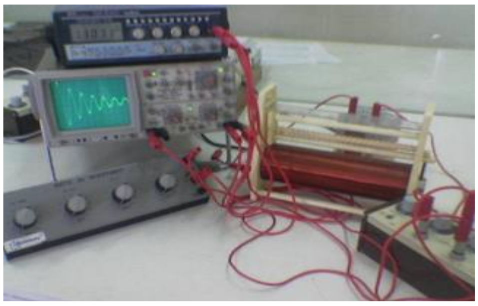
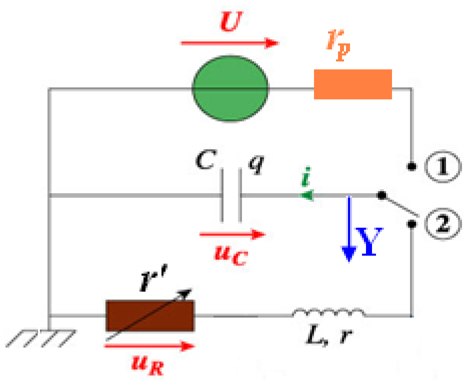
Troisième Partie : Electricité Unité 3 2^{éme} Bac SVT	Les oscillations libres dans un circuit RLC série	Groupe Scolaire ALKAWTAR 2020/2021

I – Décharge d'un condensateur dans une bobine :

1– Etude expérimentale :



On réalise le **montage expérimental** ci-contre.
On **bascule** l'**interrupteur** en ***position* 1** pendant une **période de temps suffisante**.
On **bascule** l'**interrupteur** en ***position* 2**, pour obtenir un **circuit *RLC* série**. On **visualise** $u_C(t)$ la **tension** aux **bornes** du **condensateur**.



a- Pourquoi on **bascule** l'**interrupteur** en ***position* 1**
On **bascule** l'**interrupteur** en ***position* 1** pour **charger** le **condensateur**.

b- Quel **phénomène** se produit lorsqu'on **bascule** l'**interrupteur** en ***position* 2** ?
Le **phénomène** qui se produit est la **décharge** d'un **condensateur** dans une **bobine**.

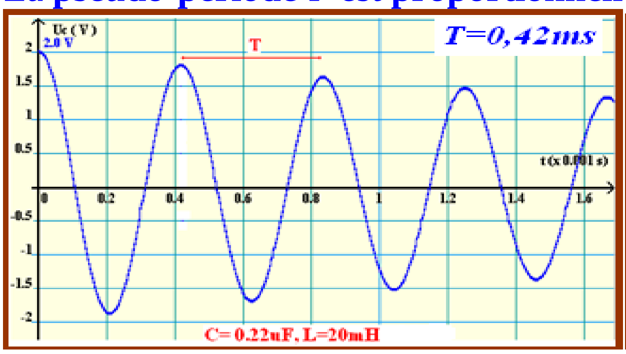
c- Comment l'**amplitude** et le **signal** de la **tension** $u_C(t)$ **varient**-ils ? est-il une **fonction périodique** ?

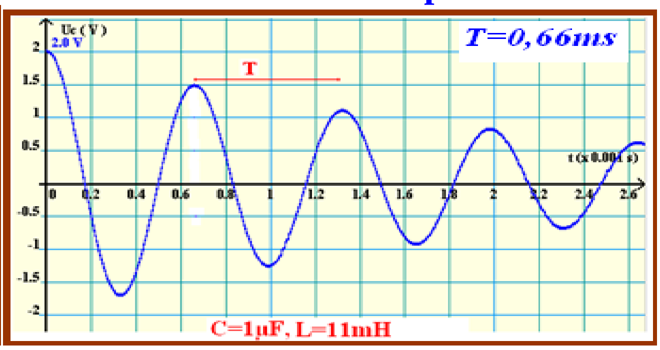
L'**amplitude** de la **tension** $u_C(t)$ **décroît alternativement** au cours du **temps**, on dit qu'il est un **oscillateur amorti**.
Alors $u_C(t)$ est une **fonction non périodique**.

d- On appelle la **pseudo-période** T est la **durée** séparant **deux valeurs maximales successives** de la **tension** $u_C(t)$. Déterminer **graphiquement** la **valeur** de T.
On trouve **graphiquement** $T = 0,3\ ms$.

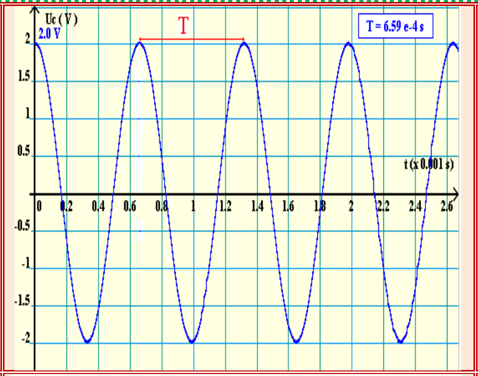
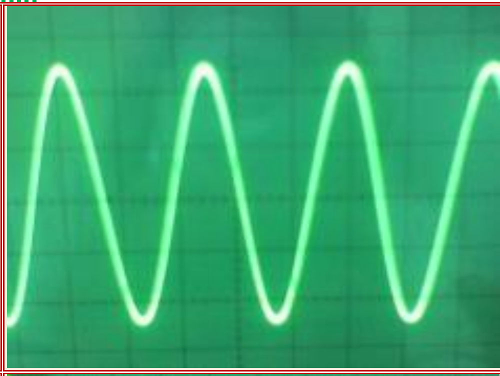
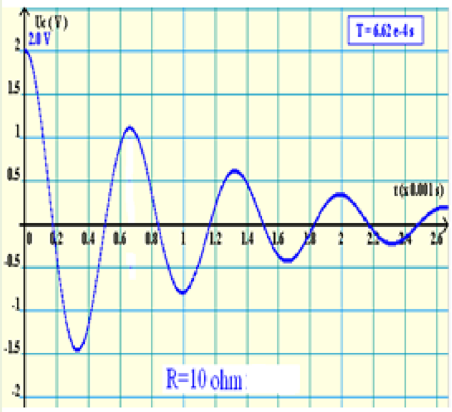
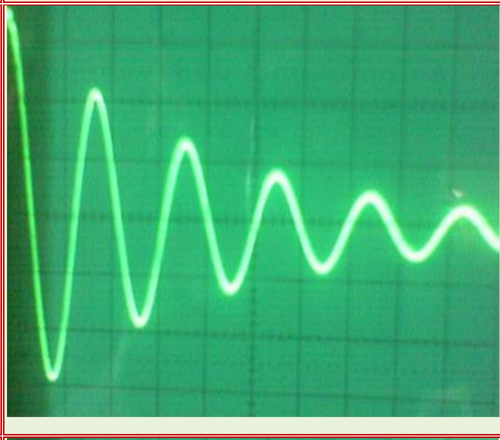
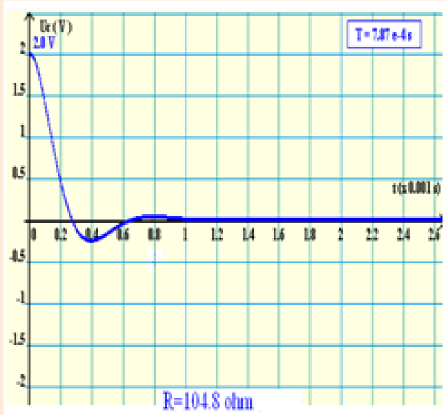
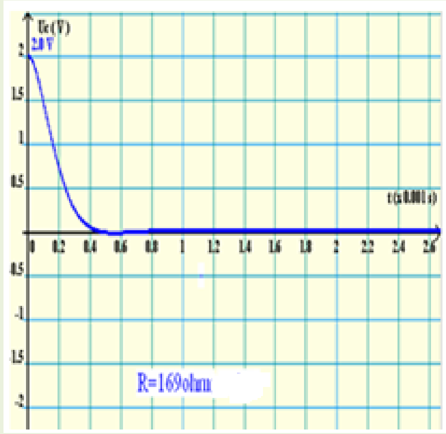
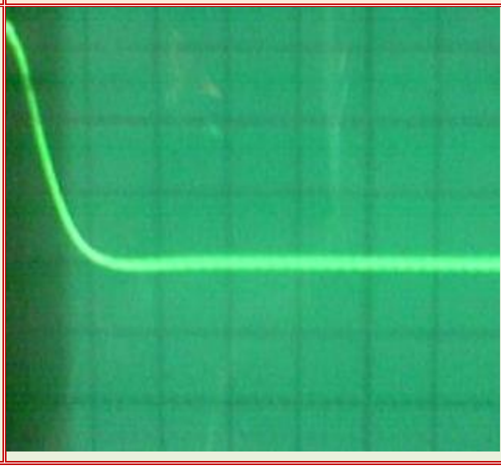
e- Quel est l'**influence** de la **résistance** R sur l'**amplitude** et sur la **pseudo-période** T ?
L'augmentation de la **résistance** R est **proportionnelle** à la **diminution** de $u_C(t)$
La **pseudo-période** T ne dépend pas de la **résistance** R.

f- Quel est l'**influence** de l'**inductance** L et la **capacité** C sur la **pseudo-période** T ?
La **pseudo-période** T est **proportionnelle** à l'**inductance** L et à la **capacité** C.





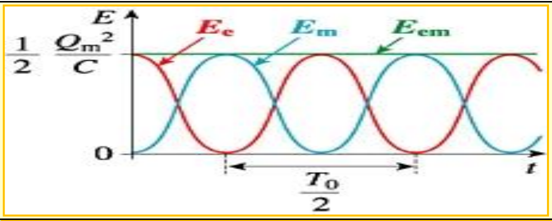
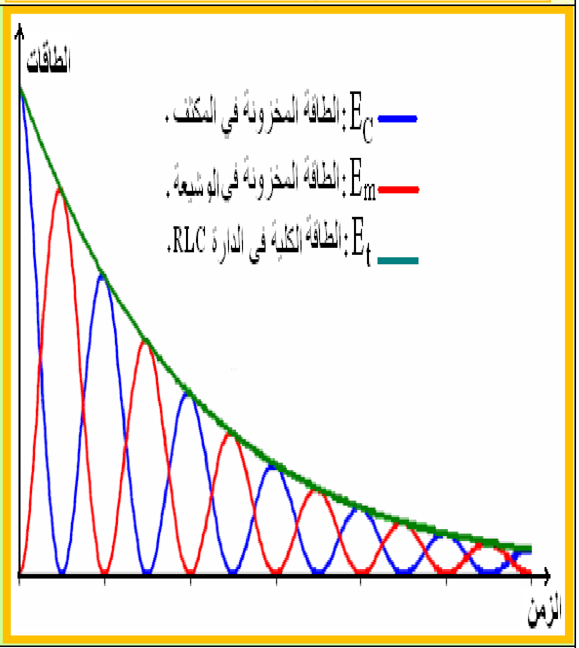
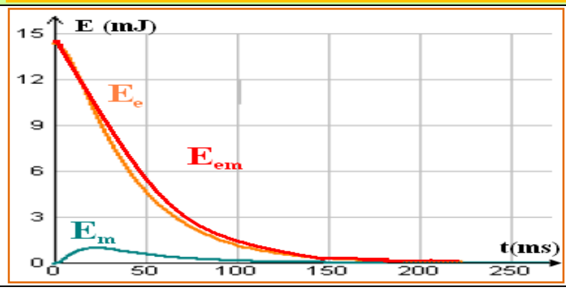
2– Régimes d’oscillations libre d’un circuit *RLC* série :

Régime périodique	$R = 0$ Oscillations libres et non amortie		
Régime pseudo-périodique	***R petite*** L’amplitude de la tension décroit $u_C(t)$ au cours du temps		
Régime critique	***R grande*** $R = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$		
Régime apériodique	R très grande Les oscillations disparaissent car il y a un amortissement important		

La décharge d'un condensateur chargé, dans un circuit *RLC*, conduit à créer des oscillations libres (n'alimentant pas le *RLC* par l’énergie après l’instant initial) et amorties (l’amplitude de la tension $u_C(t)$ décroît avec le temps). On dit que le circuit *RLC* série est un oscillateur électrique libre et amorti.

Selon la valeur de la résistance, on distingue les régimes d'oscillations : régime périodique – régime pseudo-périodique - régime critique - régime apériodique.
La pseudo-période T est la durée séparant deux valeurs maximales successives de la tension $u_C(t)$.
La pseudo- période T ne dépend pas de la résistance R, mais elle dépende de l'inductance L et la capacité C.

3– Interprétation énergétique :

Régime périodique	**L'énergie totale du circuit se conserve car la résistance du circuit est nulle et aussi l'énergie est dissipée par effet joule est nulle.**	
Régime pseudo- périodique	⌖ **L'énergie E_e emmagasinée dans le condensateur est maximale lorsque l'énergie E_m emmagasinée dans la bobine est nulle et vice versa.** ⌖ **L'énergie E_e décroît lorsque l'énergie E_m croît et vice versa , ce qui indique que l'énergie E_e est transférée à une énergie $E_m$et vice versa.** ⌖ **L'énergie totale E décroît au cours du temps temps en raison de la dissipation d'une partie de celle-ci par l'effet joule à chaque échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.** ⌖ **L'évolution d'énergie E_e et l'énergie E_m sont pseudo- périodiques et leur pseudo- période est égal à la moitié de pseudo- période de la tension $u_C(t)$.**	
Régime apériodique	✚ **L'énergie E_e décroît par effet joule jusqu'à s'annuler.** ✚ **L'énergie E_e est transférée à une énergie E_m et l'inverse est incorrect.**	

4– L'équation différentielle d'un circuit RLC série :

On a selon la **loi d'additivité des tensions** : $u_R + u_L + u_C = 0$

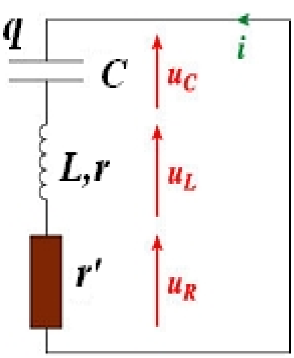
et selon la **loi d'Ohm :** $u_R = r'.i$ et on a $u_L(t) = r.i + L.\frac{di}{dt}$

et on a selon l'**orientation du circuit** : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

Alors $u_L(t) = rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$ et $u_R = r'C.\frac{du_C}{dt}$

Donc $r'C.\frac{du_C}{dt} + rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

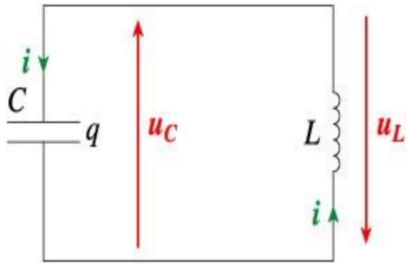
On pose $R = r + r'$ donc $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$.



L'équation différentielle d'un circuit RLC série vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes de condensateur est : $\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}.\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$, la grandeur $\frac{R}{L}.\frac{du_C}{dt}$ exprime le phénomène d'amortissement des oscillations.
On sait que $u_C=\frac{q}{C}$ donc l'équation différentielle vérifiée par la charge q est :
$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}.\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$

II – Etude analytique d'un circuit LC idéal :

1– L'équation différentielle :



On considère le **circuit** ci-contre constitué d'un **condensateur** de **capacité C (initialement chargé)**, et une **bobine** d'**inductance L** et de **résistance interne négligeable**.

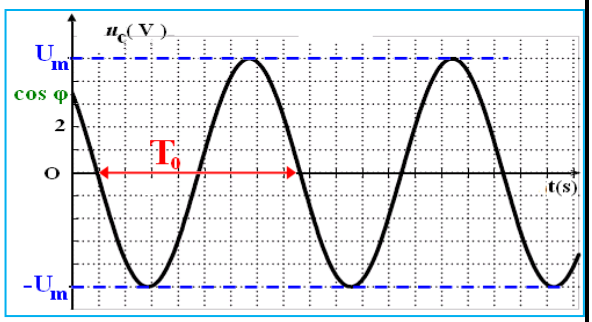
On a d'après la **loi d'additivité des tensions** : $u_L+u_C=0$

et on a selon l'**orientation du circuit** : $i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(C.u_C)}{dt}=C.\frac{du_C}{dt}$

et on a $u_L(t)=L.\frac{di}{dt}=LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$ alors $\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C=0.$

L'équation différentielle d'un circuit LC série vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes de condensateur est : $\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C=0$. On sait que $u_C=\frac{q}{C}$ donc l'équation différentielle vérifiée par la charge q est : $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0$

2– Solution de l'équation différentielle :



La **solution** de l'**équation différentielle** s'écrit sous la forme : $u_C(t)=U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

U_m Amplitude des oscillations (amplitude maximale de la tension u_C) son **unité V**

T_0 Période propre des **oscillations** avec

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ **la pulsation propre** avec $N_0=\frac{1}{T_0}$ **la fréquence propre**.

$\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi$ **la phase** à l'**instant t**

$[\cos(ax+b)]'=-a.\sin(ax+b)$

$[\sin(ax+b)]'=a.\cos(ax+b)$

φ **la phase initial** exprimé en (rad) et $-\pi\leq\varphi<\pi$.

On **détermine** les **valeurs** de U_m et φ en utilisant les **conditions initiales** (Parce que la **tension u_C** et le **courant i** traversant la **bobine** sont **continués**)

On a $i=C.\frac{du_C}{dt}$ ainsi $i(t)=-\frac{2\pi}{T_0}C.U_m\sin(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$.

On sait que $i(0)=-\frac{2\pi}{T_0}CU_m\sin(\varphi)=0$ d'où $\sin(\varphi)=0$ alors $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$.

Le **condensateur** est **initialement chargé** , donc : $u_C(0)=U_m\cos(\varphi)=E$

ainsi $\cos(\varphi)=\frac{E}{U_m}>0$ donc $\varphi=0$

On a $U_m\cos(\varphi)=U_m\cos(0)=E$ donc $U_m=E$ alors $u_C(t)=E\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$

3– Période propre des oscillations :

On a $u_C(t) = U_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ d'où $\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}U_m \sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

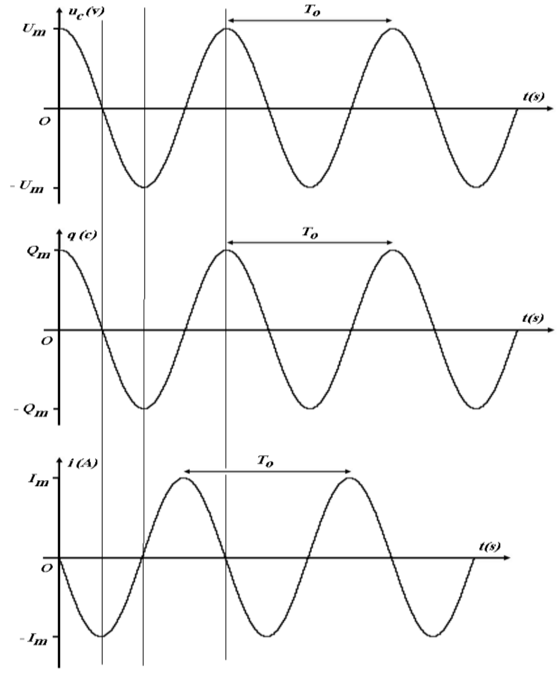
Alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -(\frac{2\pi}{T_0})^2 U_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ ça veut dire $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t)$

On remplace $\frac{d^2u_C}{dt^2}$ par **son expression** dans l'**équation différentielle** et on obtient :

$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$ d'où $\left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right]u_C(t) = 0$

Pour que **cette relation** soit **vérifiée** quelque soit t, il faut que : $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$

d'où $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$.



Remarque :

On a $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$ avec $C = \frac{i}{\frac{du_C}{dt}}$ et $L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}}$

D'où $[C] = \frac{[i]}{\frac{[u]}{[t]}}$ et $[L] = \frac{[u]}{\frac{[i]}{[t]}}$ donc $[T_0] = [\sqrt{L.C}]$

$[T_0] = \sqrt{\frac{[u]}{\frac{[i]}{[t]}}\frac{[i]}{\frac{[u]}{[t]}}} = \sqrt{[t^2]} = [t]$ D'où $[T_0] = [t]$.

Donc **la période propre** T_0 a **la dimension d'un temps** et **son unité** est la **seconde**.

La pseudo- période T des **oscillations amorties** dans un **circuit** RLC **série** est **presque égale la période propre** T_0 d'un **oscillateur non amorti**.

$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$.

4– Les expressions de la charge q et l'intensité du courant i :

On a $q = C.u_C$ donc $q(t) = Q_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ avec $Q_m = CU_m$

On a $i = \frac{dq}{dt}$ donc $i(t) = I_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ avec $I_m = \frac{2\pi}{T_0}Q_m$

$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

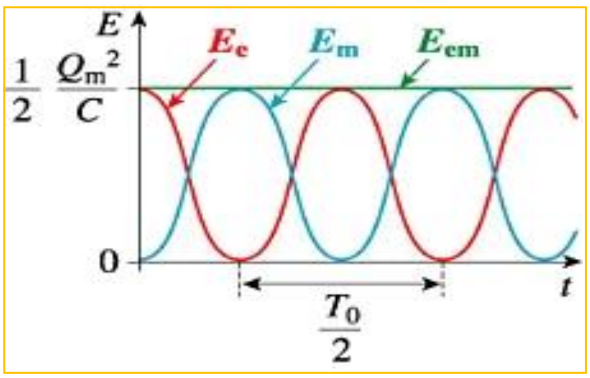
Les **fonctions** $u_C(t)$ et $i(t)$ sont **sinusoïdales** et ils sont **tétraphasées**, c'est-à-dire que si l'**une** d'eux est **nulle**, alors l'**autre** est **maximale** ou **minimale**.

III – Transferts d'énergie entre le condensateur et la bobine :

1– L'énergie dans un circuit LC idéal :

L'**énergie totale emmagasinée** dans un **circuit** LC à chaque **instant** est :

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$



On a d'après la **loi d'additivité des tensions** :

$u_L + u_C = 0$ Ainsi $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$ on **multiple** l'**égalité** par $i = \frac{dq}{dt}$ on trouve $\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0$

d'où $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = 0$ Alors $E_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = cte$.

- **L'énergie totale d'un circuit *LC* idéal est constante et égale à l'énergie initiale emmagasinée dans le condensateur.**
- **Lors d'oscillations non amorties, l'énergie électrique dans le condenseur se transforme en énergie magnétique dans la bobine et vice versa .**

$$E_t = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2$$

2– L'énergie dans un circuit *RLC* série :

L'**énergie totale emmagasinée** dans un **circuit** ***RLC*** à chaque **instant** est : $E_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

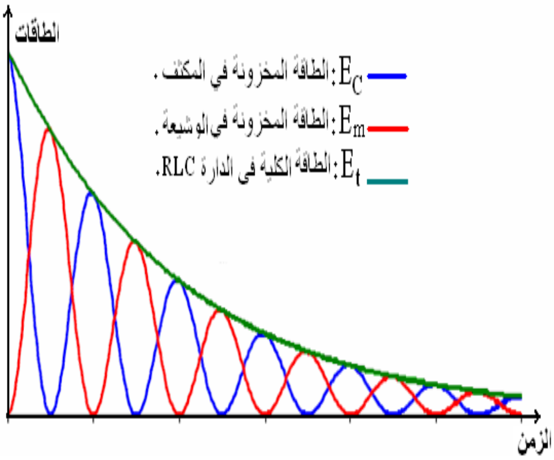
La **variation** de l'**énergie totale** est

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} + L.i.\frac{di}{dt} = i\left(\frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2}\right)$$

Sachant que l'**équation différentielle** est :

$$\frac{d^2q}{d^2} + \frac{R}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \text{ Ainsi } L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = -R.\frac{dq}{dt} = -R.i$$

d'où $\frac{dE_t}{dt} = -R.i^2$. Ainsi, il est **clair** que :



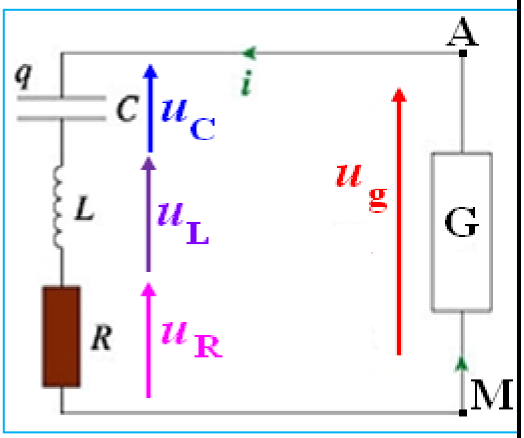
- L'**énergie totale** E_t est **décroissante** car $\frac{dE_t}{dt} < 0$.
- La **décroissance énergétique** est due à la **présence** de la **résistance** ***R***.

L'énergie totale d'un circuit *RLC* série décroît progressivement par effet joule.

IV – Entretien des oscillations :

On peut **entretenir** les **oscillations** du **circuit** ***RLC*** **série** et obtenir une **tension oscillante** d'**amplitude constante,** en utilisant un **dispositif** qui **compense** l'**énergie dissipée** par **effet joule**.

Le **dispositif** d'**entretien** est un **générateur** qui fournit au **circuit** une **tension** u_g **proportionnelle** à l'**intensité du courant :** $u_g = R_0.i$, **il se comporte comme une résistance négative**.



Ainsi, la **résistance totale** du **circuit** est **nulle** lorsqu'on choisit $R_0 = R$.

On considère le **montage expérimental** ci-dessus où le **générateur** ***G*** représente le **dispositif d'entretien**.

La **puissance dissipée** par **effet joule** dans le **circuit** ***RLC*** est $\mathcal{P}_{th} = R.i^2$.

La **puissance donnée** par le **générateur** ***G*** est : $P_g = u_g.i$.

Pour que le **générateur compense l'énergie dissipée par effet joule**, il faut que $\mathcal{P}_{th} = \mathcal{P}_g$ alors $u_g = R.i$.

En appliquant la **loi d'additivité des tensions** on trouve : $u_R + u_L + u_C = u_g$.

D'où $R.i + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = R.i$ Donc $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$.

Alors on obtient l'**équation différentielle** d'un **circuit** ***LC*** **idéale** c'est-à-dire que les **oscillations** sont **sinusoïdales** d'**amplitude constante** avec : $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$.