# KRUŽNICA

Jednačina kružnice sa centrom u tački C(p,q) i poluprečnikom r:

$$\boxed{(x-p)^2+(y-q)^2=r^2} \qquad (1)$$

Jednačina kružnice sa centrom u tački C(0,0) i poluprečnikom r (centralna kružnica):

$$\boxed{x^2+y^2=r^2} \qquad (2)$$

Opšti oblik jednačine kružnice: $\boxed{x^2+y^2+dx+ey+f=0}$ (3)

Formule za prelazak iz jednog udrugi oblik:

$$\boxed{p=-\frac{d}{2}, \qquad q=-\frac{e}{2}, \qquad r^2=p^2+q^2-f} \qquad (4)$$

Prava $y=kx+n$ je tangenta kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ ako je:

$$\boxed{r^2\left(1+k^2\right)=(kp-q+n)^2} \qquad (5) \text{ - uslov tangentnosti}$$

Prava $y=kx+n$ je tangenta kružnice $x^2+y^2=r^2$ ako je:

$$\boxed{r^2\left(1+k^2\right)=n^2} \qquad (6) \text{ – uslov tangentnosti}$$

Ako je $M(x_0,y_0)$ neka tačka kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, jednačina tangente iz te tačke je :

$$\boxed{(x-p)(x_0-p)+(y-q)(y_0-q)=r^2} \qquad (7)$$

---

Zadaci:

1. Napisati jednačinu kružnice čiji je centar tačka *C(-3,4)* i koja prolazi kroz koordinatni početak.

<u>Rešenje:</u>

Pošto koordinatni početak *O(0,0)* pripada kružnici, to znači da je *r=OC*, odnosno,

$r=\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$,

pa je jednačina kruga po formuli (1)

$(x+3)^2+(y-4)^2=25$

---

2. Odrediti jednačinu kružnice kojoj je duž AB prečnik, gde je A(2,6) i B(-4,-2).

<u>*Rešenje*</u>:

Ako je AB prečnik kruga, onda se centar kruga *C(p,q)* nalazi na sredini duži AB, odnosno,

$$p=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+(-4)}{2}=-1; \qquad q=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6+(-2)}{2}=2$$

$p=-1;\quad q=2$

Poluprečnik $r$ je rastojanje od centra do jedne krajnje tačke, na primer B; dakle,

$r=\sqrt{(-4+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Prema tome jednačina tražene kružnice glasi:

$(x+1)^2+(y-2)^2=25$

---

3. Odrediti koordinate centra i poluprečnik kruga čija je jednačina $9x^2+9y^2+36x-18y+20=0$.

Rešenje:

Jednačinu ćemo najpre podeliti sa 9, odakle dobijamo $x^2+y^2+4x-2y+\frac{20}{9}=0$

Jednačina kružnice je sada data u opštem obliku. Koordinate centra i poluprečnik određujemo pomoću formula (4)

$p=-\frac{4}{2}=-2 \qquad q=-\frac{-2}{2}=1 \qquad r^2=(-2)^2+1^2-\frac{20}{9}=\frac{25}{9}\Rightarrow r=\frac{5}{3}$

---

4. Napisati jednačinu kruga koji sadrži tačku A(9,-5), a centar mu se nalazi u preseku pravih $2x+y-15=0$ i $x-3y+17=0$.

Rešenje:

Koordinate centra kruga dobijamo rešavanjem sistema

$$\begin{aligned}2x+y&=15\\ \underline{x-3y=-17}&\quad /\cdot(-2)\end{aligned}\qquad \begin{aligned}2x+y&=15\\ \underline{-2x+6y=34}&\end{aligned}\qquad \begin{aligned}7y&=49\\ x-3y&=-17\end{aligned}\qquad \begin{aligned}y&=7\\ x-3\cdot 7&=-17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=7\\ x&=21-17\end{aligned}\qquad \begin{aligned}y&=7\\ x&=4\end{aligned}$$

Dobijamo da je centar kružnice tačka *C(4,7)*.

Poluprečnik kružnice je rastojanje centra od date tačke na kružnici, A(9,-5)

$r=\sqrt{(9-4)^2+(-5-7)^2}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

Prema tome jednačina tražene kružnice glasi: $(x-4)^2+(y-7)^2=169$

---

5. Naći jednačine tangenti kruga konstruisanih iz tačke M(-4,3) na krug $k: x^2+y^2-2x+4y=0$

Rešenje:

Koordinate tačke *M* zadovoljavaju jednačinu prave, odnosno

$3=-4k+n\Rightarrow n=4k+3$

Prvo ćemo iz opšteg oblika jednačine kružnice, pomoću formula (4) odrediti p,q i r:

$p=-\frac{-2}{2}=1 \qquad q=-\frac{4}{2}=-2 \qquad r^2=1^2+(-2)^2-0=5$

Sada sve ovo ubacujemo u uslov tangentnosti (5):

$5\left(1+k^2\right)=(k+2+4k+3)^2$

$5\left(1+k^2\right)=(5k+5)^2$

$5+5k^2=25k^2+50k+25$

$20k^2+50k+20=0 \quad /:10$

$2k^2+5k+2=0$

$k_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}$

$k_1 = -2 \qquad\qquad k_2 = -\frac{1}{2}$

$n_1 = 4 \cdot (-2) + 3 \qquad\qquad n_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3$

$n_1 = -5 \qquad\qquad n_2 = 1$

Pa su jednačine tangenti:

$t_1: \quad y = -2x - 5$ i $t_2: \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$

---

6. Odrediti jednačinu normale kružnice $k: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ u njegovoj tački *M(2,5)*.

<u>Rešenje:</u>

Normala na kružnicu je prava normalna na tangentu kružnice u datoj tački, dakle

$n \perp t \Leftrightarrow k_n = -\frac{1}{k_t}$

Koordinate tačke *M* zadovoljavaju jednačinu prave, odnosno

$5 = 2k + n \Rightarrow n = 5 - 2k$

Prvo ćemo iz opšteg oblika jednačine kružnice, pomoću formula (4) odrediti p,q i r:

$p = -\frac{4}{2} = -2 \qquad q = -\frac{-4}{2} = 2 \qquad r^2 = (-2)^2 + 2^2 + 17 = 25$

Sada sve ovo ubacujemo u uslov tangentnosti (5):

$25(1 + k^2) = (-2k - 2 + 5 - 2k)^2$

$25(1 + k^2) = (3 - 4k)^2$

$25 + 25k^2 = 9 - 24k + 16k^2$

$9k^2 + 24k + 16 = 0$

$k_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18} = -\frac{4}{3}$

$k_t = -\frac{4}{3} \Rightarrow k_n = \frac{3}{4}$

Jednačina normale je:

$n: \quad y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2)$

$n: \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} + 5$

$n: \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$

---

7. Odrediti jednačinu tangenate kruga $k: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ u tački dodira $M(2,1)$.

<u>Rešenje:</u>

Prvo ćemo pomoću formula (4) odrediti p,q i r:

$p = -\frac{-2}{2} = 1 \qquad q = -\frac{-4}{2} = 2 \qquad r^2 = 1^2 + 2^2 - 3 = 2$

Jednačina tangente je:

$t: \quad (x - 1)(2 - 1) + (y - 2)(1 - 2) = 2$

$t: \quad (x - 1) \cdot 1 + (y - 2)(-1) = 2$

$t: \quad x - 1 - y + 2 = 2$

$t: \quad x-y-1=0$

$t: \quad y=x-1$

---

<u>Zadaci za vežbu:</u>

1. Odredi koordinate centra kružnice i poluprečnik kružnice:
   a) $x^2+y^2=4$ *b)* $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ *c)* $x^2+y^2+2x-2y-7=0$
2. Odredi jednačinu kružnice kojoj je duž *AB* prečnik ako je $A(-3,-4)$ $B(10,-1)$
3. Odredi jednačinu kružnice koncentrične kružnici $x^2+(y-2)^2=49$ čiji je poluprečnik 1.
4. Kako glasi jednačina kružnice kojoj je centar $C(4,2)$, a prolazi kroz tačku $A(3,-1)$ ?
5. Naći jednačine tangenti kružnice $k: x^2+y^2=5$ koje su paralelne pravoj $l: 2x-y+1=0$
6. Odredi jednačinu tangente kružnice $x^2+y^2=100$ u njenoj tački $D(-6,-8)$
7. Odredi jednačinu tangente kružnice $(x-2)^2+(y-1)^2=100$ u njezinoj točki $D(x>-1,-5)$
8. Odredi jednačine tangenata povučene iz tačke $T(1,9)$ na kružnicu $(x-1)^2+(y-4)^2=5$
9. Naći jednačine tangenti kruga $k: x^2+y^2=4$ koje su normalne datoj pravoj $p: x+y=2$.
10. Odredi jednačine tangenata kružnice $(x-1)^2+(y-4)^2=50$ paralelnih pravi $y=x-10$