Berechnung von Wurzeln nach Jonny Westphalen

1. Schritt: $\sqrt{x}$ als Taylor-Polynom darstellen:

Funktion für Taylor-Polynome: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$

$f''''(x) = -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}$

$f'''''(x) = \frac{105}{32} \cdot x^{-\frac{9}{2}}$

Entwicklungspunkt = a = 1

n = 0

$\frac{f(1)}{0!} \cdot (x-1)^0 = 1$

n = 1

$\frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 = \frac{1}{2} \cdot (x-1)$

n = 2

$\frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 = -\frac{1}{8} \cdot (x-1)^2$

n = 3

$\frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 = \frac{1}{16} \cdot (x-1)^3$

n = 4

$\frac{f''''(1)}{4!} \cdot (x-1)^4 = -\frac{5}{128} \cdot (x-1)^4$

n = 5

$\frac{f'''''(1)}{5!} \cdot (x-1)^5 = \frac{7}{256} \cdot (x-1)^5$

Alle zusammen von n = 0 bis n = 5:

$1+\frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{8} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{16} \cdot (x-1)^3 - \frac{5}{128} \cdot (x-1)^4 + \frac{7}{256} \cdot (x-1)^5$

Nun zu dem Problem dies als Summe darzustellen. Der Exponent hinter dem $(x-1)$ ist einfach durch n darzustellen, da er immer um 1 ansteigt. Um die 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $-\frac{5}{128}$, $\frac{7}{256}$ darzustellen muss man sich klarmachen, wie diese beim Ableiten entstehen und bedenken, dass diese auch noch durch $n!$ geteilt werden.

Jetzt die Zahlen vor dem x beim Ableiten betrachten ohne, dass diese durch $n!$ geteilt wurden. 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $-\frac{15}{16}$, $\frac{105}{32}$

Die 1 ist einfach da, weil hier noch nicht abgeleitet wurde. $\frac{1}{2}$ ist entstanden durch $1 \cdot \frac{1}{2}$, da die 1 vorher da stand und mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ multipliziert wurde. $-\frac{1}{4}$ ist das Ergebnis von $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)$, $\frac{3}{8}$ = $(-\frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{2}-2)$ usw.

Dies alles kann man darstellen mit:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}-(k-1)$$

Probe:

n = 0

$$\prod_{k=1}^{0} \frac{1}{2}-(k-1) = 1$$

n = 1

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{1}{2}-(1-1) = \frac{1}{2}$$

n = 2

$$\prod_{k=1}^{2} (\frac{1}{2}-(1-1))*(\frac{1}{2}-(2-1)) = -\frac{1}{4}$$

usw.

Zusammengefasst ist die Funktion $\sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt 1 als Taylorpolynom so darzustellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}-(k-1)}{n!} \cdot (x-1)^n$$

Das Problem ist allerdings, dass diese Funktion nur einen Konvergenzradius von 0 bis 2 hat. Bedeutet, als höchstes x kann man 2 einsetzen. Es ist damit nur möglich die Wurzeln der Zahlen zwischen 0 und 2 zu berechnen.

Allgemein hat die Funktion einen Konvergenzradius von 0 bis 2a.

Man muss einen Entwicklungspunkt wählen, der sich immer an die zu berechnende Wurzel anpasst.

Entwicklungspunkt ab jetzt y.

Nennen wir: $\sqrt{x} = y$

Daraus folgt: $x = y^2$

Nimmt man irgendein y welches im Bereich $y \geq \frac{x}{2}$ liegt kann man alle Wurzeln damit berechnen.

Man muss das Taylor-Polynom allgemein für den Entwicklungspunkt y bestimmen.

$(x-y)^n$ ist natürlich einfach für den allgemeinen Entwicklungspunkt. Auch $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}-(k-1)$ kann bleiben, da der Vorfaktor nicht von der eigentlichen Zahl beeinflusst wird. Aber natürlich ist $1^{\frac{1}{2}}$ etwas anderes als $2^{\frac{1}{2}}$

Allgemein könnte man sagen $y^{\frac{1}{2}}$, aber im nächsten Schritt wird

das $\frac{1}{2}$ zu $-\frac{1}{2}$ und dann zu $-\frac{3}{2}$.
Dieses muss nun wieder beschrieben werden.
Möglich durch $y^{(\frac{1}{2}-n)}$

Probe:
n = 0
$y^{\frac{1}{2}}$
n=1
$y^{-\frac{1}{2}}$
n=2
$y^{-\frac{3}{2}}$

Wieder alles zusammengefasst:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{2}-(k-1)) \cdot y^{(\frac{1}{2}-n)}}{n!} \cdot (x-y)^n$$

Jetzt würde man aber zum Beispiel wenn man die Wurzel von 5 berechnen möchte beim Entwicklungspunkt 3 im 1. Schritt schon auf $3^{\frac{1}{2}}$ stoßen. Man müsste somit die Wurzel aus 3 ziehen, was wir ja gerade nicht können.
Nimmt man nun aber y^2 als Entwicklungspunkt tritt das Problem nicht auf.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{2}-(k-1)) \cdot y^{2^{(\frac{1}{2}-n)}}}{n!} \cdot (x-y^2)^n$$
Die 3 würde zu 9 werden und daraus die Wurzel wäre wieder 3.

Das ^2 eliminiert immer die Wurzel.

Wählt man $y = \frac{x+1}{2}$ wird das y^2 immer im Radius $y \geq \frac{x}{2}$ bleiben.

Zusammengefasst:

Man möchte die Wurzel aus x bestimmen.

Man wählt als Entwicklungspunkt $y = \frac{x+1}{2}$ und setzt ein.

Beispiel:

Wurzel aus 2

y = $\frac{2+1}{2} = 1.5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{2} - (k-1)) \cdot (1.5^{2^{\frac{(1-n)}{2}}})}{n!} \cdot (2 - 1.5^2)^n \approx 1.4142$$

Nun wie man das alles in eine schönere Formel bzw. Algorithmus bekommt.

Umso näher y^2 an x liegt, umso schneller konvergiert es auch gegen die richtige Wurzel.

Sucht man die Wurzel 2 von und nimmt y = 1.5 kommt man damit schneller zu 1,4142 als wenn man mit y = 23 anfängt. Der y-Wert sollte wenn es geht schon nahe an der richtigen Wurzel liegen, oder wenn man sie nicht kennt nimmt man $\frac{x+1}{2}$. In den ersten Schritten konvergiert die Funktion am stärksten gegen den richtigen Wert, also ist es besser zum Beispiel 1 als Endwert zu nehmen, und dann immer wieder den neuen Wert als y zu nehmen und von 0 bis 1 rechnen zu lassen.

Folglich muss man nun ausrechnen:

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{2}-(k-1))\cdot {y^2}^{\frac{(1-n)}{2}}}{n!} \cdot (x-y^2)^n$$

n=0

$$\frac{\prod_{k=1}^{0} (\frac{1}{2}-(k-1))\cdot {y^2}^{\frac{(1-0)}{2}}}{0!} \cdot (x-y^2)^0 = \frac{y}{1}\cdot 1 = y$$

n=1

$$\frac{\prod_{k=1}^{1} (\frac{1}{2}-(k-1))\cdot {y^2}^{\frac{(1-1)}{2}}}{1!} \cdot (x-y^2)^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x-y^2) = \frac{x-y^2}{2y}$$

Zusammen:

$$y + \frac{x-y^2}{2y} = \frac{2y^2}{2y} + \frac{x-y^2}{2y} = \frac{y^2+x}{2y}$$

Hier setzt man nun einfach immer wieder den neuen y-Wert ein.

Beispiel:

Wurzel aus 2

y = $\frac{2+1}{2}$ = 1.5

$$\frac{1.5^2+2}{2*1.5} \approx 1.41667$$

Nun noch einmal:

$$\frac{1.41667^2+2}{2*1.41667} \approx 1.41422$$

Wie man sieht, nähert man sich jedes mal näher an die richtige

Wurzel an.

Die Formel von 0 bis 5 würde zum Beispiel schon so aussehen:

$$\frac{7x^5-45x^4y^2+126x^3y^4-210x^2y^6+315xy^8+63y^{10}}{256y^9}$$

Um jetzt nicht nur die Quadratwurzel zu berechnen, sondern jede Wurzel ändert man einfach überall das $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{w}$. Und das y^2 zu y^w.

Also die w-te Wurzel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{w}-(k-1)\right) \cdot y^{w\left(\frac{1}{w}-n\right)}}{n!} \cdot (x-y^w)^n$$

Dieses kann man natürlich auch wieder allgemein ausrechnen.

Bis 1 würde es so aussehen: $\frac{y^{-w} \cdot y \cdot (x+(-1+w) \cdot y^w)}{w}$

Vergleich mit dem Newton-Verfahren

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right) \cdot y^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}}{n!} \cdot (x-y^2)^n = \frac{y^2+x}{2y}$$

ist exakt das Gleiche, wie mit dem Newton-Verfahren Wurzeln zu berechnen.

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Um die Wurzel von y zu berechnen wäre es: $f(x) = x^2 - y$

Da ich die Wurzel allerdings als x und den Entwicklungspunkt als y bezeichnet habe tausche ich im Newton Verfahren einfach mal die Bezeichnungen.

$f(y) = y^2 - x$

Eingesetzt: $y_{n+1} = y - \frac{y^2-x}{2y} = \frac{2y^2}{2y} - \frac{y^2-x}{2y} = \frac{y^2+x}{2y}$

Nun einmal das Newton-Verfahren mit $\frac{y^2+x}{2y}$ gegen $\frac{7x^5-45x^4y^2+126x^3y^4-210x^2y^6+315xy^8+63y^{10}}{256y^9}$

am Beispiel $\sqrt{1337}$

Zuerst Newton 2 Schritte:

$$y = \frac{1337+1}{2} = 669$$

$$y = \frac{669^2+1337}{2\cdot 669} = \frac{224449}{669}$$

$$y = \frac{(\frac{224449}{669})^2+1337}{2\cdot(\frac{224449}{669})} \approx 169.742$$

Jetzt Jonny:

$$y = 669$$

Formel zu lang um alles hinzuschreiben aber:

$$y \approx 167.091$$

$$y \approx 50.6603$$

Die Wurzel ist bei Jonny nach einem Durchlauf schon besser angenähert als bei Newton nach 2. Nach 6 Durchläufen wären bei Jonny schon die ersten 100 Nachkommastellen richtig.

Nun noch weitere y-Werte für die gleiche Rechnung von Jonny der Wurzel aus 1337.

$$y \approx 36.5854$$

$$y \approx 36.56501059756444$$

Hier wären alle angegebenen Nachkommastellen schon korrekt.

Newton wäre hier noch bei $y \approx 51.932$

Nun noch ein Vergleich mit der Taylor-Reihe von $\sqrt{x+1}$ und $\sqrt{17}$. Muss nicht alles hingeschrieben werden aber $\sqrt{17}$ würde mit der Taylor-Reihe über $4\cdot\sqrt{1+\frac{1}{16}}$ berechnet werden. Nach 79 Durchläufen wären 100 Nachkommastellen richtig. Bei Jonny wären diese schon nach 5 Durchläufen erreicht.