TD - Ensembles et applications - Correction

1 Logique :

1.1 Propositions :

Exercice 1 : Donner la valeur logique et la négation de chacune des propositions suivantes :

1. $((0 \leq 1) \text{ et } (1 = 1))$.
2. $((0 \text{ est impair}) \text{ ou } (1 > 0))$.
3. $((i \notin \mathbb{R}) \Rightarrow (-1 \in \mathbb{N}))$.
4. $\big((\sqrt{2} \leq 0) \Leftrightarrow (\sqrt{2} = 0)\big)$.

Solution de l'exercice 1 :

1. La proposition $((0 \leq 1) \text{ et } (1 = 1))$ est vraie car il s'agit d'une conjonction et les propositions $(0 \leq 1)$ et $(1 = 1)$ sont vraies.
$$\overline{(0 \leq 1) \text{ et } (1 = 1)} \iff ((0 > 1) \text{ ou } (1 \neq 1))$$
2. La proposition $((0 \text{ est impair}) \text{ ou } (1 > 0))$ est vraie car il s'agit d'une disjonction et la proposition $(1 > 0)$ est vraie.
$$\overline{(0 \text{ est impair}) \text{ ou } (1 > 0)} \iff ((0 \text{ est pair}) \text{ et } (1 \leq 0))$$
3. La proposition $((i \notin \mathbb{R}) \Rightarrow (-1 \in \mathbb{N}))$ est fausse car il s'agit d'une implication, la proposition $(i \notin \mathbb{R})$ est vraie et la proposition $(-1 \in \mathbb{N})$ est fausse.
$$\overline{(i \notin \mathbb{R}) \Rightarrow (-1 \in \mathbb{N})} \iff ((i \notin \mathbb{R}) \text{ et } (-1 \notin \mathbb{N}))$$
4. La proposition $\big((\sqrt{2} \leq 0) \Leftrightarrow (\sqrt{2} = 0)\big)$ est vraie car il s'agit d'une équivalence et les propositions $(\sqrt{2} \leq 0)$ et $(\sqrt{2} = 0)$ sont vraies.
$$\begin{aligned}\overline{(\sqrt{2} \leq 0) \Leftrightarrow (\sqrt{2} = 0)} &\iff \overline{\big[(\sqrt{2} \leq 0) \Rightarrow (\sqrt{2} = 0)\big] \text{ et } \big[(\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (\sqrt{2} \leq 0)\big]} \\ &\iff \overline{(\sqrt{2} \leq 0) \Rightarrow (\sqrt{2} = 0)} \text{ ou } \overline{(\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (\sqrt{2} \leq 0)} \\ &\iff \big[(\sqrt{2} \leq 0) \text{ et } (\sqrt{2} \neq 0)\big] \text{ ou } \big[(\sqrt{2} = 0) \text{ et } (\sqrt{2} > 0)\big]\end{aligned}$$

Exercice 2 : Écrire une fonction *Python* de paramètre un couple (P, Q) de propositions qui retourne la valeur logique de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Solution de l'exercice 2 : Soient P et Q deux propositions :

- **Méthode 01 :** On sait que $P \Rightarrow Q$ est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse d'où le programme :
```
def Implication(P, Q):
    test = True
    if P and not(Q):
        test = False
    return(test)
```
- **Méthode 02 :** On sait que $\overline{P \Rightarrow Q} \iff P \text{ et } \bar{Q}$ donc $P \Rightarrow Q \iff \bar{P} \text{ ou } Q$ d'où le programme :
```
def Implication(P,Q):
    return(not(P) or Q)
```

Exemples :

- Valeur logique de la proposition $(1 = 0) \Rightarrow (2 = 1)$:
```
In [1]: Implication(1 == 0, 2 == 1)
Out[1]: True
```
- Valeur logique de la proposition $(0 = 0) \Rightarrow (2 = 1)$:
```
In [2]: Implication(0 == 0, 2 == 1)
Out[2]: False
```
- Valeur logique de la proposition $(0 \geq 0) \Rightarrow (0 \leq 0)$:
```
In [3]: Implication(1 >= 1, 0 <= 0)
Out[3]: True
```

– Valeur logique de la proposition $(1 \neq 1) \Rightarrow (0 = 0)$:

```
In [4]: Implication(1 != 1, 0 == 0)
Out[4]: True
```

Exercice 3 : Soit P, Q deux propositions. Montrer que :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$$

Solution de l'exercice 3 :

– Méthode 01 :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P$ ou Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On déduit que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\bar{P}$ ou Q ont mêmes valeurs logiques d'où l'équivalence.

– Méthode 02 : On a :
  – $P \Rightarrow Q$ est la proposition fausse si, et seulement si, P et vraie et Q est fausse.
  – $\bar{P}$ ou Q est la proposition fausse si, et seulement si, $\bar{P}$ est fausse et Q est fausse si, et seulement si, P est vraie et Q est fausse.

  On déduit que $(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$.

– Méthode 03 : On a :

$$\overline{P \Rightarrow Q} \iff (P \text{ et } \bar{Q})$$

donc :

$$\overline{\overline{P \Rightarrow Q}} \iff \overline{P \text{ et } \bar{Q}} \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$$

d'où :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$$

Exercice 4 : **Non associativité de l'implication :**
Soit P, Q et R trois propositions. Comparer les deux propositions :

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \text{ et } (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

Solution de l'exercice 4 : On a :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

donc les propositions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ne sont pas équivalentes car elles n'ont pas les mêmes valeurs logiques. En particulier, l'implication n'est pas associative.

Exercice 5 : Soit P une proposition. Montrer que la proposition :

$$P \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \bar{P}}$$

est vraie.

Solution de l'exercice 5 : On a :

P	$\bar{P}$	$P \Rightarrow \bar{P}$	$\overline{P \Rightarrow \bar{P}}$	$P \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \bar{P}}$
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V

donc la proposition $P \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \overline{P}}$ est vraie.

Exercice 6 : Soient P, Q et R trois propositions.
1 : Montrer que la proposition $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((R \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q))$ est vraie.
2 : Proposer une démonstration sous *Python* de la question précédente.

Solution de l'exercice 6 :

1 :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$R \Rightarrow P$	$R \Rightarrow Q$	$(R \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((R \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

On déduit que les propositions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((R \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q))$ est vraie.
2 : On va utiliser la fonction *Implication* (voir l'exercice 1).

```
In [1]: for P in {True, False}:
   ...:         for Q in {True, False}:
   ...:             for R in {True, False}:
   ...:                 A = Implication(P, Q)
   ...:                 B = Implication(R, P)
   ...:                 C = Implication(R, Q)
   ...:                 B = Implication(B, C)
   ...:                 A = Implication(A, B)
   ...:                 if not(A):
   ...:                     print('La proposition est fausse.')
   ...:                     break
   ...:             if not(A):
   ...:                 break
   ...:         if not(A):
   ...:             break
   ...: if A:
   ...:     print('la proposition est vraie')
   ...:
La proposition est vraie
```

ou encore, avec une seule boucle for à l'aide de la commande *product* du module *itertools* :

```
In [2]: from itertools import product
   ...: for P, Q, R in product({True, False}, repeat = 3):
   ...:         A = Implication(P, Q)
   ...:         B = Implication(R, P)
   ...:         C = Implication(R, Q)
   ...:         B = Implication(B, C)
   ...:         A = Implication(A, B)
   ...:         if not(A):
   ...:             print('La proposition est fausse.')
   ...:             break
   ...: if A:
   ...:     print('la proposition est vraie')
   ...:
la proposition est vraie
```

1.2 Quantificateurs :

Exercice 7 : Donner la valeur logique et la négation de chacune des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 < 0$.
2. $\exists n \in \mathbb{Z}, 2n^2 - n - 1 = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 1) \Rightarrow (x^2 < 1)$.
4. $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m < n$.
5. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m$.

Solution de l'exercice 7 :

– La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 < 0$ est fausse. En effet, $1 \in \mathbb{R}$ et on a $1^2 + 1 - 1 = 1 \geq 0$.

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 < 0} \iff \left(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 \geq 0\right)$$

– La proposition $\exists n \in \mathbb{Z}, 2n^2 - n - 1 = 0$ est vraie. En effet, $1 \in \mathbb{Z}$ et on a $2 \times 1^2 - 1 - 1 = 0$.

$$\overline{\exists n \in \mathbb{Z}, 2n^2 - n - 1 = 0} \iff \left(\forall n \in \mathbb{Z}, 2n^2 - n - 1 \neq 0\right)$$

– La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 1) \Rightarrow (x^2 < 1)$ est fausse. En effet, $-2 < 1$ et $(-2)^2 = 4 \geq 1$.

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R}, (x < 1) \Rightarrow (x^2 < 1)} \iff \left(\exists x \in \mathbb{R}, (x < 1) \text{ et } (x^2 \geq 1)\right)$$

– Soit $m \in \mathbb{N}$ donc pour $n = m + 1$ on a $m < n$. On déduit que la proposition $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m < n$ est vraie.

$$\overline{\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m < n} \iff (\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geq n)$$

– Si $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n < m$ alors l'ensemble $\mathbb{N}$ sera majoré. Absurde donc la proposition $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m$ est fausse.

$$\overline{\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m} \iff (\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m)$$

2 Raisonnements :

2.1 Raisonnement directe :

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Montrer que $f = 0 \iff f$ est à la fois paire et impaire.

Solution de l'exercice 8 :

$\Rightarrow$) On a $f = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = 0 = f(x) = -f(x)$ d'où f est à la fois paire et impaire.

$\Leftarrow$) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a f paire donc $f(x) = f(-(-x)) = f(-x)$. D'autre part, f est impaire donc $f(-x) = -f(x)$ donc $f(x) = -f(x)$ d'où $f(x) = 0$.
On déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ donc $f = 0$.

2.2 Raisonnement par contraposée :

Exercice 9 : Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$.

Solution de l'exercice 9 : On va procéder par contraposée, On va montrer que $(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| \geq \varepsilon)$.
Supposons que $x \neq 0$ donc, pour $\varepsilon = |x|$, on a $\varepsilon > 0$ et $|x| \geq \varepsilon$.

Exercice 10 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Montrer, par contraposée, que si $x + y$ n'est pas entier alors l'un des deux réels x et y n'est pas entier.

Solution de l'exercice 10 : Si x et y et sont des entiers alors $x + y$ est un entier donc, *par contraposée*, si $x + y \notin \mathbb{N}$ alors l'un des deux réels x et y n'est pas entier.

2.3 Raisonnement par l'absurde :

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n \in [0,1]$ tels que $0 \leq x_0 \leq \dots \leq x_n \leq 1$.
Montrer que $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 11 : Supposons que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k - x_{k-1} > \frac{1}{n}$ donc $(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$. Absurde, car $(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) = x_n - x_0 \leq 1 - 0 = 1$.
On déduit que $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_k - x_{k+1} \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $x_1 + \dots + x_n = 1$ alors $\exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq \dfrac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 12 : Supposons que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i > \dfrac{1}{n}$ donc :

$$x_1 + \dots + x_n > \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$$

Absurde car $x_1 + \dots + x_n = 1$ donc $\exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq \dfrac{1}{n}$.

2.4 Raisonnement par séparation des cas :

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ l'est.

Solution de l'exercice 13 : n n'est pas divisible par 3 donc il est de la forme $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = (3k+1-1)(3k+1+1) = 3k(3k+2)$ donc $n^2 - 1$ est divisible par 3.
- Si $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = (3k+2-1)(3k+2+1) = (3k+1)(3k+3) = 3(3k+1)(k+1)$ donc $n^2 - 1$ est divisible par 3.

On déduit que si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ l'est.

2.5 Raisonnement par analyse-synthèse :

Exercice 14 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

Solution de l'exercice 14 : On va procéder par analyse-synthèse :
- Analyse : On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ donc, en appliquant la relation pour x et $1-x$,

$$\begin{cases} f(x) + xf(1-x) & = & 1 + x \\ f(1-x) + (1-x)f(x) & = & 2 - x \end{cases}$$

donc, en multipliant la deuxième équation par x,

$$\begin{cases} f(x) + xf(1-x) & = & 1 + x \\ xf(1-x) + (x - x^2)f(x) & = & 2x - x^2 \end{cases}$$

donc, par soustraction des deux équations, $f(x) - (x - x^2)f(x) = 1 - x + x^2$ d'où $(1 - x + x^2)f(x) = (1 - x + x^2)$.
Or $1 - x + x^2 \neq 0$ car le discriminant de l'équation $t^2 - t + 1 = 0$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc $f(x) = 1$.
On déduit que s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$ alors forcément $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$.
- Synthèse : On considère la fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$ d'où, par analyse-synthèse, la fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ est la seule fonction qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

Exercice 15 : Déterminer les réels x tels que :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

Solution de l'exercice 15 : On va procéder par analyse-synthèse :

- **Analyse :** On suppose qu'il existe un réel x tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$ donc $x(x-3) = 3x-5$ donc $x^2 - 3x = 3x - 5$ donc $x^2 - 6x + 5 = 0$ donc $(x-1)(x-5) = 0$ d'où $x = 1$ ou $x = 5$.
  On déduit que les seules solutions possibles sont 1 et 5.
- **Synthèse :** on remplace successivement x par 1 et 5 :
  - Pour $x = 5$ on a $\sqrt{x(x-3)} - \sqrt{3x-5} = \sqrt{5(5-3)} - \sqrt{3\times 5 - 10} = \sqrt{10} - \sqrt{10} = 0$ donc 5 est une solution de l'équation.
  - Pour $x = 1$ on a $x(x-3) = 1(1-3) = -2 < 0$ donc l'équation $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{3x-10}$ n'a pas de sens d'où 1 n'est pas une solution de l'équation.

On déduit, par par *analyse-synthèse*, que 5 est le seul réel x tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

2.6 Raisonnement par récurrence simple :

Exercice 16 : Soit $x > -1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Solution de l'exercice 16 : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0x$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.
Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \text{ car } nx^2 \geq 0$$

On déduit que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ donc la relation est vraie pour $n+1$ d'où, d'après *le principe de récurrence*, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 17 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1\times 5 + 2\times 5^2 + \cdots + n5^n = \frac{(4n-1)5^{n+1}+5}{16}$$

Solution de l'exercice 17 : On va procéder par récurrence sur n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $\frac{(4\times 1-1)5^{1+1}+5}{16} = \frac{3\times 25+5}{16} = \frac{80}{16} = 5 = 1\times 5$ donc la relation est vraie pour $n = 1$.
Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$1\times 5 + 2\times 5^2 + \cdots + n5^n = \frac{(4n-1)5^{n+1}+5}{16}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
1\times 5 + 2\times 5^2 + \cdots + (n+1)5^{n+1} &= \left(1\times 5 + 2\times 5^2 + \cdots + n5^n\right) + (n+1)5^{n+1} \\
&= \frac{(4n-1)5^{n+1}+5}{16} + (n+1)5^{n+1} \\
&= \frac{(4n-1)5^{n+1}+5+16(n+1)5^{n+1}}{16} \\
&= \frac{(4n-1+16(n+1))5^{n+1}+5}{16} \\
&= \frac{(20n+15)5^{n+1}+5}{16} \\
&= \frac{(4n+3)5^{n+2}+5}{16} \\
&= \frac{(4(n+1)-1)5^{n+2}+5}{16}
\end{aligned}$$

On déduit que la relation est vraie pour $n+1$ donc, d'après *le principe de récurrence* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1\times 5 + 2\times 5^2 + \cdots + n5^n = \frac{(4n-1)5^{n+1}+5}{16}$$

2.7 Raisonnement par récurrence forte :

Exercice 18 :
1 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1)$.
2 : Montrer que cette écriture est unique.
3 : Construire une fonction *Python* de paramètre $n \in \mathbb{N}$ qui retourne le couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.

Solution de l'exercice 18 :
1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $1 = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ donc la relation est vraie pour $n = 1$.
On suppose que la relation est vraie $\forall k \in \{1, \dots, n\}$.

- Si $n+1$ est impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k+1$ donc $n+1 = 2^0 \times (2k+1)$ d'où la relation est vraie pour $n+1$.
- Si $n+1$ est pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$. On a $k = \frac{n+1}{2} \leq \frac{n+n}{2} = \frac{2n}{2} = n$ car $1 \leq n$ donc $k \in \{0, \dots, n\}$ d'où, par hypothèse de récurrence, $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^p(2q+1)$.
  On déduit que $n+1 = 2k = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1)$ donc la relation est vraie pour $n+1$.

On déduit que la relation est vraie pour $n+1$ donc, d'après *le principe de récurrence*, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1)$.
2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1) = 2^r(2s+1)$.
On suppose que $p \neq r$ donc $p < r$ ou $r < p$, or p et r jouent le même rôle donc on peut considérer que $p < r$ donc $2q+1 = 2^{r-p}(2s+1)$ d'où $2q+1$ est pair. Absurde, car $2q+1$ est impair donc $p = r$.
On a $2q+1 = 2^{r-p}(2s+1)$ donc $2q+1 = 2^{p-p}(2s+1) = 2^0(2s+1) = 2s+1$ donc $2q = 2s$ d'où $q = s$.
On déduit que $p = r$ et $q = s$ d'où l'unicité.
3 : Fonction *Python* de paramètre $n \in \mathbb{N}$ qui retourne le couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$:

```
def f(n):
    p = 0
    while n % 2 == 0:
        p = p + 1
        n = n // 2
    return(p, (n - 1)//2)
```

Exemples :

```
In [1]: f(1)
Out[1]: (0, 0)

In [2]: f(2)
Out[2]: (1, 0)

In [3]: f(3)
Out[3]: (0, 1)

In [4]: f(10)
Out[4]: (1, 2)

In [5]: f(100)
Out[5]: (2, 12)
```

Exercice 19 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par :

$$x_1 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution de l'exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $x_1 = x$ donc $x_n = x$ pour $n = 1$.
- $x_2 = \dfrac{x_1}{1} = x_1 = x$ donc $x_n = x$ pour $n = 2$.
- $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{x+x}{2} = x$ donc $x_n = x$ pour $n = 3$.

On suppose que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = k$ donc :

$$x_{n+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x + \cdots + x}{n} = \frac{nx}{n} = x$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$.
On déduit, d'après *le principe de récurrence*, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n$.

3 Ensembles :

3.1 Union et intersection :

Exercice 20 : Soient E un ensemble et $A, B, C \subset E$. Montrer que :

$$\begin{cases} A \cap C &= B \cap C \\ A \cup C &= B \cup C \end{cases} \Rightarrow A = B$$

Solution de l'exercice 20 :

- **Méthode 01 :** Soit $a \in A$.
  - Si $a \in C$ alors $a \in A \cap C$, or $A \cap C \subset B \cap C$ donc $a \in B \cap C$ d'où $a \in B$.
  - Si $a \notin C$ alors $a \in A \cup C$, or $A \cup C \subset B \cup C$ donc $a \in B \cup C$ d'où $a \in B$ car $a \notin C$.

  On déduit que dans tous les cas $a \in B$ donc $A \subset B$. De même, on montre que $B \subset A$ donc $A = B$.
- **Méthode 02 :** On a : $A \cap C \subset A$ donc $A \cup (A \cap C) = A$, or $A \cap C = B \cap C$ donc $A = A \cup (B \cap C)$ d'où $A = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  D'autre part, $A \cup C = B \cup C$ donc $A = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ d'où $A = B \cup (B \cap C) = B$ car $B \cap C \subset B$.
- **Méthode 03 :** On a :
  $$\begin{cases} A \cap C &= B \cap C \\ A \cup C &= B \cup C \end{cases}$$
  donc :
  $$\begin{cases} \mathbb{1}_{A \cap C} &= \mathbb{1}_{B \cap C} \\ \mathbb{1}_{A \cup C} &= \mathbb{1}_{B \cup C} \end{cases}$$
  donc :
  $$\begin{cases} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C &= \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\ \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C &= \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \end{cases}$$
  En simplifiant par $\mathbb{1}_C$ et en sommant les deux équations, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ donc $A = B$.

Exercice 21 : Soient E un ensemble et $A, B, C \subset E$. Montrer que :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Solution de l'exercice 21 : On a :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= [(A \cup B) \cap (B \cup C)] \cap (C \cup A) \\ &= [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) \\ &= [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)] \\ &= [(B \cap C) \cup (B \cap A)] \cup (A \cap C) \\ &= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{aligned}$$

3.2 Complémentaire et différence :

Exercice 22 : Soient E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que :

$$A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$$

Solution de l'exercice 22 :

- **Méthode 01 :** On rappelle que $\forall X, Y \subset E, X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$.
  $\Rightarrow$) On a $A \setminus B = A$ donc $A \cap B = (A \setminus B) \cap B = \emptyset$ d'où $B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = B$.
  $\Leftarrow$) A et B jouent le même rôle donc $B \setminus A = B \Rightarrow A \setminus B = A$.

– **Méthode 01 :** On a :

$$\begin{array}{rcl} A\setminus B=A & \iff & \mathbb{1}_{A\setminus B}=\mathbb{1}_A \\ & \iff & \mathbb{1}_A-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_A \\ & \iff & \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=0 \\ & \iff & \mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_B \\ & \iff & \mathbb{1}_{B\setminus A}=\mathbb{1}_B \\ & \iff & B\setminus A=B \end{array}$$

Exercice 23 : Différence symétrique :
Soient E un ensemble. On appelle différence symétrique de deux parties A et B de E l'ensemble noté $A\Delta B$ et défini par $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
1 : Montrer que $\forall A,B\subset E, A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
2 : Montrer que $\forall A,B\subset E, \mathbb{1}_{A\Delta B}=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2$.
3 : Montrer que $\forall A,B,C\subset E, (A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.
4 : Montrer que $\forall A,B,C\subset E, A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Solution de l'exercice 23 :
1 : Soient $\forall A,B\subset E$ donc :

$$\begin{array}{rcl} A\Delta B & = & (A\setminus B)\cup(B\setminus A) \\ & = & (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}) \\ & = & (A\cup B)\cap(A\cup\bar{A})\cap(\bar{B}\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}) \\ & = & (A\cup B)\cap E\cap E\cap\overline{A\cap B} \\ & = & (A\cup B)\cap\overline{A\cap B} \\ & = & (A\cup B)\setminus(A\cap B) \end{array}$$

2 : Soient $\forall A,B\subset E$. On a $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} & \\ & = & \mathbb{1}_{A\setminus B}+\mathbb{1}_{B\setminus A} & \text{car } (A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset \\ & = & \mathbb{1}_A-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A & \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B & \\ & = & \mathbb{1}_A^2+\mathbb{1}_B^2-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B & \\ & = & (\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2 & \end{array}$$

3 : Soient $A,B,C\subset E$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} & = & \mathbb{1}_{A\Delta B}+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} & = & \mathbb{1}_{C\Delta(A\Delta B)} \\ & = & \mathbb{1}_C+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A-2\mathbb{1}_C\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_C\mathbb{1}_A-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A+2\mathbb{1}_C\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \end{array}$$

On déduit que $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}=\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ donc $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$.
4 : Soient $A,B,C\subset E$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} & = & \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} \\ & = & \mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & \mathbb{1}_A^2(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & (\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & (\mathbb{1}_{A\cap B}-\mathbb{1}_{A\cap C})^2 \\ & = & \mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} \end{array}$$

On déduit que $\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}=\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$ donc $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Exercice 24 : Soit E un ensemble et $A,B,C\subset E$. Montrer que :

$$A\cup B\cup C=(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap B\cap C)$$

Solution de l'exercice 24 : On a $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ donc :

$$A\cup B\cup C=((A\setminus B)\cup(A\cap B))\cup B\cup C=(A\setminus B)\cup((A\cap B)\cup B)\cup C=(A\setminus B)\cup B\cup C$$

car $(A \cap B) \cup B = B$ puisque $(A \cap B) \subset B$.
De même, $B = (B \setminus C) \cup (B \cap C)$ donc :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \cup (B \cap C)) \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup ((B \cap C) \cup C) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup C$$

car $(B \cap C) \cup C = C$ puisque $(B \cap C) \subset C$.
De même, $C = (C \setminus A) \cup (C \cap A)$ donc :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup ((C \setminus A) \cup (C \cap A)) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap C)$$

De même, $A \cap C = ((A \cap C) \setminus B) \cup ((A \cap C) \cap B) = ((A \cap C) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$ donc :

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C) \\ &= ((A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus B)) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

car $(A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \setminus B$ puisque $((A \cap C) \setminus B) \subset A \setminus B$.
On déduit que :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$$

Exercice 25 : Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$.
1 : Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
2 : Montrer que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Solution de l'exercice 25 :
1 : On a :

$$(A \setminus B) \setminus C = \left(A \cap \bar{B}\right) \cap \bar{C} = A \cap \left(\bar{B} \cap \bar{C}\right) = A \cap \overline{B \cup C} = A \setminus (B \cup C)$$

2 : On a :

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{B \cap \bar{C}} = A \cap \left(\bar{B} \cup \overline{\bar{C}}\right) = A \cap \left(\bar{B} \cup C\right) = \left(A \cap \bar{B}\right) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

3.3 Produit cartésien :

Exercice 26 : Construire une fonction *Python* de paramètre un couple (E, F) d'ensemble qui retourne le produit cartésien $E \times F$.

Solution de l'exercice 26 :

– **Méthode 01 :**

```
def produit_cartesien(E, F):
    G = set()
    for i in E:
        for j in F:
            G = G | {(i, j)}
    return(G)
```

Produit des deux ensembles $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1\}$:

```
In [1]: E = {1, 2, 3}

In [2]: F = {0, 1}

In [3]: produit_cartesien(E, F)
Out[3]: {(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)}
```

– **Méthode 02 :**

```
def ProduitCartesien(E, F):
    return({(i, j) for i in E for j in F})
```

Produit des deux ensembles $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1\}$:

```
In [1]: E = {1, 2, 3}

In [2]: F = {0, 1}

In [3]: ProduitCartesien(E, F)
Out[3]: {(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)}
```

Exercice 27 : Soit A, B, C, D quatre ensembles.
1 : Montrer que si $A \subset B$ et $C \subset D$ alors $(A \times C) \subset (B \times D)$.
2 : Montrer que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3 : Montrer que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Solution de l'exercice 27 :
1 : Soit $(x, y) \in A \times C$ donc $x \in A$ et $y \in C$, or $A \subset B$ et $C \subset D$ donc $x \in B$ et $y \in D$ d'où $(x, y) \in B \times D$. On déduit que $(A \times C) \subset (B \times D)$.
2 :
- On a $A \subset A \cup C$ et $A \subset B \cup D$ donc, d'après la question précédente, $A \times B \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
  De même, $C \subset A \cup C$ et $D \subset B \cup D$ donc, d'après la question précédente, $C \times D \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
  On a $A \times B \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ et $C \times D \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ donc $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
- On prend $A = B = \{0\}$ et $C = D = \{1\}$ donc $A \times B = \{(0, 0)\}$, $C \times D = \{(1, 1)\}$ et $(A \cup C) \times (B \cup D) = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ d'où $(A \times B) \cup (C \times D) = \{(0, 0), (1, 1)\} \subsetneq \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

3 : On a :
$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D)\\ &\iff (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D)\\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in C \text{ et } y \in D)\\ &\iff x \in A \cap C \text{ et } y \in C \cap D\\ &\iff (x, y) \in (A \cap C) \times (C \cap D)\end{aligned}$$
donc $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

3.4 Ensemble de parties d'un ensemble :

Exercice 28 : Soit E, F deux ensembles.
1 : Montrer que $\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
2 : Montrer que $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Solution de l'exercice 28 :
1 : On a :
$$A \in \mathscr{P}(E \cap F) \iff A \subset E \cap F \iff A \subset E \text{ et } A \subset F \iff A \in \mathscr{P}(E) \text{ et } A \in \mathscr{P}(F) \iff A \in \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$$
donc $\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
2 :
- Soit $A \in \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$ donc $A \in \mathscr{P}(E)$ ou $A \in \mathscr{P}(F)$ donc $A \subset E$ ou $A \subset F$ donc $A \subset E \cup F$ d'où $A \in \mathscr{P}(E \cup F)$.
  On déduit que $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$.
- On prend $E = \{0\}$ et $F = \{1\}$ donc $E \cup F = \{0, 1\}$ d'où $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) = \{\emptyset, \{0\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\} \subsetneq \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} = \mathscr{P}(E \cup F)$.

3.5 Familles d'ensembles :

Exercice 29 : Montrer que :
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + 1] = \mathbb{R}^+ \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$$

Solution de l'exercice 29 :
- Montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + 1] = \mathbb{R}^+$:
  - On a $\forall n \in \mathbb{N}, [n, n + 1] \subset [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$ donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + 1] \subset \mathbb{R}^+$.
  - Soit $x \geq 0$ donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x \leq n + 1$ donc $x \in [n, n + 1]$ donc $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + 1]$ d'où $\mathbb{R}^+ \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.

  On a montré que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + 1] \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + 1] = \mathbb{R}^+$.

– Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$:
Supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [n, +\infty[$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$.
Absurde car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$.

Exercice 30 : Soient $(E_i)_{i\in I}$ et $(F_i)_{i\in J}$ deux familles d'ensembles. Montrer que :

$$\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in J} F_i\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (E_i \cap F_j)$$

Solution de l'exercice 30 : On a :

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in J} F_i\right) &\iff x \in \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \text{ et } x \in \left(\bigcup_{i\in J} F_i\right) \\
&\iff \exists i \in I, x \in E_i \text{ et } \exists j \in I, x \in F_j \\
&\iff \exists (i,j) \in I \times J, x \in E_i \text{ et } x \in F_j \\
&\iff \exists (i,j) \in I \times J, x \in E_i \cap F_j \\
&\iff x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (E_i \cap F_j)
\end{aligned}$$

donc :

$$\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in J} F_i\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (E_i \cap F_j)$$

4 Relations binaires :

4.1 Relations d'équivalence :

Exercice 31 :
1 : Montrer que $x \sim y \iff |x| = |y|$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2 : Déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

Solution de l'exercice 31 :
1 : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.
– On a $|x| = |y|$ donc $x \sim x$ d'où la relation $\sim$ est réflexive.
– Si $x \sim y$ alors $|x| = |y|$ donc $|y| = |x|$ donc $y \sim x$ d'où la relation $\sim$ est symétrique.
– Si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$ donc $|x| = |z|$ donc $x \sim z$ d'où la relation $\sim$ est transitive.

On déduit que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$y \in \bar{x} \iff y \sim x \iff |y| = |x| \iff (y = x \text{ ou } y = -x) \iff y \in \{-x, x\}$$

donc $\bar{x} = \{-x, x\}$.

Exercice 32 :
1 : Montrer que $x \sim y \iff xy > 0$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^*$.
2 : Déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

Solution de l'exercice 32 :
1 : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.
– On a $xx = x^2 > 0$ car $x \neq 0$ donc $x \sim x$ d'où la relation $\sim$ est réflexive.
– Si $x \sim y$ alors $xy > 0$ donc $yx > 0$ donc $y \sim x$ d'où la relation $\sim$ est symétrique.
– Si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $xy > 0$ et $yz > 0$ donc, en multipliant, $y^2xz > 0$ donc $xz > 0$ car $y^2 > 0$ donc $x \sim z$ d'où la relation $\sim$ est transitive.

On déduit que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2 : Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$.
- Si $x > 0$ alors :
$$y \in \bar{x} \iff y \sim x \iff yx > 0 \iff y > 0 \iff y \in]0, +\infty[$$
- Si $x < 0$ alors :
$$y \in \bar{x} \iff y \sim x \iff yx > 0 \iff y < 0 \iff y \in]-\infty, 0[$$

On déduit que $\sim$ admet deux classes d'équivalence $\bar{1} =]0, +\infty[$ et $\overline{-1} =]-\infty, 0[$.

Exercice 33 : Montrer que :
$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' - p'q = 0$$
est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 33 : Soient $(p, q), (p', q'), (p'', q'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
- On a $pq - qp = 0$ donc $(p, q) \sim (p', q')$ d'où la relation $\sim$ est réflexive.
- Si $(p, q) \sim (p', q')$ alors $pq' - p'q = 0$ donc $p'q - pq' = 0$ donc $(p', q') \sim (p, q)$ d'où la relation $\sim$ est symétrique.
- Si $(p, q) \sim (p', q')$ et $(p', q') \sim (p'', q'')$ alors $pq' - p'q = 0$ et $p'q'' - p''q' = 0$ donc $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ donc $\frac{p'}{q'} = \frac{p''}{q''}$ donc $\frac{p}{q} = \frac{p''}{q''}$ donc $pq'' = qp''$ d'où $pq'' - qp'' = 0$ d'où $(p, q) \sim (p'', q'')$. On déduit que la relation $\sim$ est transitive.

On déduit que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Exercice 34 :
1 : Montrer que $x \sim y \iff x^2 - y^2 = x - y$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2 : Déterminer ses classes d'équivalence.

Solution de l'exercice 34 :
1 : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- On a $x^2 - x^2 = 0 = x - x$ donc $x \sim x$ d'où la relation $\sim$ est réflexive.
- Si $x \sim y$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ donc $y^2 - x^2 = y - x$ donc $y \sim x$ d'où la relation $\sim$ est symétrique.
- Si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$ donc, en sommant les deux équations, $x^2 - z^2 = x - z$ d'où $x \sim z$. On déduit que la relation $\sim$ est transitive.

On déduit que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \bar{x}$ donc $x^2 - y^2 = x - y$ donc $(x - y)(x + y) = x - y$ donc $(x - y)(x + y - 1) = 0$ d'où $x - y = 0$ ou $x + y - 1 = 0$. On déduit que $y = x$ ou $y = 1 - x$ donc $\bar{x} = \{x, 1 - x\}$.

Exercice 35 : Soit E un ensemble non vide et $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E.
La relation binaire sur E définie par $\forall x, y \in E, x \sim y \iff \exists i \in I, x, y \in E_i$ est une relation d'équivalence sur E.

Solution de l'exercice 35 : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E donc $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ donc $\exists i \in I, x \in E_i$ donc $x, x \in E_i$ d'où $x \sim x$. On déduit que la relation $\sim$ est réflexive.
- Si $x \sim y$ alors $\exists i \in I, x, y \in E_i$ donc $y, x \in E_i$ d'où $y \sim x$. On déduit que la relation $\sim$ est symétrique.
- Si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $\exists i, j \in I, x, y \in E_i$ et $y, z \in E_j$. On a $y \in E_i$ et $y \in E_j$ donc $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, or $(E_i)_{i \in I}$ est une partition de E donc $i = j$ d'où $E_i = E_j$. On déduit que $x, z \in E_i$ donc $x \sim z$ d'où la relation $\sim$ est transitive.

On déduit que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

4.2 Relations d'ordre :

Exercice 36 :
1 : Montrer que $p \leq q \iff \exists n \in \mathbb{N}, q = np$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Cet ordre est-il total ?
2 : Soit $A = \{2, 3\}$.
2 - 1 : Montrer que la partie A est majorée et qu'elle n'admet pas de plus grand élément.
2 - 2 : Montrer que la partie A est minorée et qu'elle n'admet pas de plus petit élément.

Solution de l'exercice 36 :
1 : Soit $p, q, r \in \mathbb{N}$.
- On a $p = 1p$ donc $p \leq p$ d'où la relation $\leq$ est réflexive.
- On suppose que $p \leq q$ et $q \leq p$ donc $\exists m, n \in \mathbb{N}$ tels que $q = mp$ et $p = nq$.
  - Si $p = 0$ alors $q = mp = 0$ donc $p = q$.
  - Si $q = 0$ alors $p = nq = 0$ donc $p = q$.

   – Supposons que p et q sont non nuls. On a $q = mp$ et $p = nq$ donc $q = mnq$ donc $mn = 1$ d'où $m = n = 1$ car $m, n \in \mathbb{N}$. On déduit que $q = mp = p$.
  On déduit que, dans tous les cas, $p = q$ donc la relation $\preceq$ est anti-symétrique.
 – On suppose que $p \preceq q$ et $q \preceq r$ donc $\exists m, n \in \mathbb{N}$ tels que $q = mp$ et $r = nq$ donc $r = mnp$ d'où $p \preceq r$. On déduit que la relation $\preceq$ est transitive.

On déduit que la relation $\preceq$ est une relation d'ordre.
 – Supposons que $2 \preceq 3$ donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $3 = 2n$ d'où 3 est pair. Absurde.
 – Supposons que $3 \preceq 2$ donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $2 = 3n$ d'où $n = \dfrac{2}{3} \notin \mathbb{N}$. Absurde.

On déduit qu'on n'a pas $2 \preceq 3$ ou $3 \preceq 2$ donc 2 et 3 ne sont pas comparables d'où la relation d'ordre $\preceq$ est partielle.

2 :

2 - 1: On a $6 = 2 \times 3$ et $6 = 3 \times 2$ donc $3 \preceq 6$ et $2 \preceq 6$ donc A est majoré par 6 d'où A est majoré.
On suppose que A admet un plus grand élément donc $\max A \in A$ d'où $\max A = 2$ ou $\max A = 3$.
 – Si $\max A = 2$ alors $2 = \max A \succeq 3$. Absurde car, d'après la première question, 2 et 3 ne sont pas comparables.
 – Si $\max A = 3$ alors $3 = \max A \succeq 2$. Absurde car, d'après la première question, 2 et 3 ne sont pas comparables.

On déduit que A n'admet pas de plus grand élément.

2 - 2: On a $2 = 2 \times 1$ et $3 = 3 \times 1$ donc $1 \preceq 2$ et $1 \preceq 3$ donc A est minoré par 1 d'où A est minoré.
On suppose que A admet un plus petit élément donc $\min A \in A$ d'où $\min A = 2$ ou $\min A = 3$.
 – Si $\min A = 2$ alors $2 = \min A \preceq 3$. Absurde car, d'après la première question, 2 et 3 ne sont pas comparables.
 – Si $\min A = 3$ alors $3 = \min A \preceq 2$. Absurde car, d'après la première question, 2 et 3 ne sont pas comparables.

On déduit que A n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 37 : On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{2 + (-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1 : Montrer que E est majoré et qu'il admet un plus grand élément à déterminer.
2 : Montrer que E est minoré et qu'il n'admet pas de plus petit élément.

Solution de l'exercice 37 :

1 : On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2+(-1)^n}{n} \le \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n} \le \frac{3}{1} = 3$ donc E est majoré.
On a, pour $n = 1$, $\frac{2+(-1)^n}{n} = 1$, pour $n = 2$, $\frac{2+(-1)^n}{n} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ et $\forall n \ge 3$, $\frac{2+(-1)^n}{n} \le \frac{2+1}{n} = \frac{3}{3} = 1$ donc $\frac{3}{2} \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2+(-1)^n}{n} \le \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2}$ est le plus grand élément de E.

2 : On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2 + (-1)^n}{n} \ge \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n} \ge 0$ donc A est minoré par 0 d'où A est minoré.
Supposons que A admet un plus petit élément. On a $\min A \in A$ donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\min A = \dfrac{2 + (-1)^p}{p}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2 + (-1)^n}{n} \ge \min A = \dfrac{2 + (-1)^p}{p}$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2 + (-1)^n}{n} \le \dfrac{2+1}{n} = \dfrac{3}{n}$ et $\dfrac{2 + (-1)^p}{p} \ge \dfrac{2-1}{p} = \dfrac{1}{p}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{n} \ge \dfrac{1}{p}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \le 3p$ d'où $\mathbb{N}$ est majoré. Absurde, donc A n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 38 : On considère $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et soit l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{xy}{x^2 + y^2} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$$

1 : Montrer que E est majoré et qu'il admet un plus grand élément à déterminer.
2 : Montrer que E est minoré et qu'il admet un plus petit élément à déterminer.

Solution de l'exercice 38 :

1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a $(x-y)^2 \ge 0$ donc $x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$ donc $x^2 + y^2 \ge 2xy$ d'où $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$.
On déduit que E est majoré. Or, pour $x = y = 1$, on a $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} \in E$ d'où $\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de E.

2 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a $(x+y)^2 \ge 0$ donc $x^2 + 2xy + y^2 \ge 0$ donc $2xy \ge -(x^2+y^2)$ d'où $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \ge -\frac{1}{2}$.
On déduit que E est minoré. Or, pour $x = 1$ et $y = -1$, on a $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$ donc $-\frac{1}{2} \in E$ d'où $-\frac{1}{2}$ est le plus petit élément de E.

Exercice 39 :
1 : Montrer que $p \leq q \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Cet ordre est-il total ?
2 : La partie $\{2,3\}$ est-elle majorée ?

Solution de l'exercice 39 :

1 : Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$.
- On a $p = p^1$ donc $p \leq p$ d'où la relation $\leq$ est réflexive.
- Si $p \leq q$ et $q \leq p$ alors $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = q^m$ et $q = p^n$ donc $p = (p^n)^m = p^{mn}$ donc $mn = 1$ donc $m = n = 1$ d'où $p = q$. On déduit que la relation $\leq$ est anti-symétrique.
- Si $p \sim q$ et $q \sim r$ alors $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = q^m$ et $q = r^n$ donc $p = (r^n)^m = r^{mn}$ d'où $p \leq r$. On déduit que la relation $\leq$ est transitive.

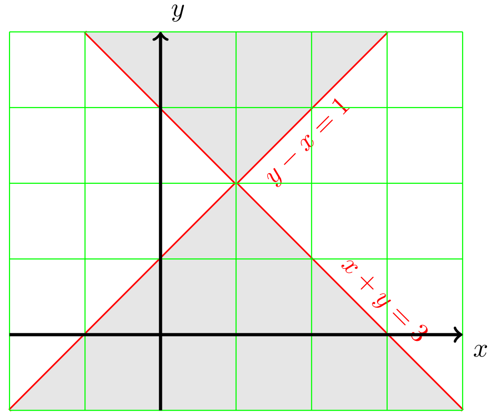
On déduit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
Supposons que $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^*$ donc $1 \leq 2$ ou $2 \leq 1$ donc $\exists n \in \mathbb{N}^*, 2 = 1^n$ ou $1 = 2^n$ donc $2 = 1$ ou $n = 0$. Absurde, donc $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2 : Supposons que l'ensemble $\{2,3\}$ est majoré donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 \leq p$ et $3 \leq q$ donc $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^m$ et $p = 3^n$ d'où p est à la fois pair et impair. Absurde, donc $\{2,3\}$ n'est pas majoré.

Exercice 40 :
1 : Montrer que $(x,y) \leq (x',y') \iff |x - x'| \leq y' - y$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2 : Montrer que $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \leq (x',y') \iff y - x \leq y' - x'$ et $x + y \leq x' + y'$.
3 : Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ qui sont comparable à $(1,2)$. Que peut-on déduire ?
4 : Montrer que le cercle unité $\mathscr{C}$ est majoré.
5 : Montrer que $\forall (x,y) \in \mathscr{C}, x + y \leq \sqrt{2}$ et $y - x \leq \sqrt{2}$. En déduire l'ensemble des majorants de $\mathscr{C}$.
6 : $\mathscr{C}$ admet-il un plus grand élément ?

Solution de l'exercice 40 :

1 : Soient $(x,y),(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$.
- On a $|x - x| = 0 \leq 0 = y - y$ donc $(x,y) \leq (x,y)$ d'où la relation $\leq$ est réflexive.
- Si $(x,y) \leq (a,b)$ et $(a,b) \leq (x,y)$ alors $|x - a| \leq b - y$ et $|a - x| \leq y - b$ donc $0 \leq b - y$ et $0 \leq y - b$ donc $y \leq b$ et $b \leq y$ d'où $y = b$. On déduit que $|x - a| \leq b - y = 0$ donc $|x - a| = 0$ d'où $x = a$.
  On a $x = a$ et $y = b$ donc $(x,y) = (a,b)$ d'où $\leq$ est anti-symétrique.
- Si $(x,y) \leq (a,b)$ et $(a,b) \leq (c,d)$ alors $|x - a| \leq b - y$ et $|a - c| \leq d - b$ donc $|x - c| = |(x - a) + (a - c)| \leq |x - a| + |a - c| \leq b - y + d - b = d - y$ d'où $(x,y) \leq (c,d)$. On déduit que la relation $\leq$ est transitive.

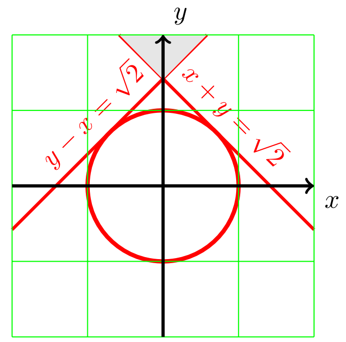
On déduit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2 : Soit $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.
$\Rightarrow$) On a $(x,y) \leq (x',y')$ donc $|x - x'| \leq y' - y$ donc $-(y' - y) \leq x - x' \leq y' - y$ donc $y - y' \leq x - x' \leq y' - y$ d'où $y - x \leq y' - x'$ et $x + y \leq x' + y'$.
$\Rightarrow$) On a $y - x \leq y' - x'$ et $x + y \leq x' + y'$ donc $y - y' \leq x - x'$ et $x - x' \leq y' - y$ donc $y - y' \leq x - x' \leq y' - y$ donc $-(y' - y) \leq x - x' \leq y' - y$ d'où $|x - x'| \leq y' - y$.
On déduit que $(x,y) \leq (x',y') \iff y - x \leq y' - x'$ et $x + y \leq x' + y'$.
3 : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On a (x,y) et $(1,2)$ comparables si, et seulement si, $(x,y) \leq (1,2)$ ou $(1,2) \leq (x,y)$ si, et seulement si, $(y - x \leq 2 - 1$ et $x + y \leq 1 + 2)$ ou $(2 - 1 \leq y - x$ et $1 + 2 \leq x + y)$ si, et seulement si, $(y - x \leq 1$ et $x + y \leq 3)$ ou $(1 \leq y - x$ et $3 \leq x + y)$.
L'ensemble des points comparables à $(1,2)$ est la surface en gris délimitée par les droites $x + y = 3$ et $y - x = 1$ dans la figure : :



On déduit que l'ensemble des points comparables avec $(2,1)$ n'est pas $\mathbb{R}$ donc il existe des points de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas comparables avec $(2,1)$ d'où la relation d'ordre $\leq$ n'est pas totale.

4 : Soit $(x,y) \in \mathscr{C}$ donc $x^2 + y^2 = 1$ donc $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ d'où $y - x \leq |y - x| \leq |y| + |x| \leq 1 + 1 = 2$ et $x + y \leq |x + y| \leq |x| + |y| \leq 1 + 1 = 2$.
On déduit que $y - x \leq 2 - 0$ et $x + y \leq 2 + 0$ donc $(x,y) \leq (2,0)$ donc $(2,0)$ est un majorant de $\mathscr{C}$ d'où $\mathscr{C}$ est majorée.
5 : Soit $(x,y) \in \mathscr{C}$. D'après *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*, $y - x = 1 \times y + (-1) \times x \leq \sqrt{1^2 + (-1)^2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ car $x^2 + y^2 = 1$ puisque $(x,y) \in \mathscr{C}$. De même, $x + y = 1 \times x + 1 \times y \leq \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$.
On déduit que $y - x \leq \sqrt{2}$ et $x + y \leq \sqrt{2}$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Supposons que (a,b) est un majorant de $\mathscr{C}$.
  - On a $\left(\sqrt{2}2, \sqrt{2}2\right) \in \mathscr{C}$ donc $\left(\sqrt{2}2, \sqrt{2}2\right) \leq (a,b)$ donc $\sqrt{2}2 + \sqrt{2}2 \leq a + b$ d'où $\sqrt{2} \leq a + b$.
  - On a $\left(-\sqrt{2}2, \sqrt{2}2\right) \in \mathscr{C}$ donc $\left(-\sqrt{2}2, \sqrt{2}2\right) \leq (a,b)$ donc $\sqrt{2}2 - \left(-\sqrt{2}2\right) \leq b - a$ d'où $\sqrt{2} \leq b - a$.
- Réciproquement, supposons que $\sqrt{2} \leq b - a$ et $\sqrt{2} \leq a + b$. Soit $(x,y) \in \mathscr{C}$ donc $y - x \leq \sqrt{2}$ et $x + y \leq \sqrt{2}$ donc $y - x \leq b - a$ et $x + y \leq a + b$ donc $(x,y) \leq (a,b)$ d'où (a,b) est un majorant de $\mathscr{C}$.

On déduit que (a,b) est un majorant de $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\sqrt{2} \leq b - a$ et $\sqrt{2} \leq a + b$.
L'ensemble des majorants de $\mathscr{C}$ est la surface en gris dans la figure :



6 :
- **Méthode 01 :** La figure montre déjà que l'ensemble des majorants ne rencontre pas $\mathscr{C}$ donc il n'y a pas de majorant de $\mathscr{C}$ qui appartient à $\mathscr{C}$ d'où $\mathscr{C}$ n'admet pas de plus grand élément.
- **Méthode 02 :** Supposons que $\mathscr{C}$ admet un plus grand élément (a,b) donc $(a,b) \in \mathscr{C}$ donc $a^2 + b^2 = 1$ donc $b^2 \leq 1$ d'où $b \leq 1$.
  D'autre part, (a,b) est un majorant de $\mathscr{C}$ donc $\sqrt{2} \leq a + b$ et $\sqrt{2} \leq b - a$ donc, en sommant, $2\sqrt{2} \leq 2b$ d'où $\sqrt{2} \leq b$.
  Absurde car $b \leq 1$ donc $\mathscr{C}$ n'admet pas de plus grand élément.

5 Applications :

5.1 Injection, surjection, bijection :

Exercice 41 : Montrer que l'application :

$$f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}$$

est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution de l'exercice 41 : Soit $y \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et on considère l'équation $y = f(x)$ donc $y = \frac{x}{x^2+1}$ d'où $yx^2 - x + y = 0$.
- Si $y = 0$ alors $x = 0$ d'où l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans $]-1,1[$.
- Si $y \neq 0$: Le discriminant de l'équation $yx^2 - x + y = 0$ est $\Delta = 1 - 4y^2 \geq 0$ car $y \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ donc l'équation $yx^2 - x + y = 0$ admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} \text{ et } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

  On a $|x_1| = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2|y|} \geq \frac{1}{2|y|} > 1$ car $|y| < \frac{1}{2}$ or, d'après la formule du produit des racines, $x_1 x_2 = 1$ donc $|x_1 x_2| = 1$ donc $|x_2| = \frac{1}{|x_1|} < 1$ d'où $x_2 \in]-1,1[$. On déduit que x_2 est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$ dans $]-1,1[$.

On déduit que, dans tous les cas, y admet une seule solution donc f est bijective et sa fonction réciproque est :

$$f^{-1}: \quad]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}[\quad \to \quad]-1,1[$$
$$x \quad \mapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

Exercice 42 :
1 : Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ est injective.
2 : Montrer que $f(\mathbb{R})=]-1,1[$.
3 : Soit $g:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=f(x)$. Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

Solution de l'exercice 42 :
1 : Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=f(y)$ donc $\frac{x}{1+|x|}=\frac{y}{1+|y|}$ donc $\left|\frac{x}{1+|x|}\right|=\left|\frac{y}{1+|y|}\right|$ donc $\frac{|x|}{1+|x|}=\frac{|y|}{1+|y|}$ donc $|x|(1+|y|)=|y|(1+|x|)$ donc $|x|+|xy|=|y|+|xy|$ d'où $|x|=|y|$.
On a $\frac{x}{1+|x|}=\frac{y}{1+|y|}$ donc $\frac{x}{1+|x|}=\frac{y}{1+|x|}$ d'où $x=y$. On déduit que f est injective.
2 : Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $-|x|\le x\le |x|$ donc $-1<-\frac{|x|}{1+|x|}\le\frac{x}{1+|x|}\le\frac{|x|}{1+|x|}<1$ donc $-1<f(x)<1$ d'où $f(\mathbb{R})\subset]-1,1[$.
Soit $y\in]-1,1[$ et on considère l'équation $y=f(x)$ donc $y=\frac{x}{1+|x|}$ donc $|y|=\left|\frac{x}{1+|x|}\right|=\frac{|x|}{1+|x|}$ donc $|y|(1+|x|)=|x|=1+|x|-1$ donc $(1-|y|)(1+|x|)=1$ d'où $1+|x|=\frac{1}{1-|y|}$.
On a $y=\frac{x}{1+|x|}$ donc $(1+|x|)y=x$ d'où $x=\frac{y}{1-|y|}$.
On déduit que $f\left(\frac{y}{1-|y|}\right)=y$ donc $]-1,1[\subset f(\mathbb{R})$ d'où $f(\mathbb{R})=]-1,1[$.
3 : On a f injective donc g est injective. Or, d'après la question précédente, $g(\mathbb{R})=f(\mathbb{R})=]-1,1[$ donc g est surjective d'où g est bijective.
D'après la question précédente, $\forall y\in]-1,1[,\exists x\in\mathbb{R}, y=f(x)\Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|}$ donc $\forall x\in]-1,1[, g^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}$.

Exercice 43 : Soient E,F,G trois ensembles, $f:E\to F$ et $g:F\to G$.
1 : Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f est injective.
2 : Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective.

Solution de l'exercice 43 :
1 : Soient $x,y\in E$ tels que $f(x)=f(y)$ donc $g(f(x))=g(f(y))$ d'où $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$. Or $g\circ f$ est injective donc $x=y$ d'où f est injective.
2 :
- Méthode 01 : Soient $y\in G$. On a $g\circ f:E\to G$ surjective donc $\exists x\in E$ tel que $(g\circ f)(x)=y$ d'où $y=g(f(x))$. On pose $a=f(x)$ donc $y=g(a)$ d'où g est surjective.
- Méthode 02 : On a $f(E)\subset F$ donc $g(f(E))\subset g(F)$ d'où $(g\circ f)(E)\subset g(F)$. Or $g\circ f:E\to G$ est surjective donc $(g\circ f)(E)=G$ d'où $G\subset g(F)$.
  On a $g(F)\subset G$ et $G\subset g(F)$ donc $g(F)=G$ d'où g est surjective.

5.2 Image directe, image réciproque :

Exercice 44 : Soit $f:E\to E$ une application qui vérifie $f\circ f=f$.
1 : Montrer que f est injective $\iff$ f est surjective.
2 : Montrer que $\forall A\subset E, f(f(A))=f(A)$.
3 : Montrer que $\forall A\subset E, f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)=f^{-1}(A)$.

Solution de l'exercice 44 :
1 :
$\Leftarrow$) Soit $y\in E$. On a $f\circ f=f$ donc $f(y)=(f\circ f)(y)=f(f(y))$, or f est injective donc $y=f(y)$ d'où f est surjective.
$\Rightarrow$) Soit $x,y\in E$ tels que $f(x)=f(y)$. On a f surjective donc $\exists a,b\in E$ tels que $f(a)=x$ et $f(b)=y$ donc $f(x)=f(f(a))=(f\circ f)(a)$ et $f(x)=f(f(a))=(f\circ f)(b)$, or $f\circ f=f$ donc $f(x)=f(a)=x$ et $f(y)=f(b)=y$ d'où $x=y$ car $f(x)=f(y)$. On déduit que f est injective.
On déduit que f est injective $\iff$ f est surjective.
2 : Soit $A\subset E$.
- Soit $z\in f(f(A))$ donc $\exists y\in f(A)$ tel que $z=f(y)$. On a $y\in f(A)$ donc $\exists x\in A$ tel que $y=f(x)$ d'où $z=f(y)=f(f(x))=(f\circ f)(x)$. Or $f\circ f=f$ donc $z=f(x)=y\in f(A)$. On déduit que $f(f(A))\subset f(A)$.

– Soit $y \in f(A)$ donc $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $f \circ f = f$ donc $y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) \in f(f(A))$ car $x \in A$. On déduit que $f(A) \subset f(f(A))$.

On a $f(f(A)) \subset f(A)$ et $f(A) \subset f(f(A))$ donc $f(f(A)) = f(A)$.

3 : Soit $A \subset E$ et $x \in E$. On a $f \circ f = f$ donc :

$$x \in f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \iff f(x) \in f^{-1}(A) \iff f(f(x)) \in A \iff (f \circ f)(x) \in A \iff f(x) \in A \iff x \in f^{-1}(A)$$

donc $f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}(A)$.

Exercice 45 : Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, $\forall A, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solution de l'exercice 45 :

$\Rightarrow$) Soit $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(A)$ d'où $x \in f(A) \cap f(B)$. On déduit que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (Remarquer que l'on n'a pas utiliser l'injectivité de f).
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc $\exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $f(a) = f(b) = y$, or f est injective, donc $a = b$. On a $a \in A, b \in B$ et $a = b$ donc $a \in A \cap B$ d'où $y = f(a) \in f(A \cap B)$. On déduit que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ donc $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

$\Leftarrow$) Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ donc $f(\{x\}) = f(\{y\})$, d'où $f(\{x\})) = f(\{x\})) \cap f(\{y\}) = f(\{x\} \cap \{y\})$.
On a $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\})$ et $f(\{x\}) \neq \emptyset$ donc $f(\{x\} \cap \{y\}) \neq \emptyset$ donc $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$ d'où $x = y$. On déduit que f est injective.
On déduit que f est injective si, et seulement si, $\forall A, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.