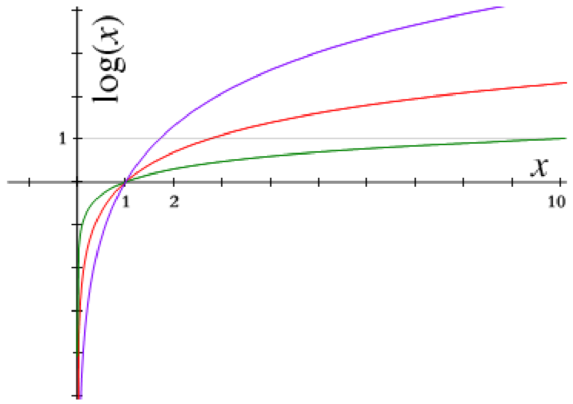
Logaritam



Logaritmi različitih osnova: crveni je za osnovu e*, zeleni za osnovu 10, a ljubičasti za osnovu 1.7. Logaritmi svih osnova prolaze kroz tačku (1,0).*

U matematici **logaritam** je funkcija koja određuje eksponent u jednačini $b^n = x$. Logaritam je inverzna funkcija u odnosu na eksponencijalnu. Obično se piše kao $\log b\, x = n$. Primer:

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

Logaritam je jedna od tri vrlo srodne funkcije. Ukoliko imamo $b^n = x$, b može da se odredi korenovanjem, n logaritmovanjem, a x eksponencijalnom funkcijom.

Negativni logaritam se piše kao $n = -\log b\, x$; primer njegove upotrebe je u hemiji gde predstavlja koncentraciju vodonika (pH vrednost).

Antilogaritam se koristi da označi funkciju inverznu logaritmu (eksponencijalna funkcija, odnosno stepenovanje). Piše se kao $\mathrm{antilog} b(n)$ i znači isto što i b^n.

Dvostruki logaritam je inverzna funkcija dvostruke eksponencijalne funkcije. **Super logaritam** ili **hiper logaritam** je inverzna funkcija super eksponencijalne funkcije. Super logaritam za x raste sporije i od dvostrukog logaritma za veliko x.

Diskretni logaritam se pominje u teoriji konačnih grupa. Veruje se da je za neke konačne grupe diskretni logaritam veoma teško izračunati, dok je diskretne eksponencijale veoma lako izračunati. Ova asimetrija ima primene u kriptografiji.

1 Logaritamska i eksponencijalna funkcija: inverzne funkcije

Za svaku osnovu (b u b^n), postoji jedna logaritamska i jedna eksponencijalna funkcija; one su inverzne funkcije. Za $b^n = x$:

- Eksponencijalna funkcija određuje x za dato n. Da bi se našlo x, treba b pomnožiti samim sobom n puta.
- Logaritamska funkcija određuje n za dato x. n je onaj broj puta koliko treba podeliti x sa b da bi se dostiglo 1.

2 Upotreba logaritamske funkcije

Funkcija $\log b(x)$ je definisana kada je x pozitivni realni broj i b pozitivni realni broj različit od 1. Pogledati logaritamske jednačine za nekoliko pravila u vezi logaritamske funkcije. Logaritamska funkcija može biti definisana i za kompleksne argumente. Ovo je objašnjeno na strani prirodnog logaritma.

Za cele brojeve b i x, broj $\log b(x)$ je iracionalan (tj. ne može se izraziti kao razlomak dva cela broja) ako b ili x ima prost faktor koji drugi nema (tj. ako im je najveći zajednički delilac 1, a i b i x su veći od 1). U nekim slučajevima, ovu činjenicu je veoma lako dokazati. Na primer: ako je $\log_2 3$ racionalan broj, tada bismo imali $\log_2 3 = n/m$ za neka dva pozitivna cela broja n i m, iz čega bi važilo $2^n = 3^m$. Međutim, poslednja jednačina je nemoguća jer je 2^n paran broj, a 3^m neparan broj.

2.1 Nespecificirana osnova

- Matematičari generalno razumeju ili “$\ln(x)$" ili “$\log(x)$" da znači $\log_e(x)$, tj. prirodni logaritam, a pišu “$\log_{10}(x)$" samo ako je u pitanju dekadni logaritam.
- Inženjeri, biolozi i još neki pišu samo “$\ln(x)$" ili (ređe) “$\log_e(x)$" kada se misli na prirodni logaritam broja x, a koriste “$\log(x)$" da označe $\log_{10}(x)$ ili, u računarstvu, binarni logaritam $\log_2(x)$.
- Ponekad se $\mathrm{Log}(x)$ (sa velikim slovom L) koristi da označi $\log_{10}(x)$ od strane ljudi koji koriste $\log(x)$ (sa malim slovom l) da označe $\log e(x)$.

- U većini programskih jezika uključujući i C programski jezik, C++, Pascal, Fortran i BASIC programski jezik, “log” ili “LOG” označava prirodni logaritam.

2.2 Promena osnove

Iako postoji nekoliko korisnih jednačina, najvažnija za upotrebu kalkulatora je naći logaritam sa osnovom različitom u odnosu na onu ugrađenu u sam kalkulator (obično su ugrađene log*e* i $\log_{10}$). Da bismo našli logaritam sa osnovom *b* koristeći neku drugu osnovu *k*:

$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$$

Sve ovo ukazuje da su sve logaritamske fukcije (bez obzira na osnovu) slične jedna drugoj.

3 Upotrebe logaritamske funkcije

Logaritmi su korisni u rešavanju jednačina gde je nepoznat eksponent. Logaritmi imaju prost izvod, tako da se često koriste kao rešenja integrala. Dalje, veliki broj jedinica u nauci se izražava preko logaritama drugih jedinica; pogledati logaritamsku skalu za objašnjenje i listu jedinica.

3.1 Lakše računice

Logaritmi prebacuju fokus sa običnih brojeva na eksponente. Dokle god se ista osnova koristi, ovime su neke operacije olakšane:

Pre upotrebe elektronskih kalkulatora, ovo je činilo teške operacije sa dva broja lakšim. Jednostavno bi našli logaritam oba broja (za množenje i deljenje) ili samo prvog broja (za korenovanje ili gde je jedan broj već eksponent) u logaritamskoj tablici i izvršili prostiju operaciju nad njima.

3.2 Matematička analiza

Za izračunavanje izvoda logaritamske funkcije, koristi se sledeća formula

$$\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{1}{x\ln(b)} = \frac{\log_b(e)}{x}$$

gde je *ln* prirodni logaritam, tj. sa osnovom *e*. Puštajući da *b* = *e*:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$

Može se videti da sledeća formula daje integral logaritamske funkcije

$$\int \log_b(x)\,dx = x\log_b(x) - \frac{x}{\ln(b)} + C = x\log_b\left(\frac{x}{e}\right) + C$$

4 Istorija

Jost Birgi, švajcarski proizvođač satova je prvi primetio logaritme. Metod prirodnog logaritma je prvi predložio 1614 Džon Neper u svojoj knjizi *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Ovaj metod je doprineo u napretku nauke, a posebno astronomije čineći neke teške računice mogućim. Sve do upotrebe računara u nauci, ovaj metod je korišćen u svim granama praktične matematike. Pored svoje upotrebe u računicama, logaritmi su popunili važno mesto u višoj, teoretskoj matematici.

U početku, Neper je logaritme zvao “veštačkim brojevima”, a antilogaritme “prirodnim brojevima”. Kasnije, Neper je formirao reč *logaritam*, zvučnu kovanicu koja je trebala da označi odnos: λογος (*logos*) i αριθμος (*arithmos*) što predstavlja broj. Termin antilogaritam je uveden pred kraj 17. veka i, iako se nikada nije preterano koristio u matematici, postojao je u tablicama dok nije izašao iz upotrebe.

4.1 Logaritamske tablice

Pre računara i kalkulatora, upotreba logaritama je značila upotrebu logaritamskih tablica koje su morale biti ručno pravljene. Logaritmi sa osnovom 10 su bili najzgodniji kada upotreba elektronskih sredstava nije bila dostupna.

Bridžs je 1617. godine objavio prvu tablicu logaritama sa osnovom 10 svih celih brojeva do 1000 sa tačnošću do osam decimalnih mesta. Nastavio je 1624. u delu *Arithmetica Logarithmica* sa tablicom koja je sadržala logaritme svih celih brojeva od 1 do 20.000 i od 90.000 do 100.000 sa tačnošću od četrnaest decimalnih mesta, kao i uvod u kome su teorija i upotreba logaritama u potpunosti razvijeni. Interval od 20.000 do 90.000 je popunio Adrijan Vlaku (Adrian Vlacq), holandski računar, ali u njegovoj tablici, koja se pojavila 1628, logaritmi su dati na samo deset decimala.

Kalet je 1795. dao logaritme od 100.000 do 108.000 sa tačnošću do osme decimale. Jedina bitna ekstenzija Vlakuove tablice je dao Sang 1871. čija je tablica imala logaritme svih brojeva do 200.000 na sedam decimala.

Brigs i Vlaku su takođe objavili originalne tablice logaritama trigonometrijskih funkcija.

Pored pomenutih tablica, velika kolekcija pod imenom *Tables du Cadastre* je konstruisana pod vođstvom Pronija, sa originalnim računicama, pod patronatom francuske republičke vlasti oko 1700. godine. Ovaj rad, koji je sadržao logaritme svih brojeva do 100.000 na devetnaest decimala i brojeva od 100.000 do 200.000 na dvadeset četiri decimale postoji samo u rukopisu u pariskoj opservatoriji.

Današnjim studentima koji imaju mogućnost korišćenja računara i elektronskih kalkulatora, rad koji je uložen u ove tablice je samo mali indikator velike važnosti logaritama.

5 Algoritam

Da bi se izračunao log$b$(x) ukoliko su b i x racionalni brojevi i $x \geq b > 1$:

Neka je n_0 najveći ceo broj takav da je $b^{n_0} \leq x$ ili,

$$n_0 = \lfloor \log_b(x) \rfloor$$

onda

$$\log_b(x) = n_0 + \frac{1}{\log_{x/b^{n_0}}(b)}$$

Ovaj algoritam rekurzivno primenjen daje verižni razlomak

$$\log_b(x) = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \cdots}}}.$$

Dati logaritam je za uglavnom iracionalan za većinu ulaznih promenljivih.

6 Vidi još

- Logaritamske jednačine
- Logaritamska skala

7 Text and image sources, contributors, and licenses

7.1 Text

- **Logaritam** *Source:* http://sh.wikipedia.org/wiki/Logaritam?oldid=8841382 *Contributors:* Node ue, Autobot, GregorB, MerlIwBot, Kolega2357 i Kolega2357-Bot

7.2 Images

- **Datoteka:Commons-logo.svg** *Source:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg *License:* Public domain *Contributors:* This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) *Original artist:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **Datoteka:Disambig_bordered_fade.svg** *Source:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fd/Disambig_bordered_fade.svg *License:* CC-BY-SA-3.0 *Contributors:* Own drawing by Stephan Baum *Original artist:* Stephan Baum
- **Datoteka:Logarithms.png** *Source:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e0/Logarithms.png *License:* CC-BY-SA-3.0 *Contributors:* ? *Original artist:* ?

7.3 Content license