

LOGARITMI

Logaritam broja b za osnovu a je realan broj x kojim treba stepenovati osnovu a da bi se dobilo pozitivan broj b . ($a > 0, a \neq 0$) ili $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$

Važno: $b > 0$ je najčešći uslov koji postavljamo a još je $a \in R, a \neq 1, i a > 0$
 b -se zove numerus (logaritmand), a je osnova (baza)

Osnovna svojstva logaritma

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \log_a x$
6. $\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$
7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ tj. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
8. Za prelazak na neku novu bazu c : $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $a^{\log_a b} = b$

→ Ako je baza (osnova) $a=10$ takvi se logaritmi nazivaju **DEKADNI** i označavaju se $\log_{10} x = \log x$

(Znači kad nema da piše osnova, podrazumeva se da je 10)

→ Ako je osnova (baza) $a=e$ ($e \approx 2,7$) onda se takvi logaritmi zovu **PRIRODNI** I označavaju se

$$\log_e x = \ln x$$

→ Moramo voditi računa o zapisu:

$$(\log_a x)^2 = \log_a^2 x = \log_a x \cdot \log_a x$$

$$\log_a x^2 = \log_a x \cdot x = 2 \log_a x$$

Upoznajmo se sa svojstvima logaritma kroz sledeće primere:

Izračunati:

1)

$$\begin{aligned} \log_5 1 &= ? \\ \log_6 1 &= ? \\ \log_{\frac{1}{2}} 1 &= ? \\ \log 1 &= ? \\ \ln 1 &= ? \end{aligned} \quad \text{Svi ovi logaritmi za rešenje imaju 0. Znači, za bilo koju osnovu, od jedinice rešenje je 0 (} \log_a 1 = 0 \text{)}$$

2)

$$\begin{aligned} \log_{12} 12 &= ? \\ \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} &= ? \\ \log 10 &= ? \\ \ln e &= ? \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Svi ovi logaritmi za rešenje imaju 1, jer je } \log_a a = 1 \\ &\text{PAZI: } \log 10 = \log_{10} 10 = 1 \\ &\ln e = \log_e e = 1 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_6 2 + \log_6 3 &= ? \\ \text{b) } \log_{30} 2 + \log_{30} 5 + \log_{30} 3 &= ? \end{aligned}$$

Primenićemo svojstvo 3: $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$

Dakle:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_6 2 + \log_6 3 &= \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = (\text{po drugom svojstvu}) = 1 \\ \text{b) } \log_{30} 2 + \log_{30} 5 + \log_{30} 3 &= \log_{30} (2 \cdot 5 \cdot 3) = \log_{30} 30 = 1 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_5 10 - \log_5 2 &= ? \\ \text{b) } \log_2 20 - \log_2 10 &= ? \end{aligned}$$

Primenićemo: $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

Dakle:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_5 10 - \log_5 2 &= \log_5 \frac{10}{2} = \log_5 5 = 1 \\ \text{b) } \log_2 20 - \log_2 10 &= \log_2 \frac{20}{10} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

5) Izračunati:

a) $\log_2 8 = ?$

b) $\log_5 \frac{1}{125} = ?$ Ovde ćemo upotrebiti $\log_a x^n = n \log_a x$

v) $\log_a \sqrt[5]{a^2} = ?$ Podsetnik: $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ i $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

a)

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$$

b)

$$\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 \frac{1}{5^3} = \log_5 5^{-3} = -3 \log_5 5 = -3 \cdot 1 = -3$$

v)

$$\log_a \sqrt[5]{a^2} = \log_a a^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_a a = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

6) Izračunati:

a) $\log_{81} 3 = ?$

b) $\log_{\sqrt{2}} 2 = ?$

v) $\log_{\sqrt{3}} 27 = ?$

Ovde ćemo upotrebiti da je $\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$

a) $\log_{81} 3 = \log_{3^4} 3 = \frac{1}{4} \log_3 3 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

b) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$

v) $\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

7) Izračunati:

a) $\log_5 2 \cdot \log_2 5 = ?$

Važi:

b) $\log_{10} 15 \cdot \log_{15} 10 = ?$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Dakle rešenja oba ova zadačića je 1.

8) Izračunati:

a) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = ?$

b) Ako je $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$ izračunati $\log_{45} 100 = ?$

Rešenje:

Ovde ćemo primeniti prelazak na novu osnovu: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

a)

Ajde recimo da uzmemo novu osnovu 10 tada je: $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3}$; $\log_4 3 = \frac{\log 3}{\log 4}$,

itd.

Dakle:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 6} \cdot \frac{\log 6}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 8} =$$

Kao što vidimo dosta toga se "skratiti" = $\frac{\log 2}{\log 8}$ = (sad vidimo da je bilo bolje da

uzmemo osnovu 2, ali nema veze vraćamo se u $= \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$)

$$= \log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

b)

$$\log_5 2 = a \quad \wedge \quad \log_5 3 = b$$

$$\begin{aligned}\log_{45} 100 &= (\text{ovde je jasno da nova osnova mora biti 5.}) = \frac{\log_5 100}{\log_5 45} = \\ &= \frac{\log_5 10^2}{\log_5 (5 \cdot 9)} = \frac{2 \log_5 10}{\log_5 5 + \log_5 9} = \frac{2 \log_5 (5 \cdot 2)}{1 + \log_5 3^2} = \frac{2(\log_5 5 + \log_5 2)}{1 + 2 \log_5 3} = \\ &= \frac{2(1 + \log_5 2)}{1 + 2 \log_5 3} = \frac{2(1 + a)}{1 + 2b}\end{aligned}$$

9) Izračunati:

a) $3^{\log_3 81} = ?$

b) $10^{\log 5} = ?$

Primenjujemo:

$$a^{\log_a b} = ?$$

Dakle: $3^{\log_3 81} = 81$ i $10^{\log 5} = 5$

Sad kad smo se upoznali sa osnovnim svojstvima logaritama , pokažimo još neke osnovne tipove zadataka:

1) Logaritmovati sledeće izraze za osnovu 10.

a) $A = \frac{x \cdot y}{z}$

b) $B = \frac{x^2 \cdot y^3}{z^5}$

v) $C = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{y}}$

d) $D = \sqrt[3]{5x^4y^3}$

Rešenja:

a)

$$A = \frac{x \cdot y}{z}$$

$$\log A = \log \frac{xy}{z} = \log(xy) - \log z = \log x + \log y - \log z$$

b)

$$B = \frac{x^2 \cdot y^3}{z^5}$$

$$\begin{aligned}\log B &= \log \frac{x^2 \cdot y^3}{z^5} = \log(x^2 \cdot y^3) - \log z^5 = \log x^2 + \log y^3 - \log z^5 = \\ &= 2 \log x + 3 \log y - 5 \log z\end{aligned}$$

v)

$$C = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{z}} \quad \text{PAZI: } \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}, \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \log C &= \log \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{z}} = \log \sqrt[3]{x} - \log (\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{z}) = \log x^{\frac{1}{3}} - \left(\log y^{\frac{2}{5}} + \log z^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \log x - \frac{2}{5} \log y - \frac{1}{2} \log z \end{aligned}$$

g)

$$D = \sqrt[3]{5x^4y^3}$$

$$D = \sqrt[3]{5x^4y^3} = \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{y^3} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot y$$

$$\log D = \log \left(5^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot y \right)$$

$$= \frac{1}{3} \log 5 + \frac{4}{3} \log x + \log y$$

2) Rešiti po x jednačine:

a) $\log x = \log 4 + 2 \log 5 + \log 6 - \log 15$

b) $\log x + \log 3 = 2 \log r + \log \pi + \log H$

v) $2 \log x - 3 \log a = \log 5 + \log b + \frac{1}{2} \log c$

Rešenje: Ideja je da se upotrebom svojstva logaritma ‘spakuju’ obe strane!!! Dobićemo izraz $\log x = \log \otimes$, ovde izvršimo takozvano **ANTILOGARITMOVANJE**, tj. skratimo logaritme i dobijemo $x = \otimes$

a) $\log x = \log 4 + 2 \log 5 + \log 6 - \log 15$ **SAVET:** Prvo brojeve ispred prebacimo kao stepen numerusa!!! $n \log_a x = \log_a x^n$

$$\log x = \log 4 + \log 5^2 + \log 6 - \log 15$$

$$\log x = \log \frac{4 \cdot 25 \cdot 6}{15}$$

$$\log x = \log \frac{600}{15}$$

$$\log x = \log 40 \dots \dots \dots / \text{ANTILOGARITMOVANJE}$$

$$x = 40$$

b) $\log x + \log 3 = 2 \log r + \log \pi + \log H$

$\log(x \cdot 3) = \log r^2 + \log \pi + \log H$

$\log(3x) = \log(r^2 \pi H)$ / ANTILOGARITMOVANJE

$3x = r^2 \pi H$

$x = \frac{r^2 \pi H}{3}$(V kupe)

v)

$2 \log x - 3 \log a = \log 5 + \log b + \frac{1}{2} \log c$

$\log x^2 - \log a^3 = \log 5 + \log b + \log c^{\frac{1}{2}}$

$\log \frac{x^2}{a^3} = \log 5 \cdot b \cdot \sqrt{c}$ / ANTILOGARITMOVANJE

$\frac{x^2}{a^3} = 5b\sqrt{c}$

$x^2 = 5a^3 b \sqrt{c}$

$x = \sqrt{5a^3 b \sqrt{c}}$

3) Ako je $\log_{14} 7 = a$ i $\log_{14} 5 = b$ Izračunati $\log_{35} 28 = ?$

Rešenje: ovo je onaj tip zadatka gde moramo uzeti novu osnovu, naravno, to će biti 14.

$$\begin{aligned} \log_{35} 28 &= \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} \frac{196}{7}}{\log_{14}(7 \cdot 5)} = \frac{\log_{14} 196 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{\log_{14} 14^2 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \\ &= \frac{2 \log_{14} 14 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{2 - a}{a + b} \end{aligned}$$

Vi se sada naravno pitate kako smo mi znali da napišemo $28 = \frac{196}{7} = \frac{14^2}{7}$. Probajte razne opcije, nešto mora da ‘upali’, uglavnom, iskustvo je presudno!!!