TD - Nombres complexes - Correction

1 Nombres complexes :

1.1 Représentation algébrique d'un nombre complexe :

Exercice 1 : Donner l'expression algébrique des nombres :

$$a = (2+3i)(5-4i), b = \frac{(2-5i)(3-5i)}{4-3i}, c = \frac{(1+3i)(2-i)}{3+2i} \text{ et } d = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}$$

Solution de l'exercice 1 :

– Expression algébrique de a : On a :

$$a = (2+3i)(5-4i) = 2\times 5 - 3\times(-4) + (2\times(-4) + 3\times 5)i = 10 + 12 + (-8+15)i = 22 + 7i$$

– Expression algébrique de b : On a :

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(2-5i)(3-5i)}{4-3i} \\
&= \frac{2\times 3 - (-5)\times(-5) + (2\times(-5) + (-5)\times 3)i}{4-3i} \\
&= \frac{6 - 25 + (-10-15)i}{4-3i} \\
&= \frac{-19-25i}{4-3i} \\
&= \frac{(-19-25i)(4+3i)}{|4-3i|^2} \\
&= \frac{-19\times 4 - (-25)\times 3 + (-19\times 3 + (-25)\times 4)i}{16+9} \\
&= \frac{-76+75+(-57-100)i}{25} \\
&= \frac{-1-157i}{25} \\
&= -\frac{1}{25} - \frac{157}{25}i
\end{aligned}$$

– Expression algébrique de c : On a :

$$\begin{aligned}
c &= \frac{(1+3i)(2-i)}{3+2i}\\
&= \frac{1\times 2-3\times(-1)+(1\times(-1)+3\times 2)i}{3+2i}\\
&= \frac{2+3+(-1+6)i}{3+2i}\\
&= \frac{5+5i}{3+2i}\\
&= 5\frac{1+i}{3+2i}\\
&= 5\frac{(1+i)(3-2i)}{|3+2i|^2}\\
&= 5\frac{1\times 3-1\times(-2)+(1\times(-2)+1\times 3)i}{9+4}\\
&= 5\frac{3+2+(-2+3)i}{13}\\
&= 5\frac{5+i}{13}\\
&= \frac{25}{13}+\frac{5}{13}i
\end{aligned}$$

– Expression algébrique de d : On a :

$$\begin{aligned}
d &= \frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}\\
&= 5\frac{1+i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}\\
&= 5\frac{(1+i)(3+4i)}{|3-4i|^2}+20\frac{4-3i}{|4+3i|^2}\\
&= 5\frac{1\times 3-1\times 4+(1\times 4+1\times 3)i}{9+16}+20\frac{4-3i}{16+9}\\
&= 5\frac{3-4+(4+3)i}{25}+20\frac{4-3i}{25}\\
&= \frac{-1+7i}{5}+4\frac{4-3i}{5}\\
&= \frac{-1+7i+4(4-3i)}{5}\\
&= \frac{-1+7i+16-12i}{5}\\
&= \frac{15-5i}{5}\\
&= 3-i
\end{aligned}$$

Exercice 2 :
1 : Calculer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le nombre complexe i^n.
2 : Calculer $i^{105}+i^{23}+i^{20}-i^{34}$.

Solution de l'exercice 2 : On a $i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1$.

1 : Soit $n\in\mathbb{N}$.

– Si $n=4k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors $i^n=i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1^k=1$.
– Si $n=4k+1$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors $i^n=i^{4k+1}=\left(i^4\right)^k i=1^k i=i$.
– Si $n=4k+2$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors $i^n=i^{4k+2}=\left(i^4\right)^k i^2=1^k\times(-1)=-1$.
– Si $n=4k+3$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors $i^n=i^{4k+3}=\left(i^4\right)^k i^3=1^k\times(-i)=-i$.

2 :

– On a $105=26\times 4+1$ donc $i^{105}=i$.

- On a $23 = 5 \times 4 + 3$ donc $i^{23} = -i$.
- On a $20 = 5 \times 4$ donc $i^{20} = 1$.
- On a $34 = 8 \times 4 + 2$ donc $i^{34} = -1$.

On déduit que :

$$i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34} = i - i + 1 - 1 = 0$$

Exercice 3 : Donner l'expression algébrique des nombres :

$$a = (1+2i)(2-i), b = \frac{(2+3i)(1-3i)}{2+3i}, c = \frac{i-1}{(i+1)^2} \text{ et } d = \frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$$

Solution de l'exercice 3 :

- Expression algébrique de a : On a :

$$a = (1+2i)(2-i) = 1 \times 2 - 2 \times (-1) + (1 \times (-1) + 2 \times 2)i = 2 + 2 + (-1+4)i = 4 + 3i$$

- Expression algébrique de b : On a :

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(2+3i)(1-3i)}{2+3i} \\
&= \frac{2 \times 1 - 3 \times (-3) + (2 \times (-3) + 3 \times 1)i}{2+3i} \\
&= \frac{2 + 9 + (-6+3)i}{2+3i} \\
&= \frac{11-3i}{2+3i} \\
&= \frac{(11-3i)(2-3i)}{|2+3i|^2} \\
&= \frac{11 \times 2 - (-3) \times (-3) + (11 \times (-3) + (-3) \times 2)i}{4+9} \\
&= \frac{22 - 9 + (-33-6)i}{13} \\
&= \frac{13-39i}{13} \\
&= 1 - 3i
\end{aligned}$$

- Expression algébrique de c : On a :

$$c = \frac{i-1}{(i+1)^2} = \frac{i-1}{1^2 - 1^2 + 2i \times 1 \times 1} = \frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

– Expression algébrique de d : On a :

$$\begin{aligned}
d &= \frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} \\
&= \frac{i-i^6}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{i-\left(i^2\right)^3}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{i-(-1)^3}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{i+1}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{1}{1-i} \\
&= \frac{1+i}{|1-i|^2} \\
&= \frac{1+i}{1^2+1^2} \\
&= \frac{1+i}{2} \\
&= \frac{1}{2}+i\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ avec $(c,d) \neq (0,0)$. Simplifier les expressions suivantes :

$$(a+ib)^2+(a-ib)^2, (a+ib)^4+(a-ib)^4 \text{ et } \frac{a+ib}{c+id}+\frac{a-ib}{c-id}$$

Solution de l'exercice 4 :

– Cas de $(a+ib)^2+(a-ib)^2$:
  – **Méthode 1 :** On a :

$$(a+ib)^2+(a-ib)^2 = \left(a^2-b^2+2iab\right)+\left(a^2-b^2-2iab\right) = 2a^2-2b^2$$

  – **Méthode 2 :** On a :

$$(a+ib)^2+(a-ib)^2 = (a+ib)^2+\overline{(a+ib)^2} = 2\Re e\left((a+ib)^2\right) = 2\Re e\left(a^2-b^2-2iab\right) = 2a^2-2b^2$$

– Cas de $(a+ib)^4+(a-ib)^4$:
  – **Méthode 1 :** On a :

$$(a+ib)^4+(a-ib)^4 = \left(a^4-4ia^3b-6a^2b^2-4iab^3+b^4\right)+\left(a^4+4ia^3b-6a^2b^2+4iab^3+b^4\right) = 2a^4-12a^2b^2+2b^4$$

  – **Méthode 2 :** On a :

$$(a+ib)^4+(a-ib)^4 = (a+ib)^4+\overline{(a+ib)^4} = 2\Re e\left((a+ib)^4\right)$$

  Or :

$$(a+ib)^4 = a^4-4ia^3b-6a^2b^2-4iab^3+b^4 = a^4-6a^2b^2+b^4-4i(a^3b+ab^3)$$

  donc :

$$(a+ib)^4+(a-ib)^4 = 2a^4-12a^2b^2+2b^4$$

– Cas de $\frac{a+ib}{c+id}+\frac{a-ib}{c-id}$:
  – **Méthode 1 :** On a :

$$\begin{aligned}
\frac{a+ib}{c+id}+\frac{a-ib}{c-id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2}+\frac{(a-ib)(c+id)}{|c-id|^2} \\
&= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}+\frac{ac+bd+i(ad-bc)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd+i(bc-ad)+ac+bd+i(ad-bc)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{2ac+2bd}{c^2+d^2}
\end{aligned}$$

– **Méthode 2 :** On a :

$$\frac{a+ib}{c+id}+\frac{a-ib}{c-id}=\frac{a+ib}{c+id}+\overline{\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)}=2\Re e\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)$$

Or :

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2}=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

donc :

$$\frac{a+ib}{c+id}+\frac{a-ib}{c-id}=\frac{2ac+2bd}{c^2+d^2}$$

Exercice 5 :
1 : Montrer que $\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x+yj+zj^2=0\Rightarrow x=y=z$.
2 : Soit $x,y,z\in\mathbb{R}$. Calculer $(x+y+z)(x+yj+zj^2)(x+yj^2+zj)$.
3 : En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Solution de l'exercice 5 : On rappelle que $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.
4 : Soit $x,y,z\in\mathbb{R}$ tels que $x+yj+zj^2=0$. On a $1+j+j^2=0$ donc $j^2=-1-j$ d'où :

$$0=x+yj+zj^2=x+yj+z(-1-j)=x-z+j(y-z)$$

Supposons que $y\neq z$ donc $j=\frac{z-x}{y-z}\in\mathbb{R}$. Absurde car $j\notin\mathbb{R}$ donc $y=z$, or $x-z+j(y-z)=0$ donc $x-z=0$ d'où $x=z$.
On déduit que $x=y=z$.
5 : On a :

$$\begin{aligned}(x+yj+zj^2)(x+yj^2+zj) &= x^2+xyj^2+xzj+xyj+y^2j^3+yzj^2+xzj^2+yzj^4+z^2j^3\\ &= x^2+xyj^2+xzj+xyj+y^2+yzj^2+xzj^2+yzj+z^2 && \text{car } j^3=1 \text{ et } j^4=j^3j=j.\\ &= x^2+y^2+z^2+xy(j+j^2)+xz(j+j^2)+yz(j+j^2)\\ &= x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz && \text{car } j+j^2=-1.\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+yj+zj^2)(x+yj^2+zj) &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\\ &= x^3+xy^2+xz^2-x^2y-x^2z-xyz+yx^2+y^3+yz^2\\ &\quad -xy^2-xyz-y^2z+x^2z+y^2z+z^3-xyz-xz^2-yz^2\\ &= x^3+y^3+z^3-3xyz\end{aligned}$$

6 : D'après la question précédente, $(x+y+z)(x+yj+zj^2)(x+yj^2+zj)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ donc :

$$\begin{aligned}(x^3+y^3+z^3=3xyz) &\iff (x+y+z)(x+yj+zj^2)(x+yj^2+zj)=0\\ &\iff x+y+z=0 \text{ ou } x+yj+zj^2=0 \text{ ou } x+yj^2+zj=0\\ &\iff x+y+z=0 \text{ ou } x=y=z\end{aligned}$$

1.2 Conjugué d'un nombre complexe :

Exercice 6 : Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n\in\mathbb{R}$$

Solution de l'exercice 6 : On a :

$$\frac{19+7i}{9-i}=\frac{(19+7i)(9+i)}{|9-i|^2}=\frac{19\times 9-7-(19+7\times 9)i}{9^2+1^2}=\frac{164-82i}{82}=2-i$$

et :

$$\frac{20+5i}{7+6i}=\frac{(20+5i)(7-6i)}{|7+6i|^2}=\frac{20\times 7+5\times 6+(5\times 7-20\times 6)i}{7^2+6^2}=\frac{170+85i}{85}=2+i$$

donc, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n=(2-i)^n+(2+i)^n=(2-i)^n+(\overline{2+i})^n=(2-i)^n+\overline{(2+i)^n}\in\mathbb{R}$$

Exercice 7 : Déterminer les nombres complexes z tels que

$$z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$$

Solution de l'exercice 7 :

– **Méthode 1 :** Soit $z\in\mathbb{C}^*$ d'expression algébrique $z=x+iy$ donc :

$$z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+iy\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R} &\iff y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\\
&\iff y=0 \text{ ou } \frac{1}{x^2+y^2}=1\\
&\iff y=0 \text{ ou } x^2+y^2=1\\
&\iff \Im m(z)=0 \text{ ou } |z|=1\\
&\iff z\in\mathbb{R}^* \text{ ou } |z|=1
\end{aligned}$$

– **Méthode 2 :** Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R} &\iff \overline{z+\frac{1}{z}}=z+\frac{1}{z}\\
&\iff \bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=z+\frac{1}{z}\\
&\iff \bar{z}-z+\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}=0\\
&\iff (\bar{z}-z)+\frac{z-\bar{z}}{\bar{z}z}=0\\
&\iff (\bar{z}-z)+\frac{z-\bar{z}}{|z|^2}=0\\
&\iff (\bar{z}-z)\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)=0\\
&\iff \bar{z}-z=0 \text{ ou } 1-\frac{1}{|z|^2}=0\\
&\iff \bar{z}=z \text{ ou } \frac{1}{|z|^2}=1\\
&\iff \bar{z}=z \text{ ou } |z|^2=1\\
&\iff z\in\mathbb{R}^* \text{ ou } |z|=1
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}\iff z\in\mathbb{R}^* \text{ ou } |z|=1$$

– **Méthode 3 :** Soit $z\in\mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z=re^{it}$ donc :

$$z+\frac{1}{z}=re^{it}+\frac{1}{r}e^{-it}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos t+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin t$$

d'où :

$$\begin{aligned}
z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R} &\iff \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin t=0\\
&\iff r=\frac{1}{r} \text{ ou } \sin t=0\\
&\iff r=1 \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}, t=k\pi\\
&\iff |z|=1 \text{ ou } \arg z\equiv 0[2\pi] \text{ ou } \arg z\equiv\pi[2\pi]\\
&\iff |z|=1 \text{ ou } z\in\mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z'| = 1$ et $zz' \neq -1$. Montrer que :

$$\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$$

Solution de l'exercice 8 : On a $|z| = |z'| = 1$ donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et $\bar{z'} = \frac{1}{z'}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\bar{z}+\bar{z'}}{1+\bar{z}\bar{z'}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'}$$

donc :

$$\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$$

Exercice 9 :

1 : Trouver les nombres complexes z tels que $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$.

2 : Trouver les nombres complexes z tels que $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 9 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

1 : Il est clair que $z \neq -1$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} &\iff \frac{z-1}{z+1} = \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \\
&\iff \frac{z-1}{z+1} = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \\
&\iff (z-1)(\bar{z}+1) = (\bar{z}-1)(z+1) \\
&\iff z\bar{z}+z-\bar{z}-1 = z\bar{z}+\bar{z}-z-1 \\
&\iff z-\bar{z} = \bar{z}-z \\
&\iff 2z = 2\bar{z} \\
&\iff z = \bar{z} \\
&\iff z \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}
\end{aligned}$$

On déduit que l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2 : Il est clair que $z \neq -1$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} &\iff \frac{z-1}{z+1} = -\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \\
&\iff \frac{z-1}{z+1} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \\
&\iff (z-1)(\bar{z}+1) = -(\bar{z}-1)(z+1) \\
&\iff z\bar{z}+z-\bar{z}-1 = -z\bar{z}-\bar{z}+z+1 \\
&\iff z\bar{z}-1 = z\bar{z}\bar{z}+1 \\
&\iff 2z\bar{z} = 2 \\
&\iff z\bar{z} = 1 \\
&\iff |z| = 1
\end{aligned}$$

On déduit que l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1 privé de -1.

1.3 Module d'un nombre complexe :

Exercice 10 : Identité du parallélogramme :
Montrer que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

Solution de l'exercice 10 : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')\overline{z+z'} + (z-z')\overline{z-z'} \\ &= (z+z')\left(\bar{z}+\overline{z'}\right) + (z-z')\left(\bar{z}-\overline{z'}\right) \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\bar{z} + |z'|^2 + |z|^2 - z\overline{z'} - z'\bar{z} + |z'|^2 \\ &= 2\left(|z|^2+|z'|^2\right) \end{aligned}$$

Exercice 11 : Montrer que :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, |a+b+c|\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

Solution de l'exercice 11 : Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $u = a+ib$, $v = b+ic$ et $w = c+ia$. D'après l'*inégalité triangulaire* :

$$|u+v+w| \leq |u| + |v| + |w|$$

Or :

$$|u+v+w| = |(a+ib)+(b+ic)+(c+ia)| = |(a+b+c)+i(a+b+c)| = |a+b+c||1+i| = |a+b+c|\sqrt{2}$$

et :

$$|u|+|v|+|w| = |a+ib|+|b+ic|+|c+ia| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

donc :

$$|a+b+c|\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

Exercice 12 : Déterminer les nombres complexes z tels que $z^3 = \bar{z}$.

Solution de l'exercice 12 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 = \bar{z}$ donc $\left|z^3\right| = |\bar{z}|$ donc $|z|^3 = |z|$ d'où $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

- Si $|z| = 0$ alors $z = 0$.
- Supposons que $|z| = 1$: On a $z^3 = \bar{z}$ donc $z^4 = z\bar{z} = |z| = 1$ donc z est une racine 4-ième de l'unité d'où $z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = i$ ou $z = -i$.

On remarque que $0, 1, -1, i$ et -1 vérifient bien l'équation $z^3 = \bar{z}$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = \bar{z}$ est $\mathcal{S} = \{0, 1, -1, i, -i\}$.

Exercice 13 : Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a+b+c|^2$$

Solution de l'exercice 13 : Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2 &= (a+b)\overline{a+b}+(b+c)\overline{b+c}+(c+a)\overline{c+a}\\
&= (a+b)(\bar a+\bar b)+(b+c)(\bar b+\bar c)+(c+a)(\bar c+\bar a)\\
&= \left(a\bar a+a\bar b+b\bar a+b\bar b\right)+\left(b\bar b+b\bar c+c\bar b+c\bar c\right)+(c\bar c+c\bar a+a\bar c+a\bar a)\\
&= |a|^2+a\bar b+b\bar a+b\bar b+|b|^2+b\bar c+c\bar b+c\bar c+|c|^2+c\bar a+a\bar c+a\bar a\\
&= |a|^2+|b|^2+|c|^2+a\bar b+b\bar a+b\bar b+b\bar c+c\bar b+c\bar c+c\bar a+a\bar c+a\bar a\\
&= |a|^2+|b|^2+|c|^2+\left(a\bar a+a\bar b+a\bar c\right)+\left(b\bar a+b\bar b+b\bar c\right)+\left(c\bar a+c\bar b+c\bar c\right)\\
&= |a|^2+|b|^2+|c|^2+a\left(\bar a+\bar b+\bar c\right)+b\left(\bar a+\bar b+\bar c\right)+c\left(\bar a+\bar b+\bar c\right)\\
&= |a|^2+|b|^2+|c|^2+(a+b+c)\left(\bar a+\bar b+\bar c\right)\\
&= |a|^2+|b|^2+|c|^2+(a+b+c)\overline{(a+b+c)}\\
&= |a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2
\end{aligned}$$

Exercice 14 : **Inégalité de Hlawka :**
1 : Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |a+b||b+c| \leq |b||a+b+c|+|a||c|$.
2 : En déduire que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |a+b|+|b+c|+|c+a| \leq |a|+|b|+|c|+|a+b+c|$$

Solution de l'exercice 14 :
1 : On a $\forall a, b, c \in \mathbb{C}$:

$$|a+b||b+c|=|(a+b)(b+c)|=|ab+ac+b^2+bc|=|b(a+b+c)+ac|\leq|b(a+b+c)|+|ac|=|b||a+b+c|+|a||c|$$

2 : Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a :

$$(|a+b|+|b+c|+|c+a|)^2=|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2+2|a+b||b+c|+2|b+c||c+a|+2|c+a||a+b|$$

Or, d'après la question précédente, $|a+b||b+c|\leq|b||a+b+c|+|a||c|$, $|b+c||c+a|\leq|c||a+b+c|+|a||b|$ et $|c+a||a+b|\leq|a||a+b+c|+|b||c|$ donc :

$$\begin{aligned}
(|a+b|+|b+c|+|c+a|)^2 &\leq |a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2+2|b||a+b+c|+2|a||c|\\
&\quad +2|c||a+b+c|+2|a||b|+2|a||a+b+c|+2|b||c|\\
&\leq |a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2+2(|a|+|b|+|c|)|a+b+c|+2|a||c|+2|a||b|+2|b||c|
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'exercice 13 de la page 8, :

$$|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2$$

donc :

$$\begin{aligned}
(|a+b|+|b+c|+|c+a|)^2 &\leq |a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2+2|b||a+b+c|\\
&\quad +2|a||c|+2|c||a+b+c|+2|a||b|+2|a||a+b+c|+2|b||c|\\
&= (|a|+|b|+|c|+|a+b+c|)^2
\end{aligned}$$

d'où :

$$|a+b|+|b+c|+|c+a|\leq|a|+|b|+|c|+|a+b+c|$$

2 Équation du second degré :

2.1 Racines carrées d'un nombre complexe :

Exercice 15 : **Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$:**
1 : Déterminer les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ par deux méthodes différentes.
2 : En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Solution de l'exercice 15 :
1 :

- Méthode 01 : Les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ dont $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{8}}$.
- Méthode 02 : Soit z une racine carrée de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ de représentation algébrique de $z = x + iy$.
  On a $z^2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ donc $x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ d'où $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $xy = \frac{\sqrt{2}}{4} \geq 0$.
  De même, on a $z^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $|z^2| = |e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ d'où $x^2 + y^2 = 1$.
  On a :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
  donc :
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$
  Or $xy \geq 0$ donc x et y ont même signe d'où :
$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$
  On déduit que les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2 : On a $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8} \geq 0$ car $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :
$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Exercice 16 : Calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$:

1 : Déterminer les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{6}}$ par deux méthodes différentes.

2 : En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution de l'exercice 16 :

1 :

- Méthode 01 : Les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{6}}$ dont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- Méthode 02 : Soit z une racine carrée de $e^{i\frac{\pi}{6}}$ de représentation algébrique de $z = x + iy$.
  On a $z^2 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ donc $x^2 - y^2 + 2ixy = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ d'où $x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $xy = \frac{1}{4} \geq 0$.
  De même, on a $z^2 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $|z^2| = |e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ d'où $x^2 + y^2 = 1$.
  On a :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
  donc :
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$
  Or $xy \geq 0$ donc x et y ont même signe d'où :
$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

On déduit que les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{6}}$ sont $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

2 : On a $e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}\geq 0$ car $\frac{\pi}{12}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos\frac{\pi}{12} & = & \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{12} & = & \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{array}\right.$$

On remarque que :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2=6+2+2\sqrt{12}=8+4\sqrt{3}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$$

et :

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2=6+2-2\sqrt{12}=8-4\sqrt{3}=4\left(2-\sqrt{3}\right)$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{rcccl}\cos\frac{\pi}{12} & = & \frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}}{4} & = & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12} & = & \frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}}{4} & = & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$$

2.2 Équation du second degré :

Exercice 17 : Résoudre l'équation :

$$z^2-8(1-i)z+63-16i=0$$

Solution de l'exercice 17 : On a :

$$\Delta=(8(1-i))^2-4(63-16i)=64(1-i)^2-4(63-16i)=-128i-252+64i=-252-64i$$

Soit z une racine carrée de $-252-64i$ d'expression algébrique $z=x+iy$.
On a $z^2=-33+56i$ donc $x^2-y^2+2ixy=-252-64i$ d'où $x^2-y^2=-252$ et $xy=-32$.
De même, on a $z^2=-252-64i$ donc $\left|z^2\right|=|-252-64i|=\sqrt{252^2+64^2}=\sqrt{63504+4096}=\sqrt{67600}=260$ d'où $x^2+y^2=65$. On obtient alors le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x^2+y^2 & = & 260\\ x^2-y^2 & = & -252\\ xy & = & -32\end{array}\right.$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x^2+y^2 & = & 260\\ x^2-y^2 & = & -252\end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcccl}x^2 & = & \frac{260-252}{2} & = & 4\\ y^2 & = & \frac{260+252}{2} & = & 256\end{array}\right.$$

D'autre part, on a $xy=-32\leq 0$ donc x et y ont des signes opposés d'où :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2\\ y & = & -16\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl}x & = & -2\\ y & = & 16\end{array}\right.$$

On déduit que les racines carrées de $-252-64i$ sont $2-16i$ et $-2+16i$ donc les solutions de l'équation $z^2-8(1-i)z+63-16i=0$ sont alors :

$$z_1=\frac{8(1-i)+(2-16i)}{2}=\frac{10-24i}{2}=5-12i$$

et :

$$z_2=\frac{8(1-i)-(2-16i)}{2}=\frac{6-8i}{2}=3+4i$$

Exercice 18 : Résoudre l'équation :
$$z^2-(10-i)z+33-19i=0$$

Solution de l'exercice 18 : On a $\Delta=(10-i)^2-4(33-19i)=100-1-2\times 10i-132+76i=-33+56i$.
Soit z une racine carrée de $-33+56i$ d'expression algébrique $z=x+iy$.
On a $z^2=-33+56i$ donc $x^2-y^2+2ixy=-33+56i$ d'où $x^2-y^2=-33$ et $xy=28$.
De même, on a $z^2=-33+56i$ donc $\left|z^2\right|=|-33+56i|=\sqrt{33^2+56^2}=\sqrt{1089+3136}=\sqrt{4225}=65$ d'où $x^2+y^2=65$.
On obtient alors le système d'équations :
$$\left\{\begin{array}{lll} x^2+y^2 & = & 65\\ x^2-y^2 & = & -33\\ xy & = & 28\end{array}\right.$$
On a :
$$\left\{\begin{array}{lll} x^2+y^2 & = & 65\\ x^2-y^2 & = & -33\end{array}\right.$$
donc
$$\left\{\begin{array}{lllll} x^2 & = & \dfrac{65-33}{2} & = & 16\\ y^2 & = & \dfrac{65+33}{2} & = & 49\end{array}\right.$$
D'autre part, on a $xy=28\geq 0$ donc x et y ont même signe d'où :
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 4\\ y & = & 7\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lll} x & = & -4\\ y & = & -7\end{array}\right.$$
On déduit que les racines carrées de $-33+56i$ sont $4+7i$ et $-4-7i$ donc les solutions de l'équation $z^2-(10-i)z+33-19i=0$ sont alors :
$$z_1=\frac{(10-i)+(4+7i)}{2}=\frac{14+6i}{2}=7+3i$$
et :
$$z_2=\frac{(10-i)-(4+7i)}{2}=\frac{6-8i}{2}=3-4i$$

2.3 Somme et produit des racines d'un équation du second degré :

Exercice 19 : Soit $a,b,c\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$ et x,y les racines de l'équation $az^2+bz+c=0$.
1 : Déterminer x^2+y^2, x^3+y^3 et x^4+y^4 en fonction de a,b et c.
2 : On suppose que $c\neq 0$. Vérifier que x et y sont non nuls et déterminer $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ et $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ en fonction de a,b et c.

Solution de l'exercice 19 :
1 : D'après *les relations entre les racines et les coefficients*, on a :
$$\left\{\begin{array}{lll} x+y & = & -\dfrac{b}{a}\\ xy & = & \dfrac{c}{a}\end{array}\right.$$

- Calcul de x^2+y^2 : On a $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ donc :
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$
- Calcul de x^3+y^3 : On a $(x+y)^3=x^3+3x^2y+2xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ donc :
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{abc}{a^3}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$
- Calcul de x^4+y^4 : On a $(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2$ donc :
$$x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2=\frac{b^4}{a^4}-4\frac{c}{a}\frac{b^2-2ac}{a^2}-6\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^4}-4\frac{ab^2c-2a^2c^2}{a^4}-6\frac{a^2c^2}{a^4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

2 : On a $xy = \dfrac{c}{a} \neq 0$ car $c \neq 0$ donc x et y sont non nuls.

– Calcul de $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$: On a :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

– Calcul de $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$: On a :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{x^2y^2} = \frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2-2ac}{c^2}$$

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

3.1 Nombres complexes de module 1 :

Exercice 20 : Calcul de $\cos\frac{2\pi}{5}$:
On pose $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $c = \cos\frac{2\pi}{5}$.
1 : Calculer α^5, puis $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$.
2 : Montrer que $\beta = \alpha + \alpha^4$ est un nombre réel, puis l'exprimer en fonction de c.
3 : Montrer que $\beta^2 + \beta - 1 = 0$.
4 : Donner la valeur de c.

Solution de l'exercice 20 :

1 : On a $\alpha^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{5\frac{2i\pi}{5}} = e^{2i\pi} = 1$ et :

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{\alpha^5 - 1}{\alpha - 1} = 0$$

2 : D'après la question précédente, $1 = \alpha^5 = \alpha^4\alpha$ donc $\alpha^4 = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} = \bar{\alpha}$ car $|\alpha| = \left|e^{\frac{2i\pi}{5}}\right| = 1$ d'où $\beta = \alpha + \alpha^4 = \alpha + \bar{\alpha} = 2\Re e(\alpha) \in \mathbb{R}$.
On a $\beta = 2\Re e(\alpha) = 2\Re e\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2c$ donc $c = \dfrac{\beta}{2}$.

3 : On a :

$$\begin{aligned}
\beta^2 + \beta - 1 &= \left(\alpha + \alpha^4\right)^2 + \alpha + \alpha^4 - 1 \\
&= \alpha^2 + 2\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha + \alpha^4 - 1 \\
&= \alpha^2 + 2 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 - 1 \qquad \text{car } \alpha^5 = 1 \text{ et } \alpha^8 = \alpha^5\alpha^3 = \alpha^3 \\
&= \alpha^2 + 1 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 \\
&= 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0
\end{aligned}$$

4 : On a $\beta^2 + \beta - 1 = 0$ donc β est une solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Or $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ donc les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

donc :

$$\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ et } \beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Or $\beta = 2c = 2\cos\dfrac{2\pi}{5} \geq 0$ car $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ d'où $c = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3.2 Expression de $\sin nx$ et $\cos nx$ en fonction de puissance en $\cos x$ et $\sin x$:

Exercice 21 : Soit $x \in \mathbb{R}$.
Exprimer $\cos 4x + 3\sin 4x - \sin 3x$ en fonction de puissance en $\cos x$ et $\sin x$.

Solution de l'exercice 21 : D'après *la formule de Moivre* :

$$\begin{aligned}\cos 4x + i\sin 4x &= (\cos x + i\sin x)^4 \\ &= \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^2 x + \sin^4 x \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + i\left(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^2 x\right)\end{aligned}$$

donc $\cos 4x = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x$ et $\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^2 x$.
Toujours, d'après *la formule de Moivre* :

$$\begin{aligned}\cos 3x + i\sin 3x &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right)\end{aligned}$$

donc $\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$.
On déduit que :

$$\begin{aligned}\cos 4x + 3\sin 4x - \sin 3x &= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + 3\left(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^2 x\right) - \left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right) \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + 12\cos^3 x\sin x - 12\cos x\sin^2 x - 3\cos^2 x\sin x + \sin^3 x\end{aligned}$$

3.3 Linéarisation :

Exercice 22 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser :

$$\sin^3 2x\cos^2 x$$

Solution de l'exercice 22 : D'après *les formules d'Euler* :

$$\begin{aligned}\sin^3 2x\cos^2 x &= \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{i}{32}\left(\left(e^{2ix}\right)^3 - 3\left(e^{2ix}\right)^2 e^{-2ix} + 3e^{2ix}\left(e^{-2ix}\right)^2 - \left(e^{-2ix}\right)^3\right)\left(e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right) \\ &= \frac{i}{32}\left(e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix}\right)\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) \\ &= \frac{i}{32}\left(e^{8ix} + 2e^{6ix} + e^{4ix} - 3e^{4ix} - 6e^{2ix} - 3 + 3 + 6e^{-2ix} + 3e^{-4ix} - e^{-4ix} - 2e^{-6ix} - e^{-8ix}\right) \\ &= \frac{i}{32}\left(\left(e^{8ix} - e^{-8ix}\right) + 2\left(e^{6ix} - e^{-6ix}\right) - 2\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) - 6\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\right) \\ &= \frac{i}{32}\left(2i\sin(8x) + 4i\sin(6ix) - 4i\sin(4x) - 12i\sin(2x)\right) \\ &= -\frac{1}{16}\sin(8x) - \frac{1}{8}\sin(6ix) + \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{3}{8}\sin(2x)\end{aligned}$$

Exercice 23 :
1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3 x$.
2 : En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin^3(k\theta)$$

Solution de l'exercice 23 :

1 : On a :

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{3ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-e^{-3ix}-3\left(e^{3ix}-e^{-ix}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3x)-6i\sin x\right)\\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin x\end{aligned}$$

2 : Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{2ie^{i\frac{(n+1)x}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2ie^{i\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}}=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{nx}{2}+i\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\Im m\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sin^3(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\sin(3k\theta)+\frac{3}{4}\sin(k\theta)\right)\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\sin(3k\theta)+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)\\ &= -\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{3(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\sin\frac{3n\theta}{2}+\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}\end{aligned}$$

3.4 Sommes de sinus et cosinus :

Exercice 24 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$$

Solution de l'exercice 24 : On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}=\left(e^{i\theta}+1\right)^n=\left(2e^{\frac{i\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n=2^ne^{\frac{in\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}=2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}+2^ni\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=\Re e\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right)=2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Exercice 25 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sin(k\theta)$$

Solution de l'exercice 25 : On a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{ik\theta}=\left(-e^{i\theta}+1\right)^n=\left(-2e^{\frac{i\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right)^n=2^n(-1)^ne^{\frac{in\theta}{2}}\sin^n\frac{\theta}{2}=2^n(-1)^n\cos\frac{n\theta}{2}\sin^n\frac{\theta}{2}+2^n(-1)^ni\sin\frac{n\theta}{2}\sin^n\frac{\theta}{2}$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sin(k\theta)=\Im m\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right)=2^n(-1)^n\sin\frac{n\theta}{2}\sin^n\frac{\theta}{2}$$

3.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Exercice 26 : Calculer le nombre complexe :

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$$

Solution de l'exercice 26 : On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

donc :

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^{10} = e^{\frac{20i\pi}{3}} = e^{6i\pi+\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Remarque : On peut aussi remarquer que :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$$

donc :

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = j^{10} = jj^9 = j$$

car $j^3 = 1$.

Exercice 27 : Calculer le nombre complexe :

$$\frac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}$$

Solution de l'exercice 27 : On a :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}} &= \frac{\left(\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}\left(2\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\right)^5}{\left(2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10}} \\
&= \frac{\left(2^5\exp\left(-i\frac{5\pi}{2}\right)\right)\left(2^5\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{2^{10}\exp\left(i\frac{10\pi}{3}\right)} \\
&= \exp\left(i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{2} - \frac{10\pi}{3}\right)\right) \\
&= \exp\left(i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15\pi}{6} - \frac{20\pi}{6}\right)\right) \\
&= \exp\left(-i\frac{30\pi}{6}\right) \\
&= \exp(-5i\pi) \\
&= \exp(-6i\pi + i\pi) \\
&= \exp(i\pi) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Exercice 28 : Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes :

$$a = 1 - \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } b = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$$

Solution de l'exercice 28 :

- Forme trigonométrique de a : On a :

$$a = 1-\cos\theta + i\sin\theta = 1 - (\cos\theta - i\sin\theta) = 1 - e^{-i\theta} = 2ie^{-i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2} = 2e^{i\frac{\pi-\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$$

Or $2\sin\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque $\theta \in]0, 2\pi[$ donc la forme trigonométrique de a est :

$$a = 2e^{i\frac{\pi-\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$$

– Forme trigonométrique de b : On a :

$$b = \sin\theta + i(1+\cos\theta) = i(-i\sin\theta + 1 + \cos\theta) = i\left(1 + e^{-i\theta}\right) = 2ie^{-i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = 2e^{i\frac{\pi-\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

Or $2\cos\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque $\theta \in]0, 2\pi[$ donc la forme trigonométrique de b est :

$$b = 2e^{i\frac{\pi-\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

Exercice 29 : On considère le nombre complexe :

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$$

1 : Déterminer l'expression algébrique de z.
2 : Déterminer la forme trigonométrique de z.
3 : En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
4 : Calculer $\left(z\sqrt{2}\right)^{2018}$.

Solution de l'exercice 29 :

1 : On a :

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left|\sqrt{3}+i\right|^2} = \frac{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

5 : On a :

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

6 : D'après la question 1 :

$$z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

et, d'après la question 2, :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12}$$

donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

d'où :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

7 : D'après la question 2 :

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

donc :

$$z\sqrt{2} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

d'où :

$$\left(z\sqrt{2}\right)^{2018} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2018} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{12\times168+2} = e^{i\left(168\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

3.6 Arguments d'un nombre complexe :

Exercice 30 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les arguments des nombres complexes :

$$a = (1-i)(6+6i), b = \left(7 - 7i\sqrt{3}\right)(-1-i) \text{ et } c = \frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^8}{(1-i)^6}$$

Solution de l'exercice 30 :

– Argument de a : On a :

$$a = (1-i)(6+6i) = 6(1-i)(1+i) = 6|1+i|^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

donc $\arg(a) \equiv 0[2\pi]$.

– Argument de b : On a :

$$b = \left(7-7i\sqrt{3}\right)(-1-i) = 7\left(1-i\sqrt{3}\right)(-1-i) = 7\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) = 14\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 14\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

donc $\arg(b) \equiv \frac{11\pi}{12}[2\pi]$.

– Argument de c : On a :

$$c = \frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^8}{(1-i)^6} = \frac{\left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^8}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6} = \frac{4^8e^{8i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}^6e^{-6i\frac{\pi}{4}}} = \frac{4^8e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2^3e^{-i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{4^8}{2^3}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{4^8}{2^3}e^{i\frac{17\pi}{6}}$$

donc $\arg(c) \equiv \frac{17\pi}{6}[2\pi] \equiv 2\pi + \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

Exercice 31 : Calculer les arguments des nombres complexes :

$$a = (1+i)^{10}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{30} \text{ et } b = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$$

Solution de l'exercice 31 :

– Argument de a : On a :

$$a = (1+i)^{10}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} = \sqrt{2}^{10}e^{10i\frac{\pi}{4}}2^{30}e^{30i\frac{\pi}{3}} = 2^5e^{i\frac{5\pi}{2}}2^{30}e^{10i\pi} = 2^{35}e^{i\frac{5\pi}{2}}$$

donc $\arg(a) \equiv \frac{5\pi}{2}[2\pi] \equiv 2\pi + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

– Argument de b : On a :

$$b = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(1-i\sqrt{3}\right)^{10} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{10} + \overline{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}} = 2\Re e\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}\right)$$

Or $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10}e^{2i\pi+i\frac{4\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

d'où :

$$b = 2\Re e\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{3} \in \mathbb{R}_-^*$$

car $\frac{4\pi}{3} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
On déduit que $\arg(b) \equiv \pi[2\pi]$.

4 Exponentielle complexe :

Exercice 32 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$e^z = 1+i\sqrt{3}$$

Solution de l'exercice 32 : On a :

$$1+i\sqrt{3}=2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)=\exp\left(\ln 2+i\frac{\pi}{3}\right)$$

donc :

$$e^z=1+i\sqrt{3}\iff e^z=\exp\left(\ln 2+i\frac{\pi}{3}\right)\iff \exists k\in\mathbb{Z}, z=\ln 2+i\frac{\pi}{3}+2ik\pi$$

On déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $e^z=1+i\sqrt{3}$ est :

$$\mathcal{S}=\{\ln 2+i\frac{\pi}{3}+2ik\pi/k\in\mathbb{Z}\}$$

Exercice 33 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$e^z=e^{\bar{z}}$$

Solution de l'exercice 33 : On a :

$$e^z=e^{\bar{z}}\iff \exists k\in\mathbb{Z}, z=\bar{z}+2ik\pi\iff \exists k\in\mathbb{Z}, z-\bar{z}=2ik\pi\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \Im m(z)=k\pi$$

On déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $e^z=e^{\bar{z}}$ est :

$$\mathcal{S}=\{z\in\mathbb{C}/\Im m(z)=k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\}=\{x+2ik\pi/x\in\mathbb{R} \text{ et } k\in\mathbb{Z}\}$$

5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe :

5.1 Racines n-ièmes de l'unité :

Exercice 34 : Déterminer les nombres complexes z tels que :

$$z^{2017}=\bar{z}$$

Solution de l'exercice 34 : Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^{2017}=\bar{z}$ donc $\left|z^{2017}\right|=|\bar{z}|$ donc $|z|^{2017}=|z|$ d'où $|z|=0$ ou $|z|=1$.

- Si $|z|=0$ alors $z=0$.
- Supposons que $|z|=1$: On a $z^{2017}=\bar{z}$ donc $z^{2018}=z\bar{z}=|z|=1$ donc z est une racine d'ordre 2018 de l'unité d'où $z=e^{\frac{2ik\pi}{2018}}=e^{\frac{ik\pi}{1009}}$ avec $k\in\{0,1,2,\dots,2017\}$.

Réciproquement :

- On a $0^{2017}=0=\bar{0}$ donc 0 est une solution de l'équation $z^{2017}=\bar{z}$.
- Soit $k\in\{0,1,2,\dots,2017\}$. On a :

$$\left(e^{\frac{ik\pi}{1009}}\right)^{2017}=\left(e^{\frac{2ik\pi}{2018}}\right)^{2018-1}=e^{2ik\pi-\frac{2ik\pi}{2018}}=e^{-\frac{2ik\pi}{2018}}=\overline{\left(e^{\frac{2ik\pi}{2018}}\right)}$$

  donc $e^{\frac{ik\pi}{1009}}$ est une solution de l'équation $z^{2017}=\bar{z}$.

On déduit que l'ensemble des solution de l'équation $z^{2017}=\bar{z}$ est

$$\mathcal{S}=\{0\}\cup\left\{e^{\frac{ik\pi}{1009}}/k\in\{0,1,2,\dots,2017\}\right\}$$

5.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe :

Exercice 35 : Déterminer les racines 4-ièmes du nombre complexe :

$$\sqrt{3}+i$$

Solution de l'exercice 35 : On a :

$$\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

donc les racines 4-ièmes du nombre complexe $\sqrt{3}+i$ sont :

$$\sqrt[4]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right) \text{ avec } k\in\{0,1,2,3\}$$

d'où les racines 4-ièmes du nombre complexe $\sqrt{3}+i$ sont :

$$\sqrt[4]{2}\exp\left(i\frac{\pi}{24}\right),\ \sqrt[4]{2}\exp\left(i\frac{13\pi}{24}\right),\ \sqrt[4]{2}\exp\left(i\frac{25\pi}{24}\right)\ \text{et}\ \sqrt[4]{2}\exp\left(i\frac{37\pi}{24}\right)$$

Exercice 36 : Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

Solution de l'exercice 36 : On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

donc les solutions de l'équation :

$$z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

sont les racines cubiques de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ d'où :

$$\mathcal{S} = \left\{\exp\left(i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)/k\in\{0,1,2\}\right\} = \left\{e^{i\frac{2\pi}{9}}, e^{i\frac{8\pi}{9}}, e^{i\frac{14\pi}{9}}\right\}$$

6 Nombres complexes et géométrie plane :

6.1 Nombres complexes et géométrie plane :

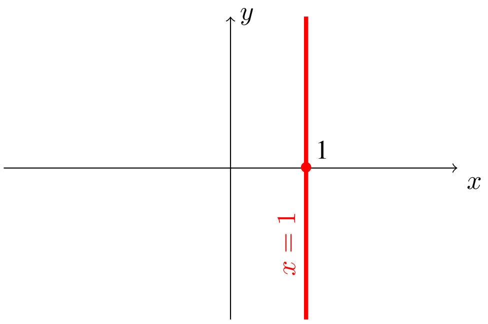
Exercice 37 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :

$$1)\Re e(z)=1 \quad 2)\Im m(z)=2 \quad 3)\Re e(z)=\Im m(z)$$

Solution de l'exercice 37 : Soit $M\in\mathscr{P}$ d'affixe $z\in\mathbb{C}$ d'expression algébrique $z=x+iy$.

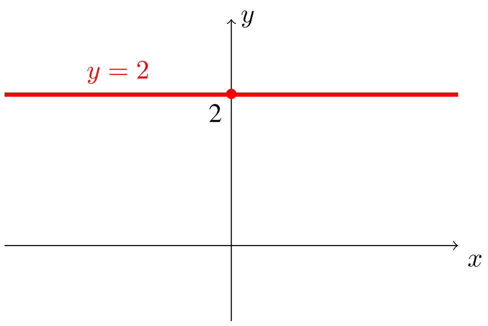
- L'ensemble des z tels que $\Re e(z)=1$: On a :

$$\Re e(z)=1 \iff x=1 \iff M\in D \text{ avec } D \text{ la droite d'équation } x=1.$$



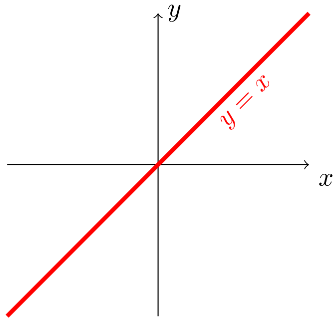
- L'ensemble des z tels que $\Im m(z)=2$: On a :

$$\Im m(z)=2 \iff y=2 \iff M\in D \text{ avec } D \text{ la droite d'équation } y=2.$$



– L'ensemble des z tels que $\Re e(z) = \Im m(z)$: On a :

$$\Re e(z) = \Im m(z) \iff x = y \iff M \in D \text{ avec } D \text{ la droite d'équation } y = x.$$



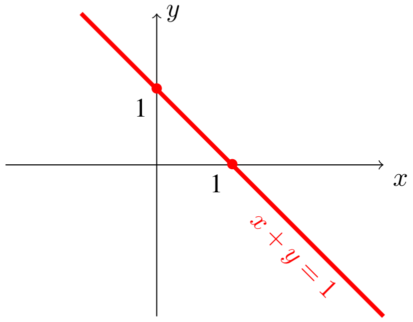
Exercice 38 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :

$$1)\Re e(z) + \Im m(z) = 1 \quad 2)3\Re e(z) - 4\Im m(z) = 2 \quad 3)2\Re e(z) + 3\Im m(z) \leq 6$$

Solution de l'exercice 38 : Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ d'expression algébrique $z = x + iy$.

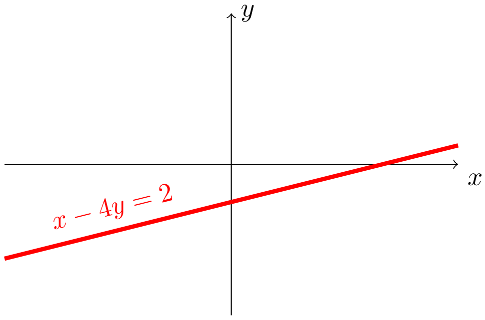
– L'ensemble des z tels que $\Re e(z) + \Im m(z) = 1$: On a :

$$\Re e(z) + \Im m(z) = 1 \iff x + y = 1 \iff M \in D \text{ avec } D \text{ la droite d'équation } x + y = 1.$$



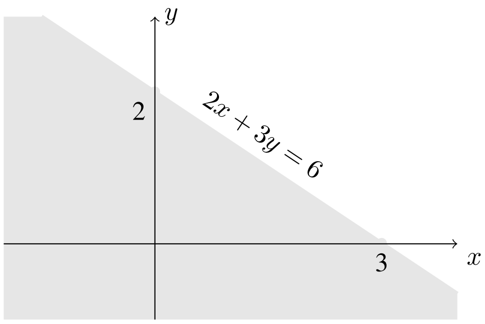
– L'ensemble des z tels que $\Re e(z) - 4\Im m(z) = 2$: On a :

$$\Re e(z) - 4\Im m(z) = 2 \iff x - 4y = 2 \iff M \in D \text{ avec } D \text{ la droite d'équation } x - 4y = 2.$$



– L'ensemble des z tels que $2\Re e(z) + 3\Im m(z) \leq 6$: On a :

$$2\Re e(z) + 3\Im m(z) \leq 6 \iff 2x + 3y \leq 6 \iff M \in P \text{ avec } P \text{ le demi-plan à gauche de la droite d'équation } 2x + 3y = 6.$$



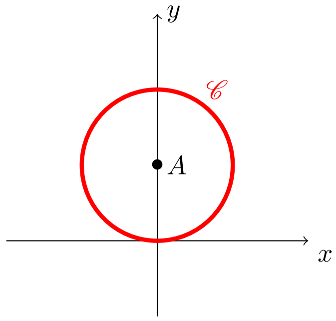
Exercice 39 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :

$$1)|z-i|=1 \quad 2)|z-1+3i|=2$$

Solution de l'exercice 39 : Soit $M\in\mathscr{P}$ d'affixe $z\in\mathbb{C}$.

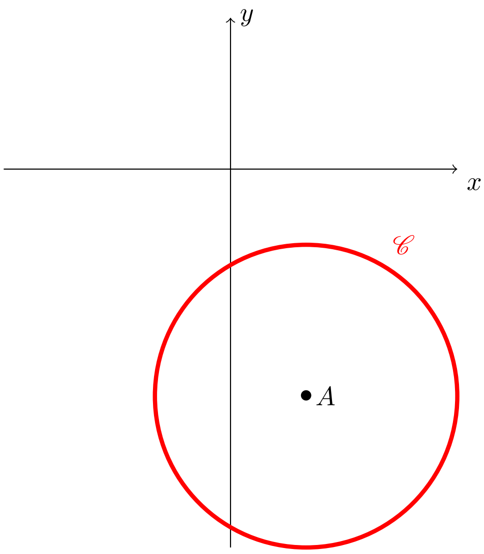
- L'ensemble des z tels que $|z-i|=1$: Soit $A(i)$. On a :

$$|z-i|=1 \iff AM=1 \iff M\in\mathscr{C}(A,1) \text{ avec } \mathscr{C}(A,1) \text{ le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 1.$$



- L'ensemble des z tels que $|z-1+3i|=2$: Soit $A(1-3i)$. On a :

$$|z-1+3i|=2 \iff AM=2 \iff M\in\mathscr{C}(A,2) \text{ avec } \mathscr{C}(A,2) \text{ le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 2.$$



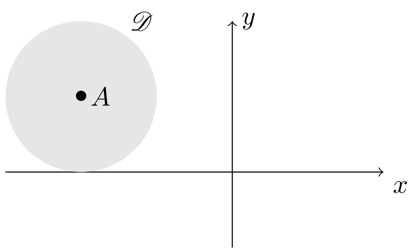
Exercice 40 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :

$$1)|z+2-i|\leq 1 \quad 2)|z-1+i|\leq 2 \quad 3)1\leq|z-1-i|\leq 2$$

Solution de l'exercice 40 : Soit $M\in\mathscr{P}$ d'affixe $z\in\mathbb{C}$.

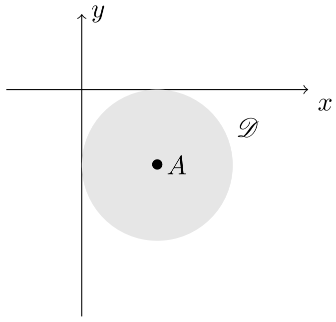
- L'ensemble des z tels que $|z+2-i|\leq 1$: Soit $A(-2+i)$. On a :

$$|z+2-i|\leq 1 \iff AM\leq 1 \iff M\in\mathscr{D}(A,2) \text{ avec } \mathscr{D}(A,2) \text{ le disque de centre } A \text{ et de rayon } 2.$$



– L'ensemble des z tels que $|z-1+i|\leq 2$: Soit $A(1-i)$. On a :

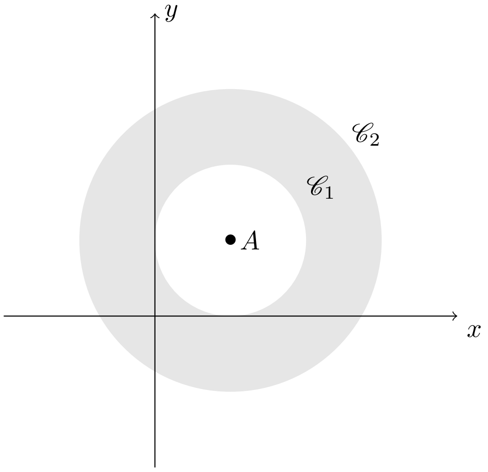
$$|z-1+i|\leq 2 \iff AM\leq 2 \iff M\in\mathscr{D}(A,2) \text{ avec } \mathscr{D}(A,2) \text{ le disque de centre } A \text{ et de rayon } 2.$$



– L'ensemble des z tels que $1\leq|z-1-i|\leq 2$: Soit $A(1+i)$. On a :

$$1\leq|z-1-i|\leq 2 \iff 1\leq AM\leq 2 \iff M\in E$$

avec E l'anneau délimité par les deux cercles excentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centre A et de rayons respectifs 1 et 2.



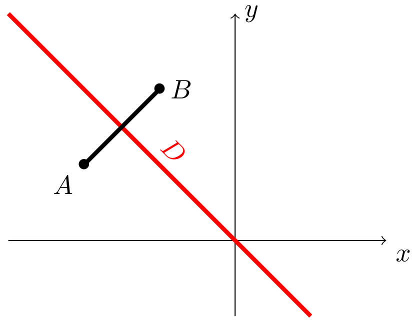
Exercice 41 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :

$$1)|z+2-i|=|z+1-2i| \quad 2)|z+2-3i|\leq|z+1-2i|$$

Solution de l'exercice 41 : Soit $M\in\mathscr{P}$ d'affixe $z\in\mathbb{C}$.

– L'ensemble des z tels que $|z+2-i|=|z+1-2i|$: Soit $A(-2+i)$ et $B(-1+2i)$. On a :

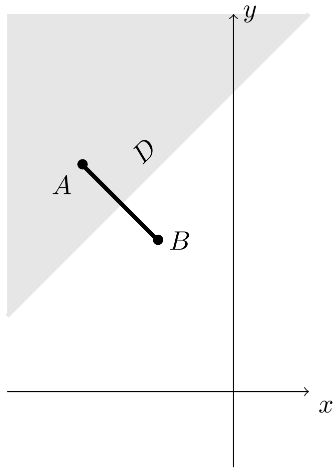
$$|z+2-i|=|z+1-2i| \iff AM=BM \iff M\in D \text{ avec } D \text{ la médiatrice du segment } [AB].$$



– L'ensemble des z tels que $|z+2-3i|\leq|z+1-2i|$: Soit $A(-2+3i)$ et $B(-1+2i)$. On a :

$$|z+2-3i|\leq|z+1-2i| \iff AM\leq BM \iff M\in P$$

avec P le demi-plan qui contient A et délimité par la médiatrice du segment $[AB]$.



Exercice 42 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :

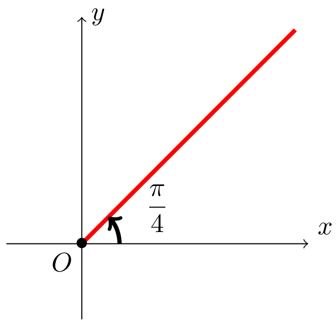
$$1)\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \quad 2)\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad 3) -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

Solution de l'exercice 42 : Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$.

– L'ensemble des z tels que $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$:

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \iff (\vec{i},\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \iff M \in D$$

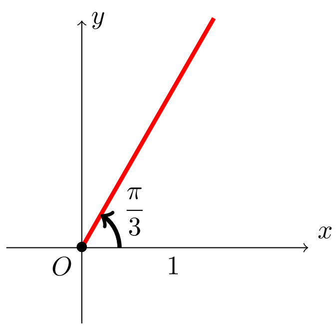
avec D la demi-droite d'origine O privée de O et qui fait un angle $\dfrac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses.



– L'ensemble des z tels que $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$:

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \iff (\vec{i},\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \iff M \in D$$

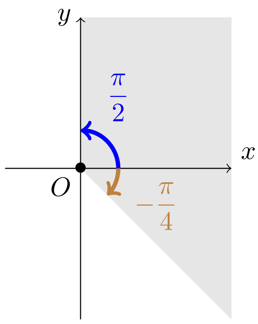
avec D la demi-droite d'origine O privée de O et qui fait un angle $\dfrac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses.



– L'ensemble des z tels que $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$: Soit $\alpha \in [-\pi, \pi]$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha[2\pi]$. On a :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \iff M \in D$$

avec D le secteur angulaire déterminé par les angles $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ privée de O.



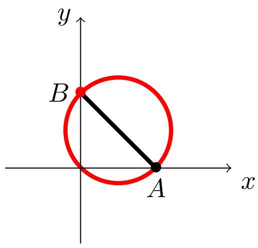
> Exercice 43 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Représenter, dans chaque cas, les ensembles :
>
> $$1)\Re e\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0 \quad 2)\Im m\left(\frac{z-1+i}{z+1-i}\right) = 0$$

Solution de l'exercice 43 : Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

– L'ensemble des z tels que $\Re e\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0$: Soit $A(1)$ et $B(i)$. On a :

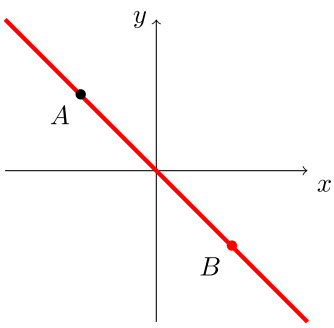
$$\Re e\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0 \iff \frac{z-i}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff (AM) \perp (BM) \text{ et } M \neq A \iff M \in \mathscr{C} \setminus \{A\}$$

avec $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A, B]$.



– L'ensemble des z tels que $\Im m\left(\frac{z-1+i}{z+1-i}\right) = 0$: Soit $A(-1+i)$ et $B(1-i)$. On a :

$$\Im m\left(\frac{z-1+i}{z+1-i}\right) = 0 \iff \frac{z-1+i}{z+1-i} \in \mathbb{R} \iff M \neq A \text{ et les points } A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \iff M \in (AB)\setminus\{A\}$$



6.2 Caractérisation de trois points alignés :

> Exercice 44 : Déterminer les nombres complexes z tels que $1, z$ et z^2 soient alignés.

Solution de l'exercice 44 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $z = 1$ alors $z^2 = z = 1$ donc $1, z$ et z^2 sont alignés.
- Si $z \neq 1$ alors :

$$1, z \text{ et } z^2 \text{ sont alignés} \iff \frac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R} \iff \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} \in \mathbb{R} \iff z+1 \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$$

On déduit que $1, z$ et z^2 sont alignés si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$.

6.3 Caractérisation de quatre points cocycliques :

Exercice 45 : Déterminer les nombres complexes z tels que les points :

$$A(z), B(z^2), C(z^3) \text{ et } D(z^4)$$

soient cocycliques.

Solution de l'exercice 45 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $z = 0$ alors $z = z^2 = z^3 = z^4 = 0$ donc A, B, C et D sont cocycliques.
- Si $z = 1$ alors $z = z^2 = z^3 = z^4 = 1$ donc A, B, C et D sont cocycliques.
- Si $z = 1$ alors $z = z^3 = -1$ et $z^2 = z^4 = 1$ donc A, B, C et D sont cocycliques.
- Sinon, on a :

$$\frac{z^3-z^2}{z^3-z}\frac{z^4-z}{z^4-z^2} = \frac{z^2(z-1)}{z(z^2-1)}\frac{z(z^3-1)}{z^2(z^2-1)} = \frac{z^2(z-1)}{z(z-1)(z+1)}\frac{z(z-1)(z^2+z+1)}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{z^2+z+1}{(z+1)^2} = 1 - \frac{z}{(z+1)^2}$$

donc :

$$A, B, C, D \text{ sont cocycliques ou alignés} \iff \frac{z^3-z^2}{z^3-z}\frac{z^4-z}{z^4-z^2} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 1 - \frac{z}{(z+1)^2} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{z}{(z+1)^2} \in \mathbb{R} \\
&\iff \overline{\left(\frac{z}{(z+1)^2}\right)} = \frac{z}{(z+1)^2} \\
&\iff \frac{\bar{z}}{(\bar{z}+1)^2} = \frac{z}{(z+1)^2} \\
&\iff \bar{z}(z+1)^2 = z(\bar{z}+1)^2 \\
&\iff \bar{z}(z^2+2z+1) = z(\bar{z}^2+2\bar{z}+1) \\
&\iff z|z|^2 + 2|z|^2 + \bar{z} = \bar{z}|z|^2 + 2|z|^2 + z \\
&\iff z|z|^2 + \bar{z} = \bar{z}|z|^2 + z \\
&\iff z|z|^2 + \bar{z} - \bar{z}|z|^2 - z = 0 \\
&\iff (z-\bar{z})|z|^2 + \bar{z} - z = 0 \\
&\iff (z-\bar{z})\left(|z|^2 - 1\right) = 0 \\
&\iff \bar{z} - z = 0 \text{ ou } |z|^2 - 1 = 0 \\
&\iff \bar{z} = z = 0 \text{ ou } |z|^2 = 1 \\
&\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$

Réciproquement :

- Si $z \in \mathbb{R}$ alors $z, z^2, z^3, z^4 \in \mathbb{R}$ donc A, B, C, D sont alignés mais pas cocycliques car A, B et C sont deux à deux distincts puisque $z \notin \{0, 1, -1\}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$ alors $|z| = |z^2| = |z^3| = |z^4| = 1$ donc $z, z^2, z^3, z^4 \in \mathbb{U}$ d'où A, B, C, D sont cocycliques.

On déduit que A, B, C, D sont cocycliques si, et seulement si, $z \in \mathbb{U}$.

6.4 Caractérisation de l'orthogonalité de deux droites :

Exercice 46 : Droite d'Euler : Soit ABC un triangle du plan $\mathscr{P}$, O le centre de son cercle circonscrit et on considère $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On se propose de montrer que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC sont alignés, la droite contenant ces trois points est appelée droit d'Euler.
Soient a, b, c les affixes respectives des points A, B et C et H le point d'affixe $a+b+c$.
1 : Montrer que $\bar{b}c - b\bar{c}$ est imaginaire pur et en déduire que $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ et $\dfrac{b+c}{b-c}$ le sont aussi.
2 : Montrer que $(AH) \perp (BC)$. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3 : Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du triangle ABC.
4 : Montrer que les points H, G et O sont alignés.

Solution de l'exercice 46 : O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc $OA = OB = OC$ d'où $|a| = |b| = |c|$.
1 :
- On a :
$$\overline{\bar{b}c - b\bar{c}} = b\bar{c} - \bar{b}c = -\left(\bar{b}c - b\bar{c}\right)$$
donc $\bar{b}c - b\bar{c}$ est imaginaire pur.
- On a :
$$(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} + c\bar{b} - c\bar{c} = |b|^2 + \bar{b}c - b\bar{c} - |c|^2 = \bar{b}c - b\bar{c}$$
car $|b| = |c|$ donc $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ est imaginaire pur car $\bar{b}c - b\bar{c}$ l'est.
- On a :
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)\overline{b-c}}{|b-c|^2} = \frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{|b-c|^2}$$
donc $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur car $\bar{b}c - b\bar{c}$ l'est et $|b-c|^2$ est réel.

2 : On a :
$$\frac{h-a}{b-c} = \frac{(a+b+c)-a}{b-c} = \frac{b+c}{b-c}$$
donc $\dfrac{h-a}{b-c}$ est imaginaire pur car $\dfrac{b+c}{b-c}$ l'est donc $(AH) \perp (BC)$.
Puisque A, B et C jouent le même rôle donc $(BH) \perp (AC)$ et $(CH) \perp (AB)$ donc $(AH), (BH)$ et (CH) sont les hauteurs du triangle ABC d'où H est l'orthocentre de ABC.
3 : Soit g l'affixe de G. G est le centre de gravité de ABC donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $(a-g)+(b-g)+(c-g) = 0$ donc $a+b+c-3g = 0$ d'où $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.
4 : On a $g = \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{h}{3}$ donc $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ d'où les points H, G et O sont alignés.

Exercice 47 : Déterminer l'affixe de l'orthocentre des points $A(4+2i), B(-2+i)$ et $C(-2i)$.

Solution de l'exercice 47 : Soit H l'orthocentre des points A, B et C et h son affixe.
Les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires donc $\frac{h-a}{b-c}$ est imaginaire pur donc $\frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} = -\frac{h-a}{b-c} = \frac{a-h}{b-c}$ donc $(\bar{h}-\bar{a})(b-c) = (a-h)(\bar{b}-\bar{c})$ d'où $(\bar{b}-\bar{c})h + (b-c)\bar{h} = a(\bar{b}-\bar{c}) + \bar{a}(b-c) = 2\Re e\left(a(\bar{b}-\bar{c})\right)$.
On déduit que $((-2-i)-2i)h + ((-2+i)+2i)\bar{h} = 2\Re e\left((4+2i)((-2-i)-2i)\right) = 2\Re e\left((4+2i)(-2-3i)\right) = 2(-8+6) = -4$ donc $(-2-3i)h + (-2+3i)\bar{h} = -4$.
De même, les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires donc $\frac{h-b}{a-c}$ est imaginaire pur donc $\frac{\bar{h}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} = -\frac{h-b}{a-c} = \frac{b-h}{a-c}$ donc $(\bar{h}-\bar{b})(a-c) = (b-h)(\bar{a}-\bar{c})$ d'où $(\bar{a}-\bar{c})h + (a-c)\bar{h} = b(\bar{a}-\bar{c}) + \bar{b}(a-c) = 2\Re e\left(b(\bar{a}-\bar{c})\right)$.
On déduit que $((4-2i)-2i)h + ((4+2i)+2i)\bar{h} = 2\Re e\left((-2+i)((4-2i)-2i)\right) = 2\Re e\left((-2+i)(4-4i)\right) = 2(-8+4) = -8$ donc $(4-4i)h + (4+4i)\bar{h} = -8$ d'où $(1-i)h + (1+i)\bar{h} = -2$.
On a :
$$\begin{cases} (-2-3i)h + (-2+3i)\bar{h} & = & -4 \\ (1-i)h + (1+i)\bar{h} & = & -2 \end{cases}$$
donc :
$$\begin{cases} (1+i)(-2-3i)h + (1+i)(-2+3i)\bar{h} & = & -4(1+i) \\ (1-i)(-2+3i)h + (1+i)(-2+3i)\bar{h} & = & -2(-2+3i) \end{cases}$$
donc $(1+i)(-2-3i)h - (1-i)(-2+3i)h = -4(1+i) + 2(-2+3i) = -8+2i$ donc $(1-5i)h - (1+5i)h = -8+2i$ donc $-10ih = -8+2i$ d'où $h = -\frac{1}{5} - i\frac{4}{5}$.

Exercice 48 : Soient $a, b, c, z \in \mathbb{C}$ quatre nombres complexes deux à deux distincts.
1 : Montrer que si deux des nombres complexes $\frac{z-a}{b-c}$, $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{a-b}$ sont imaginaires purs alors il en est de même pour le troisième.
2 : Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Solution de l'exercice 48 :
1 : Puisque a, b et c jouent le même rôle, on peut considérer que $\frac{z-a}{b-c}$ et $\frac{z-b}{c-a}$ sont imaginaires purs donc :

$$\overline{\left(\frac{z-a}{b-c}\right)} = -\frac{z-a}{b-c} \text{ et } \overline{\left(\frac{z-b}{c-a}\right)} = -\frac{z-b}{c-a}$$

donc :

$$\begin{cases} \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} &= -\frac{z-a}{b-c} \\ \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}} &= -\frac{z-b}{c-a} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} (\bar{z}-\bar{a})(b-c) &= (a-z)(\bar{b}-\bar{c}) \\ (\bar{z}-\bar{b})(c-a) &= (b-z)(\bar{c}-\bar{a}) \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} (b-c)\bar{z}+(\bar{b}-\bar{c})z &= (b-c)\bar{a}+(\bar{b}-\bar{c})a \\ (c-a)\bar{z}-(\bar{c}-\bar{a})z &= (c-a)\bar{b}+(\bar{c}-\bar{a})b \end{cases}$$

En sommant les deux équation, on obtient :

$$(b-a)\bar{z}+(\bar{b}-\bar{a})z = -c\bar{a}-\bar{c}a+c\bar{b}+\bar{c}b = (\bar{b}-\bar{a})c+(b-a)\bar{c}$$

donc :

$$(b-a)(\bar{z}-\bar{c}) = -(\bar{b}-\bar{a})(z-c)$$

donc

$$\frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}} = -\frac{z-c}{b-a}$$

d'où :

$$\overline{\frac{z-c}{b-a}} = -\frac{z-c}{b-a}$$

On déduit que $\frac{z-c}{b-a}$ est imaginaire pur.
2 : On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé et soit $A(a), B(b), C(c)$ et $M(z)$ deux à deux distincts.
On sait que $\frac{z-a}{b-c}$ est imaginaire pur si, et seulement si, les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.
La question précédente s'interprète géométriquement par :

$$\begin{cases} (AM) & \perp & (BC) \\ (BM) & \perp & (AC) \end{cases} \Rightarrow (CM) \perp (AB)$$

Autrement dit, dans un triangle ABC si (AM) et (BM) sont deux hauteurs de ABC alors (CM) est la troisième hauteur donc les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

6.5 Interprétation géométrique du rapport $\frac{b-a}{c-a}$:

Exercice 49 : On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct et soient les points $A(a), B(b)$ et $C(c)$.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si, $(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)=0$.

Solution de l'exercice 49 : On a $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\pi-\frac{i\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{-\frac{i\pi}{3}} = -e^{-\frac{i\pi}{3}}$ d'où $e^{-\frac{i\pi}{3}} = -j$ et $e^{\frac{i\pi}{3}} = \overline{e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \overline{-j} = -\bar{j} = -j^2$.

– **Méthode 01 :** On a :

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est un triangle équilatéral} &\Longleftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{a-b}{c-b} = e^{-i\frac{\pi}{3}}\\
&\Longleftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = -j^2 \text{ ou } \frac{a-b}{c-b} = -j\\
&\Longleftrightarrow a-b = -(c-b)j^2 \text{ ou } a-b = -(c-b)j\\
&\Longleftrightarrow a-b(1+j^2)+cj^2 = 0 \text{ ou } a-b(1+j)+cj = 0\\
&\Longleftrightarrow a+bj+cj^2 = 0 \text{ ou } a+bj^2+cj = 0 \qquad \text{car } 1+j+j^2=0\\
&\Longleftrightarrow (a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = 0
\end{aligned}$$

– **Méthode 02 :** Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc $\forall z \in \mathbb{C}, r(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a = -zj^2 + a(1+j^2) = -zj^2 - aj$ car $1+j+j^2 = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est un triangle équilatéral} &\Longleftrightarrow r(b) = c \text{ ou } r(c) = b\\
&\Longleftrightarrow c = -bj^2 - aj \text{ ou } b = -cj^2 - aj\\
&\Longleftrightarrow aj+bj^2+c = 0 \text{ ou } aj+b+cj^2 = 0\\
&\Longleftrightarrow aj^3+bj^4+cj^2 = 0 \text{ ou } aj^3+bj^2+cj^4 = 0\\
&\Longleftrightarrow a+bj+cj^2 = 0 \text{ ou } a+bj^2+cj = 0 \qquad \text{car } j^3 = 1\\
&\Longleftrightarrow (a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = 0
\end{aligned}$$

6.6 Interprétation géométrique de l'application $z \mapsto az + b$:

Exercice 50 : Soit $\theta \in [0, \pi[$. Reconnaître la transformation :

$$z' = \frac{e^{i\theta}+1}{2}z + e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Solution de l'exercice 50 : On pose $a = \dfrac{e^{i\theta}+1}{2}$ et $b = e^{i\frac{\theta}{2}}$ donc $z' = az + b$. On a :

$$a = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

donc $|a| = \cos\dfrac{\theta}{2}$ car $\cos\dfrac{\theta}{2} \geq 0$ puisque $\theta \in [0, \pi[$ et $\arg(a) \equiv \dfrac{\theta}{2}[2\pi]$.

– Si $\theta = 0$ alors $a = 1$ donc $z' = z + b$ d'où f est la translation de vecteur b.
– Si $\theta \neq 0$ alors $a \neq 1$ donc f est la similitude d'angle $\dfrac{\theta}{2}$, de rapport $|a| = \cos\dfrac{\theta}{2}$ et de centre :

$$\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{1-\frac{e^{i\theta}+1}{2}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\frac{1-e^{i\theta}}{2}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{i\sin\frac{\theta}{2}} = -\frac{i}{\sin\frac{\theta}{2}}$$