$

1) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة : $u_n=x_n+\frac{1}{n!}$

a . أثبت بالتدريج أن $u_n=1$ ثم استنتج x_n بدلالة n .

b . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ وادرس تقارب المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$.

2) جـد عبارة y_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

3) هل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 38)

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} v_0 = 1 - e \\ v_{n+1} = \frac{1}{e}v_n + 1 - e \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن : $0 < e + v_n \leq 1$.

2) جـــد عبارة v_n بدلالة n بطريقتين مختلفتين .

3) ادرس اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$.

4) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالصيغة : $u_n = \ln(-v_n)$.

أثبت أنها متتالية محدودة وأنها متزايدة ، ثم جـد u_{n+1} كتابع لـ u_n .

5) هل المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ ولماذا ؟

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 39)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$x_n = \frac{1}{e} + \frac{e-1}{e}\left(1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^n\right) \quad \text{و} \quad y_n = \ln\left(\frac{x_n}{e}\right)^2$$

1) أثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، وأن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعينة بالصيغة $u_n = \frac{y_n}{x_n}$ محدودة .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 40)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n} \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + 2^{1-n}$$

1) أثبت أن : $u_n \neq 2$ أياً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم .

2) أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ حيث $x_n = \frac{1}{u_n - 2}$ حسابية ثم جد عبارة u_n بدلالة n .

3) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ حيث $y_n = 2 - v_n$ هندسية ثم جد صيغة أخرى لـ v_n .

4) أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 41)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1)}{(2n)!}$

أثبت أنه أياً يكن العدد الطبيعي $n\geq 1$ فإن : $u_n = \dfrac{2^{-n}}{n!}$

ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ واحسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 42)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sin^2\theta \cdot u_n + 2\cos^4\theta \end{cases}$

1) استنتج صيغة الحد العام u_n بدلالة n والنسب المثلثية للزاوية θ .

2) ادرس اطراد وتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) نضع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ أثبت أن :

$S_n = 2\left(n\cos^2\theta + \tan^2\theta - \dfrac{(\sin\theta)^{2n+2}}{\cos^2\theta}\right)$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 43)

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}u_n \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن : $u_n = \dfrac{2}{n^2+n}$ أياً يكن $n\geq 1$.

2) جـد عددين حقيقيين a و b يحققان : $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$

3) ليكن : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ، عبر عن S_n بدلالة n

ثم ادرس اطراد وتقارب المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 44)

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\ge 0}$ و $(y_n)_{n\ge 0}$ حيث :

$$x_n = \frac{e-1}{e} + \frac{e-1}{e^2} + \frac{e-1}{e^3} + \dots + \frac{e-1}{e^n} - 1$$

و :

$$\begin{cases} y_0 = \ln 2 \\ y_{n+1} = \ln\dfrac{n+3}{n+1} - y_n \end{cases}$$

1) أثبت أن $(x_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية ، وأنها محدودة .

2) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن : $y_n = \ln\dfrac{n+2}{n+1}$.

3) أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\ge 0}$ و $(y_n)_{n\ge 0}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 45)

نضع عند كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$u_n = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ونعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ بالصيغة : $v_n = u_{2n} - u_n$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ محدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ واحسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 46)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n \end{cases}$$

1) أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\ge 1}$ حيث : $x_n = u_{n+1} + u_n$ هندسية

وابحث عن نهايتها .

2) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\ge 1}$ حيث : $y_n = -\dfrac{u_n}{x_n}$ حسابية .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 47)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = -u_n - \left(4n^2 + 6n + 3\right)(2n)! \end{cases}$$

أثبت بالتدريج أن : $u_n = 2(-1)^n - (2n)!$

ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 48)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق :

$u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{e \cdot n} u_n$

1) أثبت بالتدريج أن : $u_n > 0$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n = \ln \dfrac{u_n}{n}$ متتالية حسابية .

4) جد u_n بدلالة n ، ثم أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 49)

احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

في كل حالة من الحالات الآتية :

$1)\ u_n = \dfrac{2^n + e^n}{2^n - e^n}$ $\qquad 2)\ u_n = \left(\dfrac{n^2 + 6n + 9}{n^2 + 2n + 1}\right)^n$

$3)\ u_n = \left(\dfrac{3^n}{3^n - 1}\right)^{3^n}$ $\qquad 4)\ u_n = \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \ln(n)$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 50)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق :

$$u_1=0 \quad \text{و} \quad u_{n+1}=\ln\left(2+e^{u_n}\right)$$

1) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

2) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n=e^{u_n}$ متتالية حسابية .
ثم جد عبارة v_n بدلالة n .

3) استنتج صيغة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 51)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة :

$$u_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة .

2) اثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث $v_n=(n+1)u_n$ حسابية .

3) ادرس اطراد المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ حيث : $t_n=v_n\times u_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 52)

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق :
$$\begin{cases} u_1=-1 \\ u_{n+1}=2u_n+\ln\dfrac{n+1}{n^2} \end{cases}$$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n=\ln n-u_n$ هندسية .

2) جد عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) ليكن : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ ، عبر عن S_n بدلالة n .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 53)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة : $u_n=\sqrt{2+\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تكتب بالصيغة : $u_n=\frac{a}{\sqrt{n^2+n}}$ ، حيث $a\in R^*$

2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة .

3) ما جهة إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ ؟

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 54)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0=1$ و $u_{n+1}=e(u_n-n-1)$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام : $v_n=an+b$

وتحقق العلاقة : $v_{n+1}=e(v_n-n-1)$

1) احسب الثابتين الحقيقين a و b .

2) أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n=u_n-v_n$ هي متتالية هندسية .

3) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

4) احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثم ادرس اطرادها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 55)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\log_2\left(1+2^{u_n}\right)-1$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n=2^{u_n}-1$ هندسية .

2) جد عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 56)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \end{cases} \text{ و } v_n = 2\frac{1-u_n}{1+u_n}$$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، جد عبارة v_n بدلالة n .

2) جد عبارة u_n بدلالة n ، ثم أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 57)

نضع عند كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$u_n = \left(1-\sqrt{n}\right)+\left(2-\sqrt{n}\right)+\left(3-\sqrt{n}\right)+\cdots+\left(n-\sqrt{n}\right)$$

1) أثبت أن : $u_n = \frac{n}{2}\left(\sqrt{n}-1\right)^2$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ وبين أنها محدودة من الأدنى .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 58)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1-\left(\tan^2\theta\right)u_n \end{cases}$

حيث : θ عدد حقيقي يحقق $0<\theta<\frac{\pi}{4}$

1) استنتج u_n بدلالة n والنسب المثلثية للزاوية θ .

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ حيث : $S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 59)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة :

$$S_n = \left(1+\frac{1}{e}\right)+\left(e+\frac{1}{e^2}\right)+\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)+\cdots+\left(e^{n-1}+e^{-n}\right)$$

1) أثبت أن : $S_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e-1}$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ وأثبت أنها محدودة من الأدنى .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 60)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \log_2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$ حسابية .

2) جد عبارة u_n بدلالة n ، ثم ادرس اطراد وتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 61)

أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

حيث : $u_n = \frac{1+(3)^n}{1-(3)^n}$ و $v_n = \frac{1-(2)^n}{1+(2)^n}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 62)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة : $u_n = \log_2\left(2^{-n} - 4^{-n}\right)$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متباعدة .

2) استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ وادرس اطرادها .

3) احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$ حيث : $S_n = 2^{u_1} + 2^{u_2} + 2^{u_3} + \dots + 2^{u_n}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 63)

نتأمل المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة :

$$S_n = \frac{2}{n}\left(i + i^3 + i^5 + \dots + i^{2n-1}\right)^2 \quad \text{حيث} \quad i^2 = -1$$

1) استنتج أن : $S_n = \frac{(-1)^n - 1}{n}$.

2) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ محدودة واحسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 64)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \ln\left(2e^{u_n} + c\right)$

و c عدد مثبت من R ويحقق $0 \leq c < 2$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

2) ما قيمة c التي تجعل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية ؟

اكتب في هذه الحالة عبارة u_n بدلالة n .

3) نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = e^{u_n} + c$

أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم جد عبارة v_n بدلالة n و c .

4) إذا كان $v_0 + v_1 + \cdots + v_6 = 254$

فاحسب قيمة c واستنتج صيغة u_n بدلالة n .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 65)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{a + b u_n} \end{cases}$

حيث a و b عددان حقيقيان غير معدومين

والمتتالية الحسابية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$

1) جد كلاً من a و b واكتب عبارة u_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 66)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة :

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \cdots}}}$$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n = (2u_n - 1)^2$ حسابية .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة واستنتج عنصراً قاصراً عنها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 67)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بالصيغة : $u_n = \sqrt[n]{a\cdot\sqrt[n]{a\cdot\sqrt[n]{a\cdots}}}$

حيث a عدد حقيقي يحقق $0<a<1$

1) احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ ، ثم ادرس اطرادها .

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 2}$ حيث : $v_n = \dfrac{(u_n)^{n^2}}{(u_n)^n}$ هندسية .

3) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{6}$ حيث : $S_n = v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ فاحسب a .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 68)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة :

$$u_n = a^n + n a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2} + \cdots + n a + 1$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماماً

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وادرس اطرادها .

2) احسب نهايتها ، وأثبت أنها محدودة من الأدنى .

3) إذا كان $u_1 + u_2 + u_3 = 14$ ، فاحسب a .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 69)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 2 + q^n \ ; q>1 \end{cases}$$

1) لتكن المتتالية الحسابية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = u_n - q^n$

احسب q ، ثم استنتج صيغة u_n بدلالة n .

2) احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وادرس اطرادها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 70)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة :

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+2^{-n}}{\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\cdots+2}$$

احسب نهايتها ، ثم ادرس اطرادها

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 71)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

غير صفريتين ، لهما نفس حد البدء ونفس الأساس

فإذا كان : $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=0 \\ v_0+v_1+v_2+v_3=0 \end{cases}$

1) جد عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n .

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}}$.

3) عرف كل من $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بصيغة تدريجية .

4) مثل هندسياً وبدون حساب الحدود الأربعة الأولى من كل منهما .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 72)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة :

$$u_n = \log_2\left(2+2^2+\cdots+2^n\right)-\log_2\left(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n}\right)$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة : $v_n = e^{u_n}$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حسابية وأن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية .

2) أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان حيث :

$$x_n = \frac{u_n}{v_n} \quad و \quad y_n = -\frac{1}{v_n}$$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 73)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+(2-\sin(\pi n))u_n}{2-\sin(\pi n)} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{2-\cos(2\pi n)} \end{cases}$$

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

2) احسب نهاية المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n = (\ln 4)u_n - v_n$ ثم ادرس اطرادها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 74)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة : $u_n = \left(a^1 - a\right) + \left(a^2 - a\right) + \cdots + \left(a^n - a\right)$

حيث a عدد حقيقي أكبر تماماً من الواحد

1) جد a إذا كانت المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ حسابية حيث : $x_n = a^{n+1} - u_n$

وبهذه الحالة أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ هندسية حيث : $y_n = u_n + a\cdot n + a$

2) في حالة $a=2$ ، أثبت بالتدريج أن $y_n \geq x_n$ واستنتج عنصراً قاصراً عن $(u_n)_{n\geq 1}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 75)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{a} \; ; a \in R_+^* \\ u_{n+1} = \sqrt{a+u_n^2} \end{cases}$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = 2^{a-u_n^2}$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها .ثم جد عبارة u_n بدلالة n و a .

3) جد a إذا كان : $\log_2\left(v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_9\right) = -45$

4) نفترض $a=1$ ، نعرف المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ بالصيغة : $t_n = -\dfrac{1}{u_n}$

أثبت أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 76)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - \ln\dfrac{n+2}{n+1} \end{cases}$$

1) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى بالعدد صفر .

3) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = e^{-u_n}$ حسابية .

4) جد عبارة u_n بدلالة n .

5) أثبت أن $u_0 + u_1 + \dots + u_n = -\ln[(n+1)!]$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 77)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 1 - \log_2 v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2)^{-u_n} \end{cases}$$

1) بفرض $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية

جد عبارة u_n بدلالة n .

2) بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

جد عبارة v_n بدلالة n .

3) في حالة كون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، نعرف المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ بالصيغة

$t_n = u_n - v_n$. أثبت أن العدد (-3) عنصراً قاصراً عن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 78)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة : $u_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}$

1) ادرس تغيرات التابع g المعرف على المجال $[1,+\infty[$

وفق : $g(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$ واستنتج إشارته .

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ ثم استنتج عنصراً راجحاً عليها وعنصراً قاصراً عنها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 79)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ حدودهما موجبة تماماً تحققان :

$$\begin{cases} \dfrac{u_n}{u_{n+1}}=2v_n \quad .... (1) \\ u_{n+1}+u_n=(2)^{-n^2}\left(\dfrac{1}{2v_n}+1\right) \quad .... (2) \end{cases}$$

1) جد عبارة u_n بدلالة n .

2) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية .

3) لتكن المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ معرفة بالصيغة $t_n=u_n\times v_n$

ادرس اطرادها وبين أنها متقاربة واستنتج عنصراً راجحاً عليها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 80)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة :

$$u_n=(n-2)+(n-4)+(n-6)+....+(-n)$$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

2) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ استنتج عبارة v_{n+1} بدلالة v_n .

3) ادرس تغيرات التابع f المعرف على المجال $]-\infty,0]$ وفق : $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

4) ارسم منصف الربع الأول والخط البياني C للتابع f ثم عين على محور الفواصل وبدون حساب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 .

5) لتكن المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ حيث : $t_n = 2^{u_n}$

أثبت أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 81)

احسب نهاية كل متتالية من المتتاليات الآتية (a عدد حقيقي) :

$$1)(u_n)_{n\geq 1} : u_n = \frac{2\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-....}}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+....}}}}$$

$$2)(v_n)_{n\geq 2} : v_n = \sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times....}}} \ ; 0<a<1$$

$$3)(t_n)_{n\geq 2} : t_n = \sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div....}}} \ ; a>1$$

ثم ادرس اطراد المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(t_n)_{n\geq 2}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 82)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2}{1-u_n}$$

1) جد v_{n+1} كتابع لـ v_n ، ثم جد عبارة v_n بدلالة n .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

3) أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث : $t_n = 1+\dfrac{1}{v_n}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 83)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

1) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة من الأعلى .

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 84)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$u_0 = 1 \text{ و } \left(1 - \frac{1}{u_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

1) أثبت بالتدريج أن : $u_n = \dfrac{2}{2 - \left|\sin \frac{\pi n}{2}\right|}$.

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

3) أثبت أن المتتالية $(u_{2n})_{n\geq 0}$ ثابتة .

4) أثبت أنه أياً يكن العدد الطبيعي k فإن : $u_{n+2k} = u_n$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 85)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق :

$$u_n = 3\sum_{k=0}^{n} 4^{-k} - 2\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$$

1) أثبت أن u_n يكتب بالصيغة : $u_n = 2^{-n}\left(2 - 2^{-n}\right)$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، ثم احسب نهايتها .

3) جد عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 86)

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث :

$v_1=1$ و $u_n=\dfrac{a}{v_n-2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{2a}{v_n-4}$ و $a\in N^*$

1) اكتب u_{n+1} بدلالة u_n و a .

2) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وأكتب صيغة حدها العام .

3) اكتب u_n بدلالة n و a ، ثم جد a التي من أجلها تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-1$.

4) بفرض $a=2$ ، ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ واستنتج عنصراً راجحاً عليها وعنصراً قاصراً عنها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 87)

نضع عند كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$u_{2n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{4^n}$$

ونعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة : $v_n=1-3u_n$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية .

2) أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ محدودة ، حيث : $t_n=v_{2n}-v_n$.

3) أثبت أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 88)

نتأمل المتتاليات الثلاثة $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$u_n=\dfrac{2e^{2n}}{e^n+1}$ و $2v_n-u_n\sqrt{v_n}-u_n=0$ و $t_n=ln\left(u_n\sqrt{v_n}+u_n\right)$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

2) أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية .

3) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، استنتج أنها محدودة من الأدنى .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 89)

لتكن المتتاليات الثلاثة $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، لهما نفس الأساس

$u_n = x_n + y_n$ ، حيث $u_0 = 1$ و $u_1 = 4$ و $u_2 = 8$

1) جد عبارة كل من x_n و y_n و u_n بدلالة n .

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، استنتج عنصراً قاصراً عنها .

3) احسب بدلالة n كل من المجموعين :

$S_1 = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1}$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 90)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0 = -1$ و $u_{n+1} - u_n = 2^n$

1) أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ حيث : $x_n = 2 + u_n$ هندسية .

2) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث : $y_n = 2x_n - \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right)$ حسابية .

3) ادرس اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ ، ثم احسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 91)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_1 = 0$ و $e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n} = 1$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n = \log_2\left(1 + e^{u_n}\right)$ حسابية .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأدنى .

4) أثبت أن : $e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3} + \cdots + e^{u_{n-1}} = e^{u_n} - v_n$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 92)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = q\,u_n + r \end{cases}$

تحقق : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$ و $u_0 + u_1 + u_2 = \frac{1}{2}$

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ لا يمكن أن تكون ثابتة أو حسابية أو هندسية .

2) جد عبارة u_n بدلالة n ، ثم أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

(جواب الحد العام : $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$)

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 93)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية صيغة حدها العام : $u_n = aq^n + b \;; q \neq 1$ و $u_0 = -3$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها يساوي الواحد حيث : $v_n = u_n + \sum_{k=0}^{n} u_k$

1) عين الأعداد الحقيقية غير المعدومة a و b و q ، ثم اكتب u_{n+1} كتابع لـ u_n .

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، ثم جد عنصراً راجحاً عليها .

(جواب الحد العام : $u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$)

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 94)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعطاة بالصيغة :

$$u_n = 1 + \ln(2e) + \ln(3e) + ... + \ln(en)$$

1) أثبت أن : $u_n = n + \ln(n!)$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ ، واحسب نهايتها .

3) أثبت أن العدد (1) عنصراً قاصراً عن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 95)

نتأمل المتتاليات الثلاثة $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0=1 \ , u_1=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{u_{n+2}}+\dfrac{2}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}=0 \end{cases}$$

و $v_n=-\dfrac{u_n \cdot u_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}$

و $t_n=-\dfrac{u_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

2) أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

(جواب الحد العام : $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$)

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 96)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معطاة بالصيغة :

$$u_n=a^{n-1}+b\cdot a^{n-2}+b^2\cdot a^{n-3}+\dots+b^{n-1}$$

حيث : a و b عددان حقيقيان يحققان $a>b>1$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n=1-\dfrac{a-b}{a^n}u_n$ ، هندسية .

2) أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث : $t_n=ln\left(1+\dfrac{a-b}{b^n}u_n\right)$ ، حسابية .

3) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 97)

1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)[(2n-1)\times \cdots \times 5 \times 3 \times 1]}$ هندسية .

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث : $v_n = \dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!\,(2n)}$ حسابية .

3) ادرس اطراد المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ حيث : $t_n = \dfrac{v_n}{u_n}$ واحسب نهايتها .

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 98)

ناقش بحسب قيم الزاوية الحادة θ

اطراد ونهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ حيث :

$$S_n = \frac{\binom{n}{0}\sin^0\theta + \binom{n}{1}\sin^1\theta + \cdots + \binom{n}{r}\sin^r\theta + \cdots + \binom{n}{n}\sin^n\theta}{\binom{n}{0}\cos^0\theta + \binom{n}{1}\cos^1\theta + \cdots + \binom{n}{r}\cos^r\theta + \cdots + \binom{n}{n}\cos^n\theta}$$

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 99)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معطاة بالصيغة : $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{(a \cdot b)^n}$

حيث : a و b عددان حقيقيان يحققان $a > b > 0$

1) ناقش بحسب قيم a و b نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في حالة $a = 1$ ثم في حالة $b = 1$.

(سلسلة المتتاليات الممتعة – تمرين 100)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $S_n = -3 - \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{16} - \cdots - \dfrac{3}{4^n}$

1) احسب S_0 و S_1 و S_2 ، ثم ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل : $S_n = \dfrac{1}{2^{2n}} - 4$ ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$