Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar-El-Mehraz
Département de Physique
FES

Année universitaire 2016 - 2017

TRAVAUX-DIRIGES D'OPTIQUE GEOMETRIQUE
FILIERE SMP/SMC (S2)
SERIE N°3

Exercice n°1 :

Un dioptre sphérique de sommet S, de centre C et de rayon de courbure $R = 10\ cm$, sépare l'air d'indice $n = 1$ et un milieu d'indice $n' = 4/3$. Sa face convexe est tournée du côté de l'air.

1°) Trouver la position des foyers principaux F et F' de ce dioptre. Ce dioptre est-il convergent où divergent ? Justifier.

2°) Trouver la position d'un objet réel $\overline{AB}$ perpendiculaire à l'axe optique et de son image $\overline{A'B'}$ pour le grandissement linéaire $\gamma = +2$.

3°) Faire une représentation géométrique.

Exercice n°2 :

Soit un dioptre sphérique de sommet S et de centre C séparant l'air d'indice $n_1 = 1$ d'un milieu d'indice $n_2 = 1,5$. Un petit objet virtuel $\overline{AB}$ est placé à une distance $d = 10$ cm du sommet du dioptre. Déterminer :

1°) Le rayon de courbure $R = \overline{SC}$ de ce dioptre lorsqu'il donne une image réelle $\overline{A'B'}$ située à une distance :

a- $d' = 30\ cm$

b- $d' = 15\ cm$

c- $d' = 10\ cm$

2°) Les grandissements linéaires transversaux correspondants à chacun des cas.

Exercice n°3 :

On considère un dioptre sphérique de centre C, de sommet S et de rayon de courbure $R = 50\ cm$ séparant un milieu objet d'indice $n_1 = 1,5$ d'un milieu image d'indice $n_2 = 1$. Le centre C est dans le milieu d'indice n_2.

1°) Calculer les positions des foyers objet F_1 et image F_2 de ce dioptre. En déduire le rapport des distances focales f/f' et leur somme $f + f'$. Que peut-on dire de la nature de ces foyers ?

2°) On place perpendiculairement à l'axe optique de ce dioptre, un petit objet AB de $2\ cm$ de hauteur et situé à une distance d du sommet S.

Déterminer la position, la grandeur et la nature de l'image $\overline{A'B'}$ de $\overline{AB}$ à travers ce dioptre dans les trois cas suivants :

a- $d = 50\ cm = \overline{AS}$

b- $d = 25\ cm = \overline{SA}$

c- $d = 100\ cm = \overline{SA}$

Faire une construction graphique pour chaque cas.

Exercice n°4 :

Une baguette de verre de longueur e et d'indice n est limitée par deux calottes sphériques de même rayon R et de sommets S et S'. Cette baguette est placée dans l'air. La longueur de la baguette est donnée par $e = SS'$.
On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.
1°) Trouver la position des foyers objet et image de chacun des dioptres sphériques.
2°) Déterminer la position du foyer image F' de la baguette. Trouver sans faire de calcul, la position du foyer F. Justifier votre réponse.
3°) Quelle relation existe-elle entre la longueur e, le rayon R et l'indice n pour que la baguette soit un système optique afocal ?
Trouver dans ce cas une relation particulière entre les foyers des deux dioptres.
Application numérique : $n = 1,50$ et $R = 2\ cm$.

Exercice n°5 :

Un poisson P se trouve dans un bocal (aquarium) en verre supposé sphérique et dont l'épaisseur est négligée. On note C le centre de ce dioptre sphérique et R son rayon. Un observateur dont l'œil est en S dans l'air regarde le poisson P qui se déplace sur l'axe optique du bocal. L'indice de l'eau $n = 4/3$ et celui de l'air $n' = 1$. La position du poisson est $\overline{SP} = x$.
Le dioptre sphérique donne de P une image P'.
1°) Déterminer la position de l'image du poisson SP' en fonction de x , n , n' et R.
2°) Exprimez le grandissement linéaire $\gamma(x)$ en fonction de x , n , n' et R.
3°) Tracez la courbe de variation de $\gamma(x)$. L'image du poisson est-elle droite ou renversée ? Quelle est sa nature ? Justifiez votre réponse.
4°) Exprimez la position de l'image $\overline{SP'}$ en fonction de γ , x , n et n'. En déduire les positions extrêmes de l'image du poisson.

Exercice n°6 : Principe de la méthode de Bessel

Un objet $\overline{A_1B_1}$ et un écran E, fixes, sont distants de $\overline{A_1E} = D = 180\ cm$. On déplace entre eux une lentille convergente L de distance focale $f' = 40\ cm$. Déterminer :
1°) Les positions de la lentille qui donnent, sur l'écran, une image nette de l'objet.
2°) Le grandissement linéaire transversal pour chacune des positions.

T.D. d'Optique géométrique
Corrigé de la série n°3
Filières SMP/SMC (S_2)
Année 2016/2017

Exercice n°1

1°) Pour déterminer la position des foyers principaux, on utilisera la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}} \qquad (1)$$

* Foyer principal objet F : il est tel que :

$\overline{SA'} \to \infty \Rightarrow A \equiv F$

$$\Rightarrow \overline{SF} = \frac{n \times \overline{SC}}{n-n'} = \frac{1 \times 10}{1 - 4/3} = -30\text{ cm}$$

* Foyer principal image F' : il est tel que :

$\overline{SA} \to \infty \Rightarrow A' \equiv F'$.

$$\Rightarrow \overline{SF'} = \frac{n' \times \overline{SC}}{(n'-n)} = \frac{4/3 \times 10}{4/3 - 1} = +40\text{ cm}.$$

on a : $\overline{SF} < 0$ et $\overline{SF'} > 0 \Rightarrow$ les foyers principaux F et F' sont <u>réels</u>.

* Vergence V :

La vergence V du dioptre sphérique est donnée par :

$$V = \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{4/3 - 1}{10 \times 10^{-2}} = 3{,}33\ m^{-1}$$

La vergence V est positive $\Rightarrow$ le dioptre est convergent.

2°) Position de l'objet $\overline{AB}$:

On sait que le grandissement linéaire :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow \overline{SA'} = \frac{n'}{n} \cdot \gamma \cdot \overline{SA} \quad (2)$$

On porte (2) dans la relation de conjugaison (1)

Ce qui donne : $$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n' \cdot n}{n' \cdot \gamma \cdot \overline{SA}} = \frac{n - n'}{\overline{SC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\overline{SA}}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{n - n'}{\overline{SC}} \Leftrightarrow \frac{n}{\overline{SA}}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) = \frac{n - n'}{\overline{SC}}$$

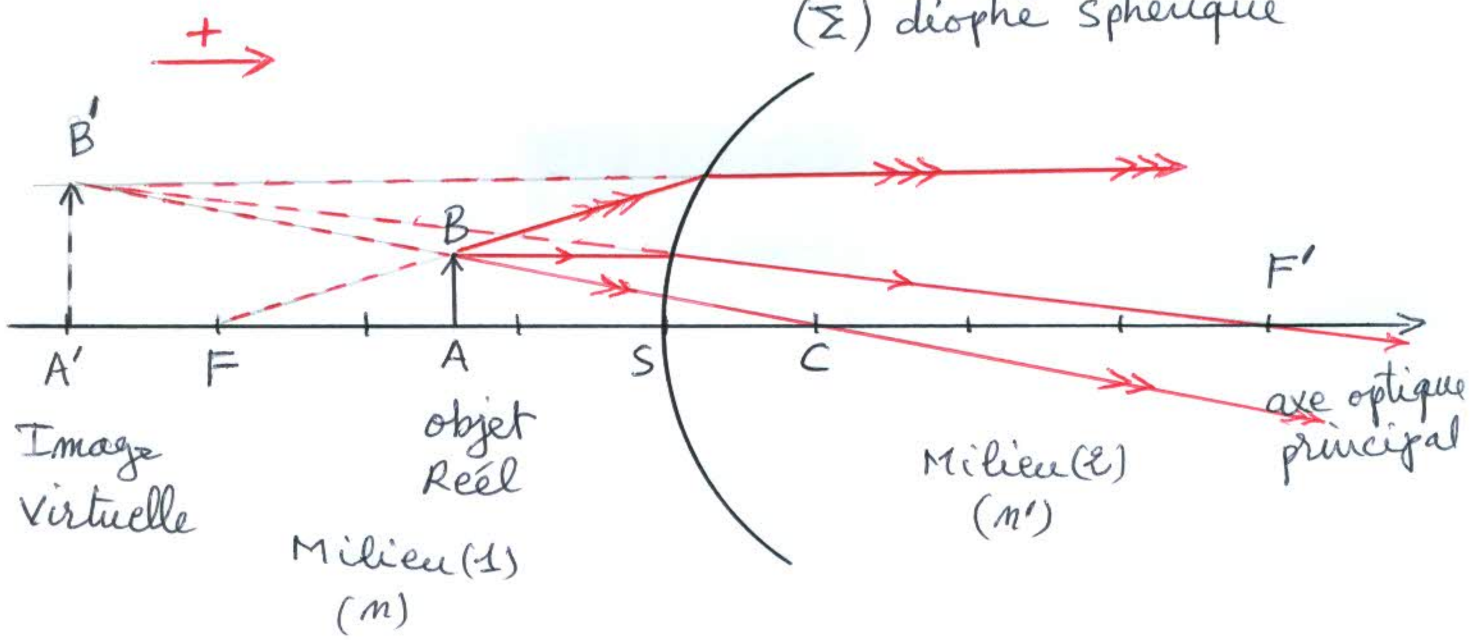
d'où la position de l'objet :

$$\overline{SA} = \frac{n \cdot \overline{SC}}{(n - n')}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) = \frac{1 \times 10}{1 - 4/3}\left(\frac{2 - 1}{2}\right) = -15\ cm.$$

et la position de l'image :

$$\overline{SA'} = \frac{n'}{n} \cdot \gamma \cdot \overline{SA} = \frac{4/3}{1} \times 2 \times (-15) = -40\ cm.$$

3°) Représentation géométrique :



Exercice n° 2

1°) On applique la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique avec origine au sommet :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} \qquad \text{avec} \quad \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} = \frac{1}{2R}$$

1.a $\overline{SA'} = 10$ cm $\Rightarrow$ $R = -10$ cm le dioptre est concave.

1.b $\overline{SA'} = 15$ cm $\Rightarrow$ $R = \infty$ le dioptre est plan

1.c $\overline{SA'} = 10$ cm $\Rightarrow$ $R = -10$ cm le dioptre est convexe.
et A est au centre C du dioptre.
Son image A' est également en C.

2°) Le grandissement linéaire transversal est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{2}{3}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

2.a $\overline{SA'} = 30$ cm $\Rightarrow$ $\gamma = 2$

2.b $\overline{SA'} = 15$ cm $\Rightarrow$ $\gamma = 1$

2.c $\overline{SA'} = 10$ cm $\Rightarrow$ $\gamma = \frac{2}{3}$

Exercice ne 3

1°) Position et nature des foyers

On a : $\overline{SF_1} = \dfrac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC}$ d'où $\overline{SF_1} = 3\overline{SC}$

$\overline{SF_2} = \dfrac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC}$ d'où $\overline{SF_2} = -2\overline{SC}$

$$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_2}} = \frac{f}{f'} = -\frac{3}{2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

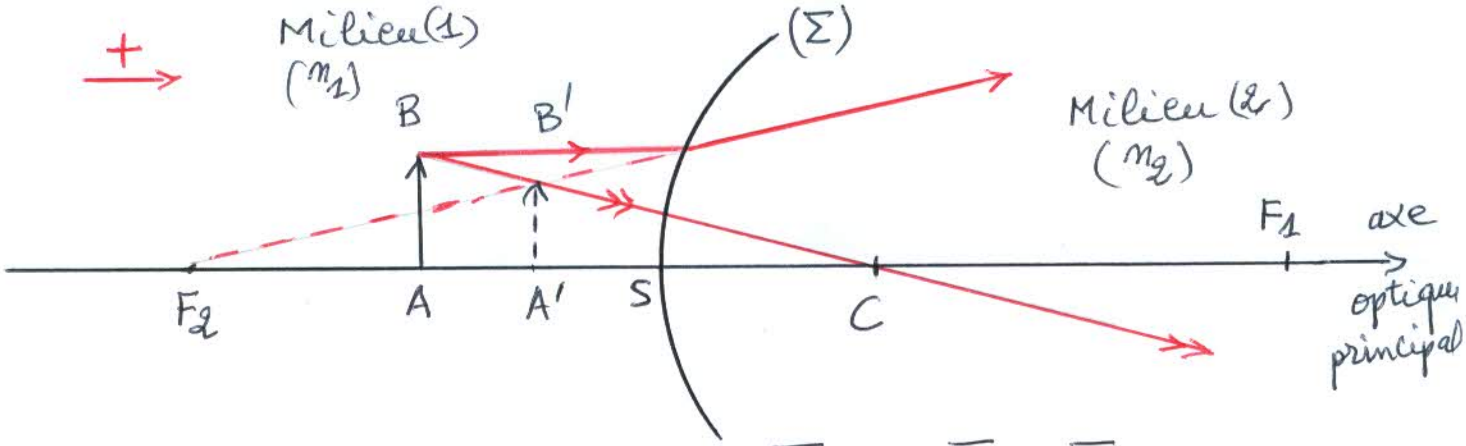
$$\overline{SF_1} - \overline{SF_2} = f - f' = \overline{SC}$$

$\overline{SC} > 0$ d'où $\overline{SF_1} > 0$ et $\overline{SF_2} < 0$ ce qui entraîne que F_1 et F_2 sont virtuels

Le dioptre est divergent.

2°) Image $\overline{A'B'}$

2.a $d = 50\text{cm} = \overline{AS} \Rightarrow \overline{AS} = \overline{SC}$: A est symétrique de C par rapport à S et $\overline{AB}$ est réel.

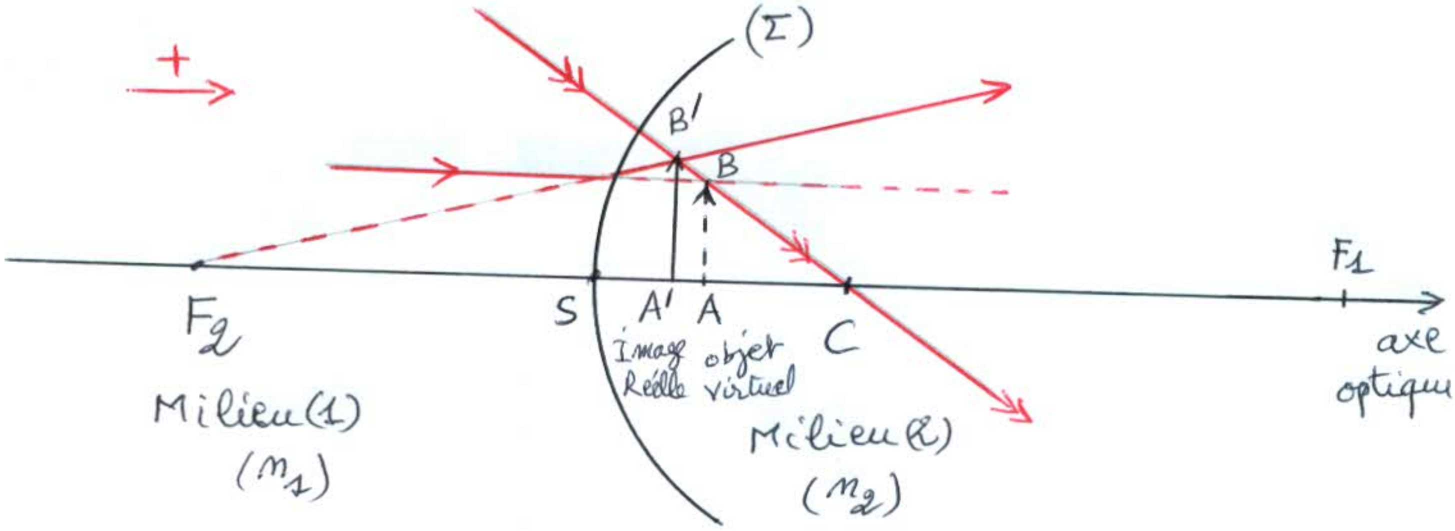


on a : $\dfrac{n_1}{\overline{SA}} - \dfrac{n_2}{\overline{SA'}} = \dfrac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA'} = -\dfrac{\overline{SC}}{2} = \dfrac{\overline{SA}}{2}$

$\gamma = \dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \dfrac{3}{4}\overline{AB}$

L'image est virtuelle, droite, placée au milieu de AS et de 1,5 cm de hauteur.

2.b $d = 25\,cm = \overline{SA} \Rightarrow \overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{2}$ et $\overline{AB}$ est virtuel



On obtient : $\overline{SA'} = \frac{2}{5}\overline{SC} = \frac{4}{5}\overline{SA}$

$$\overline{A'B'} = \frac{6}{5}\,\overline{AB}$$

L'image est réelle, droite, placée à 20 cm de S et de 2,4 cm de hauteur.

2.c. $d = 100\,cm = \overline{SA} \Rightarrow \overline{SA} = 2\overline{SC}$ et $\overline{AB}$ est virtuel

On obtient : $\overline{SA'} = 4\overline{SC} = 2\overline{SA}$

$$\overline{A'B'} = 3\overline{AB}.$$

Exercice n°4 : Bagette de verre à bouts sphériques :

1°)

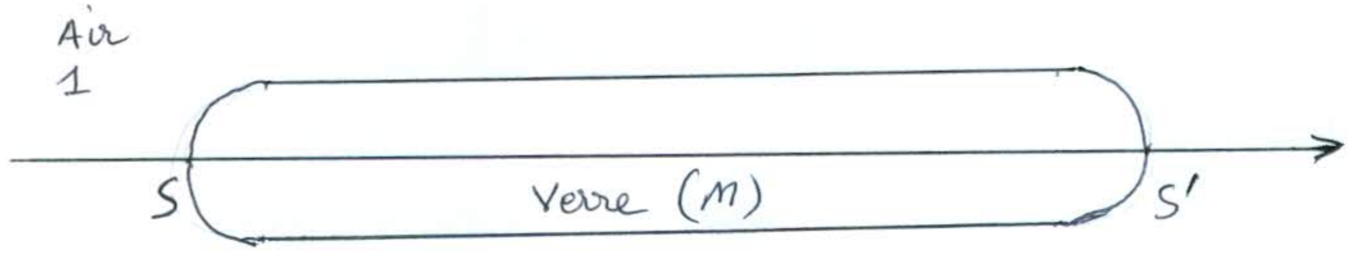


Figure : Baguette de verre.

1°) Pour le premier dioptre de sommet S, les foyers objet F_1 et image F'_1 sont donnés par :

$$\overline{SF_1} = \frac{1}{1-n}\,\overline{SC} = \frac{R}{1-n} \qquad \text{puisque } \overline{SC} = R$$

et $$\overline{SF'_1} = \frac{n}{n-1}\,\overline{SC} = \frac{n.R}{n-1}$$

Pour le second dioptre de sommet S', les foyers objet F_2 et image F'_2 sont donnés par :

$$\overline{S'F_2} = \frac{n}{n-1}\,\overline{S'C} = \frac{n\,R}{1-n} \qquad \text{puisque } \overline{S'C} = -R$$

et $$\overline{S'F'_2} = \frac{1}{1-n}\,\overline{S'C} = \frac{1.R}{n-1}$$

2°) Le foyer image F' du système est l'image d'un objet situé à l'infini dans la direction de l'axe.

On a le schéma synoptique suivant :

$$\underset{\substack{\text{Air}\\ 1}}{\infty} \xrightarrow[\text{sommet } S]{1^{\text{er}} \text{ Dioptre}} \underset{\substack{\text{Verre}\\ n}}{F'_1} \xrightarrow[\text{Sommet } S']{2^{\text{e}} \text{ Dioptre}} \underset{\substack{\text{Air}\\ 1}}{F'}$$

1^{er} Dioptre : $$\frac{1}{\infty} - \frac{n}{\overline{SF'_1}} = \frac{1-n}{\overline{SC}} \iff \frac{n}{\overline{SF'_1}} = \frac{n-1}{R}$$

2e dioptre : $\dfrac{n}{\overline{S'F'_1}} - \dfrac{1}{\overline{S'F'}} = \dfrac{n-1}{\overline{S'C}}$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\overline{S'F'_1}} - \frac{1}{\overline{S'F'}} = \frac{n-1}{-R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{S'F'}} = \frac{n}{\overline{S'F'_1}} + \frac{n-1}{R} = \frac{nR + (n-1)\,\overline{S'F'_1}}{R\,.\,\overline{S'F'_1}} \qquad (1)$$

En utilisant la relation de Chasle on peut écrire : $\overline{S'F'_1} = \overline{S'S} + \overline{SF'_1} = -e + \dfrac{n.R}{n-1}$

soit : $$\overline{S'F'_1} = \frac{e(1-n) + nR}{(n-1)} \qquad (2)$$

On porte (2) dans (1), on obtient :

$$\frac{1}{\overline{S'F'}} = \frac{nR + [e(1-n) + nR]}{R\left[\dfrac{e(1-n) + n.R}{(n-1)}\right]}$$

D'où :

$$\overline{S'F'} = \frac{n.R^2 - e(n-1)}{(n-1)\left[2nR - e(n-1)\right]}$$

La baguette est un système optique centré, son centre optique O est confondu avec le milieu du segment SS'. Ainsi, d'après le principe du retour inverse de la lumière, les foyers objet F

et image F' sont nécessairement symétriques par rapport à O.
La position du foyer objet F de la baguette est donc déduite de celle du foyer image F' et l'on a :

$$\overline{SF} = -\left\{ \frac{nR^2 - e(n-1)}{(n-1)\left[2nR - e(n-1)\right]} \right\}$$

3°/ Pour que ce système soit <u>afocal</u>, il faut que les foyers objet F et image F' soient rejetés à l'infini. On a donc la relation :

$$\left[2nR - e(n-1)\right] = 0.$$

D'où :

$$e = \frac{2n \cdot R}{(n-1)}$$

<u>Application numérique :</u>

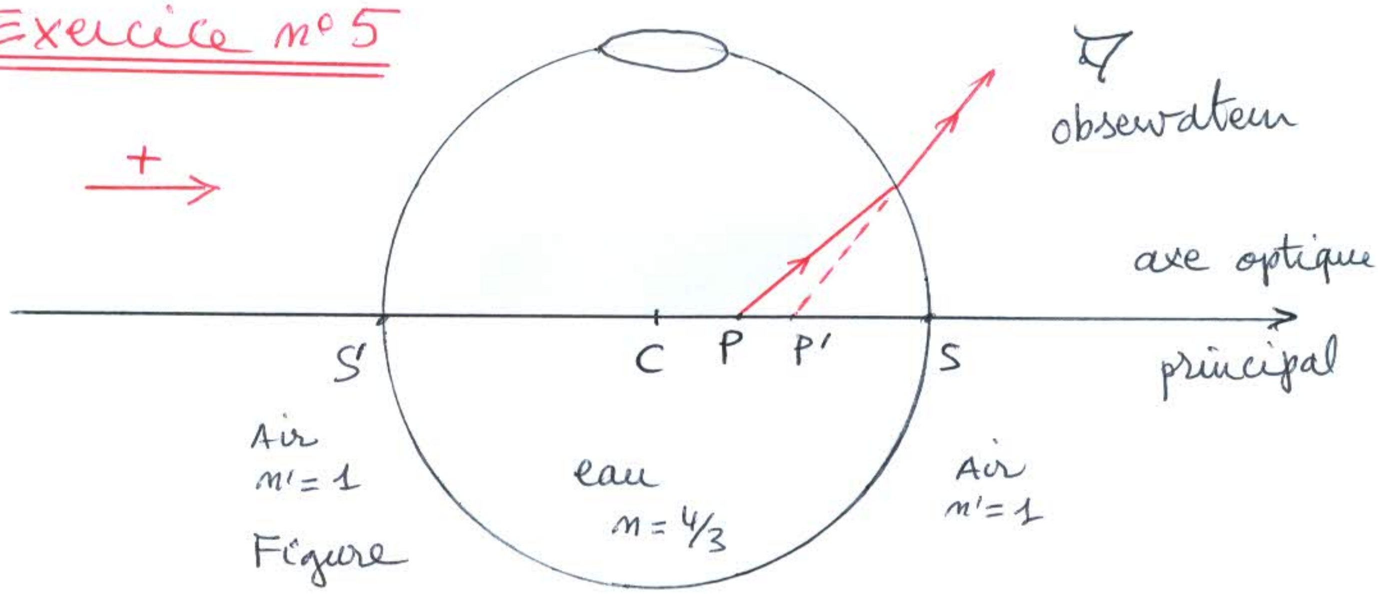
Pour $n = 1,5$ et $R = 2\,cm$, on trouve $e = 12\,cm$,
Dans ce cas, le foyer image F_1' du premier dioptre est confondu avec le foyer objet F_2 du second dioptre :

$$\overline{SF_1'} = \frac{nR}{n-1} = \frac{1,5 \times 2}{1,5-1} = 6\,cm = 3R.$$

et

$$\overline{S'F_2} = \frac{nR}{1-n} = \frac{1,5 \times 2}{1-1,5} = -6\,cm = -3R.$$

Exercice n° 5



Figure

1°) La relation de conjugaison avec origine au sommet du dioptre sphérique s'écrit :

$$\frac{n}{\overline{SP}} - \frac{n'}{\overline{SP'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}} \quad (1)$$

où $\overline{SP} = x$ est la position du poisson P / sommet S,
$\overline{SP'}$ est la position de l'image P' / sommet S,
et $\overline{SC} = -R$ est le rayon de courbure algébrique du dioptre sphérique.

La relation (1) s'écrit aussi :

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{\overline{SP'}} = \frac{n-n'}{-R}$$

D'où la position de l'image du Poisson :

$$\overline{SP'} = \frac{n' x R}{nR + (n-n')x}$$

or $n = 4/3$ et $n' = 1$

$$\Rightarrow \quad \overline{SP'} = \frac{3x \cdot R}{4R - x}$$

2°) Grandissement linéaire :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} = \frac{n.R}{nR-(n'-n)x}$$

or $n = 4/3$ et $n' = 1$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{4R}{4R+x}$$

3°) $\gamma(x)$ est une fonction de la variable x.

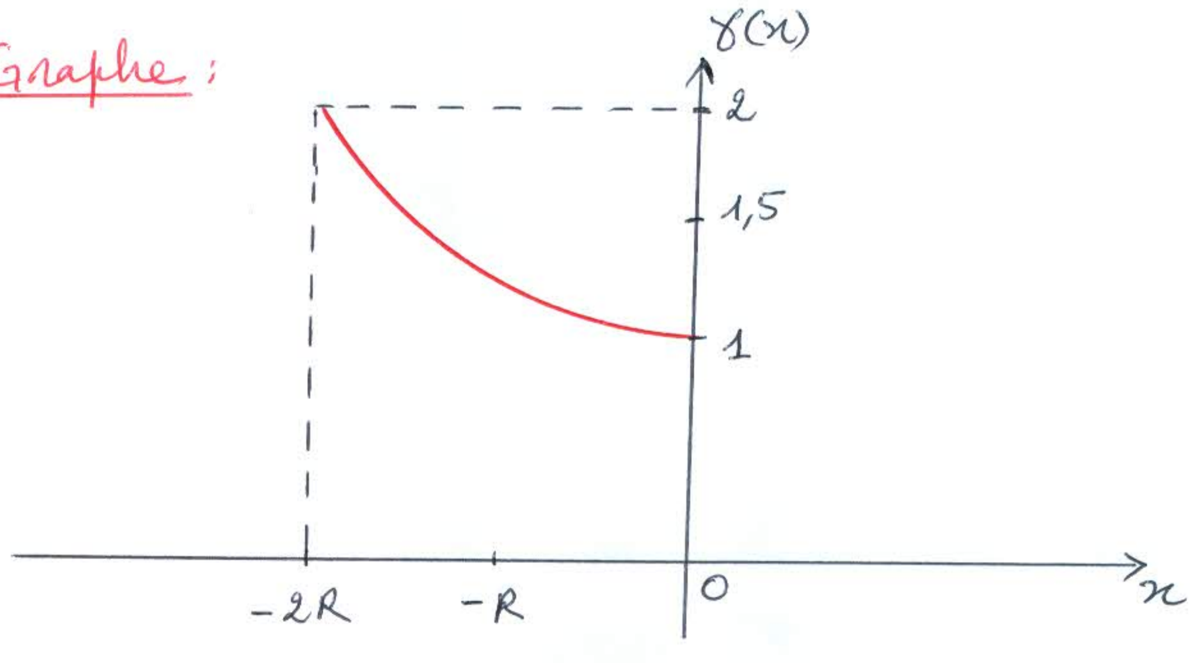
$\gamma(x) = \dfrac{4R}{4R+x}$ sa dérivée est : $\gamma'(x) = -\dfrac{4R}{(4R+x)^2}$

cette dérivée est négative $\forall x \in [-2R, 0]$.

Tableau de variations :

x	$-2R$		0
$\gamma'(x)$		$-$	
$\gamma(x)$	2	$\searrow$	1

Graphe :



$\gamma(x)$ décroit de $\gamma(-2R) = 2$ à $\gamma(0) = 1$

donc $\forall x \in [-2R, 0]$, le grandissement linéaire $\gamma(x)$ est positif, l'image du poisson est droite.

- Au sommet S du dioptre (bocal) $x = 0$ et $\gamma(0) = +1$ l'image est de même grandeur (ou taille) que celle du poisson réel.
- A l'autre extrémité du bocal ($x = -2R$) et $\gamma(-2R) = 2$ l'image du poisson est de taille double de celle du poisson réel.

L'image du poisson est virtuelle, puisqu'elle est située dans l'espace objet réel.

4°) Le grandissement linéaire : $\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}}$

D'où la position de l'image du poisson :

$$\overline{SP'} = \frac{n' \cdot \overline{SP} \cdot \gamma}{n} = \frac{n' \cdot x \cdot \gamma}{n}$$

or $n' = 1$ et $n = 4/3$ $\Longrightarrow$ $\overline{SP'} = \frac{3x\gamma}{4}$

Positions extrêmes de l'image P'

- Lorsque le poisson est au sommet S, on a : $x = 0$ et $\gamma = 1$ et $\overline{SP'} = 0$ est la première position extrême.
- Lorsque le poisson est à l'autre extrémité du bocal $x = -2R$, on a $\gamma = 2$ et $\overline{SP'} = -3R$ est la deuxième position extrême.

Pour l'observateur le poisson semble bouger entre la paroi la plus proche de son oeil ($\overline{SP'} = 0$) et une paroi distante de 3R derrière celle-ci.

Exercice n°6 Principe de la méthode de Bessel

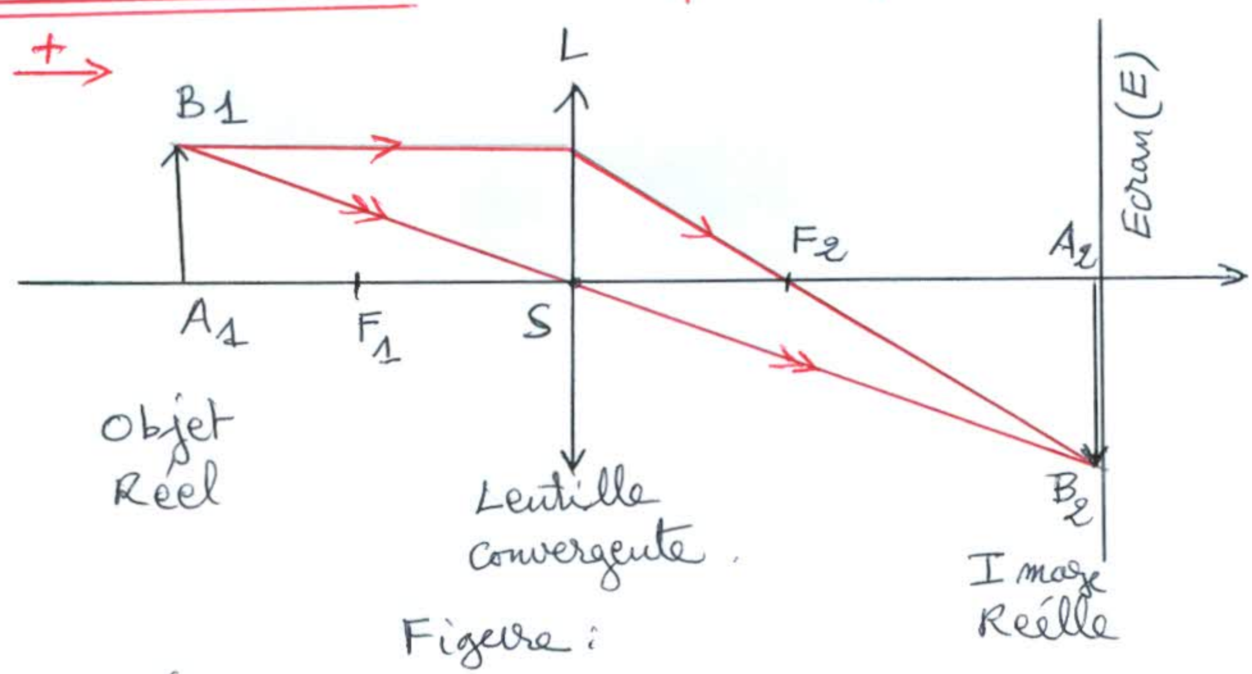


Figure :

1°) Désignons par S le centre optique de la lentille L et par F_1 et F_2 respectivement les foyers objet et image de cette lentille

Posons : $\overline{SA_1} = x$ soit $\overline{SA_2} = \overline{SA_1} + \overline{A_1A_2}$

$$\overline{SA_2} = D + x$$

Appliquons la relation de conjugaison avec origine au sommet S (lentille mince) :

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{1}{\overline{SF_2}} \quad \text{on a :} \quad \frac{1}{D+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

D'où l'équation du second degré en x :

$x^2 + Dx + Df' = 0$ dont les racines sont :

$$x_1 = (\overline{SA_1})_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} = -60 \text{ cm},$$

et $x_2 = (\overline{SA_1})_2 = \dfrac{-D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} = -120 \text{ cm}.$

qui correspondent à :

$$(\overline{SA_2})_1 = 120 \text{ cm} \quad \text{et} \quad (\overline{SA_2})_2 = 60 \text{ cm}$$

2°) Les grandissements linéaires transversaux dans les deux cas sont :

$$\gamma_1 = \frac{(\overline{SA_2})_1}{(\overline{SA_1})_1} = \frac{120}{-60} = -2$$

et

$$\gamma_2 = \frac{(\overline{SA_2})_2}{(\overline{SA_1})_2} = \frac{60}{-120} = -\frac{1}{2}$$

Remarque :

- Les deux positions se déduisent l'une de l'autre par le principe du retour inverse de la lumière. La première position étant trouvée, si on inverse le sens de propagation, permutant ainsi l'objet et l'image, on est dans la seconde position.
- Le problème est possible et admet deux solutions si $D > 4f'$. La distance d des deux positions de la lentille est donnée par la différence des racines et a pour expression : $d = \sqrt{D^2 - 4Df'}$

soit : $$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

C'est la méthode de Bessel pour la mesure de la distance focale d'une lentille convergente.