

OSNOVNI POJMOVI MATEMATIČKE LOGIKE

ZADACI

1. Da li su dati iskazi:

a) $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$, b) $x^2 + y^2 \geq 2xy$,

c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$, d) $x^2 = y$.

Rešenje:

a) da, b) da,

c) da, d) ne.

2. Odrediti istinitosnu vrednost sledećih izraza:

a) $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$, b) $x^2 + y^2 \geq 2xy$,

c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$, d) $(1 < 2) \wedge (2 < 5)$.

Rešenje:

a) $\tau\left(\frac{1}{5} > \frac{1}{3}\right) = \perp$,

b) $\tau(x^2 + y^2 \geq 2xy) = T$,

c) $\tau\left(\sqrt{(-3)^2} = -3\right) = \perp$,

d) $\tau((1 < 2) \wedge (2 < 5)) = T \wedge T = T$

3. Dati su iskazi :

$$p \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{10}{3}, \quad q \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{37}{6},$$

$$r \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 7, \quad s \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Odrediti njihovu tačnost i na osnovu toga odrediti istinitosnu vrednost sledećih izkaza:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a)} (p \wedge q) \vee r, & \mathbf{b)} (p \vee q) \vee (r \wedge s), \\ \mathbf{c)} (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s), & \mathbf{d)} (p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s). \end{array}$$

Rešenje:

Kako je $\tau(p) = T$, $\tau(q) = T$, $\tau(r) = \perp$, $\tau(s) = \perp$,

$$\mathbf{a)} \tau((p \wedge q) \vee r) = (T \wedge T) \vee \perp = T \vee \perp = T,$$

$$\mathbf{b)} \tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) = (T \vee T) \vee (\perp \wedge \perp) = T \vee \perp = T$$

$$\mathbf{c)} \tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) = \perp$$

$$\mathbf{d)} \tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) = \perp$$

4. Dati su iskazi:

$$\begin{array}{ll} p \equiv (4x^4 y^3)^3 : (2x^2 y)^5 = 2x^2 y^3, & q \equiv (3x^4 y^2)^2 : (3x^6 y)^2 = 3xy^4, \\ r \equiv (2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2, & s \equiv (x - 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2. \end{array}$$

Odrediti njihovu tačnost i na osnovu toga odrediti istinitosnu vrednost sledećih izkaza:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a)} (p \wedge q) \vee r, & \mathbf{b)} (p \vee q) \vee (r \wedge s), \\ \mathbf{c)} (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s), & \mathbf{d)} (p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s). \end{array}$$

Rešenje:

Kako je $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \perp$, $\tau(r) = T$, $\tau(s) = \perp$,

$$\mathbf{a)} \tau((p \wedge q) \vee r) = T$$

$$\mathbf{b)} \tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) = \perp$$

$$\mathbf{v)} \tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) = T$$

$$\mathbf{g)} \tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) = \perp$$

5. Implikaciju $x = 3 \Rightarrow x < 10$, pročitati na više načina.

Rešenje:

Ako $x = 3$, onda je $x < 10$,

$x = 3$ je pretpostavka posledice $x < 10$.,

$x = 3$ povlači $x < 10$,

iz $x = 3$ sledi $x < 10$,

$x = 3$ je dovoljan uslov za $x < 10$.

$x < 10$ je potreban uslov za $x = 3$.

6. Naći konverziju, inverziju i kontrapoziciju implikacije $x = 3 \Rightarrow x < 10$.

Rešenje:

$q \Rightarrow p$ *konverzija*

$x < 10 \Rightarrow x = 3$.

$\neg p \Rightarrow \neg q$ *inverzija*

$(\neg(x = 3) \Rightarrow \neg(x < 10)) \Leftrightarrow (x \neq 3 \Rightarrow x \geq 10)$

$\neg q \Rightarrow \neg p$ *kontrapozicija*

$(\neg(x < 10) \Rightarrow \neg(x = 3)) \Leftrightarrow (x \geq 10 \Rightarrow x \neq 3)$

7. Ispitati da li su iskazne formule tautologije:

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,

v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p$, g) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$,

d) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

Rešenje:

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\tau(p)$	$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$	$\tau(\neg q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(\neg(p \wedge q))$	$\tau(\neg p \vee \neg q)$	F
T	T	\perp	\perp	T	\perp	\perp	T
T	\perp	\perp	T	\perp	T	T	T
\perp	T	T	\perp	\perp	T	T	T
\perp	\perp	T	T	\perp	T	T	T

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ je tautologija ,

v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p$ je tautologija ,

g) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ je tautologija,

d) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(r)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau((p \vee q) \wedge r)$	$\tau(p \vee r)$	$\tau(q \vee r)$	$\tau((p \vee r) \wedge (q \vee r))$	$\tau(F)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	\perp	T	\perp	T	T	T	\perp
T	\perp	T	T	T	T	T	T	T
T	\perp	\perp	T	\perp	T	\perp	\perp	\perp
\perp	T	T	T	T	T	T	T	T
\perp	T	\perp	T	\perp	\perp	T	\perp	\perp
\perp	\perp	T	\perp	\perp	T	T	T	\perp
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp

Formula nije tautologija.

8. Dokazati da su sledeće formule tautologije

a) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ zakon komutacije

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ De Morganov zakon

c) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ zakon idempotencije

d) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ zakon dvojne negacije

e) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$ zakon distribucije.

9. Metodom svođenja na protivrečnost ispitati da li je sledeća formula tautologija

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p.$$

Rešenje:

Ako posmatrana formula ne bi bila tautologija, moralo bi biti, za neke vrednosti p i q koji se pojavljuju u ovoj formuli da je $\tau(((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p) = \perp$. To se može desiti u slučaju da je $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = T$ i $\tau(p) = \perp$. Na osnovu toga dobijamo da je $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow \perp) = T$, odnosno $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$. Ovaj izraz može biti netačan samo u jednom slučaju, a to je kada je $\tau(p) = T$ i $\tau(q) = \perp$. Kako smo već pretpostavili da je $\tau(p) = \perp$, dolazimo do kontradikcije. Znači ne možemo naći vrednosti izraza p i q za koje je polazna formula netačna. Prema tome polazna formula mora biti tautologija.

10. Metodom svođenja na protivrečnost ispitati da li su sledeće formule tautologija

a) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

b) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$,

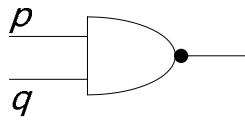
c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow r)$,

d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$,

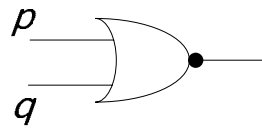
e) $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow (p \vee \neg q)$.

Elementi digitalnih logičkih kola osim standardnih navedenih (*i kolo*, *ili kolo* i *ne kolo*) su i sledeća kola:

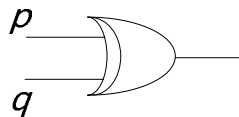
ni kolo, odgovara logičkom izrazu $\neg(p \wedge q)$.



nili kolo, odgovara logičkom izrazu $\neg(p \wedge q)$.



ekskluzivno ili

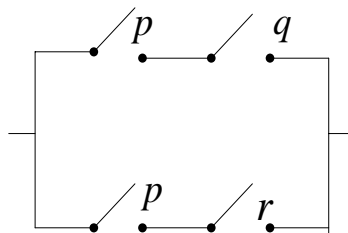


11. Formuli $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ odrediti

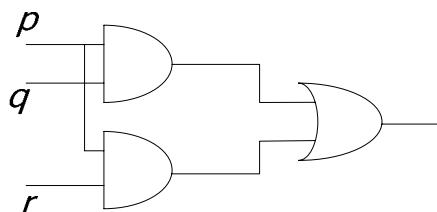
- a) prekidačku šemu,
- b) digitalno logičko kolo.

Rešenje:

a)



b)

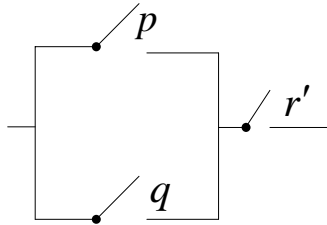


12. Formuli $(p \vee q) \wedge \neg r$ odrediti

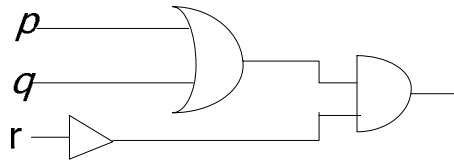
- a) prekidačku šemu,
- b) digitalno logičko kolo.

Rešenje:

a)



b)

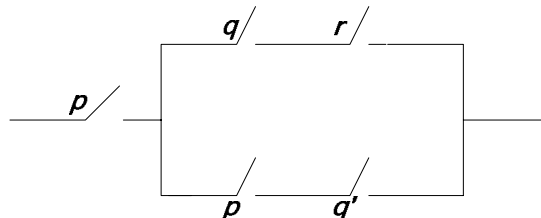


13. Nacrtati prekidačke šeme i digitalna logička kola koja odgovaraju iskaznim formulama:

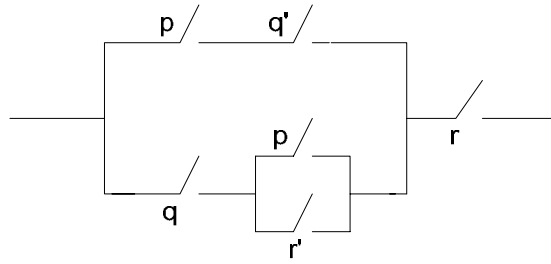
- a) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$,
- b) $((p \wedge q) \vee r) \wedge s$,
- c) $p \wedge (\neg q \vee r)$,
- d) $(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)$,
- e) $(\neg(p \wedge q) \vee (p \vee r)) \vee \neg r$.

14. Napisati logičke formule i nacrtati digitalna logička kola koja odgovaraju sledećim prekidačkim šemama

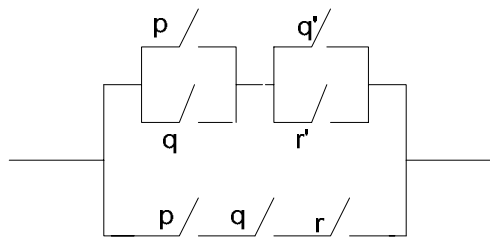
a)



b)

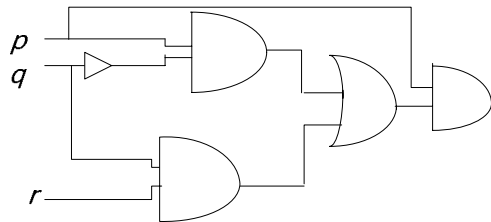


c)



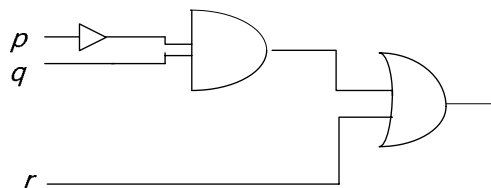
Rešenje:

a) $p \wedge ((q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q))$

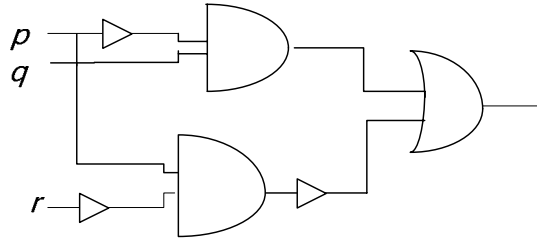


15. Napisati logičke formule i nacrtati prekidačku šemu koja odgovaraju sledećim digitalnim električnim kolima:

a)



b)



Rešenje:

$$(\neg p \wedge q) \vee r$$

