(Bemerkung: Durch diese Klausur sind über 90% der Teilnehmer durchgefallen. Soweit ich mich erinnern kann hat keine Aufgabe Ähnlichkeit mit Übungsaufgaben von den Übungszetteln. Die erste (und moglicherweise auch andere) ist allerdings so auch in Herrn ... Skript gestellt (mit anderen Zahlen)).

Klausur zu *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix $A \in K_{3,3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

wobei K ein beliebiger Körper ist. Diskutieren Sie die Diagonalisierbarkeit von A. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Charakteristik von K. Geben Sie im Falle der Diagonalisierbarkeit ein $S \in \mathrm{GL}(3; K)$ so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ bezüglich der Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ein Körper und $V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ ein Vektorraum über K ist; dabei ist die Verknüpfung $+$ in V die Matrizenaddition und das Produkt $k \cdot v$ mit $k \in K$ und $v \in V$ das Matrizenprodukt. Welche Dimension hat V über K?

Aufgabe 3

Gegeben sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{Q}_{n,n}$ mit den Eigenschaften $A^2 = nA$, $B^2 = n^2 E_n$ und $AB = BA = nA$. Zeigen Sie $f(A-B) = \mathcal{O}$ mit $f(x) = x(x-n)(x+n) \in \mathbb{Q}[x]$ und überprüfen Sie die Diagonalisierbarkeit von $A - B$. Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_{n,n}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe 4

K sein ein Körper sowie V und W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ genau dann injektiv (surjektiv) ist, wenn es eine lineare Abbildung $\psi : W \to V$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ (mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$) gibt.