EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Funkcija zadata formulom:

$$y = a^x. \ a \in R, a > 0, a \neq 1$$

se naziva eksponencijalna funkcija.

→ Funkcija $y = a^x$ je svuda definisana $\forall x \in R$
→ Za x=0 je $y = a^o = 1$ pa funkcija prolazi kroz tačku (0,1), tj. tu seče y-osu.
→ Ako je $a > 0$ funkcija je rastuća
→ Ako je $0 < a < 1$ funkcija je opadajuća
→ Finkcija $y = a^x$ je uvek pozitivna, tj. grafik je iznad x-ose
→ Važe osnovna svojstva stepena:

Za nju:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x b^x$$

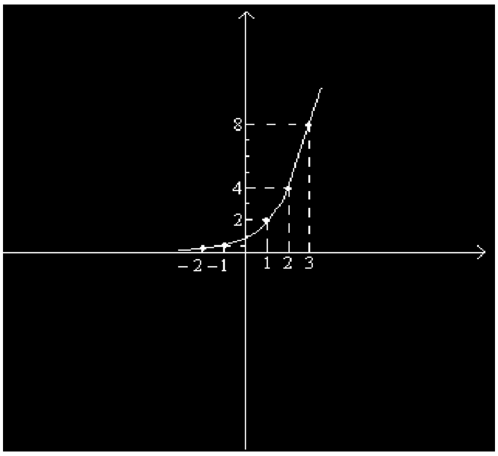
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

gde su $a > 0$, $b > 0$, $x, y \in R$

Primer 1. Nacrtaj grafik funkcije $y = 2^x$

Rešenje: Iskoristićemo tablicu vrednosti uzećemo proizvoljne x-seve i naći vrednost za y

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



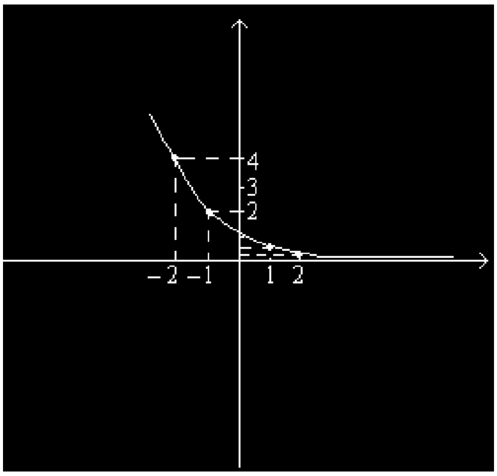
→ Funkcija je definisana za $\forall x \in R$
→ Y-osu seče u (0,1)
→ Pošto je $a = 2 > 0 \Rightarrow$ rastuća je
→ Uvek je pozitivna, tj. $y > 0$ za $\forall x \in R$

Primer 2: Nacrtaj grafik funkcije

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tj. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 2^{-x}$

Rešenje:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



→ Funkcija je definisana za $\forall x \in R$
→ Y-osu seče u (0,1)
→ Pošto je $a = \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ opadajuća je
→ Uvek je pozitivna, $y > 0$ za $\forall x \in R$

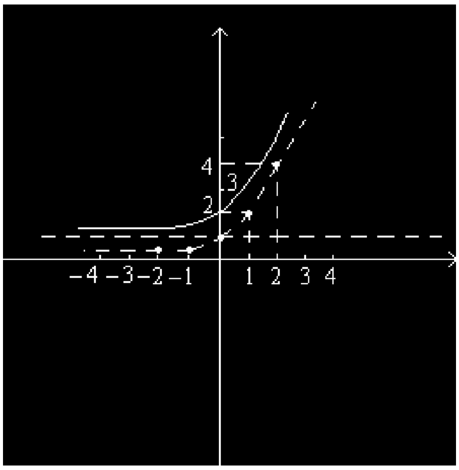
Primer 3: Nacrtaj grafik funkcije

$$y = 2^x + 1$$

I ovde možemo napraviti tablicu vrednosti:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	9

Ali je lakše da razmišljamo ovako:
Nacrtamo grafik $y = 2^x$ pa ga za 1 ‘’podignemo’’ po y-osi (vidi kvadratnu funkciju, slična translacija je i tamo radjena)



Eksponencijalne jednačine

Pošto je eksponencijalna funkcija bijektivno preslikavanje ("1-1" i "na") možemo upotrebljavati:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Ovo znači da kada na obe strane napravimo iste osnove, osnove kao ‘’skratimo’’ i uporedjujemo eksponente.

Evo nekoliko primera:

1) Reši jednačine

a) $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$

b) $8^{x+1} = 16 \cdot 2^{x-2}$

v) $16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}}$

g) $16 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2}$

d) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

dj) $(x^2+1)^{2x-3} = 1$

e) $9^{x^2-3x+5} = 3^6$

Rešenja:

a)
$$4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$$
$$(2^2)^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$$
$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 2x = \frac{x+1}{x}$$

Kad napravimo iste osnove njih ''skratimo''!

$$2x^2 = x+1$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Rešenja su $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{2}$

b)
$$8^{x+1} = 16 \cdot 2^{x-2}$$
$$(2^3)^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{x-2}$$
$$2^{3x+3} = 2^{4+x-2}$$
$$2^{3x+3} = 2^{x+2}$$
$$3x+3 = x+2$$
$$3x - x = 2-3$$
$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

v) $16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}}$

$(2^4)^{\frac{1}{x}} = (2^2)^{\frac{x}{2}}$

$2^{4\cdot\frac{1}{x}} = 2^{2\cdot\frac{x}{2}}$

$2^{\frac{4}{x}} = 2^x$

$\frac{4}{x} = x$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

g) $16 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2}$

$2^4 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2}$

$2^{4+5x+2} = 2^{x^2}$

$2^{5x+6} = 2^{x^2}$

$x^2 = 5x + 6$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

d) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

$(3^2)^{-3x} = (3^{-3})^{x+3}$

$3^{-6x} = 3^{-3x-9}$

Pazi: $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

$-6x = -3x - 9$

$-6x + 3x = -9$

$-3x = -9$

$x = 3$

đ) $\left(x^2 + 1\right)^{2x-3} = 1$

Pošto znamo da je $a^o = 1$, jedno rešenje će nam dati

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Drugo rešenje će biti ako je

$x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

jer važi $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$

tj. $(x^2 + 1)^{2x-3} = 1^{2x-3}$

pa je $x^2 + 1 = 1$

e) $9^{x^2-3x+5} = 3^6$

$(3^2)^{x^2-3x+5} = 3^6$

$3^{2x^2-6x+10} = 3^6$

$$2x^2-6x+10=6$$
$$2x^2-6x+4=0/:2$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}$$
$$x_1=2$$
$$x_2=1$$

2) Rešiti jednačine:

a) $2^{x+3}-7\cdot2^x-16=0$
b) $3^{x-1}-4\cdot3^x+33=0$
v) $2\cdot3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=450$
g) $2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}=16$
d) $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-2}-3^{x-3}$

Rešenja:

Ovde ćemo koristiti pravila za stepene:

$$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$$
$$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$$
$$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$$

a) $2^{x+3}-7\cdot2^x-16=0$

$2^x\cdot2^3-7\cdot2^x-16=0\to$ Najbolje da uzmemo smenu $2^x=t$

$t\cdot8-7\cdot t-16=0$

$8t-7t=16$

$t=16\to$ Vratimo se u smenu

$2^x=16$

$2^x=2^4$

$x=4$

b) $3^{x-1}-4\cdot3^x+33=0$

$\frac{3^x}{3}-4\cdot3^x+33=0\to$ Smena $3^x=t$

$\frac{t}{3} - 4t + 33 = 0 \rightarrow$ Pomnožimo sve sa 3

$t - 12t + 99 = 0$

$-11t = -99$

$t = 9$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

v) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

$2 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 4\frac{3^x}{3^2} = 450 \rightarrow$ Smena $3^x = t$

$6 \cdot t - 4\frac{t}{9} = 450$

$6t - \frac{4t}{9} = 450 \rightarrow$ Pomnožimo sve sa 9

$54t - 4t = 4050$

$50t = 4050$

$t = \frac{4050}{50}$

$t = 81$

$3^x = 81 \rightarrow$ pazi 81=3·3·3·3=3^4

$3^x = 3^4$

$x = 4$

g) $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 16$

$\frac{2^{3x}}{2^2} - \frac{2^{3x}}{2^3} - \frac{2^{3x}}{2^4} = 16 \rightarrow$ smena $2^{3x} = t$

$\frac{t}{4} - \frac{t}{8} - \frac{t}{16} = 16 \rightarrow$ sve pomnožimo sa 16

$4t - 2t - t = 256$

$t = 256$

$2^{3x} = 2^8$

$3x = 8$

$x = \frac{8}{3}$

d) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$

$\frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{2^3} = \frac{3^x}{3^2} - \frac{3^x}{3^3}$

$$\frac{2^x}{2}-\frac{2^x}{8}=\frac{3^x}{9}-\frac{3^x}{27}$$ $\rightarrow$ zajednički za levu stranu je 8 a za desnu 27

$$\frac{4\cdot 2^x-2^x}{8}=\frac{3\cdot 3^x-3^x}{27}$$

$$\frac{3\cdot 2^x}{8}=\frac{2\cdot 3^x}{27}$$ $\rightarrow$ Pomnožimo unakrsno

$$3\cdot 2^x\cdot 27=2\cdot 3^x\cdot 8$$

$2^x\cdot 81=3^x\cdot 16$ / podelimo sa 3^x I sa 81

$$\frac{2^x}{3^x}=\frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$x=4$$

A mogli smo da razmišljamo i ovako:

$$2^x\cdot 81=3^x\cdot 16$$

$$2^x\cdot 3^4=3^x\cdot 2^4$$

Očigledno je $x=4$

<u>3) Reši jednačine:</u>

a) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$

$4^x-5\cdot 2^x+4=0\rightarrow$ Pošto je $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$ uzećemo smenu $2^x=t$ pa će onda biti

$t^2-5t+4=0 \qquad 4^x=t^2$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$$

$$t_1=4$$

$$t_2=1$$

Vratimo se sad u smenu:

$2^x=4$

$2^x=2^2$ ili $2^x=1$

$x=2 \qquad x=0$

b) $16^x - 4^x - 2 = 0 \rightarrow$ smena je $4^x = t$ pa je $16^x = 4^{2x} = t^2$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = -1$$

$4^x = 2$

$2^{2x} = 2^1$

$2x = 1$ ili $4^x = -1$ ovde nema rešenja jer je $y = a^x$ uvek pozitivna!!!

$x = \frac{1}{2}$

v) $5^x - 5^{3-x} = 20$

$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20 \rightarrow$ smena $5^x = t$

$t - \frac{125}{t} = 20 \rightarrow$ celu jednačinu pomnožimo sa t

$$t^2 - 125 = 20t$$

$$t^2 - 20t - 125 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{20 \pm 30}{2}$$

$$t_1 = 25$$

$$t_2 = -5$$

Pa je $5^x = 25$ ili $5^x = -5$ Nema rešenja

$5^x = 5^2$

$x = 2$

g) $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$

$\frac{5^{2x}}{5^3} = 2 \cdot \frac{5^x}{5^2} + 3 \rightarrow$ smena $5^x = t$

$\frac{t^2}{125} = \frac{2t}{25} + 3 \rightarrow$ sve pomnožimo sa 125

$t^2 = 10t + 375$

$t^2 - 10t - 375 = 0$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm 40}{2}$

$t_1 = 25$

$t_2 = -15$

Vratimo se u smenu:

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$ ili $5^x = -15$ nema rešenja $5^x > 0$

$x = 2$

d) $(11^x - 11)^2 = 11^x + 99 \rightarrow$ Ovde ćemo odmah uzeti smenu $11^x = t$

$(t-11)^2 = t + 99$

$t^2 - 22t + 121 - t - 99 = 0$

$t^2 - 23t + 22 = 0$

$t_{1,2} = \frac{23 \pm 21}{2}$

$t_1 = 22$

$t_2 = 1$

Vratimo se u smenu:

$11^x = 22$, $x = \log_{11} 22$ ili $11^x = 1$, $x = 0$

4) Rešiti jednačine:

a) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

b) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 * 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

v) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$

Rešenja

a) Najpre odredimo oblast definisanosti, pošto je u zadatku data korena funkcija, to je $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$