38. Rastavljanje kvadratnog trinoma na činioce

Kvadratni trinom po x je izraz oblika $ax^2+bx+c=0$, gde su $a,b,c\in R$ koeficijenti trinoma pri čemu mora biti $a\neq 0$. Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine

$$ax^2+bx+c=0,$$

onda se ta jednačina može zapisati i u obliku

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

ZADATAK 1. Rastavi sledeće trinome:

a) $2x^2+3x-2$,

b) x^2+2x+2.

Rešenje:

a) Rešenja jednačine $2x^2+3x-2=0$ su $x_1=-2\wedge x_2=\frac{1}{2}$, te se dati trinom može rastaviti $2x^2+3x-2=2(x-(-2))\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+2)(2x-1)$.

b) Rešenja jednačine $x^2+2x+2=0$ su $x_1=-1+i\wedge x_2=-1-i$, te se dati trinom može rastaviti $x^2+2x+2=2(x-(-1+i))(x-(-1-i))=(x+1-i)(x+1+i)$.

Za vežbu i domaći zadatak uraaditi: – Vene T. Bogoslavov 2 – 534 – 539.

ZADATAK 2. Skratiti razlomak $\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$.

Rešenje:

Ako rastavimo oba kvadratna trinoma kao u zadatku 1. videćemo da li postoje zagrade koje mogu da se skrate ili ne postoje. Ako ne postoje, razlomak se ne može skratiti.

Rešenja kvadratne jednačine $3x^2-7x+2=0$ su $x_1=2\wedge x_2=\frac{1}{3}$ te se taj trinom može rastaviti na oblik $3x^2-7x+2=3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(x-2)(3x-1)$.

Rešenje druge kvadratne jednačine $2x^2-5x+2=0$ su $x_1=2 \wedge x_2=\frac{1}{2}$ i taj trinom ćemo rastaviti u oblik $2x^2-5x+2=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x-1)$.

Sada dati razlomak ima oblik:

$$\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}=\frac{(x-2)(3x-1)}{(x-2)(2x-1)}=\frac{3x-1}{2x-1}.$$

Za vežbu i domaći zadatak uraditi: Vene T. Bogoslavov 2 – 540.

ZADATAK 3. Skratiti razlomak:

a) $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}$,

b) $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+8x+4}$,

c) $\dfrac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}$,

d) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$,

e) $\dfrac{x^3-1}{x^2-6x+5}$.

Rešenje:

Prateći prethodne zadatke i rastavljajući kvadratne trinome samo tamo gde imaju realna rešenja dobijamo sledeće razlomke:

a) $$\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}{3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2x-3}{3x-2};$$

b) $$\frac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+8x+4}=\frac{x\left(x^2+4x+4\right)}{3x^2+8x+4}=\frac{x(x+2)^2}{3(x+2)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{x(x+2)}{3x+2};$$

c) $\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}=\frac{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}{12\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)}=\frac{3(x+2)}{3(4x+3)}=\frac{x+2}{4x+3}$;

d) $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{x}{x-2}$;

e) $\frac{x^3-1}{x^2-6x+5}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x^2+x+1}{x-5}$.

Kvadratni jednačina $x^2+x+1=0$ nema realna rešenja nego konjugovano kompleksna rešenja.

Generalno, ako kvadratna jednačina (ili čak polinom proizvoljnog stepena) ima jedno kompleksno rešenje onda mora imati još jedno kompleksno rešenje koje je njemu konjugovano. Zato kvadratni trinom x^2+x+1 ne moramo faktorisati jer će se ili ceo trinom skratiti sa nekim drugim trinomom ili se ništa neće skratiti; ne može se skratiti samo jedno kompleksno rešenje – mora se skratiti i ono njemu konjugovano.