

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Mécanique

MP-PC

Cours

Méthodes

Exercices résolus

P. CLERC • C. CLERC

Nouveau programme

 **Bréal**
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Copyrighted material



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Mécanique

PC-MP

C. CLERC

Ingénieur de l'École Centrale de Paris (ECP)
Professeur agrégé à l'École Nationale d'Ingénieurs de Saint-Étienne (ENISE)

P. CLERC

Ingénieur physicien-électronicien (CPE Lyon)
Professeur agrégé à l'IUT1 de Grenoble
Enseignant en classes préparatoires scientifiques à CPE Lyon

LES NOUVEAUX
Précis
B R É A L

Mathématiques 2^e année

- Algèbre et Géométrie / MP
- Algèbre et Géométrie / PC
- Analyse / MP
- Analyse / PC

Physique 2^e année

- Mécanique / MP - PC
- Mécanique des fluides / PC-PSI
- Électromagnétisme / PC-PSI
- Électromagnétisme / MP
- Physique des ondes / PC-PSI
- Électronique / MP-PT
- Optique / MP-PC-PSI-PT
- Thermodynamique / PC-PSI
- Thermodynamique / MP

Chimie 2^e année

- Chimie organique / PC
- Thermodynamique - Matériaux / PC
- Chimie / MP-PT

Exercices 2^e année

- Mathématiques / MP
- Mathématiques / PC-PSI
- Physique / MP
- Physique / PC

Maquette : Sophie Martinet
Couverture : Sophie Martinet
Suivi éditorial : Agnès Nicol
Réalisation : Alpha-Édit

© Bréal 2004
Toute reproduction même partielle interdite.
ISBN 2 7495 0438 4

Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants en classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année des filières PC et MP. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ✨ ou △). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est paru nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Par ailleurs, les deux derniers chapitres de l'ouvrage sont un peu particuliers :

- le chapitre 5 contient quatre problèmes de concours traités exhaustivement ;
- le chapitre 6 rappelle certaines notions étudiées en première année, mais qui doivent être parfaitement maîtrisées en seconde année.

Ainsi, les étudiants de MP et PC disposeront, en mécanique, d'un outil de travail complet, adopté au rythme soutenu de cette seconde année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce nouveau Précis les aidera à passer avec réussite leurs épreuves, et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse suivante : infos@editions-breial.fr.

L'éditeur et les auteurs

This One



4303-484-ELZX

Copyrighted material

Sommaire

Chapitre 1 . ■ Cinématique du solide	7
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	26
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	36
Chapitre 2 . ■ Cinétique des systèmes et du solide	59
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	75
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	82
Chapitre 3 . ■ Dynamique des systèmes et du solide	95
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	111
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	121
Chapitre 4 . ■ Énergétique des systèmes et du solide	149
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	165
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	174
Chapitre 5 . ■ Quelques problèmes	201
Problème 1	202
Problème 2	215
Problème 3	227
Problème 4	236
Chapitre 6 . ■ Rappels indispensables de mécanique de 1^{re} année	243
Oscillations - Équilibre - Stabilité	244
Forces centrales - Planètes - Satellites	254
Référentiels galiléen et non galiléen - changement de référentiel	260
Index	270

Cinématique du solide

Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons, après avoir rappelé quelques résultats de première année, les bases de la cinématique du solide, c'est-à-dire les outils permettant la description du mouvement d'un solide sans s'occuper des causes de ce mouvement. Puis dans un second temps, nous étudierons les problèmes de cinématique du contact entre deux solides.

Plan du chapitre 1

A. Rappels	8
1. Référentiel	8
2. Produit scalaire	9
3. Produit vectoriel	9
4. Dérivation	12
5. Formule de Varignon – Vecteur rotation instantané	13
6. Vecteur vitesse	14
B. Champ de vitesse d'un solide	17
1. Définition	17
2. Formule fondamentale de cinématique du solide	17
3. Cas particulier	19
C. Cinématique du contact entre deux solides	21
1. Cas général	21
2. Roulement sans glissement	23
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	26
<i>Énoncés des exercices</i>	36
<i>Indications</i>	39
<i>Solution des exercices</i>	40

A. Rappels

A.1. Référentiel

• Base orthonormée directe

Pour définir un référentiel (observateur), il faut d'abord définir une base orthonormée directe (voir fig. 1), composée de trois vecteurs :

- perpendiculaires entre eux (ortho) ;
- de norme 1 (normée) ;
- respectant la règle du tire-bouchon (directe).

• Repère

L'adjonction d'un point O (origine du repère) à une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ définit un repère orthonormé direct : $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Référentiel

Comme le point M se déplace au cours du temps, il faut que l'observateur soit capable de préciser la position du point M à chaque instant ; il faut donc qu'il soit aussi capable de mesurer le temps (à l'aide d'une horloge).

L'adjonction du temps à un repère définit un référentiel $\mathcal{R} : (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Celui-ci définit précisément la notion d'observateur¹.

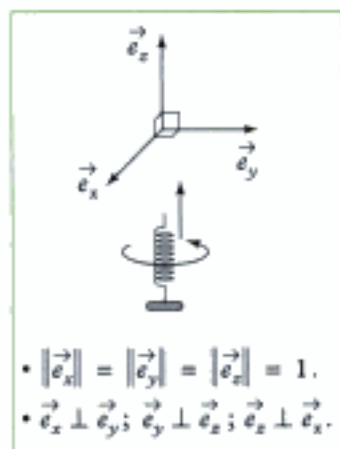


Fig. 1 - Base orthonormée directe ; en vissant le tire-bouchon :

- de \vec{e}_x vers \vec{e}_y ,
il s'enfonce vers \vec{e}_z ;
- de \vec{e}_y vers \vec{e}_z ,
il s'enfonce vers \vec{e}_x ;
- de \vec{e}_z vers \vec{e}_x ,
il s'enfonce vers \vec{e}_y .

1. Ce référentiel correspond à tout ce qui est fixe par rapport à l'observateur ; on le représente souvent par un solide auquel est lié l'observateur.



Fig. 2 - Référentiel $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ lié à l'observateur.

Ainsi sur la fig. 2, $\mathcal{R} : (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est un référentiel lié à l'observateur.

Le temps s'écoulant de la même manière dans tout référentiel, il sera inutile de préciser le temps dans l'écriture du référentiel ; ainsi, on pourra écrire : $\mathcal{R} (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• La position du point M observé (fig. 3), depuis l'observateur (référentiel \mathcal{R})

est définie à l'aide du **vecteur position** \vec{OM} composé :

- d'un point origine O fixe par rapport à l'observateur, c'est-à-dire au référentiel $\mathcal{R} (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: (on choisit souvent l'origine O du référentiel) ;
- du point M observé.

Rappel : un vecteur est défini par :

- sa direction ;
- son sens ;
- sa norme (ou valeur).

• La trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps ; la trajectoire dépend du choix de l'observateur, c'est-à-dire du référentiel \mathcal{R} .

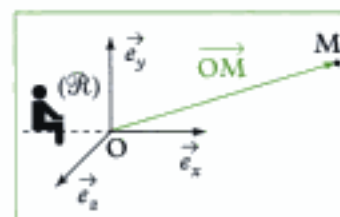


Fig. 3 - Vecteur position du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

A.2. Produit scalaire

Définition 1

Le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} (fig. 4) est un scalaire (un nombre), noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, qui vaut :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

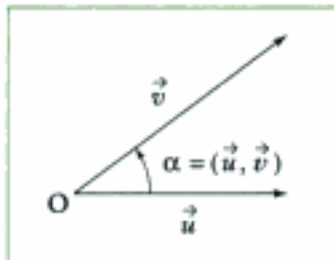


Fig. 4 - Produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

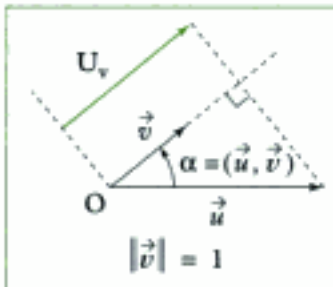


Fig. 5 - Projection de \vec{u} sur \vec{v} .

Propriétés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$, soit $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ représente la projection du vecteur \vec{u} sur la direction du vecteur \vec{v} , si $\|\vec{v}\| = 1$ (fig. 5) ; en effet, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = U_v$.

• Produit scalaire entre vecteurs d'une base orthonormée directe (fig. 6) :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 ; \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 ;$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 ; \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0 ;$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 1 ; \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0.$$



Fig. 6 - Base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Produit scalaire entre vecteurs de deux bases orthonormées directes (fig. 7) :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta ;$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta ;$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos\left(-\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin \theta ;$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta.$$



Fig. 7 - Bases orthonormées directes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\theta^\perp, \vec{e}_z)$.

A.3. Produit vectoriel

A.3.1 - Définition

Définition 2

Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dont :

- la norme est $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$;
- la direction est perpendiculaire à \vec{u} et à \vec{v} ;
- le sens est donné par la règle des 3 doigts de la main droite (fig. 8).

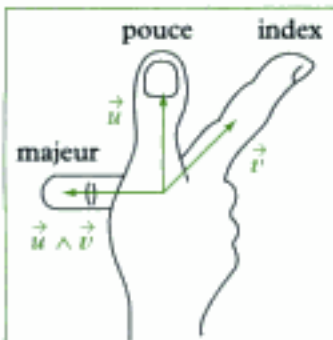


Fig. 8 - Règle des trois doigts de la main droite.

Remarques

- 1) On déterminera donc un produit vectoriel en trois étapes : norme, direction et sens.
- 2) L'angle (\vec{u}, \vec{v}) est orienté (signes + ou -, fig. 9).

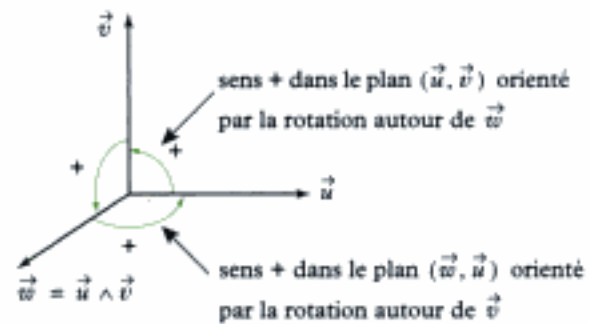


Fig. 9 - Orientation de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) , vu en perspective.

3) Pour utiliser la règle des trois doigts de la main droite, il faut choisir la position des doigts pour laquelle $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ est inférieure à 180° (fig. 10).

angle à ne pas considérer car $|\alpha'| > 180^\circ$

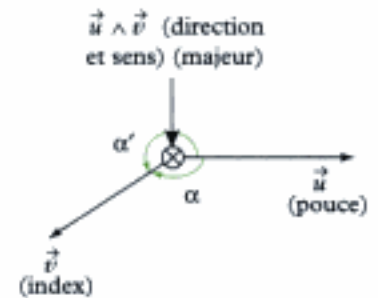
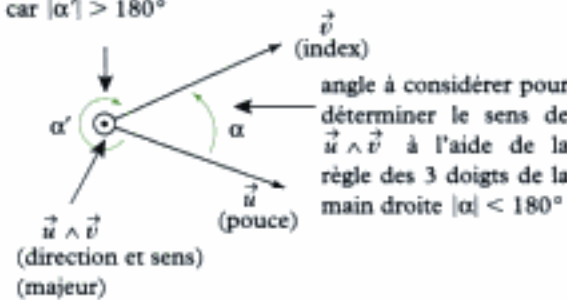


Fig. 10 - Utilisation correcte de la règle des trois doigts de la main droite¹.

1. Attention, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dans le plan de la feuille.

A.3.2 - Quelques propriétés

• Le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{u}$ est un vecteur de même norme que $\vec{u} \wedge \vec{v}$, de même direction que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ mais de sens opposé à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ainsi :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

• Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Notamment : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

• Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs, on a (distributivité) :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

A.3.3 - Calculs de produits vectoriels utiles

• Produits vectoriels entre deux vecteurs d'une base orthonormée directe cartésienne

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \underbrace{+}_{\text{sens}} \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \underbrace{\vec{e}_z}_{\text{norme}} = +1 \vec{e}_z = \vec{e}_z.$$

(règle des 3 doigts de la main droite) $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \frac{\pi}{2} \perp \vec{e}_x$ et $\perp \vec{e}_y$

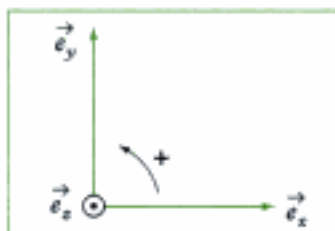


Fig. 11 - Dans une base orthonormée directe cartésienne.

De même (fig. 11) : $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$

En revanche : $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

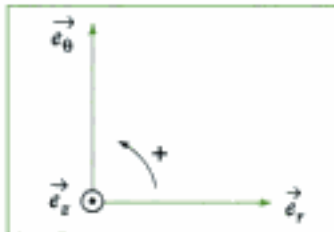


Fig. 12 - Dans une base orthonormée cylindrique.

• Dans une base orthonormée cylindrique :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = + \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \vec{e}_z = +1 \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

↑ sens
↑ norme
↑ direction

De même (fig. 12) : $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$; $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_z$;
 $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$; $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_\theta$.

• Produits vectoriels entre vecteurs des bases orthonormées directes cartésiennes et cylindriques (fig. 13) :

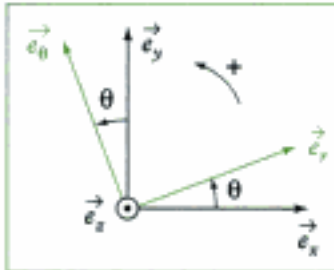


Fig. 13 - Produit vectoriel dans des bases cartésienne et cylindrique.

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_r = + \left| \sin \theta \right| \vec{e}_z = \sin \theta \vec{e}_z$$

↑ sens
↑ norme
↑ direction

(règle des 3 doigts de la main droite) $(\vec{z}_r, \vec{z}_c) = \theta$
 $|\sin \theta| = \sin \theta$
 car $0 < \theta < \pi/2$ sur le dessin

De même :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_\theta = + \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right| \vec{e}_z = + |\cos \theta| \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_z$$

($|\cos \theta| = \cos \theta$ car $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin) ;

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_r = - \left| \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right| \vec{e}_z = -\cos \theta \vec{e}_z$$

(car $\cos \theta > 0$ puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin) ;

$$\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_y = -|\sin(-\theta)| \vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_z$$

(car $\sin \theta > 0$ puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin).

Remarque : il est préférable de faire un schéma pour lequel on a :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ ainsi } \sin \theta > 0 \text{ et } \cos \theta > 0.$$

Les calculs faits dans ces conditions restent valables dans les autres positions¹.

1. Ces autres positions correspondent à d'autres valeurs de θ .

A.3.4 - Expression du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{u} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$ et $\vec{v} = a'\vec{e}_x + b'\vec{e}_y + c'\vec{e}_z$,

alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z) \wedge (a'\vec{e}_x + b'\vec{e}_y + c'\vec{e}_z)$

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{u} \wedge \vec{v} &= aa'\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x + ab'\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + ac'\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \\ &\quad + ba'\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x + bb'\vec{e}_y \wedge \vec{e}_y + bc'\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\ &\quad + ca'\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x + cb'\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y + cc'\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z. \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - b'c)\vec{e}_x + (ca' - c'a)\vec{e}_y + (ab' - a'b)\vec{e}_z$$

A.4. Dérivation

A.4.1 - Dérivée scalaire

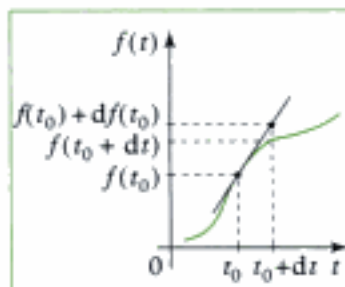


Fig. 14 - Dérivée de $f(t)$ en t_0 .

La dérivée temporelle de la fonction $f(t)$ à l'instant t_0 représente la pente de la tangente à la courbe $f(t)$ en t_0 (fig. 14) ;

on la note¹ : $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Si t passe de t_0 à $t_0 + dt$, on se déplace de $f(t_0)$ à $f(t_0 + dt)$ sur la courbe $f(t)$ et de $f(t_0)$ à $f(t_0) + df(t_0)$ sur la tangente ; comme dt est infiniment petit, on peut confondre les deux valeurs précédentes :

$$f(t_0) + df(t_0) = f(t_0 + dt),$$

soit $df(t_0) = f(t_0 + dt) - f(t_0)$ ou $\frac{df(t_0)}{dt} = \frac{f(t_0 + dt) - f(t_0)}{dt}$.

1. Lorsqu'on écrit la dérivée par rapport au temps, on peut la noter : $\dot{f}(t_0)$ au lieu de $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Propriétés

- Somme : $\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} = \dot{f} + \dot{g}$
- Produit : $\frac{d}{dt}(f \times g) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} = \dot{f}g + f\dot{g}$
- Composition : $\frac{d}{dt}(f(g)) = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dg}\dot{g}$

A.4.2 - Dérivée vectorielle

2. On dit aussi par rapport au ...

La dérivée vectorielle de \vec{U} dans² le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) est :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

Cette définition permet de savoir comment varie \vec{U} observé depuis \mathcal{R} .

Ainsi, contrairement à la dérivée d'une fonction scalaire, la dérivée d'une fonction vectorielle dépend du référentiel de dérivation, c'est-à-dire que la variation d'un vecteur dépend de « l'endroit » depuis lequel on l'observe.

Une méthode pratique de calcul de la dérivée d'un vecteur (formule de Varignon) sera vue dans le paragraphe A.5.

Propriétés :

- $\left(\frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v})\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$
- $\left(\frac{d}{dt}(\lambda\vec{u})\right)_{/\mathcal{R}} = \lambda\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$
- $\left(\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v})\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$

A.5. Formule de Varignon

Vecteur rotation instantané

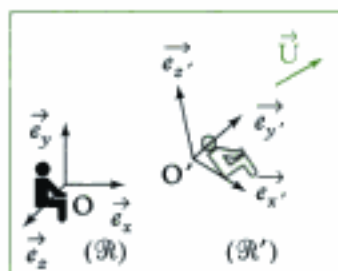


Fig. 15 - Deux référentiels.

Considérons (fig. 15) deux référentiels (liés à deux observateurs), $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$: \mathcal{R}' est en mouvement par rapport à \mathcal{R} . Le mouvement de **rotation** de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est caractérisé par le **vecteur rotation instantané** $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Soit \vec{U} un vecteur quelconque que l'on projette dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ liée à \mathcal{R}' :

$$\vec{U} = U_{x'} \vec{e}_{x'} + U_{y'} \vec{e}_{y'} + U_{z'} \vec{e}_{z'}$$

Dérivons dans \mathcal{R} le vecteur \vec{U} afin de connaître la variation de ce vecteur \vec{U} observé par un observateur lié à \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{U}_{x'} \vec{e}_{x'} + \dot{U}_{y'} \vec{e}_{y'} + \dot{U}_{z'} \vec{e}_{z'} + U_{x'} \left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + U_{y'} \left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + U_{z'} \left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

On remarque que: $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{U}_{x'} \vec{e}_{x'} + \dot{U}_{y'} \vec{e}_{y'} + \dot{U}_{z'} \vec{e}_{z'}$

et on montre que:

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{x'}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{y'}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{z'}$$

On obtient ainsi la formule de Varignon:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{U}$$

qui permet de faire le lien entre la variation de \vec{U} observé depuis \mathcal{R} et \mathcal{R}' et de définir le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Cas particuliers:

- si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$;

- si \mathcal{R}' est en rotation autour de l'axe $(O; \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} , à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ alors $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z$ (fig. 16).

La rotation est uniforme si $\dot{\theta} = \omega = \text{cte.}$

Rappel: $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$.

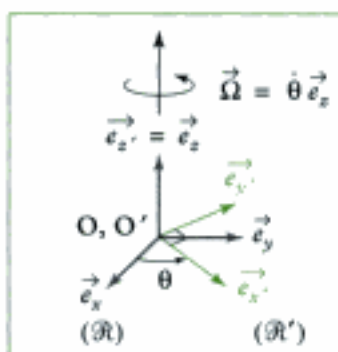
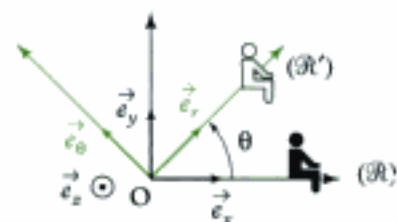


Fig. 16 - Référentiel \mathcal{R}' en rotation par rapport au référentiel \mathcal{R} .

Application 1

Considérons deux référentiels $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Déterminer la dérivée des vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ dans le référentiel \mathcal{R} .



Solution

\mathcal{R}' est en rotation autour de l'axe $(O ; \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} , le vecteur rotation instantané de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est donc :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Utilisons la formule de Varignon afin de dériver le vecteur \vec{e}_r dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_r.$$

Comme \vec{e}_r est constant dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0};$$

ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

De la même manière, comme \vec{e}_θ est constant dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_\theta = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

Et, comme \vec{e}_z est constant dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' :

$$\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}.$$

A.6. Vecteur vitesse

Définition 3

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} (par rapport à l'observateur \mathcal{O}), est la dérivée temporelle du vecteur position du point M dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \text{ vecteur vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ \vec{OM} \text{ vecteur position (m)} \\ t \text{ temps (s)} \end{array} \right.$$

(O est un point fixe du référentiel \mathcal{R}).

Rappel : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ est un vecteur tangent à la trajectoire en chacun de ses points : il correspond à la variation $d\vec{OM}$ du vecteur \vec{OM} pendant l'intervalle de temps infiniment petit dt (fig. 17) :

$$\vec{v} dt = \vec{OM}(t+dt) - \vec{OM}(t).$$

Remarques :

Le calcul de $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ permet de savoir comment varie la position du point M observé depuis le référentiel \mathcal{R} (l'observateur).

$$1. d\vec{OM} = \vec{OM}(t+dt) - \vec{OM}(t).$$

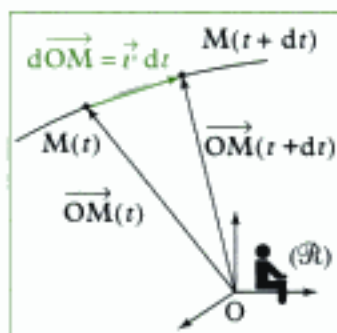


Fig. 17 - Vecteur vitesse.

Définition 4

Le vecteur accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} est la dérivée seconde du vecteur position de M par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

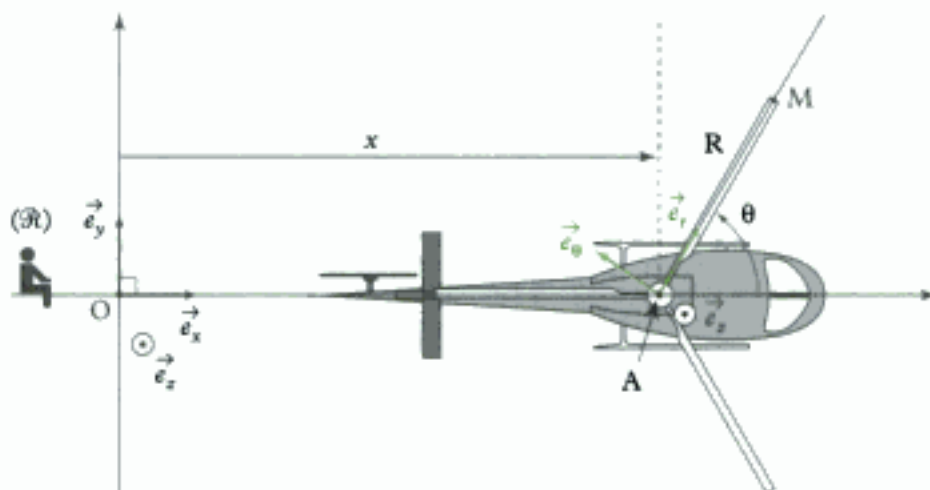
$$\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

\vec{a} vecteur accélération
($m \cdot s^{-2}$)
 \vec{v} vecteur vitesse ($m \cdot s^{-1}$)
 \overrightarrow{OM} vecteur position (m)
 t temps (s)

Application 2

On considère l'hélicoptère de la figure ci-dessous se déplaçant à vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$ le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Exprimer la vitesse et l'accélération du point M se trouvant à l'extrémité de la pale \mathcal{P} en utilisant la formule de Varignon.

Données : les pales ont un rayon R et tournent avec une vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.



Solution

Partons du vecteur position du point M dans le référentiel \mathcal{R} et introduisons le point A à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.

Afin de déterminer la vitesse de M dans \mathcal{R} , dérivons ce vecteur position par rapport au temps dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

Le premier terme $\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ correspond à la vitesse de A dans \mathcal{R} , soit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d(x\vec{e}_x)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x = v\vec{e}_x.$$

La dérivée de \vec{e}_x par rapport au temps dans \mathcal{R} est nulle car \vec{e}_x est un vecteur constant dans \mathcal{R} .

Afin de déterminer l'expression du second terme $\left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$, introduisons le référentiel $\mathcal{R}'(A; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ lié à la pale de l'hélicoptère (car \vec{AM} est un vecteur constant de \mathcal{R}') et utilisons la formule de Varignon :

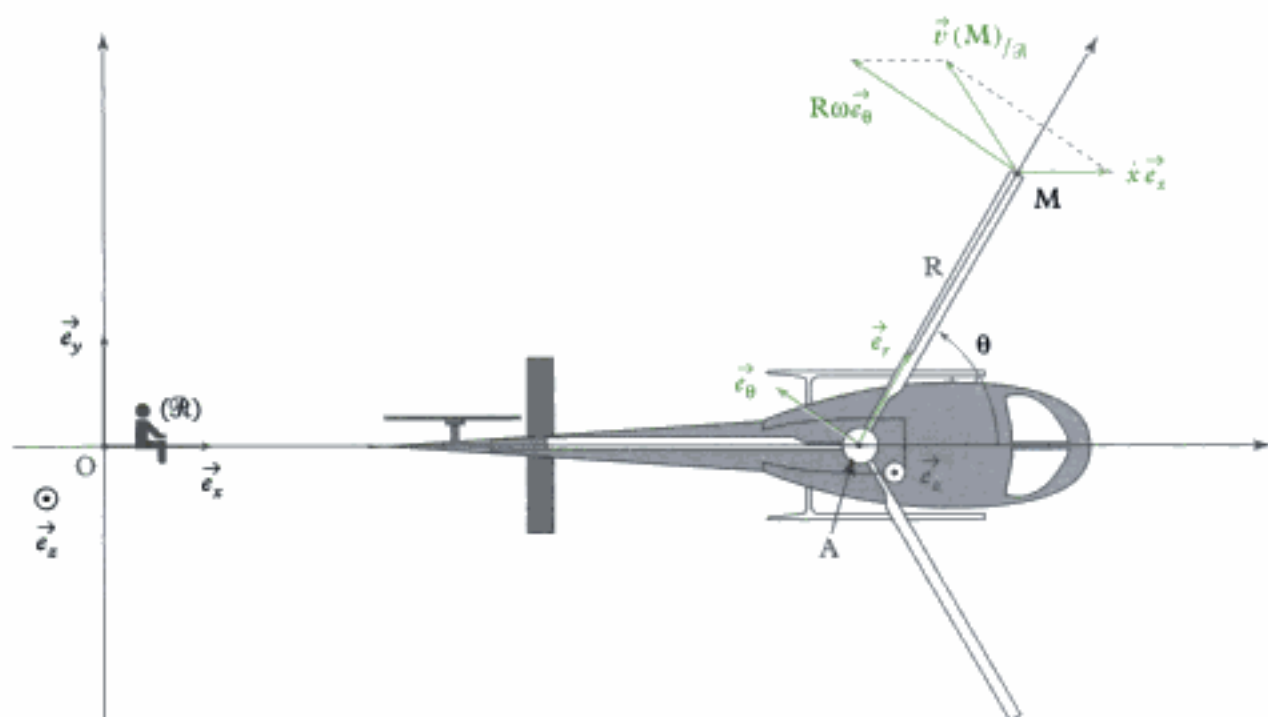
$$\left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{AM}.$$

Comme \vec{AM} est un vecteur constant de \mathcal{R}' , $\left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$, et comme $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_z = \omega\vec{e}_z$, on a :

$$\left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \omega\vec{e}_z \wedge R\vec{e}_r = R\omega\vec{e}_\theta.$$

Ainsi :

$$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = v\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_\theta.$$



Afin d'obtenir l'accélération du point M, on utilise la définition :

$$\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d(v\vec{e}_x)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d(R\omega\vec{e}_\theta)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

Comme v est une grandeur constante au cours du temps et comme \vec{e}_x est un vecteur constant au cours du temps dans le référentiel \mathcal{R} , la première dérivée $\left(\frac{d(v\vec{e}_x)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$ est nulle ; dans la seconde dérivée $\left(\frac{d(R\omega\vec{e}_\theta)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$, R et ω sont des constantes, ainsi :

$$\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = R\omega\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = R\omega(-\dot{\theta}\vec{e}_r) = -R\omega^2\vec{e}_r.$$

B. Champ de vitesse d'un solide

B.1. Définition

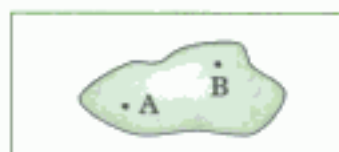


Fig. 18 - Un solide.

Definition 5

Un solide (indéformable) \mathcal{S} est un ensemble de points tel que (fig. 18) pour tout couple de points (A, B) de \mathcal{S} , la distance AB est constante au cours du temps :

$$\forall A \in \mathcal{S}, \forall B \in \mathcal{S}, \|\vec{AB}\| = \text{cte.}$$

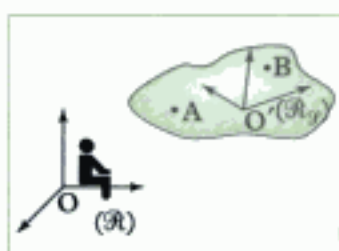


Fig. 19 - Solide en mouvement dans un référentiel.

1. De manière générale, on peut associer à tout solide un référentiel : on confondra donc dans cet ouvrage les notions de référentiel et solide (de référence) ; on pourra ainsi parler du mouvement d'un point par rapport à un référentiel ou par rapport à un solide.

B.2. Formule fondamentale de cinématique du solide

Soit A et B deux points du solide \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} d'origine O (fig. 19). Au solide \mathcal{S} , on associe¹ le référentiel $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ d'origine O' (point fixé au solide \mathcal{S}).

Appliquons au vecteur \vec{AB} la formule de dérivation vectorielle (Varignon) :

$$\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_{\mathcal{S}}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}.$$

En écrivant que le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}}/\mathcal{R}}$ du référentiel $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} est aussi le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R} , on a :

$$\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_{\mathcal{S}}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}.$$

Comme A et B sont éléments du solide \mathcal{S} , \vec{AB} est un vecteur constant de $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$

(ou de \mathcal{S}) : $\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_{\mathcal{S}}} = \vec{0}$.

D'autre part :

$$\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d(\vec{AO} + \vec{OB})}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{AO}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{OB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}.$$

On obtient ainsi la loi 1.

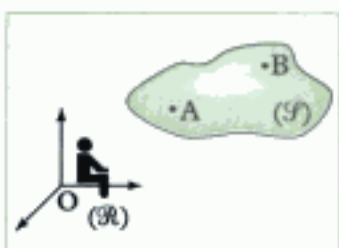


Fig. 20 - Solide en mouvement dans un référentiel.

2. On prendra garde au fait que cette formule correspond à un changement de point dans le solide mais pas d'observateur (les deux vitesses sont calculées dans le même référentiel).

3. Les points A et B sont naturellement éléments du solide \mathcal{S} , c'est-à-dire qu'ils sont éléments de \mathcal{S} à chaque instant.

Loi 1

Formule fondamentale de la cinématique du solide (F.F.C.S.)

Pour deux points A et B appartenant au même solide \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 20) :

$$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}^{23}$$

A et B : deux points du solide \mathcal{S}

$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de B ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de A ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ vecteur rotation instantané ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

Si A et B ne sont pas naturellement éléments du solide \mathcal{S} (à chaque instant), il est alors nécessaire d'utiliser l'écriture complète :

$$\vec{v}(\mathbf{B} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

Le mouvement du solide \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} est entièrement caractérisé, à l'instant t , par la connaissance de la vitesse de l'un de ses points (ex $\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}$) et par la connaissance du vecteur rotation instantané du solide $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$. En effet, ces paramètres suffisent pour retrouver la vitesse de n'importe quel point de \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} à l'instant t .

Remarque : dans le cas général, $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ dépend du temps.

Conséquences :

• En multipliant scalairement l'équation de la F.F.C.S. par $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}).$$

Comme le dernier terme est nul ($\overrightarrow{\mathbf{AB}} \perp (\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}})$), on a la relation :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}$$

traduisant l'équiprojectivité des vitesses du solide (fig. 21) : les vitesses en deux points quelconques A et B d'un solide ont même projection² sur la droite (AB).

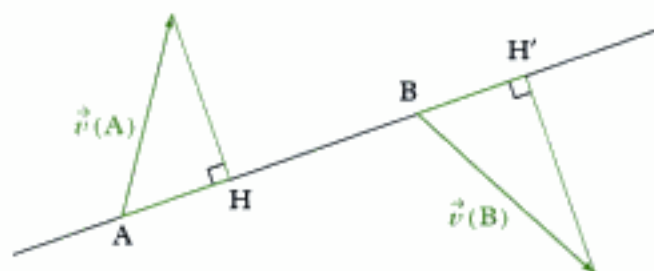


Fig. 21 - Équiprojectivité des vitesses dans un solide ($AH = BH'$).

• Le champ des vitesses d'un solide possède une structure de torseur : on définit ainsi le torseur cinématique ou torseur distributeur des vitesses réduit au point A, par l'ensemble des deux vecteurs :

– **résultante** : vecteur rotation instantané du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R} ;

– **moment en A** : vecteur vitesse du point A élément du solide par rapport à \mathcal{R} :

$$\mathcal{T}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{A}[\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}, \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}}].$$

Comme dans tout torseur, le champ de moment vérifie la formule de changement de point (F.F.C.S.).

Remarque :

– Si le solide \mathcal{S} est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R}' (caractérisé par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}'}$), lui-même en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} (caractérisé par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$), alors le solide \mathcal{S} est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} (caractérisé par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$) (fig. 22) : $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

1. $\mathbf{B} \in \mathcal{S}$ peut définir :

• un point qui est naturellement élément du solide \mathcal{S} (à chaque instant) ; on écrira dans ce cas (de préférence) tout simplement B (pour parler de ce point) ; on a alors :

$$\vec{v}(\mathbf{B} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}};$$

• un point géométrique de l'espace, qui n'est pas naturellement élément du solide \mathcal{S} , coïncidant à l'instant considéré avec un point du solide \mathcal{S} ; on a alors :

$$\vec{v}(\mathbf{B} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \neq \vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}}.$$

2. L'équiprojectivité vient du fait que la distance entre deux points A et B quelconques d'un solide est

constante, soit : $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = \text{cte}$.

On peut alors écrire :

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|^2 = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \text{cte}, \text{ soit en}$$

dérivant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|^2}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}}}{dt} \\ &= 2\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = 0; \end{aligned}$$

en introduisant le point O (origine du

référentiel \mathcal{R}) : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{AO}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}}$,

on obtient :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{\mathbf{AO}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

soit :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}}.$$



Fig. 22 - Changement de référentiel.

– Si le point A appartenant au solide \mathcal{S} est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R}' , lui-même en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} , alors le solide \mathcal{S} est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} ; ainsi :

$$\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{R}')_{/\mathcal{R}}$$

(on retrouve la formule de composition des vitesses).

Remarque : pour le point C, qui n'est pas naturellement élément du solide \mathcal{S} , on peut écrire : $\vec{v}(\mathbf{C} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{C} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(\mathbf{C} \in \mathcal{R}')_{/\mathcal{R}}$.

B.3. Cas particulier

B.3.1 - Solide en translation

Un solide \mathcal{S} est en translation¹ par rapport au référentiel \mathcal{R} si, à un instant t , les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques (fig. 23).

Ainsi, pour deux points A et B éléments du solide \mathcal{S} , on a, à l'instant t :

$$\vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(t).$$

Ainsi, le vecteur rotation instantané du solide \mathcal{S} est nul : $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0}$

et $\forall t, \vec{AB} = \text{cte.}$

1. Cette translation peut être :
 - rectiligne (les trajectoires des points du solide sont des droites) ;
 - circulaire (les trajectoires des points du solide sont des cercles de même rayon) ;
 - elliptique (les trajectoires des points du solide sont des ellipses) ;
 - ou quelconque.
2. Ce vecteur change, dans le cas général, d'un instant à l'autre !

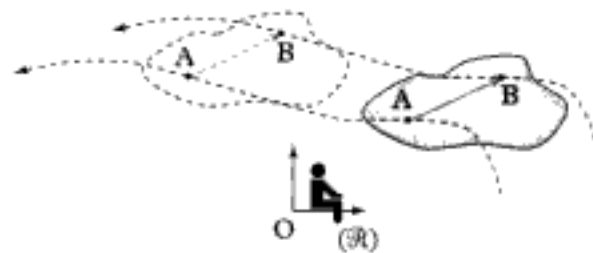


Fig. 23 - Solide en translation dans un référentiel \mathcal{R} .

B.3.2 - Solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide \mathcal{S} est en rotation autour de l'axe fixe \mathcal{D} du référentiel \mathcal{R} (fig. 24) si tous les points du solide \mathcal{S} sont en mouvement sur des trajectoires circulaires centrées sur \mathcal{D} , à la même vitesse angulaire θ .

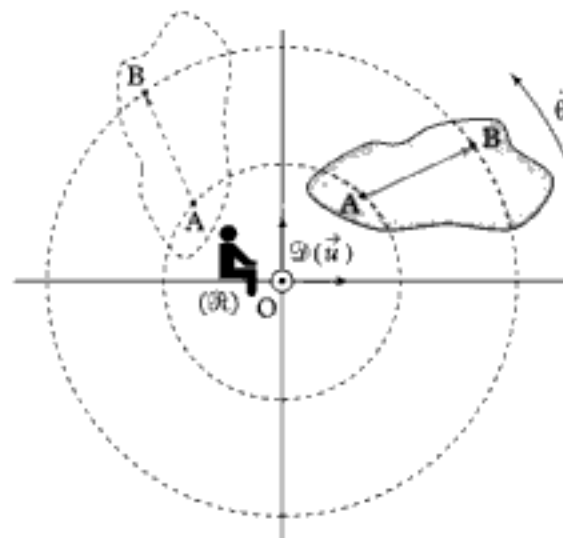


Fig. 24 - Solide en rotation autour de l'axe \mathcal{D} fixe dans un référentiel \mathcal{R} .

Le vecteur rotation instantané du solide \mathcal{F} dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}^{1,2},$$

1. On aurait mis un signe – si l'angle avait été orienté dans le sens indirect autour de l'axe de rotation.

2. Dans le cas général, $\dot{\theta} \neq \text{cte}$.
Si $\dot{\theta} = \text{cte}$, la rotation est uniforme.

\vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe \mathcal{D} .

Le point O (point du solide \mathcal{F} – sa distance à tout point du solide étant constante au cours du temps) ayant une vitesse nulle dans \mathcal{R} , soit :

$$\vec{v}(O \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} = \vec{0},$$

on peut exprimer la vitesse d'un point A quelconque du solide \mathcal{F} à l'aide de la formule fondamentale du solide :

$$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{OA}.$$

Soit :

$$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{OA}.$$

B.3.3 - Solide en mouvement quelconque

À partir de la relation $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}$, écrites pour deux points A et B éléments du solide \mathcal{F} , on peut décomposer (fig. 25) le mouvement d'un point quelconque B du solide \mathcal{F} (donc le mouvement du solide) en une translation de vecteur $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ (tous les points du solide ayant cette vitesse) et une rotation de centre A de vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}}$ (la vitesse de B est alors $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB} = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$)³.

3. Un solide possède, dans le cas général, 6 degrés de liberté : 3 de translation et 3 de rotation.

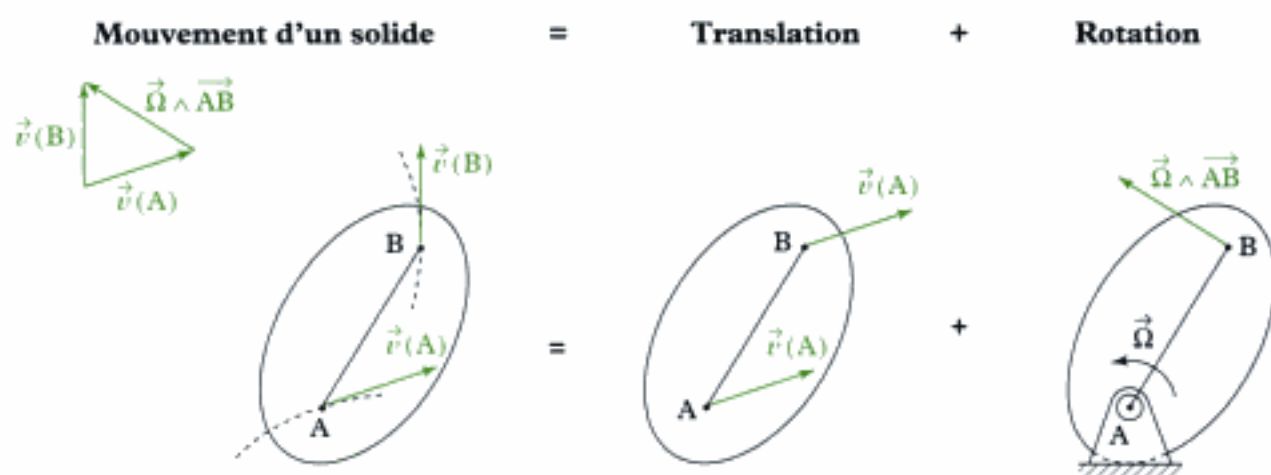
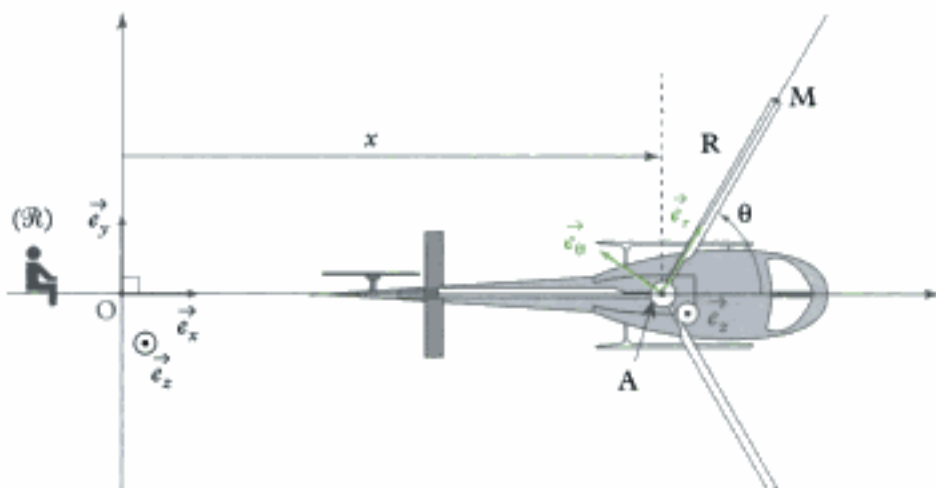


Fig. 25 - Décomposition du mouvement d'un solide en une translation et une rotation dans le cas d'un mouvement plan.

Application 3

Reprenons l'exemple de l'hélicoptère de l'application 1 et exprimons la vitesse et l'accélération du point M se trouvant à l'extrémité de la pale \mathcal{P} en utilisant la formule fondamentale de cinématique du solide (F.F.C.S.).

Données : $\vec{v}(A) = v\vec{e}_x = \vec{c}t\vec{e}_x$, la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ des pales est constante.



Solution

Les deux points A et M sont éléments de la pale \mathcal{P} de l'hélicoptère dont le vecteur rotation instantané par rapport au référentiel \mathcal{R} est $\vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_z$; ainsi :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AM}.$$

Soit : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v\vec{e}_x + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R\vec{e}_r = v\vec{e}_x + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_\theta$ (on retrouve le résultat de l'application 1).

Afin d'obtenir l'accélération du point M, on utilise la définition :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d(v\vec{e}_x)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d(R\omega\vec{e}_\theta)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Comme v et \vec{e}_x sont des grandeurs constantes au cours du temps par rapport au référentiel \mathcal{R} , la première dérivée est nulle ; dans la seconde dérivée, R et ω sont des constantes, ainsi :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = R\omega \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = R\omega(-\dot{\theta}\vec{e}_r) = -R\omega^2\vec{e}_r$$

(on retrouve aussi le résultat de l'application 1).

C. Cinématique du contact entre deux solides

C.1. Cas général

Supposons que le contact entre deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 reste ponctuel. Appelons I le point de contact (géométrique) à l'instant t entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (fig. 26). Il est alors nécessaire de distinguer le point géométrique I, du point I élément du solide \mathcal{S}_1 , de vitesse $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}$ et du point I élément du solide \mathcal{S}_2 , de vitesse $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}$.

Il existe donc 3 points se trouvant au contact entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 à l'instant t : I (point géométrique), $I \in \mathcal{S}_1$ et $I \in \mathcal{S}_2$ (respectivement points de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 coïncidants à l'instant t avec I).

On définit aussi un plan tangent au contact en I ainsi que la normale à ce plan en I .

Le mouvement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 est entièrement caractérisé par la vitesse de l'un de ses points (par exemple le point I élément de \mathcal{S}_1) et le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$ du solide \mathcal{S}_1 par rapport au solide \mathcal{S}_2 .

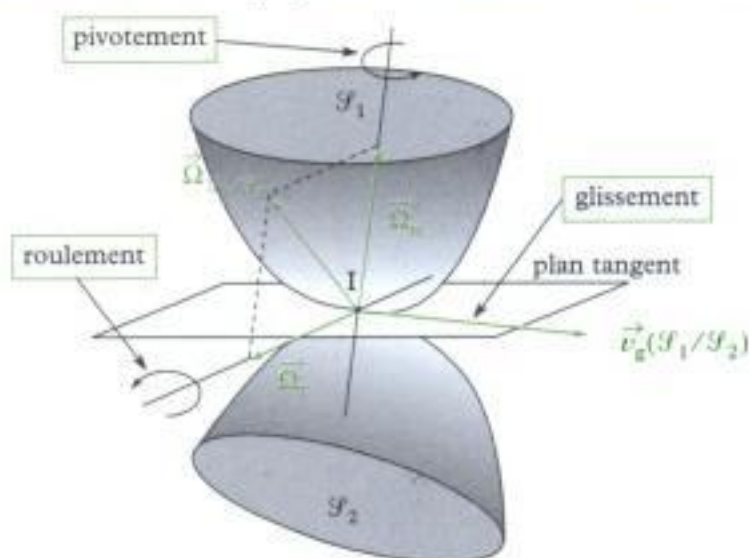


Fig. 26 - Contact entre deux solides à l'instant t .

On appelle alors :

– vitesse de **glissement** de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 : $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2}$; ce glissement correspond à un déplacement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 au niveau de I dans le plan tangent ;

– vecteur rotation instantané de **pivotelement** $\vec{\Omega}_n$, composante normale du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$; ce pivotelement correspond à une rotation autour de l'axe $(I; \vec{\Omega}_n)$, normal au plan tangent ;

– vecteur rotation instantané de **roulement** $\vec{\Omega}_t$, composante tangentielle du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$; ce roulement correspond à une rotation autour de l'axe du plan tangent $(I; \vec{\Omega}_t)$.

On peut obtenir une expression plus utile de la vitesse de glissement en utilisant la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} + \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}$$

d'où :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}.$$

Remarque : cette définition est indépendante du choix du référentiel \mathcal{R} .

On peut aussi définir la vitesse de glissement de \mathcal{S}_2 par rapport à \mathcal{S}_1 :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{S}_1} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}.$$

C'est l'opposé de $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$.

1. On prendra garde au fait que cette définition utilise la vitesse de deux points coïncidants :

$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}$, vitesse du point de \mathcal{S}_1 coïncidant avec I à l'instant considéré et $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}$,

vitesse du point de \mathcal{S}_2 coïncidant avec I à l'instant considéré ; ces deux vitesses ne peuvent pas être obtenues par dérivation du vecteur position du point I !

De la même manière, on ne peut pas obtenir l'accélération du point I élément de \mathcal{S}_1 par dérivation du vecteur vitesse du point I précédent !

(cette vitesse est une valeur particulière obtenue à un instant particulier de la vitesse d'un point de \mathcal{S}_1 ; on ne peut pas obtenir la dérivée d'un vecteur à partir de la connaissance de ce vecteur à un instant donné !).

C.2. Roulement sans glissement

Définition 6

Il y a roulement sans glissement (RSG) du solide \mathcal{S}_1 par rapport au solide \mathcal{S}_2 si la vitesse de glissement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 est nulle :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}.$$

Ainsi : $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}}$.

1. $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}}$, vitesse d'un point M de \mathcal{S}_1 coïncidant avec I , point géométrique de contact à l'instant considéré et $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}}$, vitesse du point M' de \mathcal{S}_2 coïncidant avec I à l'instant considéré.

Remarques :

La vitesse de glissement est indépendante du choix du référentiel \mathbb{R} .

Le cas du pivotement ne sera pas étudié.

Application 4

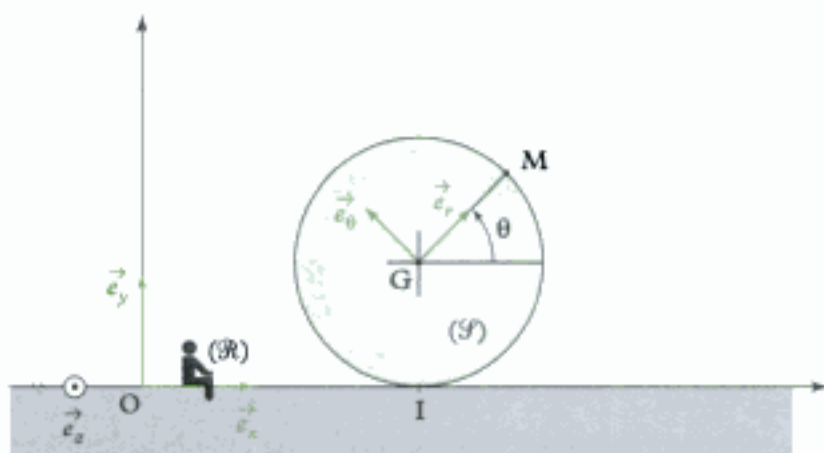
Considérons une roue (modélisée par un disque \mathcal{S}) (de centre G et rayon R roulant sans glisser sur le sol horizontal (axe $(O; \vec{e}_x)$) tout en restant dans le plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .

Le référentiel terrestre (lié au sol) est : $\mathbb{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Son centre G a pour vitesse $\vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} = \dot{x}\vec{e}_x$.

On repère la position angulaire de la roue à l'aide de l'angle :

$$\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{GM}).$$

- 1) Exprimer la vitesse du point M .
- 2) En déduire la vitesse de M au passage en I , point de contact entre la roue et le sol.
- 3) Exprimer la condition de roulement sans glissement de la roue.
- 4) Exprimer alors l'accélération du point de contact I élément de la roue.



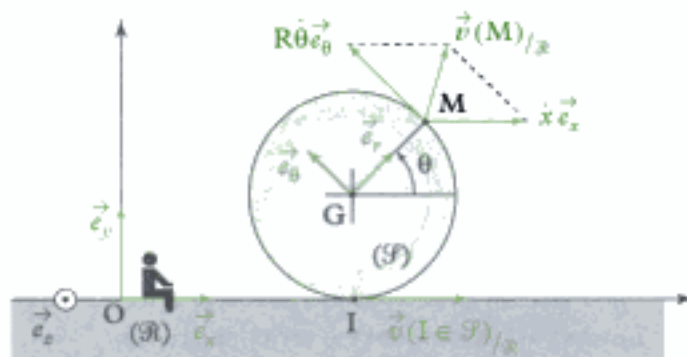
Solution

- 1) On utilise, pour déterminer la vitesse de M dans \mathbb{R} , la définition :

$$\vec{v}(M)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{/\mathbb{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right)_{/\mathbb{R}}$$

avec $\left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{/\mathbb{R}} = \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $\left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d(R\vec{e}_r)}{dt}\right)_{/\mathbb{R}} = R\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathbb{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Ainsi : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.



2) Au passage en I, pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$ la vitesse de M s'obtient en remarquant qu'alors $\vec{e}_\theta = \vec{e}_x$; ainsi, la vitesse de M au passage en I est :

$$\vec{v}\left(M\left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right)\right)_{/\mathcal{R}} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\vec{e}_x.$$

Remarques :

- Cette vitesse est la vitesse du point M de la roue \mathcal{S} coïncidant avec le point I ; on note ainsi :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}\left(M\left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right)\right)_{/\mathcal{R}} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\vec{e}_x ;$$

- on aurait aussi pu utiliser la F.F.C.S. :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{GI}.$$

Comme le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} s'écrit $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_z$, on a :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (-R\vec{e}_y) = (\dot{x} + R\dot{\theta})\vec{e}_x.$$

3) Exprimons la vitesse de glissement du disque \mathcal{S} par rapport au sol \mathcal{R} :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{R})_{/\mathcal{R}}.$$

Le second terme est nul car le sol \mathcal{R} est fixe par rapport au référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{R})_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

(on peut donc exprimer les différents vecteurs par rapport au sol ou par rapport au référentiel \mathcal{R}).

Remarque : Comme I (point géométrique de contact entre la roue et le sol) n'est pas naturellement élément de \mathcal{R} :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{R})_{/\mathcal{R}} \neq \left(\frac{d\vec{OI}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} ;$$

en effet : $\left(\frac{d\vec{OI}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x$.

La vitesse du point I élément du sol est nulle. On constate qu'il existe trois points I se trouvant à la même position à l'instant considéré et donc que l'on peut définir trois vitesses pour I ! La vitesse d'un point coïncidant à un instant donné avec un point appartenant (naturellement) à un solide n'est pas la vitesse du point du solide !

Il y a roulement sans glissement de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} si :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{R})_{/\mathcal{R}} = \vec{0} ;$$

ici, on obtient la relation entre les paramètres cinématiques (décrivant la position de la roue à chaque instant) :

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}.$$

4) À partir de l'expression de la vitesse d'un point M de la roue \mathcal{S} :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{e}_x + R\dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Exprimons alors l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} , en dérivant l'expression de la vitesse du point M par rapport au temps dans \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d(\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{e}_x + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

Lorsque M est en I (au contact avec le sol), pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\vec{e}_r = -\vec{e}_y$, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_x$ et d'après la condition de RSG, $\dot{x} + R\dot{\theta} = 0$. On a alors : $\ddot{x} + R\ddot{\theta} = 0$, ainsi :

$$\vec{a}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{a}\left(M\left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right)\right)_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}^2 \vec{e}_y$$

en tenant compte de la condition de RSG : $\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{R}$, on a : $\vec{a}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{\dot{x}^2}{R} \vec{e}_y$.

On n'aurait pas obtenu ce résultat si on avait dérivé le vecteur vitesse du point I, point géométrique de contact !

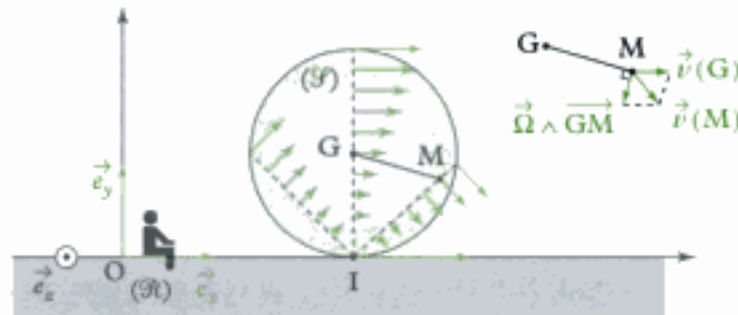
On constate que la vitesse de I est nulle (condition de RSG) et que son accélération n'est pas nulle ; ceci n'est pas une erreur car la vitesse du point M élément de la roue n'est nulle qu'à l'instant de passage à la position I de contact avec le sol, mais n'est ni nulle juste avant, ni juste après : ce point M a donc une accélération non nulle au passage à la position I de contact avec le sol !

Remarques :

- La vitesse de n'importe quel point M de la roue s'écrit :

$$\vec{v}(M \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{IM} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{IM} \text{ avec } \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Cette expression est caractéristique d'un point M en rotation autour de l'axe $(I; \vec{e}_z)$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$: on dit que $(I; \vec{e}_z)$ est l'axe instantané de rotation. Le vecteur vitesse du point M se trouve donc dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) (car perpendiculaire à $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z$) ; il est perpendiculaire à \vec{IM} et sa norme est $|\dot{\theta}|IM$, proportionnelle à sa distance au point I ; on peut donc représenter le champ des vitesses dans la roue :



- La vitesse $\vec{v}(M)$ d'un point M de la roue a été représentée en faisant apparaître ses deux contributions : $\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$ et $\vec{v}(G)$.

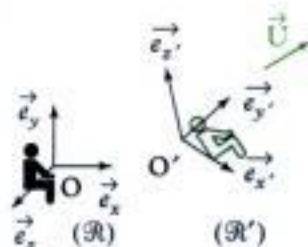
- Le point I est appelé centre instantané de rotation (CIR) de la roue ; lors d'un mouvement plan d'un solide \mathcal{S} , le CIR est, par définition, le point de \mathcal{S} dont la vitesse est nulle à l'instant considéré :

à t donné, $\vec{v}(CIR \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$. Tous les points de \mathcal{S} sont en rotation, à l'instant considéré, autour de l'axe $(I; \vec{e}_z)$; comme le mouvement est plan, le point I se nomme CIR, centre instantané de rotation.

L'essentiel

✓ Formule de Varignon

Considérons deux référentiels (liés à deux observateurs), $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$: \mathcal{R}' est en mouvement par rapport à \mathcal{R} . Le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est caractérisé par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.



Quelque soit le vecteur \vec{U} , on a :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{U}$$

qui permet de faire le lien entre la variation de \vec{U} observé depuis \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

• Cas particuliers

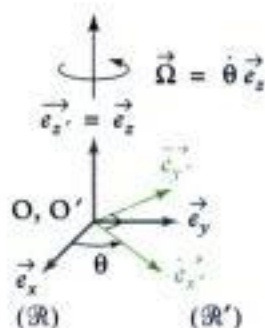
→ si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

→ si \mathcal{R}' est en rotation autour de l'axe $(O; \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} , à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ alors

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z$$

La rotation est uniforme si $\dot{\theta} = \omega = \text{cte.}$



• **Rappel** : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$.

✓ Vecteur vitesse

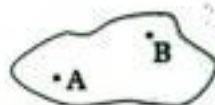
Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} est la dérivée temporelle du vecteur position du point M dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \text{ vecteur vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ \vec{OM} \text{ vecteur position (m)} \\ t \text{ temps (s)} \end{array} \right.$$

✓ Champ de vitesse d'un solide

Un solide (indéformable) \mathcal{S} est un ensemble de points tel que pour tout couple de points $(A; B)$ de \mathcal{S} , la distance AB est constante au cours du temps :

$$\forall A \in \mathcal{S}, \forall B \in \mathcal{S}, \|\vec{AB}\| = \text{cte.}$$



Formule fondamentale de la cinématique du solide (F.F.C.S.)

Pour deux points A et B appartenant au même solide \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}$$

A et B : deux points du solide \mathcal{S}
 $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de B ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
 $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de A ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
 $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ vecteur rotation instantané ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

Si A et B ne sont pas naturellement éléments du solide \mathcal{S} (à chaque instant), il est alors nécessaire d'utiliser l'écriture complète :

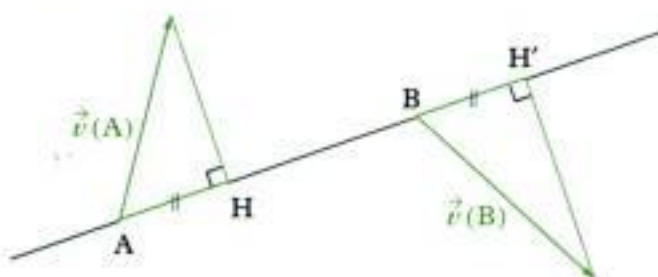
$$\vec{v}(\mathbf{B} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

Conséquences

• Équiprojectivité des vitesses du solide :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}},$$

les vitesses en deux points quelconques A et B d'un solide ont même projection sur la droite (AB) (c'est-à-dire AH = BH').



• Le champ des vitesses d'un solide possède une structure de torseur ; on définit ainsi le torseur cinématique ou torseur distributeur des vitesses réduit au point A, par l'ensemble des deux vecteurs :

→ résultante : vecteur rotation instantané du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R} ;

→ moment en A : vecteur vitesse du point A élément du solide par rapport à \mathcal{R} :

$$\mathcal{T}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = {}_A[\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}, \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}}].$$

Remarques

• Composition des vecteurs rotations instantanés :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}.$$

• Composition des vitesses :

$$\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{R}')_{/\mathcal{R}}.$$

Pour le point C, qui n'est pas naturellement élément du solide \mathcal{S} , on peut écrire :

$$\vec{v}(\mathbf{C} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{C} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(\mathbf{C} \in \mathcal{R}')_{/\mathcal{R}}.$$

Cas d'un solide en translation

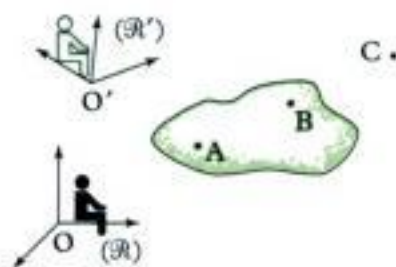
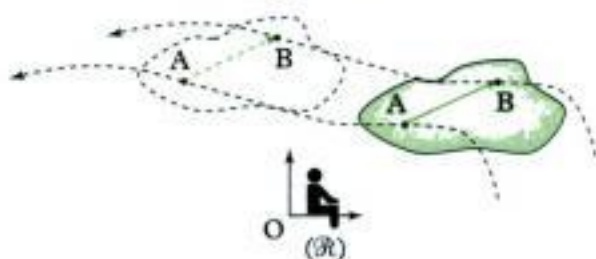
Un solide \mathcal{S} est en translation par rapport au référentiel \mathcal{R} si, à un instant t , les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques.

Ainsi, pour deux points A et B éléments du solide \mathcal{S} , on a, à l'instant t :

$$\vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(t).$$

Ainsi, le vecteur rotation instantané du solide \mathcal{S} est nul :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ et } \forall t, \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \text{cte}.$$



• **Solide en rotation autour d'un axe fixe**

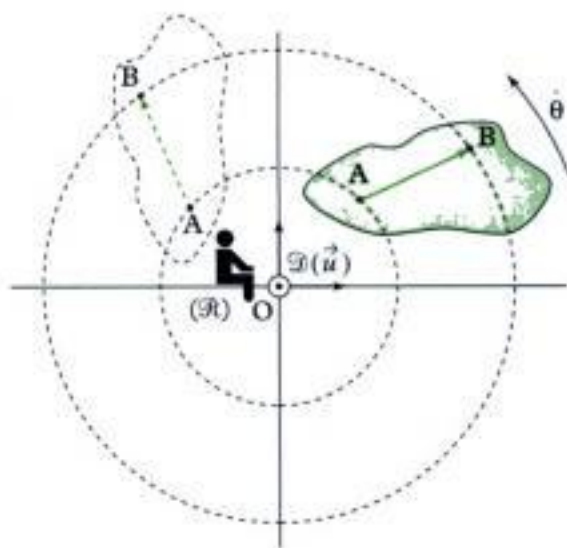
Un solide \mathcal{S} est en rotation autour de l'axe fixe \mathcal{D} du référentiel \mathcal{R} si tous les points du solide \mathcal{S} sont en mouvement sur des trajectoires circulaires centrées sur \mathcal{D} à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Le vecteur rotation instantané du solide \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u},$$

\vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe \mathcal{D} . On a :

$$\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{OA}.$$



✓ **Cinématique du contact ponctuel entre deux solides**

• **Cas général**

On appelle :

→ vitesse de **glissement** de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 :

$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2}$; ce glissement correspond à un déplacement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 dans le plan tangent ;

On a :

$$\begin{aligned} \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) &= \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} \\ &= \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

(cette définition est indépendante du choix du référentiel \mathcal{R}) ;

→ vecteur rotation instantané de **pivotement**

$\vec{\Omega}_n$, composante normale du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$; ce pivotement correspond à

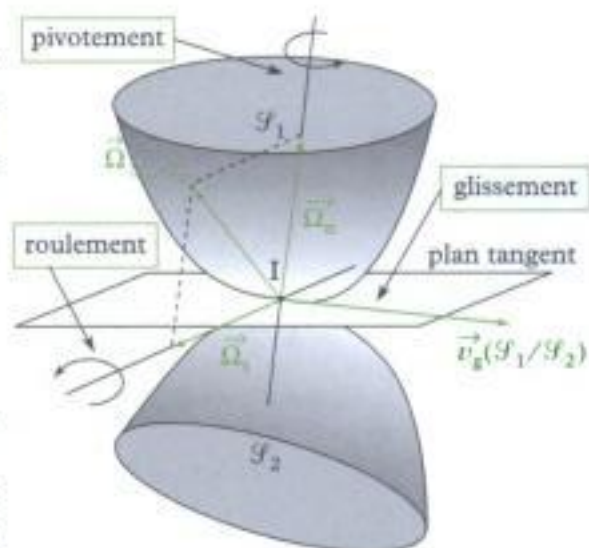
une rotation autour de l'axe $(\mathbf{I} ; \vec{\Omega}_n)$, normal au plan tangent ;

→ vecteur rotation instantané de **roulement** $\vec{\Omega}_t$, composante tangentielle du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$; ce roulement correspond à une rotation autour de l'axe du plan tangent $(\mathbf{I} ; \vec{\Omega}_t)$.

• **Roulement sans glissement**

Il y a roulement sans glissement (RSG) du solide \mathcal{S}_1 par rapport au solide \mathcal{S}_2 si la vitesse de glissement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 est nulle : $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$

Ainsi : $\vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}$.



Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer la vitesse d'un point qui appartient naturellement à un solide ?

On considère un point M qui est naturellement élément d'un solide \mathcal{S} . On cherche à déterminer son vecteur vitesse par rapport à un référentiel \mathcal{R} : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$.

→ Savoir faire

❶ On peut utiliser la définition de la vitesse faisant intervenir la dérivée du vecteur position \vec{OM} :

→ Bien préciser le référentiel \mathcal{R} (l'observateur) par rapport auquel on cherche à déterminer le vecteur vitesse.

→ Exprimer le vecteur position \vec{OM} .

⚠ O est un point fixe de \mathcal{R} (souvent, il s'agit de l'origine de \mathcal{R}) !

→ Dériver le vecteur position par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} afin d'obtenir le vecteur vitesse : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$.

💡 On utilise la formule de Varignon pour dériver les vecteurs de base.

→ Vérifier la relation :

- avec les unités ;
- dans des cas particuliers où le résultat est connu.

❷ On peut utiliser la F.F.C.S.

– Rechercher un autre point (A) du même solide \mathcal{S} dont le mouvement est plus simple (donc un point dont la vitesse est plus simple à déterminer).

💡 Pour trouver des points intéressants du même solide, il faut « comprendre » le mouvement du solide considéré et rechercher les points particuliers de ce mouvement (axe de rotation, point fixe...)

→ Appliquer la F.F.C.S. : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AM}$

• exprimer $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ (voir ❶) ;

• exprimer le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} : $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$;

• en déduire $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$.

→ Vérifier la relation :

- avec les unités ;
- dans des cas particuliers où le résultat est connu.

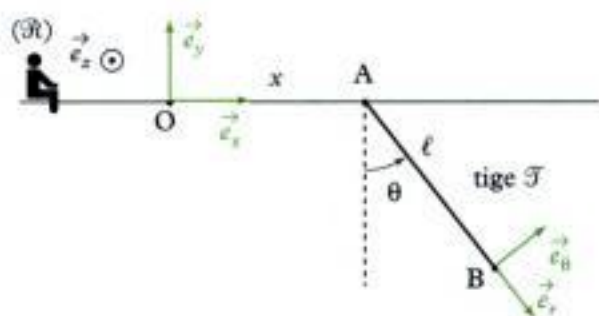
💡 Les points ❶ et ❷ sont assez équivalents, le point ❷ étant particulièrement intéressant dans le cas où la vitesse du 2^e point (le point A) est déjà connue.

→ Application

On considère une tige \mathcal{F} de longueur ℓ qui peut osciller dans le plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_y) sachant que son point A peut se déplacer librement selon l'axe $(O; \vec{e}_x)$, son abscisse est x .

Le sol est représenté par le référentiel $\mathcal{R} (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Déterminer la vitesse de B par rapport au sol.



Solution

① On peut calculer la vitesse de B par rapport au sol, $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$, à l'aide de la définition :

→ le sol est représenté par le référentiel \mathcal{R} ;

→ un vecteur position est \vec{OB} puisque O est fixe dans \mathcal{R} avec $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = x\vec{e}_x + \ell\vec{e}_r$;

$$\rightarrow \vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{OB} \right)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (x\vec{e}_x + \ell\vec{e}_r) \right]_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \ell\dot{\vec{e}}_r + \ell \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Or :

• \vec{e}_x est constant dans \mathcal{R} donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;

• $\ell = \text{cte}$ donc $\dot{\ell} = 0$;

• $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_r = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta}(+1 \times \vec{e}_\theta) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $\mathcal{R}' = (A; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Ainsi :
$$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Vérifications

• Comme \dot{x} est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, ℓ est en m et $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

• si $\dot{\theta} = 0$, alors la tige n'oscille pas et la formule donne $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x$, ce qui est juste (puisque tous les points d'un solide en translation ont la même vitesse, c'est-à-dire ici celle de A) ;

• si $\dot{x} = 0$, alors la tige oscille autour de A qui est fixe par rapport à \mathcal{R} et la formule donne $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, ce qui est juste (B a une trajectoire circulaire de rayon ℓ).

② Le point B appartient naturellement à la tige \mathcal{F} . On recherche la vitesse de B par rapport au sol donc par rapport à \mathcal{R} : $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$.

→ La tige \mathcal{F} peut osciller autour de son extrémité A qui ne peut se déplacer que selon $(O; \vec{e}_x)$. Un autre point de la tige \mathcal{F} qui est intéressant est donc le point A puisque son mouvement est plus simple que celui de B.

→ On applique la F.F.C.S. :
$$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} \underset{\substack{\in \mathcal{F} \\ \in \mathcal{F}}}{=} \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}.$$

→
$$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{OA} \right)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (x\vec{e}_x) \right]_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x.$$

 (Voir ❶).

- Vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z$.
 - Donc $\vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \ell \vec{e}_r = \dot{x} \vec{e}_x + \ell \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$
 $= \dot{x} \vec{e}_x + \ell \dot{\theta} \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{sens } |\vec{e}_z| & |\vec{e}_r| & \sin(\vec{e}_z, \vec{e}_r) & \end{matrix} \times \vec{e}_\theta$
- $$\vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{e}_x + \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

 Pour appliquer cette formule, il faut bien utiliser un point de la tige \mathcal{T} ; ainsi :

$$\vec{v}(\mathbf{B})_{/\mathcal{R}} \neq \vec{v}(\mathbf{O})_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{OB} \text{ car } \mathbf{O} \notin \mathcal{T}.$$

→ **Vérifications** : voir vérifications de ❶.

Méthode 2

Comment déterminer la vitesse d'un point coïncidant ?

On considère un point I qui n'est pas naturellement élément d'un solide \mathcal{F} . On cherche à déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ où \mathcal{R} représente le référentiel.

→ Savoir faire

On doit utiliser la F.F.C.S. :

 Même si le point I n'est pas naturellement élément de \mathcal{F} , ($I \in \mathcal{F}$) est élément de \mathcal{F} (c'est évident, c'est écrit...). On cherche donc la vitesse d'un point « qu'on force » à être élément du solide \mathcal{F} à un instant donné.

→ Rechercher un point (A) du même solide \mathcal{F} qui, lui, est *naturellement* élément du solide \mathcal{F} et dont le mouvement est le plus simple possible (donc dont la vitesse est la plus simple possible à déterminer).

 Pour trouver un point intéressant naturellement élément de \mathcal{F} , il faut « comprendre » le mouvement du solide considéré et rechercher les points particuliers de ce mouvement (axe de rotation, point fixe...).

→ Appliquer la F.F.C.S. :

$$\vec{v}(\underbrace{I \in \mathcal{F}}_{\in \mathcal{F}})_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}}_{\in \mathcal{F}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}} \wedge \vec{AI}$$

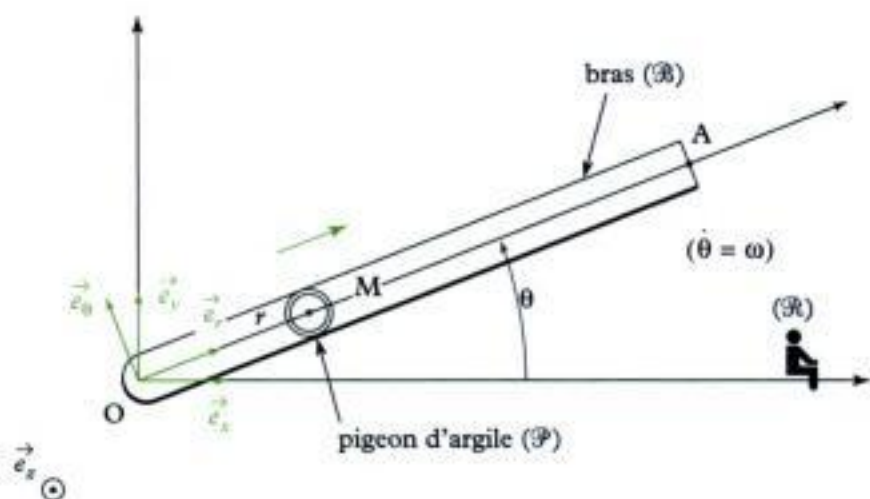
 $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}} \neq \vec{v}(I)_{/\mathcal{R}}$.

- exprimer $\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}$ (voir méthode 1 car A est un point naturellement élément du solide \mathcal{F}) ;
 - exprimer le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}}$ de \mathcal{F} par rapport à \mathcal{R} ;
 - en déduire $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$.
- Vérifier la relation :
- avec les unités ;
 - dans des cas particuliers où le résultat est connu.

→ Application

On étudie un mécanisme de lancement des pigeons d'argiles dans un ball-trap. On repère le point M du pigeon d'argile \mathcal{P} à l'aide des paramètres r et θ sachant que le pigeon d'argile \mathcal{P} glisse sur le bras \mathcal{B} . Le sol est représenté par le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

Déterminer $\vec{v}(M \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}}$.



Solution

M est naturellement élément du pigeon d'argile (\mathcal{P}) . Or ici, on cherche la vitesse d'un point coïncidant (avec M) élément du bras \mathcal{B} .

\triangle $\dot{r}(M \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}} \neq \dot{r}(M \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}} = \dot{r}(M)_{/\mathcal{R}}$.

→ On doit trouver un point du solide \mathcal{B} qui, lui, soit naturellement élément de \mathcal{B} .

Ici \mathcal{B} a un mouvement de rotation autour de ($O ; \vec{e}_z$). Un point qui convient est donc le point O .

→ On applique la F.F.C.S.

$$\bullet \vec{v}(M \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(O)}_{\in \mathcal{B}}_{/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}}_{\in \mathcal{B}} \wedge \overrightarrow{OM};$$

$$\bullet \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ car } O \text{ est fixe dans } \mathcal{R};$$

$$\bullet \vec{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z;$$

$$\bullet \vec{v}(M \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r = \vec{0} + r \dot{\theta} \begin{matrix} (+1 \times 1 \times 1 \times \vec{e}_\theta) \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{sens } |\vec{e}_z| & |\vec{e}_r| & |\sin(\vec{e}_z, \vec{e}_r)| \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\vec{v}(M \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

→ Vérifications

Comme r est en m , $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette relation est homogène à une vitesse en $m \cdot \text{s}^{-1}$.

\triangle $M \in \mathcal{B} \neq M$ donc $\dot{r}(M \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}} \neq \dot{r}(M)_{/\mathcal{R}}$. En effet $\dot{r}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right)_{/\mathcal{R}}$.

Remarque :

Comme M est naturellement élément de \mathcal{P} : $M \in \mathcal{P} = M$ ou $\dot{r}(M \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}} = \dot{r}(M)_{/\mathcal{R}}$.

$$\text{Ici } \dot{r}(M)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) \right]_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\frac{d \vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Rappel : $(uv)' = u'v + ue'$.

Si on appelle \mathcal{R}' le référentiel $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on a :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_r$$

et \vec{e}_r est constant dans \mathcal{R}' donc $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$;

donc $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} (+1 \times 1 \times 1 \times \vec{e}_\theta)$ (règle des 3 doigts de la main droite)

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \text{csc}(\theta) & |\vec{e}_z| & |\vec{e}_r| & \text{sin}(\theta, \vec{e}_z) \end{matrix}$

c'est-à-dire $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et donc :

$$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Pour « fixer » M sur le bras \mathcal{B} , il suffit de supposer $r = \text{cte}$ soit $\dot{r} = 0$;

dans ce cas, $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ s'écrit alors $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, ce qui est $\vec{v}(\mathbf{M} \in \mathcal{B})_{/\mathcal{R}} \dots$

Méthode 3

Comment déterminer une vitesse de glissement ?

On considère un point I, point de contact entre deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

On cherche à déterminer la vitesse de glissement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 .

→ Savoir faire

- ❶ Écrire la définition de la vitesse de glissement $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2}$ de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 (c'est la différence de vitesse entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 au point I).
- ❷ Si besoin, utiliser un référentiel intermédiaire \mathcal{R} et la composition des vitesses afin de simplifier le calcul de cette vitesse de glissement :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}.$$



• Pour trouver ce référentiel intermédiaire intéressant, il suffit de regarder le mouvement de chacun des deux solides et de voir s'ils ont « des mouvements simples » dans un référentiel commun (qui constituera alors le référentiel intermédiaire).

• Si l'un des deux solides est fixe ou n'est pas en rotation, il n'y a pas besoin d'introduire de référentiel intermédiaire.

- ❸ Exprimer « les deux composantes » de la vitesse de glissement $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}$.



Voir méthode 2.

→ En déduire la vitesse de glissement.

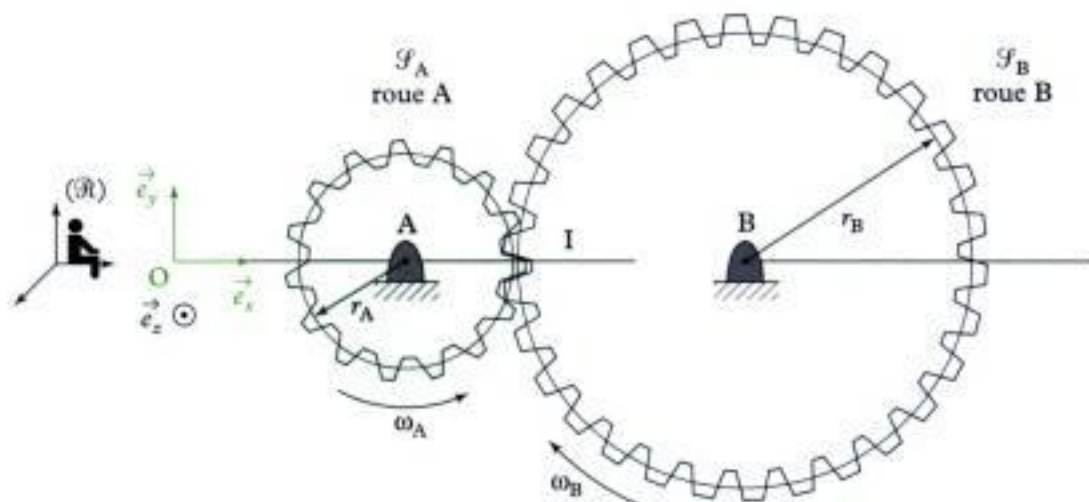
→ Vérifier la relation :

- avec les unités (homogénéité) ;
- sachant que la vitesse de glissement doit être élément du plan tangent ;
- dans des cas particuliers.

→ Application

On considère deux solides \mathcal{S}_A et \mathcal{S}_B , en contact au point I, de rayons moyens respectifs r_A et r_B , tournant à des vitesses angulaires respectives ω_A et ω_B par rapport au sol représenté par le référentiel \mathcal{R} ($O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

Exprimer la vitesse de glissement de \mathcal{S}_A par rapport à \mathcal{S}_B .



Solution

- 1 La vitesse de glissement du \mathcal{S}_A par rapport à \mathcal{S}_B est la différence de vitesse qu'il peut (ou non) exister entre \mathcal{S}_A et \mathcal{S}_B au niveau de leur point de contact (ici I) ; c'est donc :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{S}_B}$$

- 2 On voit bien ici que le mouvement de \mathcal{S}_A par rapport à \mathcal{S}_B n'est pas facile à imaginer. En revanche le mouvement de \mathcal{S}_A par rapport à \mathcal{R} est simple (rotation autour de A) ainsi que celui de \mathcal{S}_B par rapport à \mathcal{R} (rotation autour de B). On va donc tout naturellement utiliser \mathcal{R} comme référentiel intermédiaire ; ainsi :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{S}_B} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_B)_{/\mathcal{R}}$$

- 3 On va donc exprimer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_B)_{/\mathcal{R}}$.



Le point de contact de I n'est pas élément de \mathcal{S}_A , ni de \mathcal{S}_B ; $I \notin \mathcal{S}_A$ et $I \notin \mathcal{S}_B$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{v}(I)_{/\mathcal{R}} &= \vec{0} \neq \vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}} \\ &\neq \vec{v}(I \in \mathcal{S}_B)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

On ne peut donc pas utiliser la méthode 1 pour déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}}$ ou $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_B)_{/\mathcal{R}}$.

→ Déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}}$ revient à déterminer la vitesse d'un point « dans la position de I » mais ayant la vitesse du solide \mathcal{S}_A .

Le moyen le plus sûr pour calculer cette vitesse est d'utiliser la formule fondamentale de la cinématique du solide (voir méthode 2).

Comme le mouvement de $\mathcal{S}_A/\mathcal{R}$ est un mouvement de rotation autour de A, pour déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}}$, on va se servir du point A, point naturellement élément de \mathcal{S}_A .



A appartient naturellement à \mathcal{S}_A , donc :

$$\vec{v}(A \in \mathcal{S}_A)_{/\mathcal{R}} = \dot{\vec{r}}(A)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{OA} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\vec{0}}$$

Avec $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_A/\mathcal{R}} = \omega_A \vec{e}_z$, on écrit :

$$\underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{F}_A)}_{\in \mathcal{F}_A} \Big|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(A)}_{\in \mathcal{F}_A} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}_A/\mathcal{R}} \wedge \vec{AI}.$$


 $(I \in \mathcal{F}_A)$ est élément de \mathcal{F}_A ! C'est évident puisque c'est écrit...

Donc $\vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0} + \omega_A \vec{e}_z \wedge r_A \vec{e}_x$ car A est fixe dans \mathcal{R} donc $\vec{v}(A) \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$.

Donc $\vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{R}} = r_A \omega_A \times (+1 \times 1 \times 1 \times \vec{e}_y)$.

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 sens (règle des 3 doigts) $|\vec{e}_z|$ $|\vec{e}_x|$ $|\sin(\vec{e}_z, \vec{e}_x)|$ $\perp \vec{e}_z$ et $\perp \vec{e}_x$

$$\vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{R}} = r_A \omega_A \vec{e}_y.$$

 $\vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{R}} \neq \vec{v}(I) \Big|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{AI} \right) \Big|_{\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (r_A \vec{e}_x) \right] \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ donc $I \in \mathcal{F}_A \neq I$.

Par analogie :

$$\underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{F}_B)}_{\in \mathcal{F}_B} \Big|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(B)}_{\in \mathcal{F}_B} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}_B/\mathcal{R}} \wedge \vec{BI}, \text{ d'où } \vec{v}(I \in \mathcal{F}_B) \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0} + (-\omega_B \vec{e}_z) \wedge (-r_B \vec{e}_x)$$

$$\vec{v}(I \in \mathcal{F}_B) \Big|_{\mathcal{R}} = r_B \omega_B \vec{e}_y.$$

 Avec les sens définis, $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_B/\mathcal{R}} = -\omega_B \vec{e}_z$.

→ Ainsi la vitesse de glissement s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{F}_B} &= \vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{F}_B) \Big|_{\mathcal{R}} = r_A \omega_A \vec{e}_y - (r_B \omega_B \vec{e}_y) \\ \vec{v}(I \in \mathcal{F}_A) \Big|_{\mathcal{F}_B} &= (r_A \omega_A - r_B \omega_B) \vec{e}_y. \end{aligned}$$

→ Vérifications

• Comme r_A et r_B sont en m, ω_A et ω_B en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ cette formule est homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Le plan tangent est défini par les directions $(\vec{e}_y; \vec{e}_z)$. De plus, ici le problème est plan $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$. La vitesse ne doit donc contenir que la direction \vec{e}_y (vrai) ;

• dans le cas où la vitesse de glissement est nulle, on a :

$$(r_A \omega_A - r_B \omega_B) \vec{e}_y = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \omega_B = + \frac{r_A}{r_B} \omega_A.$$

Le signe « + » s'explique par le fait qu'il n'y a pas de glissement en I ; les deux roues tournent en sens inverses, donc :

$$\text{si } \omega_A > 0 \text{ alors } \omega_B > 0, \text{ et si } \omega_A < 0 \text{ alors } \omega_B < 0.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Homogénéité d'une relation

Vérifier l'homogénéité d'une relation $v = \omega r$ dans laquelle v est une vitesse, ω une vitesse angulaire et r une longueur.

Ex. 2 Mouvements particuliers

On envisage une automobile sur une route rectiligne :

- a) qui se déplace en roulant sans glisser dans la direction de la route ;
- b) qui se déplace, roues bloquées par les freins (sur la neige par exemple), dans la direction de la route ;
- c) dont les roues motrices patinent, la voiture n'avancant pas.

Dans chacun des cas ci-dessus, déterminer la nature du mouvement éventuel (translation, rotation...) des roues motrices et de l'habitacle.

Aucune démonstration n'est demandée dans cet exercice.

Ex. 3 Calcul des vitesses

Un wagon se déplace à la vitesse $v = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; chacune de ses roues possède un rayon $r = 30 \text{ cm}$ et roule sans glisser sur un rail rectiligne à la vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{r}$.

- 1) Calculer la vitesse du wagon en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- 2) Calculer la vitesse angulaire de chacune des roues du wagon en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, puis en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Niveau 2

Ex. 4 Chute d'une échelle

Soit une échelle \mathcal{E} de longueur 2ℓ ; son extrémité A se déplace suivant $(O ; \vec{e}_x)$ et son extrémité B suivant $(O ; \vec{e}_y)$ et son mouvement est décrit par la relation :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2}t \right)$$

avec t positif croissant exprimé en s et θ exprimé en rad.

Soit \mathcal{R} le référentiel $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au sol.

1) a) Montrer que le point G, milieu de [AB], a une trajectoire circulaire de centre O.

b) Exprimer $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$.

c) Indiquer le sens de déplacement du point G.

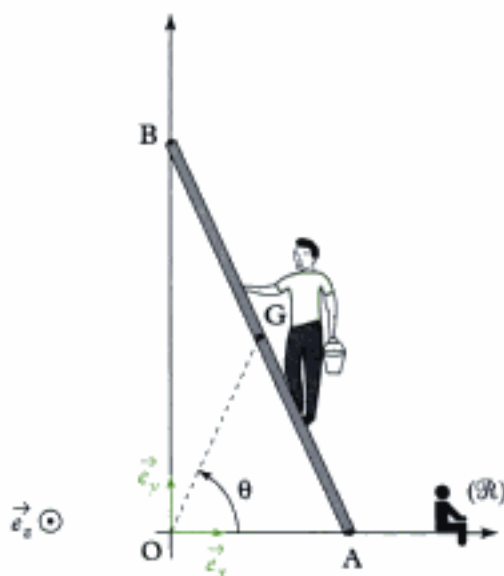
d) Vérifier que $\|\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}\| = \ell|\dot{\theta}|$.

2) Déterminer $\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}$.

3) a) Déterminer les expressions de $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$.

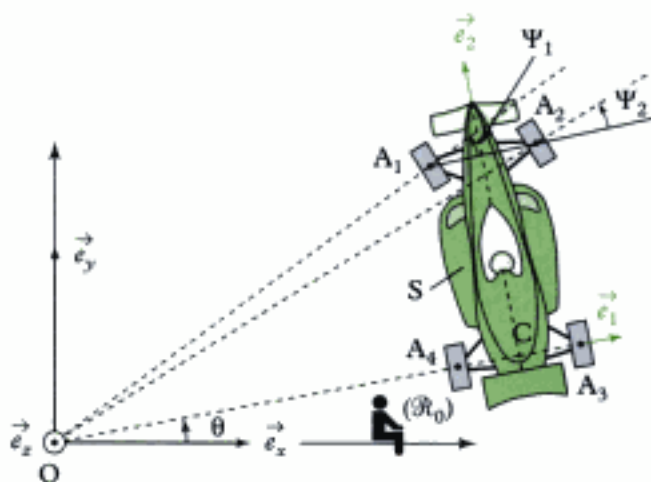
b) En déduire le sens de déplacement des points A et B.

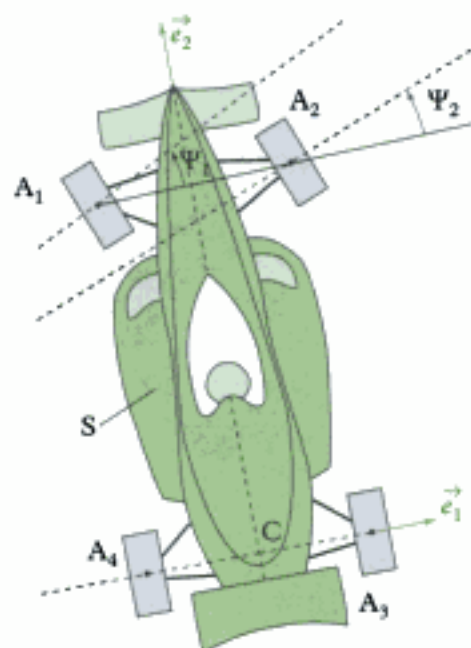
4) Retrouver les expressions de $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$ en utilisant la propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide.



Ex. 5 Formule 3 000

Le but de cette application est d'étudier le mouvement d'une formule 3 000 dans un virage et d'en déduire les conséquences sur la direction des roues avant (roues motrices). La modélisation adoptée est celle de la figure ci-dessous ; O est le centre du virage.





Le référentiel lié au sol est noté $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
Le référentiel lié à la voiture est noté $\mathcal{R}(C; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On pose :

- $\vec{OC} = r\vec{e}_1$ (r étant le rayon du virage, constant) ;
 - $\vec{A_1A_2} = \vec{A_4A_3} = 2d\vec{e}_1$;
 - $\vec{A_4A_1} = \vec{A_3A_2} = L\vec{e}_2$;
 - $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_1)$;
 - Ψ_1 et Ψ_2 sont des angles mesurés à partir de la direction de $(O; \vec{e}_1)$.
- C est le milieu de A_4A_3 .

1) Exprimer $\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0}$, $\vec{v}(A_3)_{/\mathcal{R}_0}$ et $\vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0}$ en fonction de r , d et θ .

2) Donner les expressions de $\vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0}$ et $\vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0}$.

3) Pour que les roues directrices roulent normalement, A_1 et A_2 doivent tourner autour de O .

a) En utilisant la figure de l'énoncé, exprimer les angles $(\vec{OA_1}, \vec{e}_2)$ et $(\vec{OA_2}, \vec{e}_2)$ en fonction respectivement de Ψ_1 et Ψ_2 .

b) Exprimer le produit scalaire $\vec{OA_1} \cdot \vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0}$ en fonction, entre autres, de OA_1 et Ψ_1 et le produit scalaire $\vec{OA_2} \cdot \vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0}$ en fonction, entre autres de OA_2 et Ψ_2 .

c) Que peut-on dire de la valeur de ces produits scalaires ?

En déduire les expressions de $\tan\Psi_1$ et $\tan\Psi_2$.

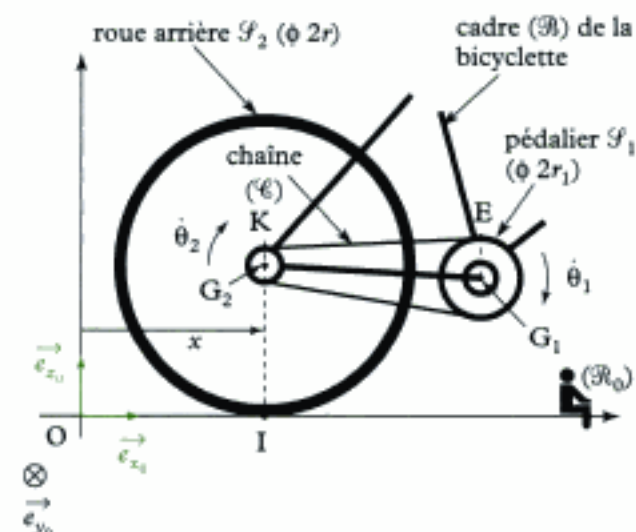
Quelle est la roue qui est la plus inclinée ?

Retrouve-t-on le fait, qu'en déplacement rectiligne (sur une route rectiligne par exemple) le parallélisme des roues motrices doit être réalisé ?

Ex. 6 Développement d'une bicyclette

La chaîne (\mathcal{C}) d'une bicyclette s'enroule sur les roues dentées du pédalier (\mathcal{F}_1) de centre G_1 et de rayon r_1 et du pignon arrière utilisé de rayon r_2 .

Ce pignon est solidaire de la roue arrière (\mathcal{F}_2) de centre G_2 et de rayon r ; le cadre de la bicyclette est noté (\mathcal{B}) .



Les points E et K sont « les premiers points » de contact entre la chaîne d'une part, le pédalier et le pignon arrière d'autre part.

$$\vec{KE} = L\vec{e}_x$$

Les rotations des solides (\mathcal{F}_1) et (\mathcal{F}_2) par rapport au référentiel lié au sol $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont paramétrées par les angles θ_1 et θ_2 .

1) En utilisant les points E et K , établir la relation entre $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

2) a) On admet que la roue arrière (\mathcal{F}_2) roule sans glisser sur le sol.

Déterminer la relation entre la vitesse de la bicyclette \dot{x} et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ de (\mathcal{F}_2) .

b) En déduire la relation entre \dot{x} et $\dot{\theta}_1$.

3) Exprimer « le développement » Δx de cette bicyclette sachant qu'il correspond à la distance parcourue par la bicyclette pour 1 tour de pédalier.

Faire l'application numérique dans le cas d'un précédent record de l'heure où on utilisait :

- un pédalier de 56 dents (n_1) ;
- un pignon arrière de 13 dents (n_2) ;
- une roue arrière de diamètre 66,6 cm.

Donnée

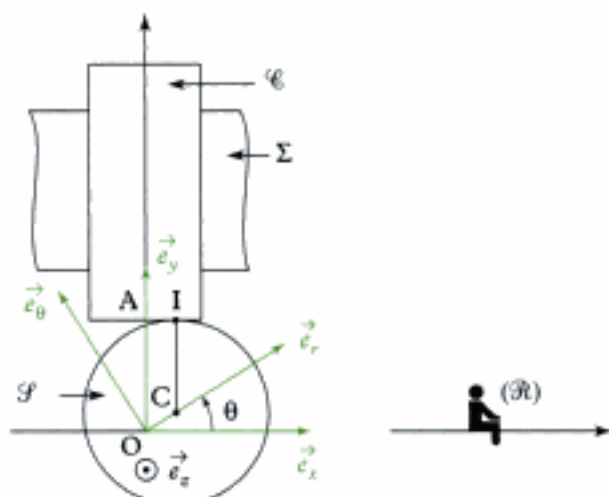
On a la relation :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Niveau 3

Ex. 7 Commande de soupape

Une commande de soupape de moteur de voiture se compose d'une came (arbre à cames) ou excentrique \mathcal{F} glissant directement sur un poussoir (\mathcal{C}) guidé verticalement par le bâti (Σ), qui agit directement sur la soupape.



Soit $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un référentiel lié au bâti Σ . L'excentrique est assimilé à un disque de centre C, de rayon r ; il tourne autour d'un axe $(O; \vec{e}_z)$ lié à Σ à vitesse constante.

Soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ un référentiel lié à \mathcal{F} tel que :

$$\vec{OC} = a\vec{e}_r \quad (a > 0) \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r).$$

Le contact entre \mathcal{F} et \mathcal{C} se fait au point I.

1) Exprimer la vitesse $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\Sigma}$ en fonction de a , r et θ .

2) Donner l'expression de la vitesse (de translation) de (\mathcal{C}) suivant $(O; \vec{e}_y)$, notée :

$$\vec{v}(A)_{/\Sigma} = v_A \vec{e}_y.$$

3) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction $v_A = f(\theta)$ pour :

$$-\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Conclure sur le type de mouvement de A.

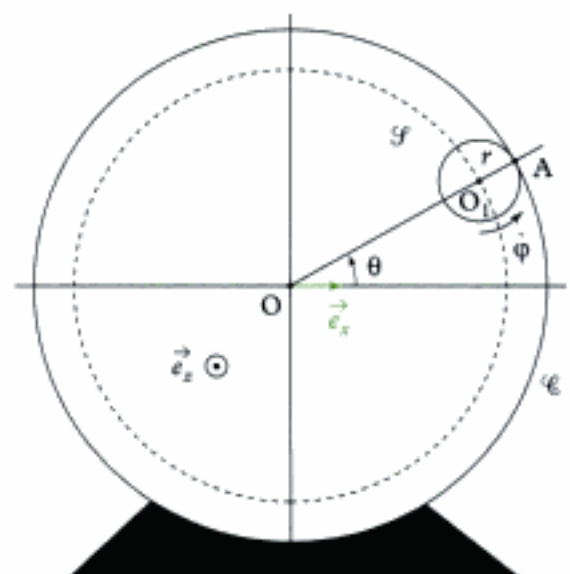
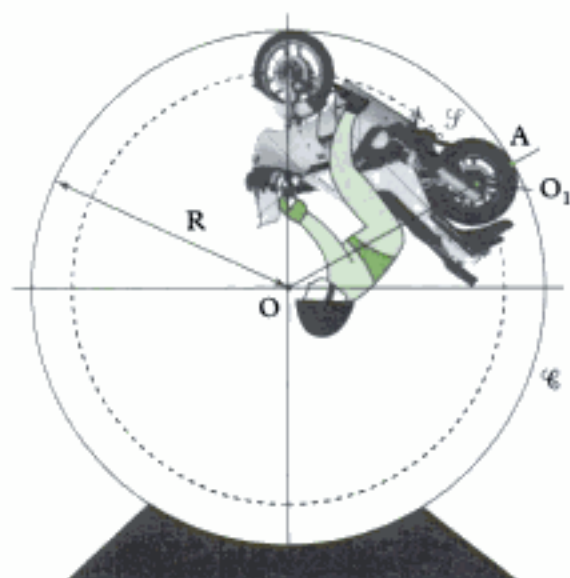
Ex. 8 Étude du mouvement d'une roue de moto

Dans certaines fêtes foraines, on peut voir des motards évoluer dans des cages en acier.

Le but de cette application est d'étudier le mouvement de la roue arrière connaissant la vitesse de la moto.

La roue arrière \mathcal{F} de rayon $r = 0,3$ m roule sans glisser à l'intérieur de la cage en acier \mathcal{C} de rayon $R = 2,5$ m.

Le point de contact est noté A ; on pose $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_{x_1})$ et $\dot{\varphi}$ la vitesse angulaire de la roue arrière.



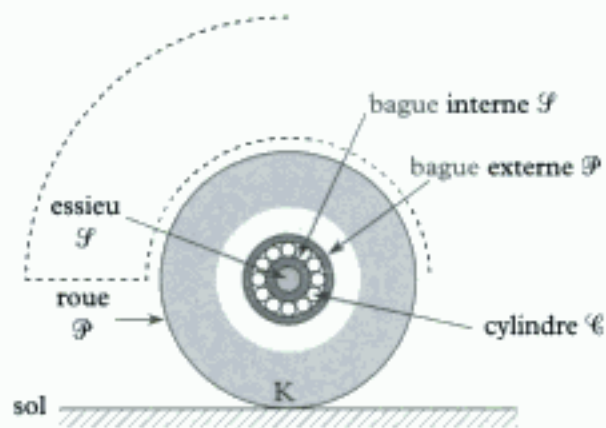
1) Compléter, sur le schéma, les référentiels $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la cage (\mathcal{C}) et $\mathcal{R}(O; \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ situant le centre de la roue arrière O_1 et lié au cadre de la moto.

2) Déterminer l'expression de la vitesse du point O_1 par rapport à (\mathcal{C}). Sachant que la moto (les axes de ses roues) a une vitesse de $25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, faire l'application numérique pour $\dot{\theta}$ (exprimée en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$).

3) Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$. Faire l'application numérique pour $\dot{\varphi}$ (exprimé en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$).

Ex. 9 Roulement à rouleaux

La liaison entre un essieu (\mathcal{F}) d'axe horizontal $\Delta = (C; \vec{e}_z)$ et une roue de voiture (\mathcal{P}) de rayon r est assurée par un roulement à rouleaux.



Le roulement est constitué :

- d'une bague interne (\mathcal{F}) de rayon extérieur r_1 , solidaire de l'essieu d'axe Δ ;
- d'une bague externe (\mathcal{P}) de rayon intérieur r_2 , tournant à la vitesse angulaire ω , solidaire de la roue ;
- de n cylindres homogènes situés entre ces 2 bagues, en contact ponctuel avec chacune d'entre elles et sur lesquelles ils roulent sans glisser lorsqu'ils sont en mouvement ; ils sont logés dans des cages (non représentées) qui évitent leurs contacts mutuels et qui permettent de les maintenir régulièrement répartis. La roue roule sans glisser sur le sol horizontal (point de contact K) ; l'essieu (\mathcal{F}) est animé, par rapport au sol, d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$.

• Le référentiel $\mathcal{R}(C ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est lié à l'essieu (\mathcal{F}).

• Le référentiel $\mathcal{R}'(C ; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est tel que $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ avec $\vec{CA} = \frac{r_1 + r_2}{2}\vec{e}_r$.

• Le référentiel \mathcal{R}_0 (non représenté) est lié au sol.

• $\dot{\varphi}$ est la vitesse angulaire du cylindre (\mathcal{C}).

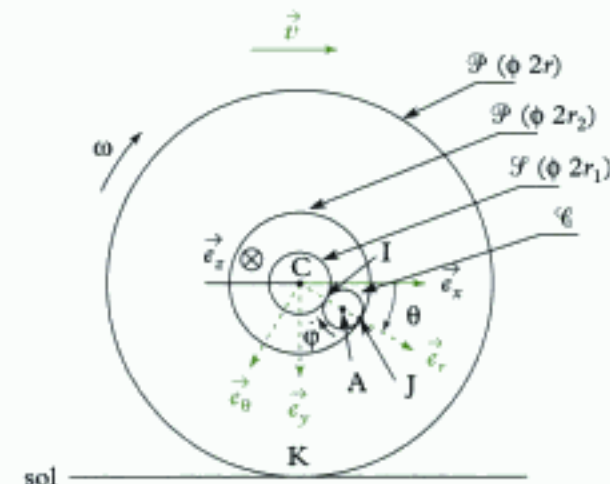
• Soit I et J les points de contact entre le cylindre et respectivement les bagues interne et externe.

1) Exprimer la vitesse angulaire (ω) de la roue en fonction, entre autres, de v .

2) Trouver la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

3) Trouver une relation entre $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ et ω .

4) Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de v , r , r_1 et r_2 , puis $\dot{\varphi}$ en fonction de v , r , r_1 et r_2 ; comparer $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.



Indications

Ex. 6 1) Déterminer les expressions de $\vec{v}(E \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}}$ et de $\vec{v}(K \in \mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}}$, puis remarquer que :

$$\vec{v}(E \in \mathcal{C})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(K \in \mathcal{C})_{/\mathcal{R}}$$

car la chaîne est inextensible.

Ex. 7 2) Envisager la composante de $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ selon \vec{e}_y .

Ex. 8 3) Utiliser le non glissement au point de contact A.

Ex. 9 1) Utiliser le non glissement en K.

2) Utiliser le non glissement en I.

3) Utiliser le non glissement en J.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- Dans $v = \omega r$:
- v est exprimé en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - ω est exprimé en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - r est exprimé en m .

Le radian est une grandeur sans dimension puisqu'il est défini comme étant le rapport de deux longueurs.

v s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

$\omega \cdot r$ s'exprime en $\text{s}^{-1} \text{m}$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ;

la relation est donc homogène.

Exercice 2

a) Déplacement rectiligne avec roulement sans glissement

- Habitacle : il subit un mouvement de translation rectiligne.



Remarque : une translation n'est pas toujours rectiligne, elle peut être circulaire par exemple (tous les points appartenant au solide décrivent alors des circonférences de même rayon), de plus une translation rectiligne peut être uniforme ou uniformément variée...

- Roues motrices : elles subissent un mouvement composé d'une translation (d'ensemble) et d'une rotation autour de leurs axes.

b) Déplacement rectiligne avec les roues bloquées

- Habitacle : il subit un mouvement de translation rectiligne ;
- roues motrices : elles subissent également un mouvement de translation rectiligne.

c) Les roues motrices « patinent »

- Habitacle : pas de mouvement ;
- roues motrices : elles subissent un mouvement de rotation autour de leur axe.

Exercice 3

1) On sait que $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$ et que $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$ donc :

$$v = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{108 \times 1\,000}{3\,600} = \frac{108}{3,6} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Pour passer de $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on divise par 3,6.

2) La vitesse angulaire des roues du wagon est donnée par la relation :

$$\omega = \frac{v}{r},$$

où v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, r en m donc ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\text{Donc } \omega = \frac{v}{r} = \frac{30}{0,3} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour exprimer ω en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$, on sait que :

$$1 \text{ tr} = 2\pi \text{ rad} \quad \text{et} \quad 1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$

$$\text{donc} \quad \omega = \frac{100 \times \frac{1}{2\pi}}{\frac{1}{60}} = 100 \times \frac{60}{2\pi} \\ \approx 100 \times 9,55 = 955 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$



Pour passer de $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$, on multiplie quasiment par 10.

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) a) Quelle que soit la position de l'échelle, le triangle AOB est rectangle en O ; OG est la médiane issue de O donc :

$$\text{OG} = \frac{\text{AB}}{2} = \ell = \text{constante}.$$

G a donc une trajectoire circulaire de centre O et de rayon ℓ .



On peut aussi remarquer que : $\vec{\text{OG}} = \ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y$, donc $\text{OG} = \|\vec{\text{OG}}\| = \ell$.

b) Pour calculer $\vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}}$, on peut par exemple utiliser la définition de la vitesse :



Voir méthode 1.

$$\bullet \text{ Vecteur position : } \vec{\text{OG}} = (\vec{\text{OG}} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{\text{OG}} \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y \\ = \ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y.$$



O est fixe dans \mathcal{R} .

$$\bullet \text{ Vitesse : } \vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\text{OG}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y) \right]_{/\mathcal{R}} \\ = -\ell \sin\theta \cdot \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \ell \cos\theta \cdot \dot{\theta} \vec{e}_y + \ell \sin\theta \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$



\vec{e}_x et \vec{e}_y sont fixes dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

Ainsi :

$$\vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = -\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y.$$

$$\text{c) } \vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = -\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y.$$

• On sait que $\theta(t) = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2}t \right)$ pour $t \geq 0$, donc $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, donc :

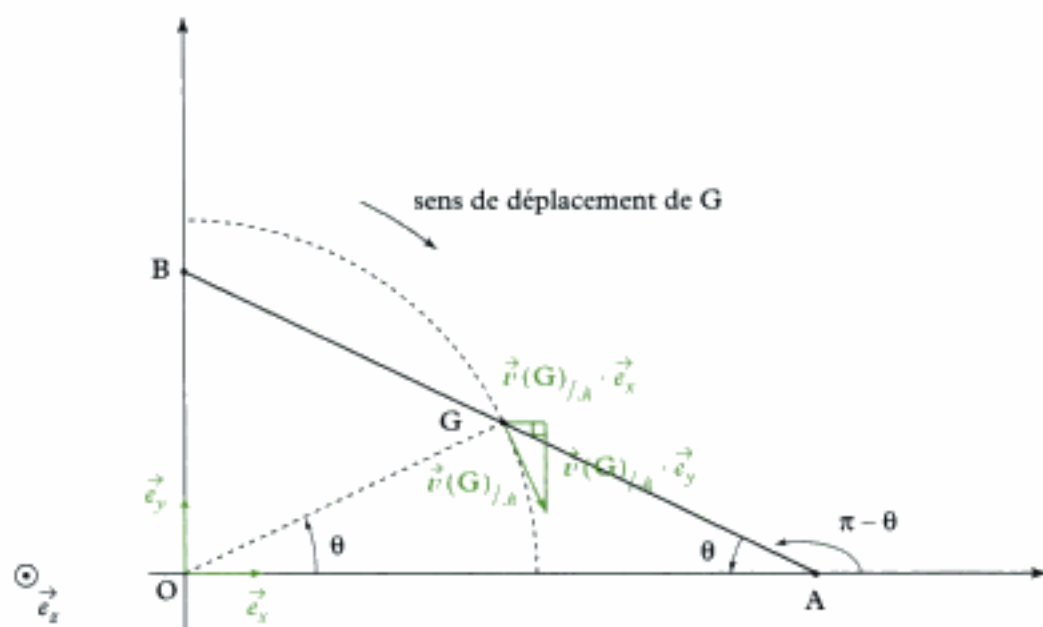
$$\sin\theta > 0 \quad \text{et} \quad \cos\theta > 0.$$

• Par ailleurs $\dot{\theta}(t) = -\frac{\pi}{6}$ avec $t \geq 0$, donc $\dot{\theta} \leq 0$.

Donc :

$$\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_x = -\ell \sin \theta \dot{\theta} \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_y = \ell \cos \theta \dot{\theta} \leq 0.$$

On en déduit le sens de déplacement du point G : il se déplace de gauche à droite et de haut en bas (sur sa trajectoire circulaire de centre O et de rayon ℓ).



d) Pour calculer la norme d'un vecteur, on utilise sa définition $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ et donc :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}\|^2 &= \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \\ &= (-\ell \sin \theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos \theta \dot{\theta} \vec{e}_y) \cdot (-\ell \sin \theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos \theta \dot{\theta} \vec{e}_y) \\ &= (\ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \ell^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2) = \ell^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}\| = \ell |\dot{\theta}|.$$



Résultat logique quand on sait que G décrit dans \mathcal{R} une trajectoire circulaire de rayon ℓ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

2) Pour déterminer $\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}$, il nous faut connaître l'angle (\vec{e}_x, \vec{AB}) puisque \vec{AB} représente une direction de \mathcal{E} .

Or, comme le triangle OAG est isocèle :

$$\widehat{AOG} = \widehat{BAO} \quad \text{donc} \quad (\vec{e}_x, \vec{AB}) = \pi - \theta,$$

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}[(\pi - \theta)\vec{e}_x] = -\dot{\theta} \vec{e}_x.$$

3) a) Pour déterminer les expressions de $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$, comme on connaît déjà $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}$, on va utiliser tout naturellement la F.F.C.S.



Voir méthode 1.

$$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{E}} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{E}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}} \wedge \vec{GA}.$$

Or $\vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} = -\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathbb{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_z$ alors :

$$\begin{aligned}\vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} &= [-\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y] + (-\dot{\theta} \vec{e}_z) \wedge [\ell \cos\theta \vec{e}_x - \ell \sin\theta \vec{e}_y] \\ &= [-\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y] + [-\ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y + \ell \sin\theta \dot{\theta} (-\vec{e}_x)].\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} = -2\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x.$$

Vérifications :

- Comme ℓ est en m, $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est bien homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\vec{v}(A)_{/\mathbb{R}}$ est bien selon \vec{e}_x ; en effet le point A se déplace (énoncé) selon $(O ; \vec{e}_x)$.

De même :

$$\begin{aligned}\vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} &= \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathbb{R}} \wedge \overrightarrow{GB} \\ \vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} &= [-\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y] + (-\dot{\theta} \vec{e}_z) \wedge [-\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y].\end{aligned}$$

On obtient :

$$\vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} = 2\ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y.$$

b) Pour le mouvement qui nous intéresse (voir question 1) c) :

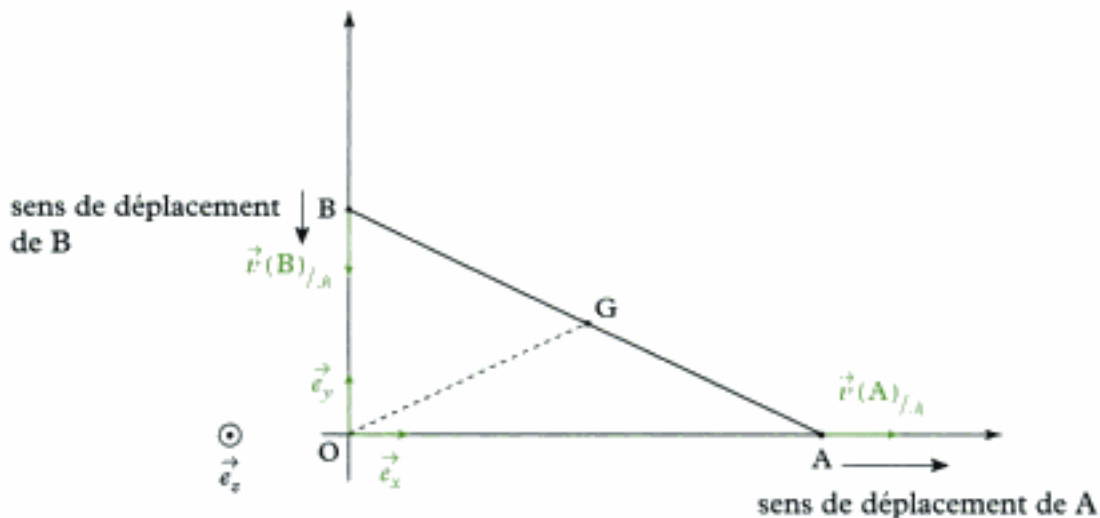
- $\sin\theta \geq 0$;
- $\cos\theta \geq 0$;
- $\dot{\theta} \leq 0$.

On a :

$$\vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{e}_x = -2\ell \sin\theta \dot{\theta} \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{e}_y = 2\ell \cos\theta \dot{\theta} \leq 0,$$

donc : **A se déplace vers la droite** (selon \vec{e}_x)

B se déplace vers le bas (selon $-\vec{e}_y$)



4) A et G appartiennent au même solide \mathcal{E} (l'échelle) donc l'équiprojectivité nous dit que :

$$\vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} \cdot \overrightarrow{AG} = \vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} \cdot \overrightarrow{AG}. \quad (1)$$

Par ailleurs :

$$\bullet \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} = -\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y;$$

$$\bullet \vec{AG} = -\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y;$$

$$\bullet \text{ et } \vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} = v_A \vec{e}_x \text{ car A se déplace selon } (O; \vec{e}_x).$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{AG} &= (-\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y) \cdot (-\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y) \\ &= \ell^2 \cos\theta \sin\theta \dot{\theta} + \ell^2 \cos\theta \sin\theta \dot{\theta} \\ &= 2\ell^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{AG} &= (v_A \vec{e}_x) \cdot (-\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y) \\ &= -\ell v_A \cos\theta \end{aligned}$$

La relation (1) devient :

$$2\ell^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta = -\ell v_A \cos\theta, \text{ soit } \vec{v}(A)_{/\mathbb{R}} = -2\ell \sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x.$$

De la même manière :

$$\bullet \vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} = v_B \vec{e}_y;$$

$$\bullet \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{GB} = \vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{GB} \quad (2);$$

$$\bullet \vec{GB} = -\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y.$$

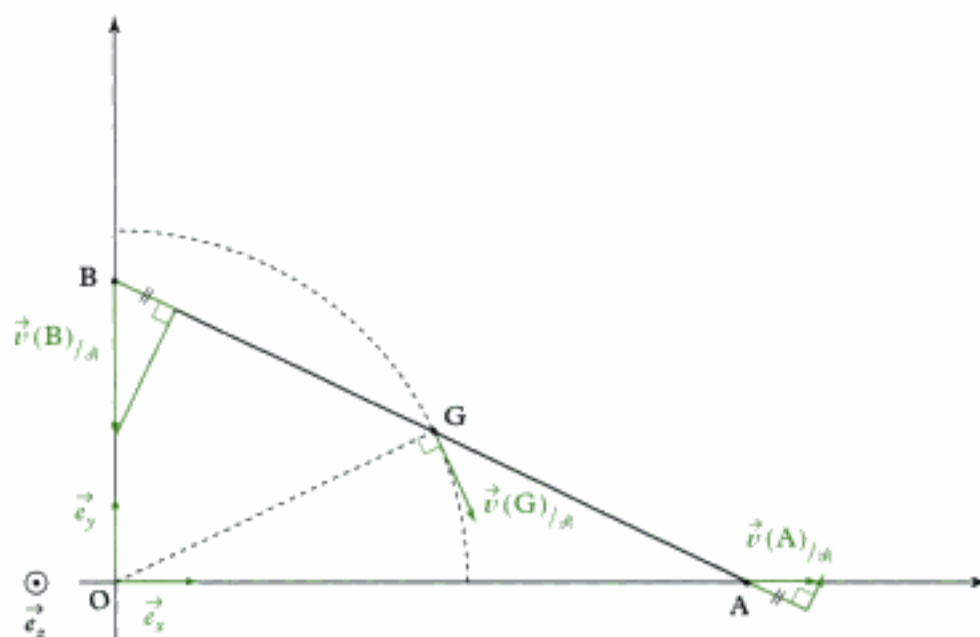
La relation (2) devient :

$$2\ell^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta = \ell v_B \sin\theta \text{ soit } v_B = 2\ell \cos\theta \dot{\theta}.$$

Donc :

$$\vec{v}(B)_{/\mathbb{R}} = 2\ell \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y.$$

Cela donne graphiquement :



Exercice 5

1) Expression de $\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0}$



Le vecteur position étant donné dans l'énoncé : on applique la méthode 1.

- Le référentiel est \mathcal{R}_0 (origine O).
 - $\vec{OC} = r\vec{e}_1$ avec $r = \text{constante}$.
 - $\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{OC}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = r\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0}$;
- or $\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\vec{e}_2$, donc :

$$\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0} = r\dot{\theta}\vec{e}_2.$$

Expression de $\vec{v}(A_3)_{/\mathcal{R}_0}$



Le vecteur position \vec{OA}_3 est facile à exprimer : on applique la méthode 1.

- Le référentiel est \mathcal{R}_0 .
 - $\vec{OA}_3 = \vec{OC} + \vec{CA}_3 = (r+d)\vec{e}_1$, avec $r+d = \text{constante}$.
 - $\vec{v}(A_3)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{OA}_3}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = (r+d)\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0}$, donc :
- $$\vec{v}(A_3)_{/\mathcal{R}_0} = (r+d)\dot{\theta}\vec{e}_2.$$

Expression de $\vec{v}(A_4)_{/\mathcal{R}_0}$



On applique la méthode 1.

- Le référentiel est \mathcal{R}_0 .
 - $\vec{OA}_4 = \vec{OC} + \vec{CA}_4 = (r-d)\vec{e}_1$, avec $r-d = \text{constante}$.
 - $\vec{v}(A_4)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{OA}_4}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = (r-d)\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0}$, donc :
- $$\vec{v}(A_4)_{/\mathcal{R}_0} = (r-d)\dot{\theta}\vec{e}_2.$$

2) Expression de $\vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0}$



On applique la méthode 1.

- Le référentiel est \mathcal{R}_0 .
 - $\vec{OA}_1 = \vec{OC} + \vec{CA}_1 = \vec{OC} + \vec{CA}_4 + \vec{A}_4\vec{A}_1$ soit :
- $$\vec{OA}_1 = r\vec{e}_1 - d\vec{e}_1 + L\vec{e}_2 \text{ avec } r, d \text{ et } L \text{ constants.}$$

$$\bullet \vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = (r-d) \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} + L \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0};$$

or $\left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = -\dot{\theta} \vec{e}_1$ et $\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{e}_2$, donc on obtient :

$$\vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0} = (r-d)\dot{\theta} \vec{e}_2 - L\dot{\theta} \vec{e}_1.$$

Expression de $\vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0}$

 On applique la méthode 1.

• Le référentiel est \mathcal{R}_0 .

• $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_3} + \overrightarrow{A_3A_2}$ soit :

$$\overrightarrow{OA_2} = r\vec{e}_1 + d\vec{e}_1 + L\vec{e}_2 \text{ avec } r, d \text{ et } L \text{ constants.}$$

• $\vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = (r+d) \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} + L \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0}$ soit :

$$\vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0} = (r+d)\dot{\theta} \vec{e}_2 - L\dot{\theta} \vec{e}_1.$$

 On aurait pu appliquer la méthode 1, c'est-à-dire écrire la F.F.C.S. entre A_1 et A_2 appartenant au même solide formule 3.000.

3) a) Expression de $(\overrightarrow{OA_1}, \vec{e}_2)$

$(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{OA_1}) = \Psi_1$ et $(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$ rad puisque \vec{e}_2 est perpendiculaire à $\overrightarrow{A_1A_2}$;

comme $(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{e}_2) = (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$(\overrightarrow{OA_1}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2} - \Psi_1.$$

Expression de $(\overrightarrow{OA_2}, \vec{e}_2)$

$(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{OA_2}) = \Psi_2$ et $(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$ rad;

comme $(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{e}_2) = (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{OA_2}) + (\overrightarrow{OA_2}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$(\overrightarrow{OA_2}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2} - \Psi_2.$$

b) Expression de $\overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0}$

$\overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{OA_1} \cdot [(r-d)\dot{\theta} \vec{e}_2 - L\dot{\theta} \vec{e}_1]$ soit $\overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0} = (r-d)\dot{\theta} \overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{e}_2 - L\dot{\theta} \overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{e}_1$

donc comme :

• $\overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{e}_2 = OA_1 \|\vec{e}_2\| \cos(\overrightarrow{OA_1}, \vec{e}_2) = OA_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Psi_1\right) = OA_1 \sin \Psi_1$;

• $\overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{e}_1 = OA_1 \|\vec{e}_1\| \cos(\overrightarrow{OA_1}, \vec{e}_1) = OA_1 \cos(-\Psi_1) = OA_1 \cos \Psi_1$;

on a finalement :

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0} = OA_1 \dot{\theta} [(r-d) \sin \Psi_1 - L \cos \Psi_1].$$

Expression de $\overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0}$

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{OA_2} \cdot [(r+d)\dot{\theta} \vec{e}_2 - L\dot{\theta} \vec{e}_1] \text{ soit :}$$

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0} = (r+d)\dot{\theta} \overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{e}_2 - L\dot{\theta} \overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{e}_1$$

donc comme :

$$\bullet \overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{e}_2 = OA_2 \|\vec{e}_2\| \cos(\overrightarrow{OA_2}, \vec{e}_2) = OA_2 \sin \Psi_2 ;$$

$$\bullet \overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{e}_1 = OA_2 \|\vec{e}_1\| \cos(\overrightarrow{OA_2}, \vec{e}_1) = OA_2 \cos \Psi_2 ;$$

on a finalement :

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0} = OA_2 \dot{\theta} [(r+d) \sin \Psi_2 - L \cos \Psi_2].$$

c) • Si A_1 et A_2 tournent autour de $(O; \vec{e}_z)$, alors $\vec{v}(A_1)_{/\mathcal{R}_0}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{v}(A_2)_{/\mathcal{R}_0}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA_2}$ donc les produits scalaires de la question b) sont nuls.

Expressions de $\tan \Psi_1$ et $\tan \Psi_2$

La condition ci-dessus implique :

$$(r-d) \sin \Psi_1 - L \cos \Psi_1 = 0 \quad \text{et} \quad (r+d) \sin \Psi_2 - L \cos \Psi_2 = 0,$$

donc :

$$\tan \Psi_1 = \frac{L}{r-d} \quad \text{et} \quad \tan \Psi_2 = \frac{L}{r+d}.$$

Roue la plus inclinée ?

$$\frac{L}{r-d} > \frac{L}{r+d} \text{ implique } \tan \Psi_1 > \tan \Psi_2 \Rightarrow \Psi_1 > \Psi_2 \text{ (angles compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}).$$

Donc la **roue intérieure** est plus inclinée que la roue extérieure.

• Si la route est rectiligne, comme le déplacement, r devient infiniment grand ;

or L et d sont des constantes, donc si $r \rightarrow \infty$, alors :

$$\tan \Psi_1 \rightarrow 0 \text{ et } \tan \Psi_2 \rightarrow 0,$$

donc $\Psi_1 \rightarrow 0$ et $\Psi_2 \rightarrow 0$;

les relations ci-dessus permettent donc bien de retrouver le parallélisme des roues motrices en déplacement rectiligne.

Exercice 6

1) Si le mouvement se transmet entre le pédalier et le pignon arrière, c'est parce que le pédalier transmet « son mouvement » à la chaîne qui (inextensible), le transmet au pignon arrière.

• Il y a tout d'abord non glissement en E entre \mathcal{C} et \mathcal{S}_1 ;

$$\text{ainsi : } \vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{C}} = \vec{0}.$$

Nous allons donc déterminer l'expression de $\vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{C}}$:

 Voir méthode 3.

 Ici le point E est naturellement élément du cadre \mathcal{B} de la bicyclette.

• Comme le mouvement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{C} n'est pas simple, on va utiliser un référentiel intermédiaire. Comme le mouvement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{B} est un simple mouvement de rotation, nous choisirons \mathcal{B} comme repère intermédiaire.

Ainsi : $\vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{C}} = \vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}} - \vec{v}(E \in \mathcal{C})_{/\mathcal{B}}$.

• Exprimons $\vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}}$.

 $\dot{\vec{r}}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}} \neq \dot{\vec{r}}(E)_{/\mathcal{B}} = \vec{0}$ car E n'est pas naturellement élément de \mathcal{S}_1 .

Comme le mouvement de $\mathcal{S}_1/\mathcal{B}$ est un mouvement de rotation autour de (G_1, \vec{e}_{y_0}) , pour déterminer $\vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}}$, on va utiliser le point G_1 , point naturellement élément de \mathcal{S}_1 :

$$\underbrace{\vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}}}_{\in \mathcal{S}_1} = \underbrace{\vec{v}(G_1)_{/\mathcal{B}}}_{\in \mathcal{S}_1} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{B}}}_{\in \mathcal{S}_1} \wedge \overrightarrow{G_1 E}$$

Or G_1 appartient à \mathcal{S}_1 , mais aussi au cadre de la bicyclette \mathcal{B} , donc :

$$\vec{v}(G_1)_{/\mathcal{B}} = \vec{0}.$$

Par ailleurs, $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{B}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}_1 \vec{e}_{y_0}$ car (\mathcal{B}) est en translation par rapport au sol \mathcal{R}_0 ($\vec{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$), donc :

$$\begin{aligned} \vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}} &= \vec{0} + \dot{\theta}_1 \vec{e}_{y_0} \wedge r_1 \vec{e}_{x_0} = r_1 \dot{\theta}_1 \vec{e}_{y_0} \wedge \vec{e}_{x_0} \\ \vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}} &= r_1 \dot{\theta}_1 \vec{e}_{x_0}. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{0} = \vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}} - \vec{v}(E \in \mathcal{C})_{/\mathcal{B}}$, donc :

$$\vec{v}(E \in \mathcal{C})_{/\mathcal{B}} = \vec{v}(E \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{B}} = r_1 \dot{\theta}_1 \vec{e}_{x_0}.$$

 Le pédalier transmet « son mouvement » à la chaîne.

Comme la chaîne est inextensible :

$$\vec{v}(E \in \mathcal{C})_{/\mathcal{B}} = \vec{v}(K \in \mathcal{C})_{/\mathcal{B}} \quad (1)$$

• Enfin il y a non glissement en K entre \mathcal{C} et \mathcal{S}_2 ;

ainsi $\vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{C}} = \vec{0}$.

Par analogie avec ce qui précède, nous allons exprimer $\vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{C}}$.

 Voir méthode 3.

• $\vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{C}} = \vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{B}} - \vec{v}(K \in \mathcal{C})_{/\mathcal{B}}$

• $\vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{B}} = \vec{v}(G_2)_{/\mathcal{B}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{B}} \wedge \overrightarrow{G_2 K} = \vec{0} + \dot{\theta}_2 \vec{e}_{y_0} \wedge r_2 \vec{e}_{x_0} = r_2 \dot{\theta}_2 \vec{e}_{y_0} \wedge \vec{e}_{x_0}$

$$\vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{B}} = r_2 \dot{\theta}_2 \vec{e}_{x_0}.$$

 $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{B}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}_2 \vec{e}_{y_0}$ car \mathcal{B} est en translation par rapport à \mathcal{R}_0 ($\vec{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$).

Ainsi $\vec{0} = \vec{v}(K \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0} - \vec{v}(K \in \mathcal{C})_{/\mathcal{R}_0}$, donc :

$$\vec{v}(K \in \mathcal{C})_{/\mathcal{R}_0} = r_2 \dot{\theta}_2 \vec{e}_{x_0}.$$

☀ Expression homogène à une vitesse ($m \cdot s^{-1}$), dans la bonne direction et le bon sens.

☀ La chaîne transmet « son mouvement » au pignon arrière.

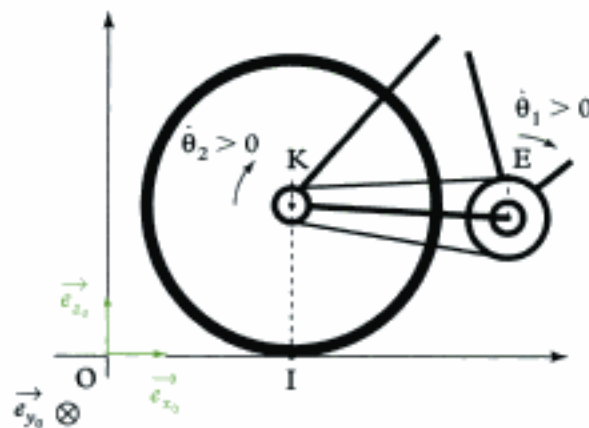
Cette relation s'écrit dans ces conditions :

$$r_1 \dot{\theta}_1 \vec{e}_{x_0} = r_2 \dot{\theta}_2 \vec{e}_{x_0},$$

soit en projection sur \vec{e}_{x_0} :

$$r_1 \dot{\theta}_1 = r_2 \dot{\theta}_2.$$

☀ Cette relation est homogène et du bon signe (si $\dot{\theta}_1 > 0$ alors $\dot{\theta}_2 > 0$, c'est-à-dire les solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 tournent dans le même sens).



2) a) La roue arrière roule sans glisser sur le sol donc la vitesse de glissement au point de contact I entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{R}_0 est nulle :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}.$$

☀ C'est cette condition de non glissement qui physiquement crée un lien entre $\dot{\theta}_2$ et \dot{x} .

On va donc exprimer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0}$.

☀ Voir méthode 3.

⚠ Le point I est naturellement élément du cadre de la bicyclette \mathcal{B} , mais pas de \mathcal{S}_2 :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0} \neq \vec{v}(I)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d}{dt} \vec{OI} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (x \vec{e}_{x_0}) \right]_{/\mathcal{R}_0} = \dot{x} \vec{e}_{x_0}.$$

• Ici le mouvement de $\mathcal{S}_2/\mathcal{R}_0$ n'est pas trop compliqué (car \mathcal{R}_0 est fixe) ; on ne va donc pas choisir de référentiel intermédiaire.

• Pour déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0}$, on va faire intervenir un point naturellement élément de \mathcal{S}_2 dont la vitesse est simple à calculer.

La roue « s'enroule » autour de l'axe (G_2, \vec{e}_{y_0}) : G_2 ne subit donc pas la rotation d'angle θ_2 .

On va choisir G_2 comme point de \mathcal{F}_2 :

$$\underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2)}_{\in \mathcal{F}_2} / \mathcal{R}_0 = \underbrace{\vec{v}(G_2)}_{\in \mathcal{F}_2} / \mathcal{R}_0 + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_2/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{F}_2} \wedge \overrightarrow{G_2 I}$$

Or $\vec{v}(G_2) / \mathcal{R}_0 = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG_2} \right) / \mathcal{R}_0 = \left[\frac{d}{dt} (x \vec{e}_{x_0} + r \vec{e}_{z_0}) \right] / \mathcal{R}_0 = \dot{x} \vec{e}_{x_0}$.



$r = \text{constante}$.

\vec{e}_{x_0} et \vec{e}_{z_0} sont des constantes dans \mathcal{R}_0 .

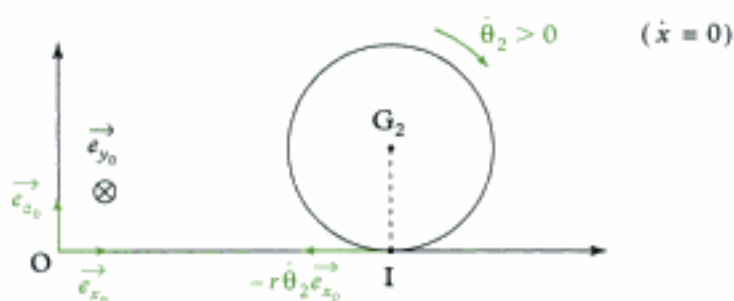
Ainsi :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2) / \mathcal{R}_0 = \dot{x} \vec{e}_{x_0} + \dot{\theta}_2 \vec{e}_{y_0} \wedge (-r) \vec{e}_{z_0} = \dot{x} \vec{e}_{x_0} - r \dot{\theta}_2 \vec{e}_{x_0}$$

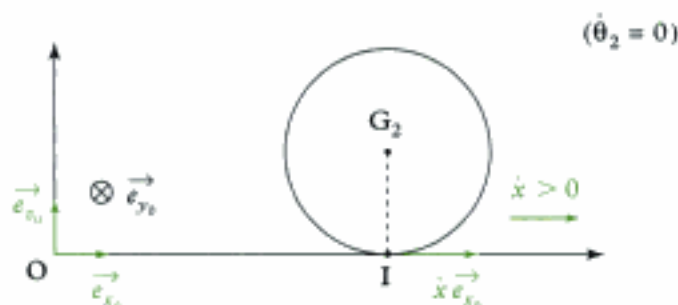
$$\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2) / \mathcal{R}_0 = (\dot{x} - r \dot{\theta}_2) \vec{e}_{x_0}$$



- Comme \dot{x} est en $m \cdot s^{-1}$, r en m et $\dot{\theta}_2$ en $rad \cdot s^{-1}$, cette expression est homogène à une vitesse en $m \cdot s^{-1}$;
- il s'agit d'une vitesse de glissement qui doit être dans le plan tangent (ici le plan $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$) : c'est le cas ;
- si $\dot{x} = 0$, $\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2) / \mathcal{R}_0 = -r \dot{\theta}_2 \vec{e}_{x_0}$: on n'a que la rotation ;



- si $\dot{\theta}_2 = 0$, $\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2) / \mathcal{R}_0 = \dot{x} \vec{e}_{x_0}$: on n'a que la translation ;



Le cas général est la superposition de ces deux derniers cas particuliers.

- Comme il y a non glissement en I :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2) / \mathcal{R}_0 = \vec{0} = (\dot{x} - r \dot{\theta}_2) \vec{e}_{x_0} \text{ donc } \dot{x} = r \dot{\theta}_2.$$



Quand $\dot{\theta}_2 > 0$ (la roue arrière tourne dans le sens des aiguilles d'une montre), $\dot{x} > 0$ (la bicyclette « avance vers la droite »).

b) On a établi :

$$r_1 \dot{\theta}_1 = r_2 \dot{\theta}_2 \text{ et } \dot{x} = r \dot{\theta}_2.$$

donc par substitution :

$$r_1 \cdot \dot{\theta}_1 = r_2 \times \frac{\dot{x}}{r}$$

soit :

$$\dot{x} = r \times \frac{r_1}{r_2} \dot{\theta}_1 \quad (2)$$



- Comme r , r_1 et r_2 sont en m, $\dot{\theta}_1$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est bien homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- si $\dot{\theta}_1 > 0$ (pédalier qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre), $\dot{x} > 0$ (la bicyclette avance vers « la droite ») : cohérent.

3) On détermine une primitive de (2) :

$$x = r \frac{r_1}{r_2} \times \theta_1 + \text{constante.}$$

Ainsi $\Delta x = r \frac{r_1}{r_2} \times \Delta \theta_1$, avec $\Delta \theta_1 = 1 \text{ tr} = 2\pi \text{ rad}$; donc :

$$\Delta x = r \frac{r_1}{r_2} \times 2\pi.$$

$$\text{A.N. : } \Delta x = \frac{0,666}{2} \times \frac{56}{13} \times 2\pi$$

$$\Delta x \approx 9,01 \text{ m.}$$

Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) • On cherche à exprimer $\vec{v}(I \in \mathcal{G})_{/\Sigma}$.



Voir méthode 2.

• Pour déterminer cette vitesse, on peut faire intervenir un point naturellement élément de \mathcal{G} , dont la vitesse est simple à déterminer (le point C) :

$$\underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{G})_{/\Sigma}}_{e^{\mathcal{G}}} = \underbrace{\vec{v}(C)_{/\Sigma}}_{e^{\mathcal{G}}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{G}/\Sigma}}_{\uparrow} \wedge \vec{CI}$$

$$\text{Or } \vec{v}(C)_{/\Sigma} = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right)_{/\Sigma} = \left[\frac{d}{dt}(a \vec{e}_r) \right]_{/\Sigma} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$



a est une constante.

et $\vec{\Omega}_{\mathcal{G}/\Sigma} = \dot{\theta} \vec{e}_z$, donc :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{G})_{/\Sigma} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_y = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} (-\vec{e}_x).$$

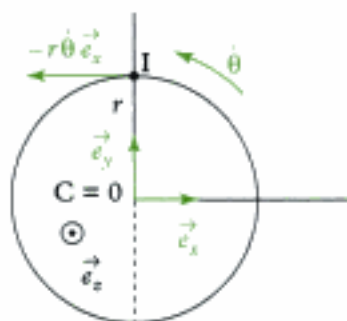
D'où :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{G})_{/\Sigma} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta} \vec{e}_x.$$

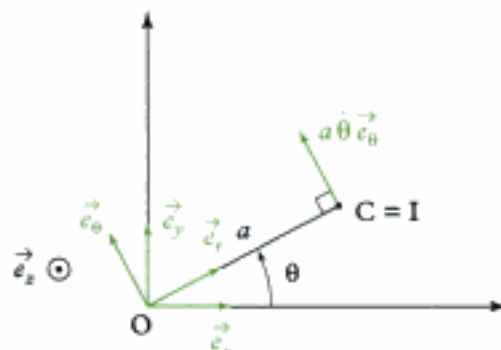


• Comme a et r sont en m, $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

- si $a = 0$, alors $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\Sigma} = -r\dot{\theta}\vec{e}_x$: ok (voir figure) ;
- si $r = 0$, alors $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\Sigma} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$: ok (voir figure) ;



Cas où $a = 0$ ($r \neq 0$)



Cas où $r = 0$ ($a \neq 0$)

2) Au niveau du contact en I, on peut écrire :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\Sigma} = \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{C}} + \vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/\Sigma}. \quad (1)$$

Or $\vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{C}}$ est la vitesse de glissement de \mathcal{F} par rapport à \mathcal{C} ; elle existe mais ne crée pas de mouvement entre \mathcal{C} et Σ . Par ailleurs, elle est dans le plan tangent, c'est-à-dire selon \vec{e}_x .

Pour obtenir $\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/\Sigma}$, il suffit de projeter la relation (1) sur la direction \vec{e}_y (c'est le mouvement selon cette direction qui nous intéresse) :

$$\begin{aligned} \vec{e}_y \cdot \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\Sigma} &= \vec{e}_y \cdot \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{C}} + \vec{e}_y \cdot \vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/\Sigma} \\ &= 0 \text{ car la vitesse de glissement est dirigée selon } \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs } \underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/\Sigma}}_{\in \mathcal{C}} = \underbrace{\vec{v}(A)_{/\Sigma}}_{\in \mathcal{C}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{C}/\Sigma}}_{\parallel \vec{0}} \wedge \underbrace{\vec{AI}}_{\parallel \vec{0}} = \vec{v}(A)_{/\Sigma}$$

car \mathcal{C} est en translation par rapport à Σ

Il vient donc :

$$\vec{e}_y \cdot \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\Sigma} = 0 + \vec{e}_y \cdot \vec{v}(A)_{/\Sigma} = \vec{e}_y \cdot v_A \vec{e}_y = v_A.$$

$$\text{Donc } v_A = \vec{e}_y \cdot (a\dot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\vec{e}_x) = a\dot{\theta}\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = a\dot{\theta}\cos\theta - 0.$$

Donc :

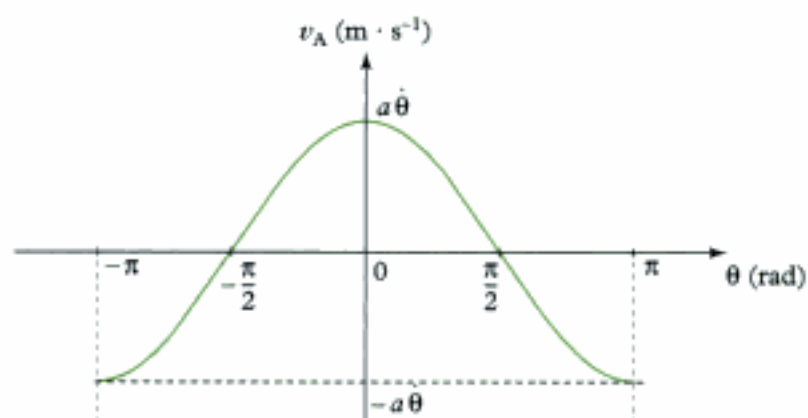
$$v_A = a\dot{\theta}\cos\theta \text{ soit } \vec{v}(A)_{/\Sigma} = a\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_y.$$

3) $v_A(\theta) = a\dot{\theta}\cos\theta$ sachant que $\dot{\theta} = \text{cte.}$

• Tableau de valeurs :

θ (rad)	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
v_A	$-a\dot{\theta}$	0	$a\dot{\theta}$	0	$-a\dot{\theta}$

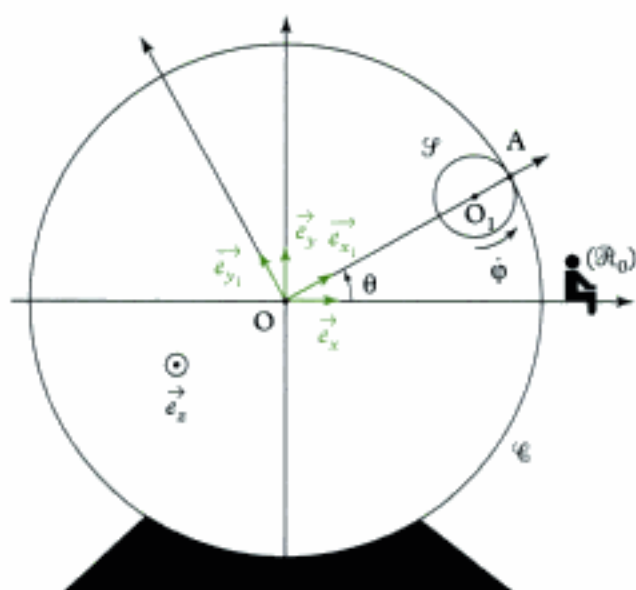
• Allure de la courbe :



Conclusion : le mouvement de \mathcal{C} est donc de type **sinusoïdal**.

Exercice 8

1) On sait que $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_{x_1})$.



2) • On cherche la vitesse $\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{C}}$ de O_1 par rapport à \mathcal{C} .

🔧 Voir méthode 1.

• Le vecteur position est $\overrightarrow{OO_1} = (R-r)\vec{e}_{x_1}$.

🔧 O est fixe dans (\mathcal{C}) .

$$\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{C}} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{OO_1} \right)_{/\mathcal{C}} = \left[\frac{d}{dt} (R-r)\vec{e}_{x_1} \right]_{/\mathcal{C}} = (R-r) \left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{C}}$$

Donc :

$$\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{C}} = (R-r) \times \dot{\theta} \vec{e}_{y_1}$$

$$\odot \left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt} \right)_{f/\ell} = \left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt} \right)_{f,h} + \vec{\Omega}_{h/f} \wedge \vec{e}_{x_1} = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_{x_1} = \dot{\theta} \vec{e}_{y_1}.$$

- Comme R et r sont en m, $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- comme O_1 a une trajectoire circulaire, le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire.

On sait que $\|\vec{v}(O_1)_{f/\ell}\| = 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

$$\text{Or } \|\vec{v}(O_1)_{f/\ell}\| = \sqrt{\vec{v}(O_1)_{f/\ell} \cdot \vec{v}(O_1)_{f/\ell}} = \sqrt{(R-r)\dot{\theta} \vec{e}_{y_1} \cdot (R-r)\dot{\theta} \vec{e}_{y_1}} \\ = \sqrt{(R-r)^2 \dot{\theta}^2} = (R-r)|\dot{\theta}|$$

$$\text{et } |\dot{\theta}| = \frac{25}{2,5 - 0,3} \approx 3,16 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 3,16 \times \frac{60}{2\pi} = 30,2 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Par ailleurs, la moto se déplace dans le sens trigonométrique donc $\dot{\theta} > 0$; ainsi :

$$\dot{\theta} = 30,2 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

3) • On sait qu'il y a non glissement sur la roue arrière :

$$\vec{v}(A \in \mathcal{F})_{f/\ell} = \vec{0}.$$

 Voir méthode 3.

• Comme un des deux solides en contact (ℓ) est fixe, il n'est pas nécessaire d'utiliser un référentiel intermédiaire.

• Pour déterminer cette vitesse, on va « passer » par un point qui est naturellement élément de \mathcal{F} , dont le mouvement est plus simple et dont la vitesse est plus simple à déterminer : ici, le point O_1 .

 O_1 est le centre de la roue ; de plus, on a déjà déterminé sa vitesse.

$$\vec{v}(A \in \mathcal{F})_{f/\ell} = \underbrace{\vec{v}(O_1)_{f/\ell}}_{\in \mathcal{F}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{g/\ell}}_{\in \mathcal{F}} \wedge \underbrace{\vec{O}_1 A}_{\in \mathcal{F}}$$

Or $\vec{\Omega}_{g/\ell} = \dot{\phi} \vec{e}_z (= \vec{\Omega}_{g/\mathcal{R}})$, donc :

$$\vec{v}(A \in \mathcal{F})_{f/\ell} = (R-r)\dot{\theta} \vec{e}_{y_1} + \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_{x_1} = (R-r)\dot{\theta} \vec{e}_{y_1} + r\dot{\phi} \vec{e}_{y_1}$$

$$\vec{v}(A \in \mathcal{F})_{f/\ell} = [(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\phi}] \vec{e}_{y_1}.$$

- Comme R et r sont en m, $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ sont en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène à une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- C'est une vitesse de glissement qui est bien dans le plan tangent (\vec{e}_r, \vec{e}_{y_1}).

Comme il y a non glissement :

$$\vec{v}(A \in \mathcal{F})_{f/\ell} = \vec{0} = [(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\phi}] \vec{e}_{y_1},$$

ce qui donne en projection sur \vec{e}_{y_1} :

$$(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 0, \quad \text{soit } \dot{\phi} = -\frac{R-r}{r} \dot{\theta}.$$

 • Cette expression est homogène.

• Comme $\dot{\theta} > 0$, $R - r > 0$ et $r > 0$, on a $\dot{\phi} < 0$. La roue arrière tourne dans le sens des aiguilles d'une montre quand la moto se déplace dans le sens trigonométrique.

$$\text{A.N. : } \dot{\phi} = -\frac{2,5 - 0,3}{0,3} \times 30,2, \text{ soit } \dot{\phi} \approx -221,5 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Exercice 9

1) S'il y a un lien entre la vitesse angulaire de la roue (ω) et la vitesse de déplacement de l'essieu (v), c'est parce qu'il y a non glissement au point K entre la roue et le sol.

• Nous allons donc utiliser la condition de non glissement en K entre la roue (\mathcal{P}) et le sol (\mathcal{R}_0), soit :

$$\vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}.$$



Voir méthode 3.

• Comme l'un des deux « solides » en contact au niveau de K est « fixe » (\mathcal{R}_0), on ne prendra pas de référentiel intermédiaire.

• Pour calculer $\vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0}$, on va « passer » par un point naturellement élément de la roue, dont la vitesse est plus simple à déterminer, ici, l'axe de la roue et le point C :

$$\underbrace{\vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{P}} = \underbrace{\vec{v}(\mathbf{C})_{/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{P}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\text{CK}}}_{\in \mathcal{P}}$$

avec $\vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}_0} = \omega \vec{e}_z$, $\overrightarrow{\text{CK}} = r \vec{e}_y$ et $\vec{v}(\mathbf{C})_{/\mathcal{R}_0} = v \vec{e}_x$.

Ainsi :

$$\vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0} = v \vec{e}_x + \omega \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_y, \text{ soit } \vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0} = v \vec{e}_x + \omega r (-\vec{e}_x)$$

$$\vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0} = (v - r\omega) \vec{e}_x.$$

Or cette vitesse de glissement est nulle donc :

$$\vec{v}(\mathbf{K} \in \mathcal{P})_{/\mathcal{R}_0} = (v - r\omega) \vec{e}_x = \vec{0},$$

soit en projection sur \vec{e}_x :

$$v - r\omega = 0, \text{ soit } \omega = \frac{v}{r}. \quad (1)$$



• Comme v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et r en m , le résultat est bien homogène à une vitesse angulaire en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;

• si $v > 0$ (voiture se déplaçant « vers la droite ») alors, d'après la relation, $\omega > 0$, c'est-à-dire que la roue tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

2) S'il y a un lien entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$, c'est parce qu'il y a roulement sans glissement au niveau du point I.

• On va donc utiliser le non glissement en I entre le cylindre \mathcal{C} et la bague interne \mathcal{S} , soit :

$$\vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{C})_{/\mathcal{S}} = \vec{0}.$$



Voir méthode 3.

• Ici le mouvement de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{S} est « imaginable » car \mathcal{S} est en translation dans \mathcal{R} , donc on n'est pas obligé de passer par un référentiel intermédiaire.



On pourrait prendre comme référentiel intermédiaire le sol (\mathcal{R}_0), mais on aurait à prendre en compte, dans toutes les vitesses, le déplacement d'ensemble ($\vec{v} = v \vec{e}_x$) qui disparaîtrait tout de même dans la soustraction finale :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/g} = \vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/x_1} - \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/x_0}$$

• Pour déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/g}$, on va faire intervenir un point naturellement élément de \mathcal{C} et dont la vitesse est plus simple à calculer ; ici le point A (puisque'il ne subit pas la rotation $\dot{\phi}$)

$$\underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/g}}_{\in \mathcal{C}} = \underbrace{\vec{v}(A)_{/g}}_{\in \mathcal{C}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{C}/g}}_{\in \mathcal{C}} \wedge \underbrace{\vec{AI}}_{\in \mathcal{C}}$$

avec $\vec{v}(A)_{/g} = \left(\frac{d}{dt} \vec{CA} \right)_{/g}$.



Le point C est fixe dans \mathcal{F} .

soit $\vec{v}(A)_{/g} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \vec{e}_r \right) \right]_{/g} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \left(\frac{d \vec{e}_r}{dt} \right)_{/g}$, donc :

$$\vec{v}(A)_{/g} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

avec $\vec{\Omega}_{\mathcal{C}/g} = \dot{\phi} \vec{e}_z$ et $\vec{AI} = \frac{r_2 - r_1}{2} (-\vec{e}_r) = \frac{r_1 - r_2}{2} \vec{e}_r$.

Ainsi :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/g} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \frac{r_1 - r_2}{2} \vec{e}_r = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \frac{r_1 - r_2}{2} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/g} = \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \dot{\phi} \frac{r_1 - r_2}{2} \right] \vec{e}_\theta.$$



- Cette relation est homogène ;
- la vitesse de glissement est bien dans le plan tangent ($\vec{e}_\theta, \vec{e}_r$).

Or cette vitesse de glissement est nulle donc :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/g} = \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \dot{\phi} \frac{r_1 - r_2}{2} \right] \vec{e}_\theta = 0,$$

soit, en projection sur \vec{e}_θ :

$$\frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \dot{\phi} \frac{r_1 - r_2}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{\phi} = \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \dot{\theta} \quad (2)$$



- Cette expression est homogène.
- Si $\dot{\theta} > 0$, $\dot{\phi} > 0$ (avec non glissement en I) \rightarrow ok.

3) S'il existe une relation entre $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ et ω , c'est parce qu'il y a non glissement au point J.

• Nous allons donc utiliser le non glissement en J entre la roue \mathcal{P} et le cylindre \mathcal{C} , soit :

$$\vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/g} = \vec{0}.$$

• Ici le mouvement de \mathcal{P} par rapport à \mathcal{C} est difficile à imaginer car tous deux admettent des rotations par rapport à l'essieu \mathcal{S} ; c'est donc \mathcal{S} que nous allons choisir comme référentiel intermédiaire :

$$\vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/g} = \vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/g} - \vec{v}(J \in \mathcal{C})_{/g}$$

• Pour déterminer $\vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/y}$, on va faire intervenir un point naturellement élément de \mathcal{P} et dont le mouvement est plus simple à déterminer, ici le point C.

$$\underbrace{\vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/y}}_{\in \mathcal{P}} = \underbrace{\vec{v}(C)_{/y}}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{P}/y}}_{\in \mathcal{P}} \wedge \vec{CJ}$$

avec :

$$\vec{v}(C)_{/y} = \vec{0} \text{ car } C \text{ est fixe dans } \mathcal{Y} ;$$

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{P}/y} = \omega \vec{e}_z = \vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}_0} \text{ car } \mathcal{Y} \text{ est en translation par rapport à } \mathcal{R}_0 ;$$

$$\vec{CJ} = r_2 \vec{e}_r.$$

Ainsi :

$$\vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/y} = \vec{0} + \omega \vec{e}_z \wedge r_2 \vec{e}_r, \text{ soit } \vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/y} = r_2 \omega \vec{e}_\theta.$$

• Pour déterminer $\vec{v}(J \in \mathcal{C})_{/y}$, on va faire intervenir le point A, point naturellement élément de \mathcal{C} :

$$\underbrace{\vec{v}(J \in \mathcal{C})_{/y}}_{\in \mathcal{C}} = \underbrace{\vec{v}(A)_{/y}}_{\in \mathcal{C}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{C}/y}}_{\in \mathcal{C}} \wedge \vec{AJ}$$

avec :

$$\vec{v}(A)_{/y} = \frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta ;$$

 Vitesse déjà calculée dans la question 2).

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{C}/y} = \dot{\varphi} \vec{e}_z ;$$

$$\vec{AJ} = \frac{r_2 - r_1}{2} \vec{e}_r.$$

$$\text{Ainsi : } \vec{v}(J \in \mathcal{C})_{/y} = \frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \frac{r_2 - r_1}{2} \vec{e}_r$$

$$\vec{v}(J \in \mathcal{C})_{/y} = \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \frac{r_2 - r_1}{2} \dot{\varphi} \right] \vec{e}_\theta.$$

• Ainsi la vitesse de glissement en J s'exprime :

$$\vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/y} = \vec{v}(J \in \mathcal{P})_{/y} - \vec{v}(J \in \mathcal{C})_{/y} = r_2 \omega \vec{e}_\theta - \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \frac{r_2 - r_1}{2} \dot{\varphi} \right] \vec{e}_\theta = \vec{0},$$

qui donne en projection sur \vec{e}_θ la relation cherchée :

$$r_2 \omega - \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \frac{r_2 - r_1}{2} \dot{\varphi} \right] = 0 \quad (3)$$

4) À l'aide des trois relations obtenues :

$$(1) \quad \omega = \frac{v}{r}$$

$$(2) \quad \dot{\varphi} = \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \dot{\theta}$$

$$(3) \quad r_2 \omega = \frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \frac{r_2 - r_1}{2} \dot{\varphi}$$

et en substituant les expressions de ω (1) et $\dot{\phi}$ (2) dans la relation (3), on obtient :

$$r_2 \times \frac{v}{r} = \frac{r_1 + r_2}{2} \dot{\theta} + \frac{r_2 - r_1}{2} \times \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \dot{\theta}$$
$$r_2 \times \frac{v}{r} = (r_1 + r_2) \dot{\theta}, \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{v}{r}.$$

Et en utilisant (2) :

$$\dot{\phi} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \frac{v}{r}.$$



Ces deux expressions sont homogènes à des vitesses angulaires exprimées en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Comme $0 < r_2 - r_1 < r_2 + r_1$, on a :

$$\dot{\phi} > \dot{\theta}.$$

Cinétique des systèmes et du solide

Introduction

Dans ce second chapitre, nous définirons les éléments cinétiques d'un système matériel fermé, composé d'un ou de plusieurs solides, tels que résultante cinétique, moment cinétique ou énergie cinétique. Ces différentes quantités font intervenir les vitesses des différents points du système ainsi que leurs masses.

Plan du chapitre 2

A. Masse d'un système matériel fermé.....	60
B. Centre d'inertie.....	61
C. Référentiel barycentrique.....	62
D. Résultante cinétique.....	62
E. Moment cinétique.....	64
1. Masse d'un système matériel.....	64
2. Formule de changement de point.....	65
3. Premier théorème de Kœnig.....	65
4. Moment cinétique par rapport à un axe.....	66
F. Énergie cinétique.....	67
1. Définition.....	67
2. Second théorème de Kœnig.....	67
G. Solide en rotation autour d'un axe fixe.....	68
1. Moments cinétiques en un point de l'axe Δ et par rapport à l'axe Δ	68
2. Quelques moments d'inertie classiques.....	70
3. Énergie cinétique.....	71
H. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe.....	71
I. Solide en translation.....	73
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre.....	75
Énoncés des exercices.....	82
Solution des exercices.....	85

A. Masse d'un système matériel fermé

A.1. Système matériel fermé

Definition 1

Un système matériel fermé \mathcal{S} est un système qui contient à tout instant les mêmes éléments matériels ; la masse de \mathcal{S} est constante au cours du temps.

Dans la suite, nous étudierons uniquement des systèmes fermés : un solide est un exemple de système fermé.

A.2. Masse d'un système matériel

Il existe différents types de répartition de masse dans un système matériel :

• discrète

le système \mathcal{S} est constitué de points matériels M_i de masse m_i (fig. 1).

La masse (totale) m du système \mathcal{S} est :

$$m = \sum_i m_i.$$

• linéique

le système matériel \mathcal{S} est constitué d'éléments de longueur $dL(M)$, centrés sur les points M , de masse $dm(M) = \lambda(M)dL(M)$, répartis le long d'une courbe \mathcal{C} (fig. 2).

La portion de matière de longueur $dL(M)$ centrée sur le point M a pour masse linéique $\lambda(M)$ (λ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$).

La masse (totale) m du système \mathcal{S} est :

$$m = \int_{M \in \mathcal{C}} dm(M).$$

• surfacique

le système \mathcal{S} est constitué d'éléments de surface $dS(M)$, centrés sur les points M , de masse $dm(M) = \sigma(M)dS(M)$, répartis sur une surface S (fig. 3).

La portion de matière de surface $dS(M)$ centrée sur le point M a pour masse surfacique $\sigma(M)$ (σ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$).

La masse (totale) m du système \mathcal{S} est :

$$m = \iint_{M \in S} dm(M)$$

• volumique

le système \mathcal{S} est constitué d'éléments de volume $dV(M)$, centrés sur les points M , de masse $dm(M) = \rho(M)dV(M)$, répartis à l'intérieur d'un volume V (fig. 4).

La portion de matière de volume $dV(M)$ centrée sur le point M a pour masse volumique $\rho(M)$ (ρ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

La masse (totale) m du système \mathcal{S} est :

$$m = \iiint_{M \in V} dm(M).$$

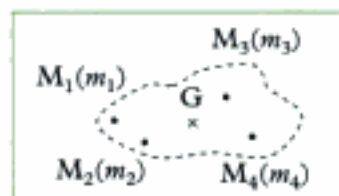


Fig. 1 - Répartition discrète de masse.

1. La répartition de masse est homogène si la quantité λ (respectivement σ ou ρ) est constante et indépendante du point M .

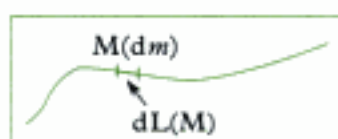


Fig. 2 - Répartition linéique de masse.



Fig. 3 - Répartition surfacique de masse.

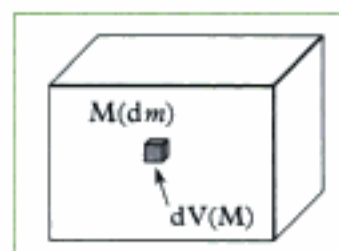


Fig. 4 - Répartition volumique de masse.

Nous utiliserons, dans la suite de cet ouvrage, l'équivalence entre une somme discrète et une somme continue (intégrale) ; ainsi, nous écrirons par abus :

$$\iiint_M df(M) = \sum_i f_i.$$

Les démonstrations seront souvent effectuées avec la somme discrète et étendue au cas de l'intégrale.

Ainsi, pour définir la masse d'un système matériel, on pourra écrire, si la répartition de masse est volumique :

- $m = \iiint_{M \in V} dm(M)$;
- ou $m = \sum_i m_i$ si la répartition de masse est discrète.

B. Centre d'inertie

Définition 2

Le centre d'inertie (ou centre de masse) d'un système \mathcal{S} est le point G (fig. 5) défini par :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \iiint_M dm(M) \overrightarrow{GM} = \vec{0}.$$

En introduisant un point O quelconque, on a :

$$\sum_i m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \sum_i m_i \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i;$$

ainsi :

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \quad \text{ou} \quad m \overrightarrow{OG} = \iiint_M dm(M) \overrightarrow{OM}.$$

Cette dernière expression est une définition opérationnelle pour la détermination de la position de G.

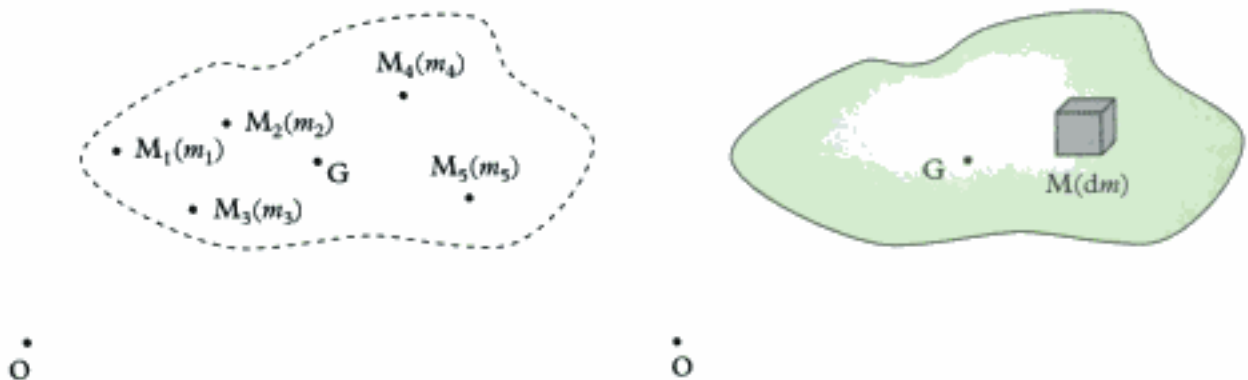


Fig. 5 - Centre d'inertie d'un système matériel discret / d'un solide.

C. Référentiel barycentrique

Définition 3

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* d'un système matériel \mathcal{S} est un référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} , dans lequel le centre d'inertie G du système \mathcal{S} est fixe.

1. Les axes de \mathcal{R}^* conservent des directions fixes par rapport à ceux de \mathcal{R} ; souvent, on les prend parallèles.



Fig. 3 - Référentiel barycentrique de \mathcal{S} .

Les grandeurs barycentriques seront notées soit avec un astérisque, soit avec un indice ;

par exemple, pour la vitesse de A dans \mathcal{R}^* , on peut écrire (fig. 6) :

$$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{v}^*(A).$$

Propriétés

- \mathcal{R}^* étant en translation par rapport à \mathcal{R} , $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$;
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}$: le vecteur rotation instantané d'un solide \mathcal{S} par rapport à un référentiel \mathcal{R} est aussi le vecteur rotation instantané du solide \mathcal{S} par rapport à son référentiel barycentrique \mathcal{R}^* ; ceci constitue une méthode simple de détermination du vecteur rotation instantané.

Remarque : la vitesse d'un point M quelconque dans le référentiel \mathcal{R} peut se décomposer à l'aide de la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}^*(M) + \vec{v}(M \in \mathcal{R}^*)_{/\mathcal{R}} ;$$

or, comme G appartient à \mathcal{R}^* :

$$\vec{v}(M \in \mathcal{R}^*)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}},$$

donc (fig. 6) :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}^*(M) + \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

D. Résultante cinétique

Définition 4

La résultante cinétique (ou quantité de mouvement) $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ du système \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des quantités de mouvement élémentaires de chacun de ses points (fig. 7) :

$$\begin{aligned} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \text{ résultante cinétique} \\ \text{(kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \\ m_i \text{ masse (kg)} \\ \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \text{ vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M dm(M) \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \text{ résultante cinétique} \\ \text{(kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \\ dm(M) \text{ masse (kg)} \\ \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \text{ vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

2. Si \mathcal{S} est composé de plusieurs sous systèmes (par exemple de plusieurs solides), la résultante cinétique de \mathcal{S} s'obtient par sommation des résultantes cinétiques de chaque sous système.

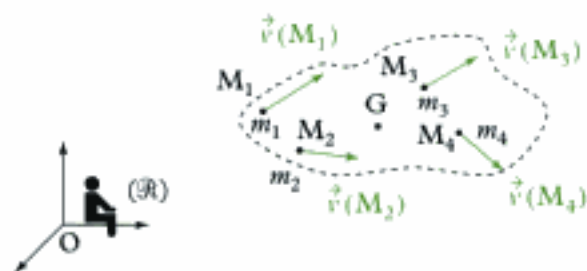


Fig. 4 - Ensemble de points matériels et leurs vitesses.

En écrivant :

$$\vec{v}(M_i)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i)}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{GM}_i}{dt} \right)_{/\mathbb{R}},$$

on obtient :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = \sum_i m_i \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} + \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \right),$$

ce qui se simplifie, en remarquant que le second terme de la somme précédente est nul par définition de G :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = m \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}}.$$

Propriété

La résultante cinétique d'un système matériel \mathcal{S} est la quantité de mouvement d'un point matériel fictif placé en G, possédant la masse totale m du système \mathcal{S} (fig. 8) :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = m \vec{v}(G)_{/\mathbb{R}}.$$

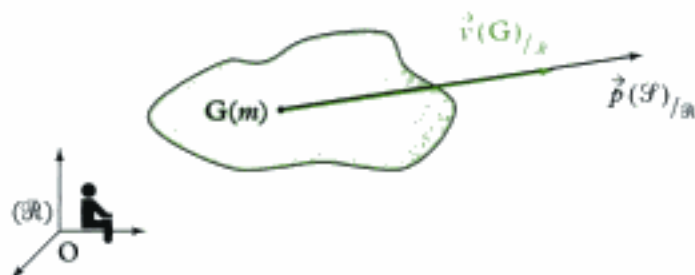


Fig. 5 - Résultante cinétique d'un solide ($m > 1$).

Remarque : dans le référentiel barycentrique, G est fixe, donc :

$$\vec{v}(G)_{/\mathbb{R}^*} = \vec{v}^*(G) = \vec{0}.$$

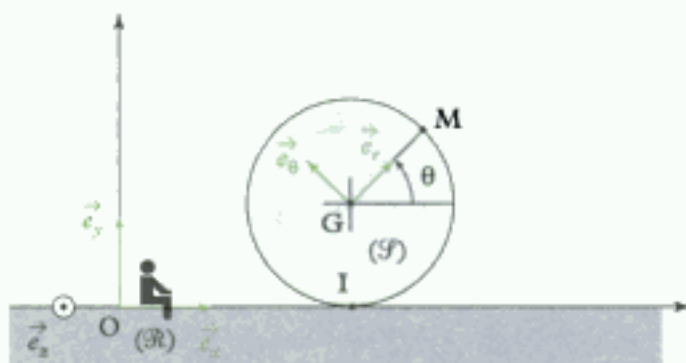
$$\text{Ainsi : } \vec{p}^*(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p}^*(M_i) = \sum_i m_i \vec{v}^*(M_i) = m \vec{v}^*(G) = \vec{0}.$$

Application 1 Résultante cinétique d'une roue

Considérons une roue, modélisée par un disque homogène \mathcal{S} de centre G, de rayon r et de masse m , roulant sur le sol horizontal (axe $(O; \vec{e}_x)$) tout en restant dans le plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Le référentiel terrestre (lié au sol) est $\mathbb{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Son centre G a pour vitesse $\vec{v}(G)_{/\mathbb{R}} = v \vec{e}_x$. On repère la position angulaire de la roue à l'aide de l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{GM})$.

Déterminer la résultante cinétique de la roue.

Solution



Par définition : $\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \iint_{\mathcal{M}} dm(\mathcal{M})\vec{v}(\mathcal{M})_{/\mathcal{R}}$.

Cette définition nécessite un calcul d'intégrale de surface, mais en utilisant la propriété de la résultante cinétique, on a directement, sans calculer l'intégrale précédente :

$$\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(\mathcal{G})_{/\mathcal{R}} = mv\vec{e}_x.$$

E. Moment cinétique

E.1. Moment cinétique en un point A

Definition 5

Le moment cinétique $\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ en A du système matériel \mathcal{F} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des moments cinétiques en A de chacun des points de \mathcal{F} (fig. 9) :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \vec{L}_A(\mathcal{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{v}(\mathcal{M}_i)_{/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$	moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
m_i	masse (kg)
\overrightarrow{AM}_i	(m)
$\vec{v}(\mathcal{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Ou encore :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_{\mathcal{M}} d\vec{L}_A(\mathcal{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_{\mathcal{M}} dm(\mathcal{M}) \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(\mathcal{M})_{/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$	moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
$dm(\mathcal{M})$	masse (kg)
\overrightarrow{AM}	(m)
$\vec{v}(\mathcal{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

1. Si \mathcal{F} est composé de plusieurs sous systèmes (par exemple de plusieurs solides), le moment cinétique en A de \mathcal{F} s'obtient par sommation des moments cinétiques en A de chaque sous système.

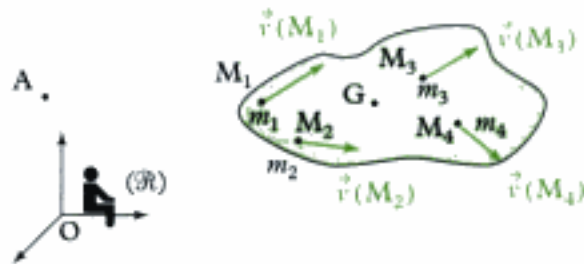


Fig. 6 - Ensemble de points matériels et leurs vitesses.

E.2. Formule de changement de point

Introduisons le point A' dans l'expression précédente à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i m_i (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M_i}) \wedge \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \overrightarrow{AA'} \wedge \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} + \sum_i m_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$ et

$\vec{L}_{A'}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$, on obtient la relation :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_{A'}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$$

On peut aussi écrire : $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_{A'}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} + \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{A'A}$.

On constate alors que le moment cinétique possède la structure d'un moment de torseur dont la résultante est la résultante cinétique : on définit ainsi le **torseur cinétique**. Par exemple, le torseur cinétique du système \mathcal{S} réduit en A dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{T}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \underset{A}{\left[\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}, \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \right]}.$$

Cas particulier

En appliquant cette formule au cas particulier du référentiel barycentrique \mathcal{R}^* et en tenant compte de $\vec{p}^*(\mathcal{S}) = \vec{0}$, on a : $\vec{L}_A^*(\mathcal{S}) = \vec{L}_{A'}^*(\mathcal{S})$. Le moment cinétique barycentrique est indépendant du point de calcul. On le nomme moment cinétique propre du système matériel \mathcal{S} et on le note : $\vec{L}^*(\mathcal{S})$.

E.3. Premier théorème de Kœnig

Utilisons la loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}^*(M_i) + \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$, afin de développer l'expression du moment cinétique en A :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge [\vec{v}^*(M_i) + \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}].$$

On développe :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{v}^*(M_i) + \left[\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \right] \wedge \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Ce qui donne : $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}^*(\mathcal{S}) + \vec{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$ car $m\vec{AG} = \sum_i m_i \vec{AM}_i$,
 ou encore : $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}^*(\mathcal{S}) + m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \wedge \vec{GA}$.

Théorème 1

Le moment cinétique $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ en A d'un système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme du moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*(\mathcal{S})$ et du moment cinétique $\vec{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$ d'un point matériel fictif placé en G, affecté de la masse totale m de \mathcal{S} (fig. 10) :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}^*(\mathcal{S}) + \vec{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Cas particulier

Si on applique cette relation en G, on obtient :

$$\vec{L}_G(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}^*(\mathcal{S}).$$

Interprétation graphique

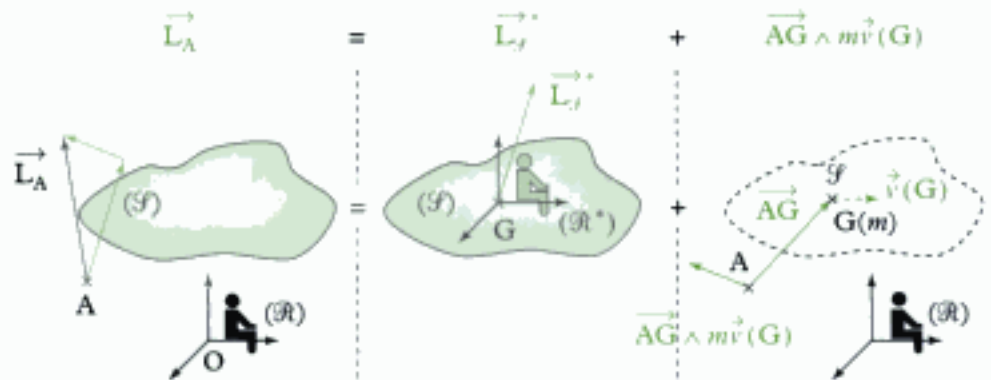


Fig. 7 - Théorème de König pour le moment cinétique.

E.4. Moment cinétique par rapport à un axe

Définition 6

Le moment cinétique $L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ par rapport à l'axe Δ (de vecteur unitaire \vec{u}) du système matériel \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} est la projection sur l'axe Δ du moment cinétique en n'importe quel point B de Δ :

$$L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{u} \cdot \vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}.$$

Remarque : les propriétés précédentes (théorème de König et cas particulier) s'appliquent au moment cinétique par rapport à un axe, en projetant les relations obtenues sur $\Delta = (B, \vec{u})$. Le premier théorème de König devient ainsi :

$$L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = L_{\Delta_G}(\mathcal{S}) + [\vec{BG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}] \cdot \vec{u},$$

avec $\Delta_G = (G, \vec{u})$ et $\Delta = (B, \vec{u})$.

F. Énergie cinétique

F.1. Définition

1. Si \mathcal{S} est composé de plusieurs sous systèmes (par exemple de plusieurs solides), l'énergie cinétique de \mathcal{S} s'obtient par sommation des énergies cinétiques de chaque sous système.

Définition 7

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ du système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des énergies cinétiques de chacun des points de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \mathcal{E}_c(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ énergie cinétique
($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ou J)
 m_i masse (kg)
 $\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de \mathbf{M}_i ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Ou encore :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_{\mathbf{M}} d\mathcal{E}_c(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_{\mathbf{M}} \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) v^2(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ énergie cinétique
($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ou J)
 $dm(\mathbf{M})$ masse (kg)
 $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ vitesse de \mathbf{M} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

F.2. Second théorème de Kœnig

Utilisons la loi de composition des vitesses $\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}^*(\mathbf{M}_i) + \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}$ afin de développer l'expression de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}^*(\mathbf{M}_i) + \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}})^2.$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^{*2}(\mathbf{M}_i) + \sum_i m_i \vec{v}^*(\mathbf{M}_i) \cdot \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}.$$

En remarquant que, par définition du référentiel barycentrique :

$$\sum_i m_i \vec{v}^*(\mathbf{M}_i) \cdot \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}} \cdot \sum_i m_i \vec{v}^*(\mathbf{M}_i) = \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{0} = 0,$$

on a :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) + \frac{1}{2} m v^2(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}.$$

Théorème 2

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ d'un système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme de l'énergie cinétique barycentrique $\mathcal{E}_c^*(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}$ d'un point matériel fictif placé en G, affecté de la masse totale m de \mathcal{S} :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) + \frac{1}{2} m v^2(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}.$$

Interprétation des théorèmes de Kœnig

Le mouvement d'un système \mathcal{S} peut se décomposer (fig. 11) en :

- un mouvement relatif des différents points du système \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R}^* ;
- un mouvement d'ensemble de translation (pas forcément rectiligne uniforme) du centre d'inertie G , affecté de la masse totale m du système \mathcal{S} .

Interprétation graphique

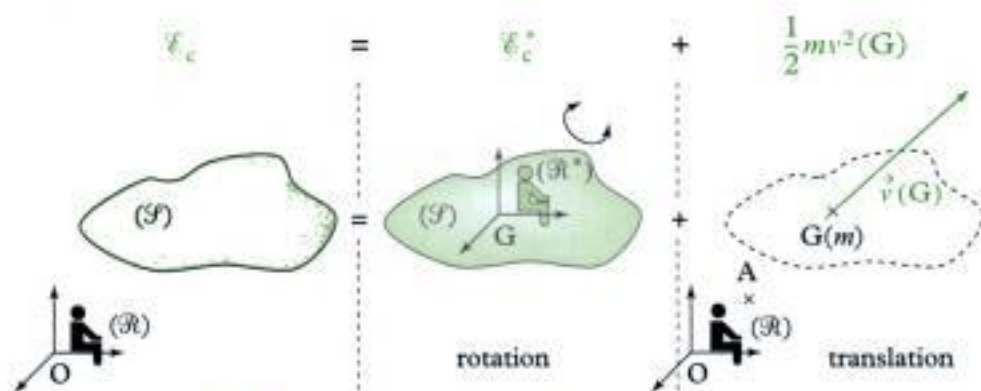


Fig. 8 - Théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique.

G. Solide en rotation autour d'un axe fixe

1. La vitesse de B est nulle dans \mathcal{R} : $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$; il en est de même pour tous les points de l'axe Δ .

On considère un solide \mathcal{S} en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (orientée) autour de l'axe $\Delta = (B, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel \mathcal{R}^1 (fig. 12). Le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} dans \mathcal{R} est : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega \vec{e}_z$.

G.1. Moment cinétique en un point de l'axe Δ et moment cinétique par rapport à l'axe Δ

Le moment cinétique en B, point de vitesse nulle (point de l'axe Δ) du solide \mathcal{S} s'écrit :

$$\vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M \overrightarrow{BM} \wedge dm(M) \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

Comme \mathcal{S} est en rotation autour de Δ :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(H)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM},$$

H étant la projection (orthogonale) sur Δ du point M.

Remarque : comme B est fixe dans \mathcal{R} , on a aussi :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BM}.$$

Ainsi : $\vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M dm(M) \overrightarrow{BM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BM})$.

Cette expression est celle du moment cinétique d'un solide \mathcal{S} possédant un point fixe B.

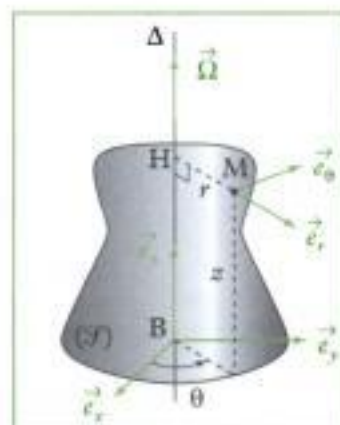


Fig. 9 - Solide en rotation autour d'un axe fixe.

On peut décomposer le moment cinétique en B de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} &= \iiint_M dm(M)(\vec{BH} + \vec{HM}) \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}) \\ &= \iiint_M dm(M)\vec{BH} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}) + \iiint_M dm(M)\vec{HM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}).\end{aligned}$$

• Le premier terme de la somme précédente est perpendiculaire à $\vec{\Omega}$; en effet :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{HM} = \omega \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r = r\omega \vec{e}_\theta,$$

$$\text{et donc } \vec{BH} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}) = z \vec{e}_z \wedge r\omega \vec{e}_\theta = -\omega z r \vec{e}_r = -\omega \vec{BH} \vec{HM};$$

on notera donc ce terme sous la forme :

$$\vec{L}_{B\perp}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = -\omega \iiint_M dm(M) \vec{BH} \vec{HM}.$$

• Le second terme est parallèle à $\vec{\Omega}$; en effet :

$$\vec{HM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}) = r^2 \omega \vec{e}_z = HM^2 \vec{\Omega};$$

on notera ce terme :

$$\vec{L}_{B\parallel}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = \vec{\Omega} \left[\iiint_M dm(M) HM^2 \right].$$

$J_\Delta = \iiint_M dm(M) HM^2$ est une caractéristique de la répartition de masse par rapport à l'axe $\Delta = (B, \vec{e}_z)$: c'est le **moment d'inertie** du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ . L'unité de J_Δ est le $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Propriété

Ainsi le moment cinétique en B, point de vitesse nulle (point élément de l'axe de rotation Δ) du solide \mathcal{S} s'écrit :

$$\vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = \vec{L}_{B\perp}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} + J_\Delta \vec{\Omega}.$$

Le terme $\vec{L}_{B\perp}(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = -\omega \iiint_M dm(M) \vec{BH} \vec{HM}$ est nul dans les deux cas particuliers de solides homogènes suivants :

- le solide \mathcal{S} se trouve entièrement dans le plan passant par B et perpendiculaire à Δ : toute sa répartition de masse se trouve dans un plan perpendiculaire à $\vec{\Omega}$ passant par B (les termes \vec{BH} sont alors tous nuls), ou plus généralement si \mathcal{S} possède un plan de symétrie passant par B et perpendiculaire à Δ ;
- l'axe de rotation $\Delta = (B, \vec{e}_z)$ est un axe de révolution du solide (pour chaque point H, les termes \vec{HM} s'annulent deux à deux).

On constate que, dans le cas général, $\vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}}$ et $\vec{\Omega}$ ne sont pas colinéaires !

Le moment cinétique du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe de rotation Δ est la projection sur Δ du moment cinétique en B :

$$L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} = \vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathbb{R}} \cdot \vec{e}_z = J_\Delta \omega.$$

Ainsi :

Le moment cinétique d'un solide \mathcal{S} en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (orientée) autour de l'axe Δ fixe dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$L_{\Delta}(\mathcal{S})/\mathcal{R} = J_{\Delta}\omega,$$

où $J_{\Delta} = \iiint_M dm(M)HM^2$ est le moment d'inertie du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ .

On peut aussi écrire :

$$J_{\Delta} = \iiint_M dm(M)HM^2 = \sum_i m_i r_i^2,$$

avec r_i la distance entre chaque point M_i et l'axe de rotation Δ .

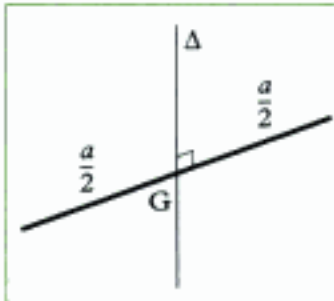


Fig. 10 - Tige rectiligne.

G.2. Quelques moments d'inertie classiques

G.2.1 - Moment d'inertie d'une tige par rapport à sa médiatrice

Soit une tige rectiligne, homogène de masse m , de section négligeable et de longueur a et sa médiatrice Δ (fig. 13) :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12}ma^2.$$

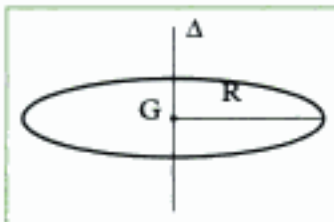


Fig. 11 - Cerceau.

G.2.2 - Moment d'inertie d'un cerceau par rapport à son axe

Soit un cerceau homogène de masse m , de section négligeable de rayon R (fig. 14) et son axe Δ :

$$J_{\Delta} = mR^2.$$

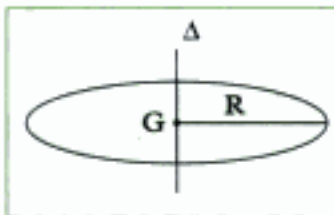


Fig. 12 - Disque.

G.2.3 - Moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe

Soit un disque homogène de masse m , de rayon R et son axe Δ (fig. 15) :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2.$$

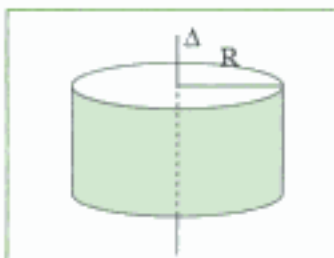


Fig. 16 - Cylindre plein.

G.2.4 - Moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe

Soit un cylindre plein homogène de masse m , de rayon R et son axe Δ (fig. 16) :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2.$$

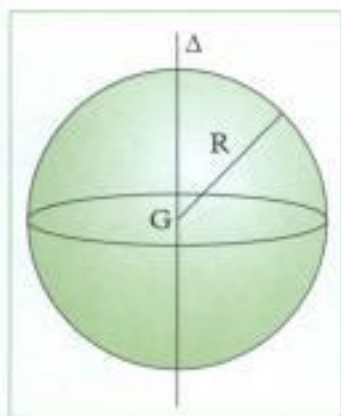


Fig. 17 - Sphère.

G.2.5 - Moment d'inertie d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres

Soit une sphère homogène de masse m et de rayon R et Δ l'un de ses diamètres (fig. 17) :

- sphère creuse : $J_{\Delta} = \frac{2}{3}mR^2$;
- sphère pleine : $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$.

G.3. Énergie cinétique

L'énergie cinétique du solide \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) v^2(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}.$$

Comme le point B est fixe dans \mathcal{R} , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{BM}}). \end{aligned}$$

En tenant compte des propriétés du produit mixte (permutation circulaire), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{BM}} \wedge \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \iiint_M dm(\mathbf{M}) \overrightarrow{\mathbf{BM}} \wedge \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

soit :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$$

avec B point de vitesse nulle dans \mathcal{R} .

On peut aussi écrire :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) v^2(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) HM^2 \omega^2,$$

soit :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2.$$

H. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

On considère un solide \mathcal{S} de masse m en rotation autour d'un axe de direction fixe¹ dans le référentiel \mathcal{R} . Son le centre d'inertie G se déplace à la vitesse $\vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}$;

1. Ce cas correspond aux limitations apportées par le programme officiel : le vecteur rotation instantané

$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ garde une direction constante au cours du temps.

le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} dans \mathcal{R} est : $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}$.

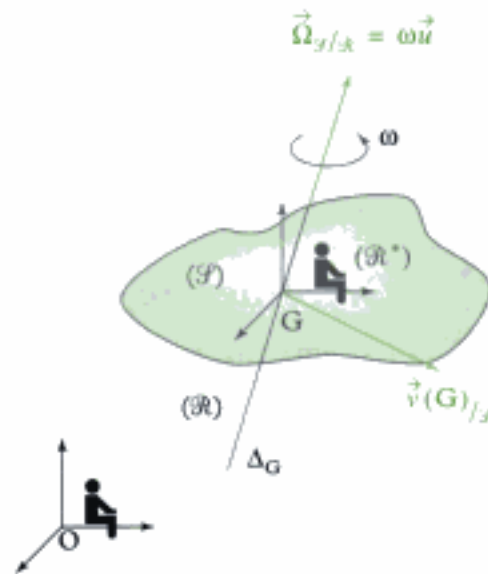


Fig. 18 - Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe.

Ce mouvement peut être décomposé en :

- un **mouvement de rotation** dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* autour de l'axe fixe $\Delta_G = (G, \vec{u})$ (G étant fixe dans \mathcal{R}^*) caractérisé par un vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}^1$; on a alors, d'après le paragraphe G :

$$\mathbf{L}_{\Delta_G}^*(\mathcal{S}) = \mathbf{J}_{\Delta_G} \omega \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\Delta_G} \omega^2.$$

Si, de plus, \mathcal{S} est de révolution autour de Δ_G ou si \mathcal{S} est entièrement contenu dans un plan passant par G et perpendiculaire à Δ_G^1 , alors on a :

$$\vec{\mathbf{L}}^*(\mathcal{S}) = \mathbf{J}_{\Delta_G} \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

- un **mouvement d'ensemble** caractérisé par le mouvement de G dans \mathcal{R} (de vitesse $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$) ; on a alors, d'après les théorèmes de Kœnig :

$$\forall A, \mathbf{L}_{\Delta_A}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{J}_{\Delta_G} \omega + \left[\overrightarrow{\mathbf{AG}} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right] \cdot \vec{u},$$

avec $\Delta_A = (A, \vec{u})$ et $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\Delta_G} \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2(G)_{/\mathcal{R}}$.

Si, de plus, \mathcal{S} est de révolution autour de Δ_G ou si \mathcal{S} est entièrement contenu dans un plan passant par G et perpendiculaire à Δ_G^2 , alors on a :

$$\forall A, \vec{\mathbf{L}}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{J}_{\Delta_G} \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\mathbf{AG}} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Rappel : $\vec{\mathbf{L}}^*(\mathcal{S})$ est indépendant du point de calcul !

1. Ou plus généralement si \mathcal{S} possède un plan de symétrie passant par B et perpendiculaire à Δ .

I. Solide en translation

On considère un solide \mathcal{S} de masse m en translation (pas forcément rectiligne, ni uniforme) dans le référentiel \mathcal{R} ; son centre d'inertie G se déplace à la vitesse $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$; le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} dans \mathcal{R} est donc nul : $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

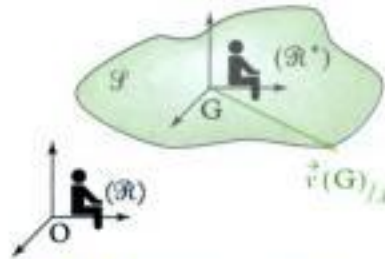


Fig. 19 - Solide en translation.

Ce solide n'a pas de mouvement de rotation dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* car $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0}$; ainsi :

$$\mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{S}) = \mathbf{0} \text{ et } \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) = \mathbf{0} ;$$

On a donc, d'après les théorèmes de Koenig, en un point A quelconque :

$$\vec{\mathbf{L}}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{AG}} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}},$$

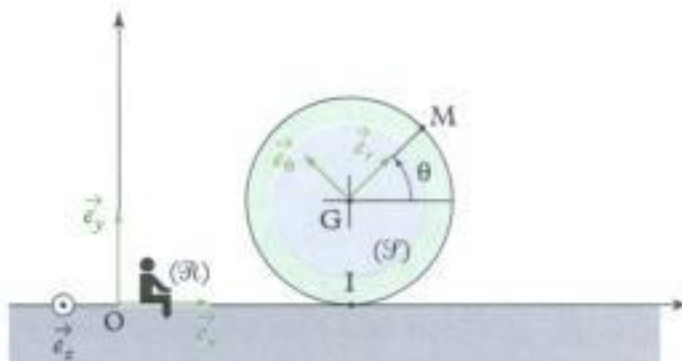
et
$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}mv^2(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Application 2 Moments cinétiques et énergie cinétique de la roue

Considérons à nouveau une roue (modélisée par un disque \mathcal{S}) (de centre G , de rayon r , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à son axe, de masse m) se déplaçant sur le sol horizontal (axe (O, \vec{e}_x)) tout en restant dans le plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Le référentiel terrestre (lié au sol) est $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Son centre G a pour vitesse $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} = v\vec{e}_x$.

On repère la position angulaire de la roue à l'aide de l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{GM})$.

- 1) Exprimer le moment cinétique barycentrique de la roue.
- 2) Exprimer le moment cinétique par rapport à l'axe (I, \vec{e}_z) , I étant le point de contact entre la roue et le sol.
- 3) Exprimer l'énergie cinétique barycentrique de la roue.
- 4) Exprimer l'énergie cinétique de la roue dans le référentiel \mathcal{R} .
- 5) Que deviennent ces termes lorsque la roue roule sans glisser sur le sol ?



Solution

1) Le vecteur rotation instantané de la roue \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} et \mathcal{R}^* est :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Le moment cinétique barycentrique de la roue est celui d'un solide en rotation autour de l'axe fixe

$$\Delta_G = (G, \vec{e}_z):$$

$$\mathbf{L}_{\Delta_G}^*(\mathcal{S}) = \mathbf{J}\dot{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}.$$

2) En utilisant le premier théorème de Kœnig, on obtient le moment cinétique par rapport à l'axe

$$\Delta_I = (I, \vec{e}_z):$$

$$\mathbf{L}_{\Delta_I}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{J}\dot{\theta} + \left[\vec{IG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right] \cdot \vec{e}_z = \mathbf{J}\dot{\theta} + [r\vec{e}_y \wedge mv\vec{e}_x] \cdot \vec{e}_z,$$

soit :

$$\mathbf{L}_{\Delta_I}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{J}\dot{\theta} + [-mvr\vec{e}_z] \cdot \vec{e}_z = \mathbf{J}\dot{\theta} - mvr = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta} - mvr.$$

3) L'énergie cinétique barycentrique de la roue \mathcal{S} est celle d'un solide en rotation autour de l'axe fixe

$$\Delta_G = (G, \vec{e}_z):$$

$$\mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\mathbf{J}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2.$$

4) L'énergie cinétique de la roue \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} s'obtient à l'aide du second théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\mathbf{J}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2(G)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

5) S'il y a roulement sans glissement de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} , alors $v = -r\dot{\theta}$, ce qui donne :

$$\mathbf{L}_{\Delta_I}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}.$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2.$$

Remarque : on a fait apparaître le moment d'inertie de la roue ($mr^2 + \mathbf{J} = \frac{3}{2}mr^2$) par rapport à l'axe instantané de rotation $\Delta_I = (I, \vec{e}_z)$.

L'essentiel

✓ Masse d'un système matériel fermé

- Un **système matériel fermé** \mathcal{S} est un système qui contient à tout instant les mêmes éléments matériels ; la masse de \mathcal{S} est constante au cours du temps.
- **Masse d'un système matériel fermé**

La masse (totale) m du système \mathcal{S} est :

$$m = \sum_i m_i = \iiint_{M \in V} dm(M),$$

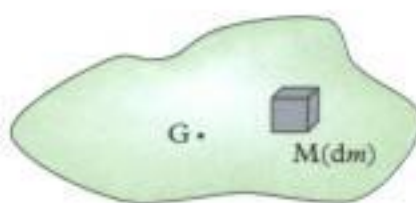
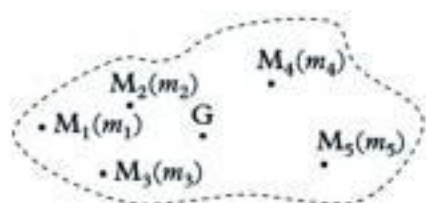
si la répartition est discrète ou volumique

✓ Centre d'inertie

Le **centre d'inertie** (ou **centre de masse**) d'un système \mathcal{S} est le point G défini par :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \iiint_M dm(M) \overrightarrow{GM} = \vec{0},$$

soit $m \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$ ou $m \overrightarrow{OG} = \iiint_M dm(M) \overrightarrow{OM}$.

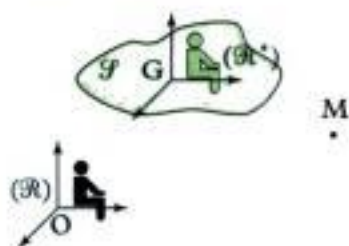


•

•

✓ Référentiel barycentrique

- Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* d'un système matériel \mathcal{S} est un référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} , dans lequel le centre d'inertie G du système \mathcal{S} est fixe.



Propriétés

- \mathcal{R}^* étant en translation par rapport à \mathcal{R} , $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$;
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}$;

Remarque

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}^*(M) + \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

✓ Résultante cinétique

- La résultante cinétique (ou quantité de mouvement) $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ du système \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des quantités de mouvement élémentaires de chacun de ses points :

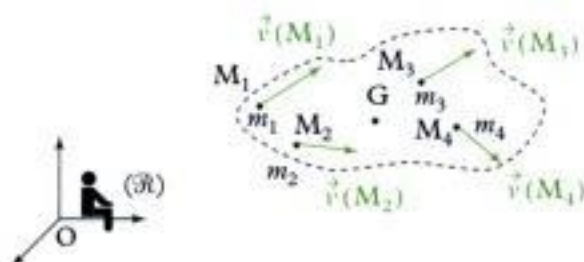
$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{p}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$$

$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	résultante cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
m_i	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M \mathbf{d}\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M \mathbf{d}m(\mathbf{M}) \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	résultante cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
$\mathbf{d}m(\mathbf{M})$	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse de \mathbf{M} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)



Propriété

La résultante cinétique d'un système matériel \mathcal{S} est la quantité de mouvement d'un point matériel fictif placé en G , possédant la masse totale m du système \mathcal{S} :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$$

Remarque : $\vec{p}^*(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p}^*(\mathbf{M}_i) = \sum_i m_i \vec{v}^*(\mathbf{M}_i) = m \vec{v}^*(G) = \vec{0}$.

✓ Moment cinétique

- Le moment cinétique $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ en A du système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des moments cinétiques en A de chacun des points de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \vec{L}_A(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \wedge \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
m_i	masse (kg)
$\overrightarrow{\mathbf{AM}_i}$	(m)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M \mathbf{d}\vec{L}_A(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M \mathbf{d}m(\mathbf{M}) \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
$\mathbf{d}m(\mathbf{M})$	masse (kg)
$\overrightarrow{\mathbf{AM}}$	(m)
$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

• **Formule de changement de point**

$$\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_{A'}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} + \vec{AA}' \wedge \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$$

On définit ainsi le **torseur cinétique**. Par exemple, le torseur cinétique du système \mathcal{F} réduit en A dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit : $\mathcal{F}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \left[\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}, \vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} \right]$.

Cas particulier

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* :

$$\vec{L}_A^*(\mathcal{F}) = \vec{L}_{A'}^*(\mathcal{F}).$$

Le moment cinétique barycentrique est indépendant du point de calcul. On le nomme moment cinétique propre du système matériel \mathcal{F} et on le note $\vec{L}^*(\mathcal{F})$.

• **Premier théorème de Kœnig**

Le moment cinétique $\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ en A d'un système matériel \mathcal{F} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme du moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*(\mathcal{F})$ et du moment cinétique $\vec{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$ d'un point matériel fictif placé en G, affecté de la masse totale m de \mathcal{F} :

$$\vec{L}_A(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{L}^*(\mathcal{F}) + \vec{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

• **Moment cinétique par rapport à un axe**

Le moment cinétique $L_\Delta(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ par rapport à l'axe Δ (de vecteur unitaire \vec{u}) du système matériel \mathcal{F} dans le référentiel \mathcal{R} est la projection sur l'axe Δ du moment cinétique en n'importe quel point B de Δ :

$$L_\Delta(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{u} \cdot \vec{L}_B(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}.$$

✓ **Énergie cinétique**

• L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ du système matériel \mathcal{F} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des énergies cinétiques de chacun des points de \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \mathcal{E}_c(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} \text{ énergie cinétique (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \text{ ou J)} \\ m_i \text{ masse (kg)} \\ \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \text{ vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\mathcal{E}_c(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) v^2(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} \text{ énergie cinétique (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \text{ ou J)} \\ dm(\mathbf{M}) \text{ masse (kg)} \\ \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \text{ vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

• **Second théorème de Kœnig**

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ d'un système matériel \mathcal{F} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme de l'énergie cinétique barycentrique $\mathcal{E}_c^*(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2(G)_{/\mathcal{R}}$ d'un point matériel fictif placé en G, affecté de la masse totale m de \mathcal{F} :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) + \frac{1}{2} m v^2(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Interprétation des théorèmes de Kœnig

Le mouvement d'un système \mathcal{S} peut se décomposer en :

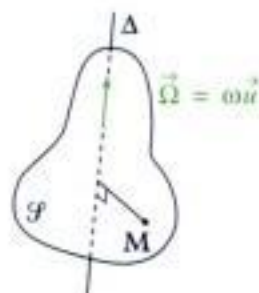
- un mouvement relatif des différents points du système \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R}^* ;
- un mouvement d'ensemble de translation (pas forcément rectiligne uniforme) du centre d'inertie G , affecté de la masse totale m du système \mathcal{S} .

✓ Moment d'inertie

Le moment d'inertie du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ est :

$$J_{\Delta} = \iiint_{\mathcal{M}} dm(M)HM^2.$$

Il s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.



✓ Cas particulier

• Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ d'un solide \mathcal{S} en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe Δ (fixe dans le référentiel \mathcal{R}) s'écrit :

$$\mathbf{L}_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = J_{\Delta}\boldsymbol{\omega}.$$

Remarque : dans le cas général, si $B \in \Delta$, $\vec{L}_B(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ ne sont pas colinéaires !

L'énergie cinétique du solide \mathcal{S} s'écrit :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2.$$

• Mouvement de rotation autour d'un axe de direction fixe

Avec $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}$ (\vec{u} constant dans \mathcal{R}) et $\Delta_A = (A ; \vec{u})$, A étant un point quelconque, on a pour le solide \mathcal{S} (avec $\Delta_G = (G, \vec{u})$)

$$\mathbf{L}_{\Delta_A}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = J_{\Delta_G} \boldsymbol{\omega} + \left[\overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right] \vec{u}$$

et

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta_G} \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2(G)_{/\mathcal{R}}.$$

• Mouvement de translation dans le référentiel \mathcal{R}

Pour tout point A quelconque, on a pour le solide \mathcal{S} :

$$\mathbf{L}_{\Delta_A}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{0} + \left[\overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right] \cdot \vec{u}$$

et

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \mathbf{0} + \frac{1}{2} m v^2(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer le moment cinétique d'un système mécanique par rapport à un axe Δ ?

Soit un système mécanique en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} .

On définit, pour chacun des solides \mathcal{F}_i constituant le système Σ la position de son centre de masse G_i , sa masse m_i , son moment d'inertie et son (ses) paramètre(s) de mouvement.

On cherche à déterminer le moment cinétique $L_{\Delta}(\Sigma)_{/\mathcal{R}}$ du système par rapport à un axe $(O ; \vec{u}) = \Delta$ dans le référentiel \mathcal{R} .

→ Savoir faire

- 1 Décomposer le moment cinétique du système en la somme des moments cinétiques des différents solides :

$$L_{\Delta}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \sum_i L_{\Delta}(\mathcal{F}_i)_{/\mathcal{R}}.$$

- 2 Déterminer chacun des moments cinétiques des différents solides à l'aide du premier théorème de Kœnig :

$$L_{\Delta}(\mathcal{F}_i)_{/\mathcal{R}} = L^*(\mathcal{F}_i) + [\overrightarrow{OG_i} \wedge m_i \vec{v}(G_i)_{/\mathcal{R}}] \cdot \vec{u}$$

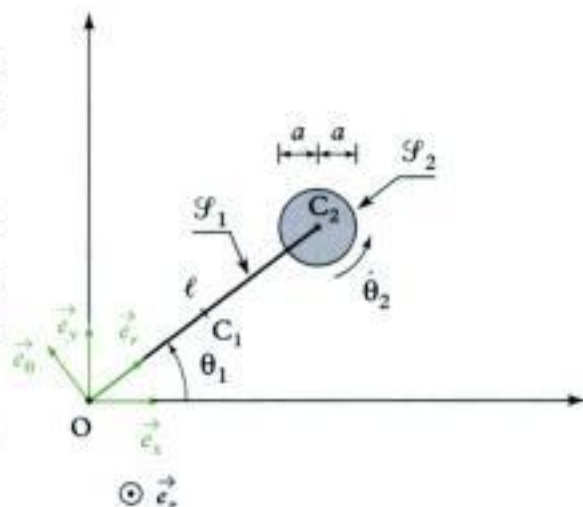
- 3 Conclure. Vérifier les unités.

→ Application

On étudie un système mécanique Σ composé :

- d'une tige \mathcal{F}_1 homogène de longueur $\ell = OC_2$, de centre de masse C_1 , de masse m , et de moment d'inertie $I = m \frac{\ell^2}{12}$ par rapport à l'axe $(C_1 ; \vec{e}_2)$,
- d'un disque \mathcal{F}_2 homogène de centre C_2 , de masse M , de rayon a et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} M a^2$ par rapport à l'axe $(C_2 ; \vec{e}_2)$, en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Déterminer le moment cinétique $L_{\Delta_0}(\Sigma)_{/\mathcal{R}}$ par rapport à l'axe $\Delta_0 = (O ; \vec{e}_z)$ du système (Σ) dans \mathcal{R} .



Solution

- 1 On décompose le moment cinétique de l'ensemble :

$$L_{\Delta_0}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} + L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}}.$$

- 2 On détermine chacun des moments cinétiques à l'aide du 1^{er} théorème de Kœnig :

$$L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = L_{\Delta_{C_1}}^*(\mathcal{F}_1) + [\overrightarrow{OC_1} \wedge m \vec{v}(C_1)_{/\mathcal{R}}] \cdot \vec{e}_z$$



$L_{\Delta_{C_1}}^*(\mathcal{F}_1) = L_{\Delta_{C_1}}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^{(1)}}$, est le moment cinétique barycentrique du solide \mathcal{F}_1 par rapport à l'axe $\Delta_{C_1} = (C_1; \vec{e}_z)$; il se calcule donc dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^{(1)} = (C_1; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ du solide \mathcal{F}_1 , référentiel en translation par rapport à \mathcal{R} , dans lequel C_1 , centre de masse de \mathcal{F}_1 , est fixe.

$$L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \mathbf{I} \cdot \dot{\theta}_1 + \left[\frac{\ell}{2} \vec{e}_r \wedge m \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_1 \vec{e}_\theta \right] \cdot \vec{e}_z \text{ soit } L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = m \frac{\ell^2}{12} \dot{\theta}_1 + m \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_1 \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \text{ et :}$$

$$L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = m \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}_1.$$

$$L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = L_{\Delta_{C_2}}^*(\mathcal{F}_2) + \left[\overrightarrow{OC_2} \wedge M \vec{v}(C_2)_{/\mathcal{R}} \right] \cdot \vec{e}_z.$$



$L_{\Delta_{C_2}}^*(\mathcal{F}_2) = L_{\Delta_{C_2}}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}^{(2)}}$, est le moment cinétique barycentrique du solide \mathcal{F}_2 par rapport à l'axe $\Delta_{C_2} = (C_2; \vec{e}_z)$; il se calcule dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^{(2)} = (C_2; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ du solide \mathcal{F}_2 .

$$L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\theta}_2 + [\ell \vec{e}_r \wedge M \ell \dot{\theta}_2 \vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_z \text{ soit } L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}_2 + M \ell^2 \dot{\theta}_2 \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \text{ et :}$$

$$L_{\Delta_0}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}_2 + M \ell^2 \dot{\theta}_2.$$

③ Ainsi $L_{\Delta_0}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = m \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}_2 + M \ell^2 \dot{\theta}_1.$

$$L_{\Delta_0}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \left(\overset{m^2}{m \frac{\ell^2}{3}} + \overset{m^2}{M \ell^2} \right) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}_2$$

$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ kg $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ kg $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Méthode 2

Comment déterminer l'énergie cinétique d'un système mécanique ?

Soit un système mécanique en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} .

On définit, pour chacun des solides \mathcal{F}_i constituant le système Σ , la position de son centre de masse G_i , sa masse m_i , son moment d'inertie et son (ses) paramètre(s) de mouvement.

On cherche à déterminer l'énergie cinétique du système dans le référentiel \mathcal{R} .

→ Savoir faire

- ① Décomposer l'énergie cinétique du système en la somme des énergies cinétiques des différents solides :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_i)_{/\mathcal{R}}.$$

- ② Déterminer chacune des énergies cinétiques des différents solides à l'aide du deuxième théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_i)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_i) + \frac{1}{2} m_i \vec{v}(G_i)_{/\mathcal{R}}^2.$$

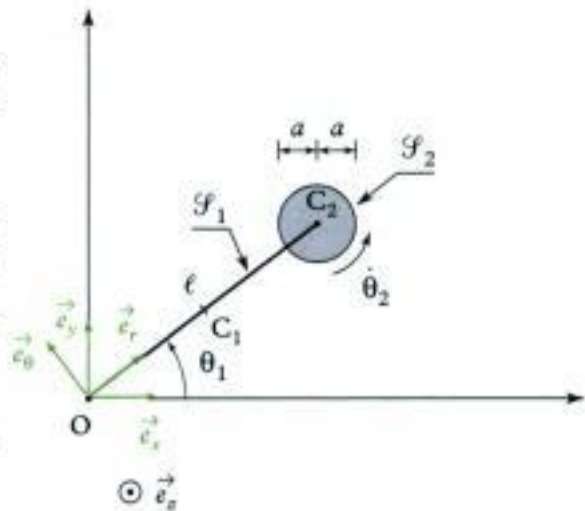
- ③ Conclure. Vérifier les unités.

→ Application

On étudie un système mécanique Σ composé :

- d'une tige \mathcal{F}_1 homogène de longueur $\ell = OC_2$, de centre de masse C_1 , de masse m , et de moment d'inertie $I = m \frac{\ell^2}{12}$ par rapport à l'axe $(C_1; \vec{e}_2)$;
- d'un disque \mathcal{F}_2 homogène de centre C_2 , de masse M , de rayon a et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}Ma^2$ par rapport à l'axe $(C_2; \vec{e}_2)$, en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Déterminer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}}$ du système Σ .



Solution

① On décompose l'énergie cinétique de l'ensemble : $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}}$.

② On détermine chacune des énergies cinétiques à l'aide du 2^e théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_1) + \frac{1}{2}m\vec{v}(C_1)_{/\mathcal{R}}^2.$$



$\mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_1) = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^{*(1)}}$ est l'énergie cinétique barycentrique du solide \mathcal{F}_1 ; elle se calcule donc dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^{*(1)} = (C_1; \vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$ du solide \mathcal{F}_1 , référentiel en translation par rapport à \mathcal{R} , dans lequel C_1 , centre de masse de \mathcal{F}_1 , est fixe.

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\frac{\ell}{2}\dot{\theta}_1\right]^2 \text{ soit } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_1^2 \text{ d'où :}$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}_1^2.$$

$$\text{De même : } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2) + \frac{1}{2}M\vec{v}(C_2)_{/\mathcal{R}}^2.$$



$\mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_2) = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}^{*(2)}}$ est l'énergie cinétique barycentrique du solide \mathcal{F}_2 ; elle se calcule dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^{*(2)} = (C_2; \vec{e}_x'', \vec{e}_y'', \vec{e}_z'')$ du solide \mathcal{F}_2 .

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}M[\ell\dot{\theta}_1]^2 \text{ soit } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}_1^2 \text{ d'où :}$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{4}Ma^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}_1^2.$$

③ Au total, $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}Ma^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}_1^2$, soit :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\left(\overset{m^2}{\underset{\substack{J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}}}{m\frac{\ell^2}{3}}}\overset{m^2}{\underset{\substack{\text{kg}}{\text{kg}}}{M\ell^2}}\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\overset{m^2}{\underset{\substack{\text{kg}}{\text{kg}}}{\frac{1}{2}Ma^2}}\right)\dot{\theta}_2^2$$

$\text{kg} \quad (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \quad \text{kg} \quad (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

On donne la relation :

$$\vec{L}_A = [(Mr^2 + m\ell^2)\dot{\theta} - m\ell^2 \cos\theta \cdot \dot{x}] \vec{e}_\theta,$$

dans laquelle :

- \vec{L}_A est le vecteur moment cinétique ;
- M et m sont des masses ;
- r et ℓ sont des longueurs ;
- θ est un angle ;
- x est l'abscisse.

Cette relation est-elle homogène ?

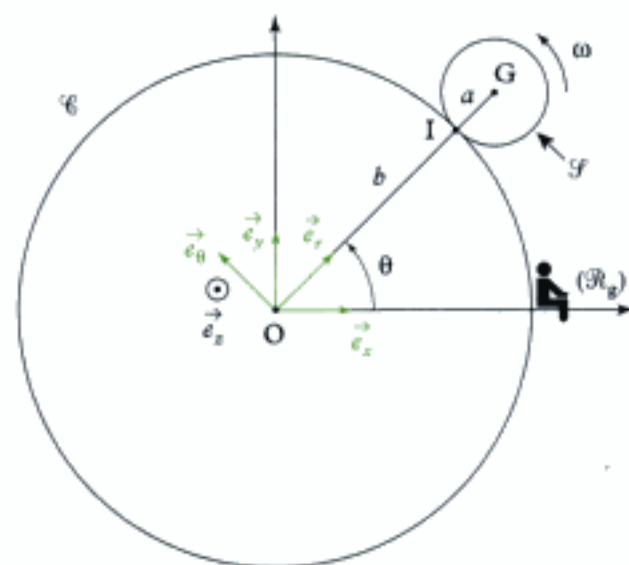
Ex. 2 Bille sur un cylindre

Une bille sphérique \mathcal{S} homogène de rayon a et de masse m roule sur un cylindre \mathcal{C} de rayon b ; son centre de masse G reste dans un plan orthogonal à l'axe du cylindre.

On appelle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OG})$.

$J = \frac{2}{5}ma^2$ le moment d'inertie de la bille \mathcal{S} par rapport à l'axe $\Delta = (G ; \vec{e}_z)$, et ω la vitesse angulaire de la bille. On suppose que la bille \mathcal{S} roule sans glisser sur le cylindre \mathcal{C} ; ainsi :

$$\dot{\theta} = \frac{a}{a+b}\omega.$$



- 1) Exprimer la résultante cinétique $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$ de la bille \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R}_g en fonction de m , a , b et $\dot{\theta}$.
- 2) Exprimer le moment cinétique barycentrique $L_{\Delta_O}^*(\mathcal{S})$ de la bille \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ_O en fonction de m , a , b et $\dot{\theta}$.

3) Exprimer le moment cinétique $L_{\Delta_O}(\mathcal{S})$ de la bille \mathcal{S} par rapport à l'axe $\Delta_O = (O ; \vec{e}_z)$.

4) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$ de la bille \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R}_g .

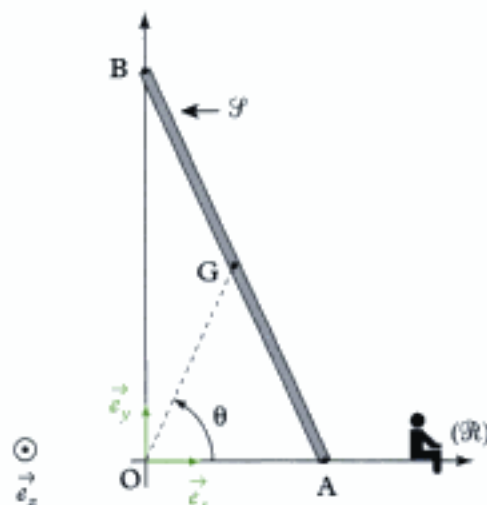
Niveau 2

Ex. 3 Une échelle

Une échelle \mathcal{S} de longueur 2ℓ , de masse m , glisse le long d'un mur vertical $(O ; \vec{e}_y)$ et sur le sol horizontal $(O ; \vec{e}_x)$; on appelle A le point de l'échelle en contact avec le sol et B le point de l'échelle en contact avec le mur. Le référentiel est $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Données :

- La vitesse du centre de masse G de l'échelle est $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} = \ell\omega[\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y]$ où $\omega = -\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de l'échelle ;
- le moment d'inertie $J = \frac{m\ell^2}{3}$ de l'échelle par rapport à l'axe $(G ; \vec{e}_z)$.



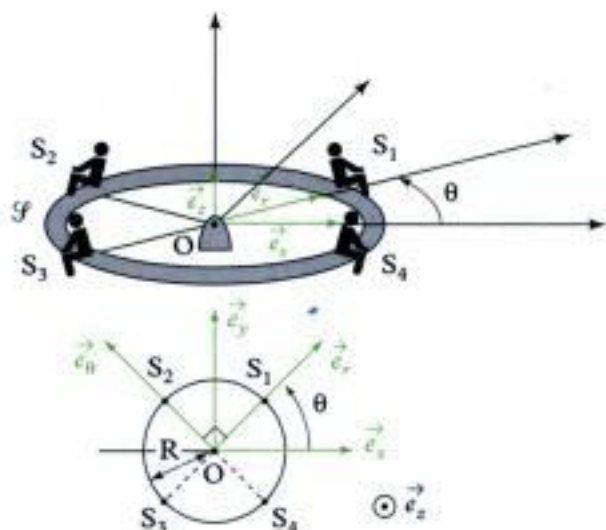
- 1) Exprimer la résultante cinétique $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ de l'échelle dans le référentiel \mathcal{R} .
- 2) Exprimer le moment cinétique $L_{\Delta_O}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ de l'échelle \mathcal{S} par rapport à l'axe $\Delta_O = (O ; \vec{e}_z)$ dans le référentiel \mathcal{R} .
- 3) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ de l'échelle \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} .

Ex. 4 Le tourniquet

Un tourniquet \mathcal{F} est modélisé par une portion de disque de centre de masse O , de masse M et de moment d'inertie, par rapport à son axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$

$J = MR^2$. Quatre enfants, assimilés à des points matériels S_1, S_2, S_3 et S_4 , de masse m sont régulièrement placés autour du tourniquet. La vitesse angulaire du tourniquet est $\dot{\theta}$.

Le référentiel d'étude est $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



1) Déterminer l'expression de la résultante cinétique $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g , Σ comprenant le tourniquet et les 4 enfants :

$$\Sigma = \mathcal{F} \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4.$$

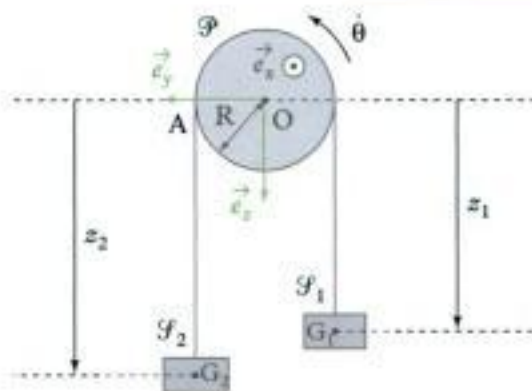
2) Déterminer l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ en O dans le référentiel \mathcal{R}_g .

En déduire l'expression du moment cinétique $L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ par rapport à l'axe Δ .

3) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Ex. 5 La machine d'Atwood

La machine d'Atwood est composée de deux solides \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de masses m_1 et m_2 , suspendus à un fil de masse négligeable ; ce fil est enroulé autour d'une poulie homogène, de centre O , de masse m , de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à son axe $\Delta = (O; \vec{e}_x)$. La poulie \mathcal{P} est mobile autour de Δ grâce à une liaison pivot. Le référentiel d'étude est $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On suppose que le fil ne glisse pas sur la poulie : on a donc les relations cinématiques : $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2 = -R\dot{\theta}$.



1) Exprimer la résultante cinétique $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ du système Σ composé de la poulie, du fil, de \mathcal{F}_1 et de \mathcal{F}_2 ($\Sigma = \mathcal{P} \cup \text{fil} \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$) dans le référentiel \mathcal{R}_g , en fonction de m_1, m_2 et \dot{z}_1 .

2) Exprimer le moment cinétique $L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ du système Σ par rapport à l'axe Δ dans le référentiel \mathcal{R}_g , en fonction m_1, m_2, J, R et \dot{z}_1 .

3) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

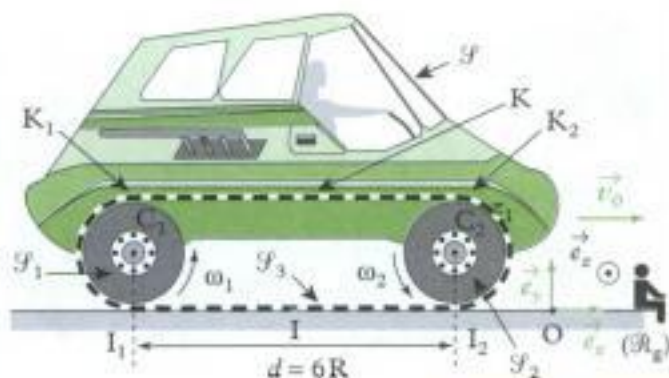
Ex. 6 Véhicule à chenilles

Un véhicule à chenilles se déplace à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Ce véhicule est composé d'un châssis \mathcal{F} de masse M , de deux roues homogènes \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , de centre C_1 et C_2 , de rayon R , de masse m , de moment d'inertie J par rapport à leurs axes ; $C_1 C_2 = 6R$. La chenille \mathcal{F}_3 , de masse m_c est modélisée par un ruban inextensible enroulé sur les roues et possède une répartition de masse homogène.

On suppose qu'il n'y a pas glissement au contact chenille/roue, ainsi :

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{v_0}{R}$$



On suppose qu'il n'y a pas de glissement non plus au contact sol/chenille, ainsi :

$$\vec{v}(I)/\mathcal{R}_g = \vec{v}(I_1)/\mathcal{R}_g = \vec{v}(I_2)/\mathcal{R}_g = \vec{0},$$

et $\vec{v}(K)/\mathcal{R}_g = \vec{v}(K_1)/\mathcal{R}_g = \vec{v}(K_2)/\mathcal{R}_g = 2v_0\vec{e}_x$.

1) Exprimer les vitesses des points I, I₁, I₂, K, K₁ et K₂ éléments de la chenille dans le référentiel barycentrique du véhicule Σ. (Σ = S ∪ S₁ ∪ S₂ ∪ S₃).

2) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)/\mathcal{R}_g$ du véhicule à chenille Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Niveau 3

Ex. 7 Le téléphérique

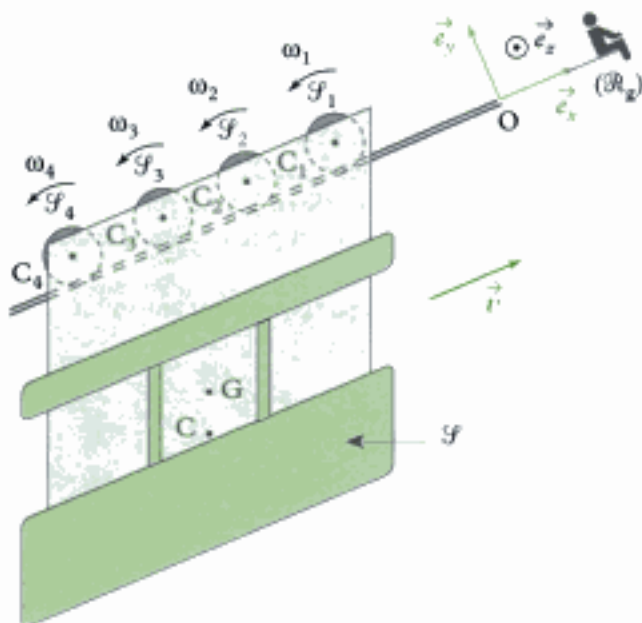
Un téléphérique est composé d'une cabine S, de masse M et centre de masse C et de quatre roues S₁, S₂, S₃, S₄, de centres C₁, C₂, C₃, C₄, homogènes, de masse m, de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à leurs axes.

L'ensemble Σ = S ∪ S₁ ∪ S₂ ∪ S₃ ∪ S₄ avance à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ dans le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Les roues S₁, S₂, S₃, S₄, roulent sans glisser sur un câble rectiligne à des vitesses angulaires :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = -\frac{v}{R}.$$

On appelle Δ_G l'axe (G ; \vec{e}_2); G étant le centre de masse de Σ.



1) Exprimer la résultante cinétique $\vec{p}(\Sigma)/\mathcal{R}_g$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g en fonction de M, m, v.

2) Exprimer le moment cinétique barycentrique $L_{\Delta_G}^*(\Sigma)$ du système Σ par rapport à l'axe Δ_G en fonction de J, R et v.

3) Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_G(\Sigma)/\mathcal{R}_g$ du système Σ en G dans le référentiel barycentrique de Σ en fonction de J, R et v.

4) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)/\mathcal{R}_g$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g en fonction de M, m, v, J, R.

Ex. 8 Weeling d'une moto

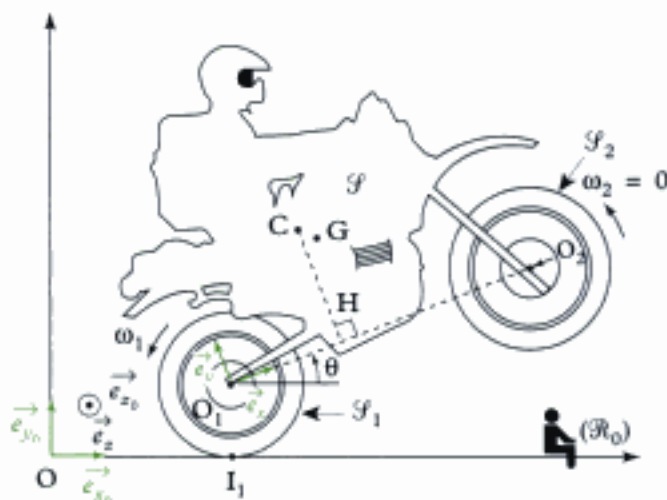
Une moto est en mouvement sur sa roue arrière à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_{x_0}$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$.

On modélise la moto à l'aide de deux roues homogènes S₁ et S₂, de centre O₁ et O₂, de rayon r, de masse m et de moment d'inertie J par rapport à leurs axes. Les chassis et le motard sont modélisés par un solide S, de masse M, de centre de masse C et de moment d'inertie J₀ par rapport à l'axe Δ = (C ; \vec{e}_{z_0}).

L'angle θ d'inclinaison de la moto par rapport à l'horizontale est constant dans cet exercice.

La roue arrière roule sans glisser sur le sol, ainsi : $v + r\omega_1 = 0$. La roue avant ne tourne pas : $\omega_2 = 0$.

On appelle G le centre de masse du système Σ = S ∪ S₁ ∪ S₂.



1) Exprimer la résultante cinétique $\vec{p}(\Sigma)/\mathcal{R}_g$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

2) Exprimer le moment cinétique barycentrique $L_{\Delta_G}^*(\Sigma)$ du système Σ par rapport à l'axe Δ_G = (G ; \vec{e}_{z_0}).

3) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)/\mathcal{R}_g$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

4) Que devient l'expression précédente si $m = \frac{M}{24}$ et $J = \frac{3}{4}mr^2$? Conclure quant à l'importance des termes provenant des roues par rapport à ceux provenant du chassis et du motard.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

\vec{L}_A s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Les deux termes du second membre doivent s'exprimer avec cette unité pour que la relation soit homogène.

Or : Mr^2 s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$;

$m\ell^2$ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$;

$\dot{\theta}$ s'exprime en s^{-1} ;

donc $(Mr^2 + m\ell^2)\dot{\theta}$ s'exprime donc en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

De plus, $m\ell^2 \cos\theta$ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$,

\dot{x} s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,

donc $m\ell^2 \cos\theta \cdot \dot{x}$ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et non en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; la relation donnée n'est donc pas homogène.



Rappel

Si l'expression trouvée lors d'un exercice n'est pas homogène, ... il y a une erreur ... il faut vérifier à nouveau les calculs. Ici, on voit que l'erreur se situe dans le terme $m\ell^2 \cos\theta \cdot \dot{x}$, au niveau des longueurs :

- soit ce n'est pas ℓ^2 ;
- soit c'est \dot{x} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) qui est incorrect.

Exercice 2

1) La résultante cinétique s'écrit :

$$\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = m \vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}_x}.$$

$$\text{Or } \vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}_x} = \left(\frac{d\vec{\text{OG}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_x} = \left[\frac{d((a+b)\vec{e}_r)}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_x} = (a+b)\dot{\theta} \vec{e}_\theta = a\omega \vec{e}_\theta$$

$$\text{ainsi : } \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = ma\omega \vec{e}_\theta = m(a+b)\dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

2) Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , la bille \mathcal{F} , de révolution autour de Δ_G , est en rotation autour de Δ_G à la vitesse angulaire ω :

$$\mathbf{L}_{\Delta_G}^*(S) = \mathbf{J}\omega = \frac{2}{5}ma^2\omega, \text{ soit } \mathbf{L}_{\Delta_G}^*(S) = \frac{2}{5}ma(a+b)\dot{\theta}.$$

3) En utilisant le 1^{er} théorème de Kœnig projeté sur \vec{e}_z , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\Delta_G}(S) &= \mathbf{L}_{\Delta_G}^*(S) + [\vec{\text{OG}} \wedge m\vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}_x}] \cdot \vec{e}_z = \frac{2}{5}ma(a+b)\dot{\theta} + [(a+b)\vec{e}_r \wedge m(a+b)\dot{\theta}\vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{2}{5}ma(a+b)\dot{\theta} + m(a+b)^2\dot{\theta} = m(a+b)\dot{\theta} \left[\frac{2}{5}a + a + b \right] \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \mathbf{L}_{\Delta_G}(S) = m(a+b) \left(\frac{7}{5}a + b \right) \dot{\theta}.$$

4) L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x}$ s'obtient à l'aide du 2^e théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_c^*(S) + \frac{1}{2}m v^2(\text{G})_{/\mathcal{R}_x}.$$

$$\text{Or } \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m a^2 \times \frac{(a+b)^2}{a^2} \dot{\theta}^2 = \frac{m}{5} (a+b)^2 \dot{\theta}^2,$$

$$\text{et } \frac{1}{2} m v^2(G) = \frac{1}{2} m (a+b)^2 \dot{\theta}^2.$$

$$\text{Donc } \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right), \text{ soit :}$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = \frac{7}{10} m (a+b)^2 \dot{\theta}^2.$$

Exercices de niveau 2

Exercice 3

$$1) \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}, \text{ soit :}$$

$$\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = m \ell \omega [-\cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_x].$$

2) En utilisant le 1^{er} théorème de Kœnig, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\Delta_G}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} &= \vec{L}_0(\mathcal{F}) \cdot \vec{e}_z = \left[\vec{L}^*(\mathcal{F}) + \vec{OG} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right] \cdot \vec{e}_z \\ &= \vec{L}^*(\mathcal{F}) \cdot \vec{e}_z + \left[\vec{OG} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right] \cdot \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Or dans son référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*(G; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, l'échelle \mathcal{F} est en rotation autour à l'axe $\Delta_G = (G, \vec{e}_z)$ et se trouve contenue dans un plan perpendiculaire à Δ_G , ainsi :

$$\vec{L}^*(\mathcal{F}) = J \dot{\theta} \vec{e}_z = -\frac{m \ell^2}{3} \omega \vec{e}_z.$$

De plus, $\vec{OG} = \ell \cos \theta \vec{e}_x + \ell \sin \theta \vec{e}_y$ et $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} = \ell \omega [\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y]$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{OG} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} &= \ell [\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y] \wedge m \ell \omega [\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y] \\ &= -m \ell^2 \omega [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \vec{e}_z = -m \ell^2 \omega \vec{e}_z. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbf{L}_{\Delta_G}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = -\left[\frac{1}{3} + 1 \right] m \ell^2 \omega \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = -\frac{4}{3} m \ell^2 \omega.$$

3) $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}$ se calcule en utilisant le deuxième théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) + \frac{1}{2} m v^2(G)_{/\mathcal{R}}.$$

Or $\mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{m \ell^2 \omega^2}{6}$ car dans \mathcal{R}^* , \mathcal{F} est en rotation à la vitesse angulaire ω autour de $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$.

De plus $\left| \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \right| = \ell |\omega|$, donc :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \frac{m \ell^2 \omega^2}{6} + \frac{1}{2} m \ell^2 \omega^2, \text{ soit } \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = \frac{2}{3} m \ell^2 \omega^2.$$



$\frac{2}{3} m \ell^2 \omega^2$ a $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ comme unité, ce qui est homogène à une énergie.

Exercice 4

1) La résultante cinétique $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ est la somme des résultantes cinétiques des différents éléments composant le système :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} + \vec{p}(S_1)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{p}(S_2)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{p}(S_3)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{p}(S_4)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En explicitant chaque terme :

- $\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$, en effet $\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} = M \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$;

- $\vec{p}(S_1)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{v}(S_1)_{/\mathcal{R}_g} = m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$;

- $\vec{p}(S_2)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{v}(S_2)_{/\mathcal{R}_g} = -m R \dot{\theta} \vec{e}_r$;

- $\vec{p}(S_3)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{v}(S_3)_{/\mathcal{R}_g} = -m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$;

- $\vec{p}(S_4)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{v}(S_4)_{/\mathcal{R}_g} = m R \dot{\theta} \vec{e}_r$.

Et en sommant, on obtient : $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$.



Il aurait été plus facile de remarquer que le centre de masse de Σ était en O, point de vitesse nulle dans \mathcal{R}_g et d'utiliser la propriété :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = (M + 4m) \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}.$$

2) Le moment cinétique $\vec{L}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ est la somme des moments cinétiques des différents éléments composant le système :

$$\vec{L}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{L}_O(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} + \vec{L}_O(S_1)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{L}_O(S_2)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{L}_O(S_3)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{L}_O(S_4)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En explicitant chaque terme :

- $\vec{L}_O(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} = J \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}_g} = J \dot{\theta} \vec{e}_z = M R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$; en effet $\vec{L}_O(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g}$ est le moment cinétique d'un solide \mathcal{F} de révolution autour de l'axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ ($\vec{L}_{O\perp}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$) et O est un point fixe dans \mathcal{R}_g ;

- $\vec{L}_O(S_1)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OS}_1 \wedge m \vec{v}(S_1)_{/\mathcal{R}_g} = R \vec{e}_r \wedge (m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$.

- On montre de la même manière que : $\vec{L}_O(S_2)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{L}_O(S_3)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{L}_O(S_4)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{L}_O(S_1)_{/\mathcal{R}_g}$;

et en sommant, on obtient :

$$\vec{L}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = (M + 4m) R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Le moment cinétique du système Σ par rapport à l'axe Δ est la projection sur l'axe Δ du moment cinétique du système Σ en un point de l'axe Δ , par exemple au point O.

$$L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{L}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{e}_z, \text{ d'où } L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = (M + 4m) R^2 \dot{\theta}.$$

3) L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g}$ du système Σ dans le référentiel \mathcal{R}_g est la somme des énergies cinétiques des différents éléments composant le système :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(S_1)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(S_2)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(S_3)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(S_4)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En explicitant chaque terme :

$$\bullet \mathcal{E}_c(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2;$$

$$\bullet \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(\mathcal{S}_1)\|^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2;$$

• de la même manière, on montre que : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_3)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_4)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_x}$.

Et en sommant, on obtient :

$$E_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} (M + 4m) R^2 \dot{\theta}^2.$$

Exercice 5

1) En décomposant Σ en ses différents éléments :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = \vec{p}(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\text{fil})_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x}.$$

En explicitant chaque terme :

$$\bullet \vec{p}(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_x} = \vec{0} \text{ car } \vec{p}(\mathcal{P}) = m \vec{v}(\text{O})_{/\mathcal{R}_x}, \text{ O étant le centre de masse de } \mathcal{P};$$

$$\bullet \vec{p}(\text{fil})_{/\mathcal{R}_x} = \vec{0} \text{ car } m_{\text{fil}} = 0;$$

$$\bullet \vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = m_1 \vec{v}(\text{G}_1)_{/\mathcal{R}_x} = m_1 \dot{z}_1 \vec{e}_z;$$

$$\bullet \vec{p}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} = m_2 \vec{v}(\text{G}_2)_{/\mathcal{R}_x} = m_2 \dot{z}_2 \vec{e}_z.$$

Et en sommant tous ces termes, on obtient : $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = (m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2) \vec{e}_z$,

soit en tenant compte de l'égalité $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$:

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = (m_1 - m_2) \dot{z}_1 \vec{e}_z.$$

2) En décomposant Σ de la même manière :

$$L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = L_\Delta(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_x} + L_\Delta(\text{fil})_{/\mathcal{R}_x} + L_\Delta(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} + L_\Delta(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x}.$$

En explicitant chaque terme :

$$\bullet L_\Delta(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_x} = J \dot{\theta} \text{ car } \mathcal{P} \text{ est en rotation autour de } \Delta \text{ à la vitesse angulaire } \dot{\theta};$$

$$\bullet L_\Delta(\text{fil})_{/\mathcal{R}_x} = 0 \text{ car } m_{\text{fil}} = 0;$$

$$\bullet L_\Delta(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = [\overrightarrow{\text{OG}}_1 \wedge m_1 \vec{v}(\text{G}_1)] \cdot \vec{e}_x$$

 $L_\Delta(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x}$ est la projection sur Δ de $\vec{L}_0(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x}$ et donc : $L_\Delta(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = \vec{L}_0(\mathcal{F}_1) \cdot \vec{e}_x$;
et \mathcal{F}_1 est en translation dans \mathcal{R}_y , donc :

$$\vec{L}_0(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = \overrightarrow{\text{OG}}_1 \wedge m_1 \vec{v}(\text{G}_1)_{/\mathcal{R}_x}.$$

Ainsi :

$$L_\Delta(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = [(-R \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z) \wedge m_1 \dot{z}_1 \vec{e}_z] \cdot \vec{e}_x = -m_1 R \dot{z}_1 \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = -m_1 R \dot{z}_1.$$

De la même manière : $L_\Delta(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} = m_2 R \dot{z}_2$ et en sommant, on obtient :

$$L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = J \dot{\theta} - m_1 R \dot{z}_1 + m_2 R \dot{z}_2.$$

En fonction de \dot{z}_1 , on a :

$$L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = -\frac{J}{R} \dot{z}_1 - m_1 R \dot{z}_1 - m_2 R \dot{z}_1, \text{ soit } L_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = -\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right) R \dot{z}_1.$$

$$3) \mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(\text{fil})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En explicitant chaque terme :

- $\mathcal{E}_c(\mathcal{P})_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ car \mathcal{P} est en rotation autour de Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$;

- $\mathcal{E}_c(\text{fil})_{/\mathcal{R}_g} = 0$ car $m_{\text{fil}} = 0$;

- $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m_1v^2(\mathcal{G}_1)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2$ car \mathcal{F}_1 est en translation dans \mathcal{R}_g ;

- $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m_2v^2(\mathcal{G}_2)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2.$

Et en sommant, on obtient :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2,$$

ou encore, en ne conservant que \dot{z}_1 :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_1^2,$$

soit :

$$E_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{J}{R^2} + m_1 + m_2\right)\dot{z}_1^2.$$

Exercice 6

1) Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du véhicule Σ est un référentiel en translation par rapport à \mathcal{R}_g dans lequel le centre de masse de Σ est fixe ; ce référentiel est en translation par rapport à \mathcal{R}_g à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. Ainsi, en utilisant la loi de composition des vitesses : $\vec{v}(\mathbf{I})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{v}^*(\mathbf{I}) + \vec{v}_0 = \vec{0}$,

il vient :

$$\vec{v}^*(\mathbf{I}) = \vec{v}^*(\mathbf{I}_1) = \vec{v}^*(\mathbf{I}_2) = -\vec{v}_0.$$

De même : $\vec{v}(\mathbf{K})_{/\mathcal{R}_g} = 2\vec{v}_0 = \vec{v}^*(\mathbf{K}) + \vec{v}_0$, et ainsi :

$$\vec{v}^*(\mathbf{K}) = \vec{v}^*(\mathbf{K}_1) = \vec{v}^*(\mathbf{K}_2) = \vec{v}_0.$$

 $\vec{v}(\mathbf{I})_{/\mathcal{R}_g}$ est la vitesse absolue (dans \mathcal{R}_g) ; $\vec{v}^*(\mathbf{I})$ est la vitesse relative (dans \mathcal{R}^*) ;
 \vec{v}_0 est la vitesse d'entraînement.

 Tous les points de la chenille ont la vitesse en norme, dans \mathcal{R}^* : v_0 .

2) Comme Σ est composé de plusieurs solides, on décompose :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En explicitant chaque terme :

- $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}Mv_0^2$ car \mathcal{F} est un solide en translation dans \mathcal{R}_g à la vitesse \vec{v}_0 ;

- $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_g}$ peut s'obtenir à l'aide du 2^e théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c^{*(1)}(\mathcal{F}_1) + \frac{1}{2}m v^2(\mathbf{C}_1)_{/\mathcal{R}_g}.$$

 Le référentiel barycentrique de la roue \mathcal{F}_1 est confondu avec le référentiel barycentrique du véhicule Σ car le centre de masse \mathbf{C}_1 de la roue \mathcal{F}_1 est un point fixe de \mathcal{R}^* :

$$\mathcal{R}^* \equiv \mathcal{R}^{*(1)} \text{ et } \mathcal{E}_c^{*(1)} = \mathcal{E}_c^*.$$

Comme \mathcal{F}_1 est en rotation à la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe (C_1, \vec{e}_2) dans son référentiel barycentrique :

$$\mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_1) = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} v_0^2,$$

et comme $\vec{v}(C_1)_{/\mathcal{R}_x} = v_0 \vec{e}_x$, on a :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} \left(\frac{J}{R^2} + m \right) v_0^2.$$

• On obtient de la même manière : $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x}$.

• $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x}$ peut s'obtenir à l'aide du 2^e théorème de Kœnig : $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_c^{*(3)}(\mathcal{F}_3) + \frac{1}{2} m_C v_0^2$.

En effet, le centre de masse G de la chenille \mathcal{F}_3 est un point fixe de \mathcal{R}^* se trouvant au milieu du segment $[C_1 C_2]$, ainsi $\vec{v}(G) = \vec{v}_0$ et $\mathcal{R}^{*(3)} = \mathcal{R}^*$;

$$\text{donc } \mathcal{E}_c^{*(3)}(\mathcal{F}_3) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_3) = \sum \frac{1}{2} m_i v_0^2 = \frac{1}{2} m_C v_0^2$$

$$\text{et } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x} = m_C v_0^2.$$

En sommant tous ces termes, on obtient :

$$E_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} \left(M + 2 \left(m + \frac{J}{R^2} \right) + 2m_C \right) v_0^2.$$

Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) Σ est un système composé de cinq solides ; on a donc :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x} + \vec{p}(\mathcal{F}_4)_{/\mathcal{R}_x}.$$

En explicitant chaque terme :

$$\bullet \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = M \vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_x} = M v \vec{e}_x;$$

$$\bullet \vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = \vec{p}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} = \vec{p}(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x} = \vec{p}(\mathcal{F}_4)_{/\mathcal{R}_x} = m v \vec{e}_x;$$

Et en sommant, on obtient :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = (M + 4m) v \vec{e}_x.$$

2) On peut décomposer $L_{\Delta_G}^*(\Sigma)$ sous la forme :

$$L_{\Delta_G}^*(\Sigma) = L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_1) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_2) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_3) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_4).$$



$L_{\Delta_G}^*(\Sigma) = L_{\Delta_G}^*(\Sigma)_{/\mathcal{R}^*}$; \mathcal{R}^* est le référentiel barycentrique du système Σ , référentiel en translation par rapport à \mathcal{R}_0 dans lequel G est fixe ; exemple $\mathcal{R}^*(G) : \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.



Il y a d'autres référentiels barycentriques : par exemple $\mathcal{R}^{*(2)}$ associé à \mathcal{F}_2 , référentiel en translation par rapport à \mathcal{R}_0 dans lequel C_2 est fixe ; exemple : $\mathcal{R}^{*(2)} = (C_2 ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On explicite chaque terme.

$$\bullet \mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}) = \mathbf{L}_{\Delta_0}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}^*} \cdot \vec{e}_z$$

En utilisant le 1^{er} théorème de Kœnig pour \mathcal{F} :

$$\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) + \overrightarrow{\mathbf{GC}} \wedge \mathbf{M}\vec{v}(\mathbf{C})_{/\mathcal{R}^*}$$

 $\overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F})$ se calcule dans le référentiel barycentrique de \mathcal{F} .

$$\text{Donc : } \mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}) = \left[\overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) + \overrightarrow{\mathbf{GC}} \wedge \mathbf{M}\vec{v}(\mathbf{C})_{/\mathcal{R}^*} \right] \cdot \vec{e}_z$$

Comme C est un point fixe de \mathcal{R}^* , $\vec{v}(\mathbf{C})_{/\mathcal{R}^*} = \vec{v}^*(\mathbf{C}) = \vec{0}$.

Donc : $\mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}) = \overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) \cdot \vec{e}_z = \mathbf{0}$ car \mathcal{F} est en translation dans $\mathcal{R}^{*(\mathcal{F})}$ et donc $\overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) = \vec{0}$.

 $\mathcal{R}^{*(\mathcal{F})} = \mathcal{R}^*$ car C est un point fixe de \mathcal{R}^* !

$$\bullet \mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}_1) = \mathbf{L}_{\Delta_0}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^*} \cdot \vec{e}_z$$

En utilisant le 1^{er} théorème de Kœnig pour \mathcal{F}_1 :

$$\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(1)}(\mathcal{F}_1) + \overrightarrow{\mathbf{GC}}_1 \wedge \mathbf{m}\vec{v}(\mathbf{C}_1)_{/\mathcal{R}^*}$$

$$\text{donc : } \mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}_1) = \left[\overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(1)}(\mathcal{F}_1) + \overrightarrow{\mathbf{GC}}_1 \wedge \mathbf{m}\vec{v}(\mathbf{C}_1)_{/\mathcal{R}^*} \right] \cdot \vec{e}_z$$

Comme \mathbf{C}_1 est un point fixe de \mathcal{R}^* , $\vec{v}(\mathbf{C}_1)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{v}^*(\mathbf{C}_1) = \vec{0}$

$$\text{et } \overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(1)}(\mathcal{F}_1) = \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}_1}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^{*(1)}} = \mathbf{J}\omega_1 \vec{e}_z = -\mathbf{J} \frac{v}{\mathbf{R}} \vec{e}_z :$$

$$\mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}_1) = -\mathbf{J} \frac{v}{\mathbf{R}}$$

 Encore une fois, le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^{*(1)}$ du solide \mathcal{F}_1 est confondu avec le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système Σ ; en effet, \mathbf{C}_1 est un point fixe de \mathcal{R}^* .

 On peut écrire $\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}_1}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}^{*(1)}} = \mathbf{J}\omega_1 \vec{e}_z$ car \mathcal{F}_1 est un solide de révolution autour de l'axe $(\mathbf{C}_1, \vec{e}_z)$ et est en rotation dans \mathcal{R}^* autour de cet axe.

• Par l'utilisation de la même méthode, on montre que :

$$\mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}_2) = \mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}_3) = \mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\mathcal{F}_4) = -\mathbf{J} \frac{v}{\mathbf{R}}$$

en sommant tous ces termes, on obtient :

$$\mathbf{L}_{\Delta_0}^*(\Sigma) = -4\mathbf{J} \frac{v}{\mathbf{R}}$$

$$3) \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} + \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} + \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} + \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x} + \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F}_4)_{/\mathcal{R}_x} :$$

• $\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x}$ peut s'obtenir à l'aide du 1^{er} théorème de Kœnig appliqué au solide \mathcal{F} :

$$\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{G}}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_x} = \overrightarrow{\mathbf{L}}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) + \overrightarrow{\mathbf{GC}} \wedge \mathbf{M}\vec{v}(\mathbf{C})_{/\mathcal{R}_x}$$

Or \mathcal{S} est en translation par rapport à \mathcal{R}_G avec $\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_G} = v\vec{e}_x$ donc :

$$\mathcal{R}^{*(\mathcal{S})} \equiv \mathcal{R}^* \text{ et } \vec{L}^{*(\mathcal{S})}(\mathcal{S}) = \vec{L}^*(\mathcal{S}) = \vec{0}.$$

Ainsi : $\vec{L}_G(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_G} = \vec{GC} \wedge Mv\vec{e}_x.$

• $\vec{L}_G(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_G}$ peut se calculer à l'aide du 1^{er} théorème de Kœnig appliqué au solide \mathcal{S}_1 :

$$\vec{L}_G(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_G} = \vec{L}^{*(1)}(\mathcal{S}_1) + \vec{GC}_1 \wedge m\vec{v}(C_1)_{/\mathcal{R}_G}.$$

Or C_1 est fixe dans \mathcal{R}^* donc $\mathcal{R}^{*(1)} \equiv \mathcal{R}^*$ et comme \mathcal{S}_1 est un solide de rotation (et de révolution) autour de l'axe (C_1, \vec{e}_z) dans \mathcal{R}^* : $\vec{L}^{*(1)}(\mathcal{S}_1) = J\omega_1\vec{e}_z = -J\frac{v}{R}\vec{e}_z.$

Comme de plus $\vec{v}(C_1)_{/\mathcal{R}_G} = v\vec{e}_x$:

$$\vec{L}_G(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_G} = -J\frac{v}{R}\vec{e}_z + \vec{GC}_1 \wedge mv\vec{e}_x.$$

On montre de la même manière que :

• $\vec{L}_G(\mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_G} = -J\frac{v}{R}\vec{e}_z + \vec{GC}_2 \wedge mv\vec{e}_x;$

• $\vec{L}_G(\mathcal{S}_3)_{/\mathcal{R}_G} = -J\frac{v}{R}\vec{e}_z + \vec{GC}_3 \wedge mv\vec{e}_x;$

• $\vec{L}_G(\mathcal{S}_4)_{/\mathcal{R}_G} = -J\frac{v}{R}\vec{e}_z + \vec{GC}_4 \wedge mv\vec{e}_x.$

En sommant tous ces termes, on obtient :

$$\vec{L}_G(\Sigma)_{/\mathcal{R}_G} = -4J\frac{v}{R}\vec{e}_z + (M\vec{GC} + m\vec{GC}_1 + m\vec{GC}_2 + m\vec{GC}_3 + m\vec{GC}_4) \wedge v\vec{e}_x.$$

Or par définition de G : $M\vec{GC} + m\vec{GC}_1 + m\vec{GC}_2 + m\vec{GC}_3 + m\vec{GC}_4 = \vec{0}$. Ainsi :

$$\vec{L}_G(\Sigma)_{/\mathcal{R}_G} = -4J\frac{v}{R}\vec{e}_z.$$



En projetant sur Δ_G , on obtient : $L_{\Delta_G}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_G} = -4J\frac{v}{R}.$



Comme G est le centre de masse de Σ , on retrouve le résultat de la question 2) :

$$L_{\Delta_G}(\Sigma) = -4J\frac{v}{R} \text{ (en effet } \vec{L}^* = \vec{L}_{G/\mathcal{R}_G} \text{)}$$

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \times \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} =$$



$J\frac{v}{R}$ a comme unité $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \times \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui est homogène à un moment cinétique.

4) On décompose :

$$\mathcal{E}_C(\Sigma)_{/\mathcal{R}_G} = \mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_G} + \mathcal{E}_C(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_G} + \mathcal{E}_C(\mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_G} + \mathcal{E}_C(\mathcal{S}_3)_{/\mathcal{R}_G} + \mathcal{E}_C(\mathcal{S}_4)_{/\mathcal{R}_G}.$$

Avec :

• $\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_G} = \frac{1}{2}Mv^2(C)_{/\mathcal{R}_G} = \frac{1}{2}Mv^2$ car \mathcal{S} est en translation dans \mathcal{R}_G ;

• $\mathcal{E}_C(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_G}$ s'obtient à l'aide du 2^e théorème de Kœnig : $\mathcal{E}_C(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_G} = \mathcal{E}_C^{*(1)}(\mathcal{S}_1) + \frac{1}{2}mv^2(C_1)_{/\mathcal{R}_G}.$



Comme $\mathcal{R}^{*(1)} \equiv \mathcal{R}^*$, $\mathcal{E}_C^{*(1)}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{E}_C(\mathcal{S}_1).$

Dans \mathcal{R}^* , \mathcal{F}_1 a un mouvement de rotation autour de l'axe (C_1, \vec{e}_z) à la vitesse angulaire ω_1 :

$$\mathcal{E}_C^*(\mathcal{F}_1) = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2}.$$

Comme de plus : $\vec{v}(C_1)_{/\mathcal{R}_x} = v \vec{e}_x$,

$$\mathcal{E}_C(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} J v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) v^2.$$

• On montre de la même manière : $\mathcal{E}_C(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_C(\mathcal{F}_3)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_C(\mathcal{F}_4)_{/\mathcal{R}_x} = \mathcal{E}_C(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_x}$.

En sommant, on obtient :

$$E_C(\Sigma)_{/\mathcal{R}_x} = \frac{1}{2} \left(M + 4m + 4 \frac{J}{R^2} \right) v^2.$$



Si on prend $J = \frac{1}{2} m R^2$ alors la masse équivalente s'écrit : $m_{eq} = M + 4m + 2m = M + 6m$.

La masse des poulies ($4m$) a été « augmentée » de 50 % ($2m$) à cause de leurs rotations.

Exercice 8

$$1) \vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_0} + \vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0} + \vec{p}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_0}.$$

En explicitant chaque terme :

• $\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_0} = M \vec{v}$ car \mathcal{F} est un solide en translation dans \mathcal{R}_0 à la vitesse \vec{v} ;

• $\vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0} = m \vec{v}$ car \mathcal{F}_1 a un centre de masse O_1 qui se déplace à la vitesse \vec{v} dans \mathcal{R}_0 : $\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{v}$;

• $\vec{p}(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{p}(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0}$ pour la même raison.

Et en sommant, on obtient :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}_0} = (M + 2m) \vec{v} = (M + 2m) v \vec{e}_x.$$

$$2) L_{\Delta_G}^*(\Sigma) = L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_1) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_2).$$



Rappel : $L_{\Delta_G}^*(\Sigma) = L_{\Delta_G}(\Sigma)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{L}_G(\Sigma)_{/\mathcal{R}^*} \cdot \vec{e}_{z_0}$

\mathcal{R}^* est un référentiel en translation par rapport à \mathcal{R}_0 dans lequel G , centre de masse du système Σ , est fixe.

Ainsi \mathcal{R}^* peut être : $(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ ou $(C; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ ou encore $(O_1; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$.

• $L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = L_{\Delta_G}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}^*} = \vec{L}_G(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}^*} \cdot \vec{e}_{z_0}$ s'obtient à l'aide du 1^{er} théorème de Kœnig :

$$L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = \left[\vec{L}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) + \vec{GC} \wedge M \vec{v}(C)_{/\mathcal{R}^*} \right] \cdot \vec{e}_{z_0}.$$



Comme précisé dans la remarque précédente, $\vec{L}^{*(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) = \vec{L}^*(\mathcal{F})$ car $\mathcal{R}^{*(1)} = \mathcal{R}^*$.

\mathcal{F} n'a aucun mouvement de rotation dans son référentiel barycentrique, donc $\vec{L}^*(\mathcal{F}) = \vec{0}$.



J_0 donné dans l'énoncé est inutile !

C'est un point fixe de \mathcal{R}^* , donc $\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ et donc : $L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = 0$

• $L_{\Delta_0}^*(\mathcal{S}_1)$ s'obtient encore en utilisant le 1^{er} théorème de Kœnig, en remarquant que le référentiel barycentrique de \mathcal{S}_1 est confondu avec celui de Σ :

$$L_{\Delta_0}^*(\mathcal{S}_1) = \left[\vec{L}^*(\mathcal{S}_1) + \overrightarrow{GO_1} \wedge m \vec{v}(O_1)_{/\mathcal{R}^*} \right] \cdot \vec{e}_{z_0}.$$

Dans son référentiel barycentrique, \mathcal{S}_1 a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe $\Delta_{O_1} = (O_1, \vec{e}_{z_0})$ (fixe dans \mathcal{R}^*) ; de plus, \mathcal{S}_1 est de révolution autour de l'axe Δ_{O_1} donc :

$$\vec{L}^*(\mathcal{S}_1) = J\omega_1 \vec{e}_{z_0} = -J \frac{v}{r} \vec{e}_{z_0}.$$

De plus O_1 est un point fixe de \mathcal{R}^* : $\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$. Donc :

$$L_{\Delta_0}^*(\mathcal{S}_1) = -J \frac{v}{r}.$$

• On obtient, en tenant le même raisonnement pour la roue \mathcal{S}_2 : $L_{\Delta_0}^*(\mathcal{S}_2) = 0$.

En sommant tous ces termes, on obtient :

$$L_{\Delta_0}^*(\Sigma) = -J \frac{v}{r}.$$

3) On décompose Σ en ses différents éléments :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_0} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_0} + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_0} + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0}.$$

• $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} M v^2$ car \mathcal{S} est un solide en translation dans \mathcal{R}_0 ;

• $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_0}$ s'obtient à l'aide du 2^e théorème de Kœnig : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_0} = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}_1) + \frac{1}{2} m v^2(O_1)_{/\mathcal{R}_0}$.

Comme \mathcal{S}_1 est en rotation dans son référentiel barycentrique (qui est aussi celui du système Σ) :

$$\mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}_1) = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2}.$$

Comme $\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{R}_0} = v \vec{e}_{x_0}$, on a :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{J}{r^2} + m \right) v^2.$$

• On montre de la même manière que $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} m v^2$, \mathcal{S}_2 ne tournant pas sur elle-même.

En sommant tous ces termes, on obtient :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} \left[M + 2m + \frac{J}{r^2} \right] v^2.$$

$$4) \mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} \left[M + \frac{M}{12} + \frac{3M}{424} \right] v^2 = \frac{1}{2} \left[M + \frac{11}{96} M \right] v^2.$$

En négligeant la masse et l'inertie des roues, on « néglige » 10 % de la masse équivalente intervenant dans l'énergie cinétique.

Dynamique des systèmes et du solide

Introduction

La dynamique relie le mouvement à ses causes, c'est-à-dire aux efforts appliqués au système matériel étudié (parmi les efforts mécaniques, citons en particulier les actions de contact). Après un paragraphe sur les efforts mécaniques, détaillant notamment les efforts de contact, nous établirons les théorèmes de la mécanique des systèmes matériels et du solide à partir des trois lois de Newton vues en première année.

Plan du chapitre 3

A. Efforts mécaniques	96
1. Torseur des efforts : résultante et moment résultant.	96
2. Cas particulier : couple	97
3. Cas particulier : glisseur	97
B. Actions de contact entre solides	99
1. Lois d'Amontons-Coulomb	99
2. Liaison surfacique parfaite entre deux solides	100
C. Théorème de la résultante cinétique ou théorème du centre de masse	101
D. Théorèmes du moment cinétique	103
E. Solide en rotation autour d'un axe fixe	105
F. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe	106
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	111
Énoncés des exercices	121
Indications	124
Solution des exercices	125

A. Efforts mécaniques

A.1. Torseur des efforts : résultante et moment résultant

Un système matériel \mathcal{S} est, de manière générale, soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i appliquées aux points M_i ou alors à un ensemble de forces réparties $d\vec{F}(M)$ appliquées aux différents points M (dans le cas d'un système continu) (fig. 1).

On définit alors, afin de caractériser les efforts (ou actions mécaniques) appliqués au système \mathcal{S} :

- la **résultante des forces**, qui est la somme vectorielle des forces appliquées :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \text{ ou } \vec{R} = \iiint_M d\vec{F}(M);$$

- le **moment (résultant) en un point A**, qui est la somme des moments en A des forces appliquées :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i,$$

$$\text{ou } \vec{\mathcal{M}}_A = \iiint_M \vec{\mathcal{M}}_A(d\vec{F}(M)) = \iiint_M \vec{AM} \wedge d\vec{F}(M).$$

Ces deux vecteurs forment un torseur ; en effet, le moment vérifie la formule de changement de point : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$.

Afin de démontrer cette relation, introduisons le point B dans la définition du moment en A :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \iiint_M (\vec{AB} + \vec{BM}) \wedge d\vec{F}(M) = \iiint_M \vec{AB} \wedge d\vec{F}(M) + \iiint_M \vec{BM} \wedge d\vec{F}(M)$$

$$\text{Avec : } \iiint_M \vec{AB} \wedge d\vec{F}(M) = \vec{AB} \wedge \iiint_M d\vec{F}(M) = \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

$$\text{et } \iiint_M \vec{BM} \wedge d\vec{F}(M) = \vec{\mathcal{M}}_B,$$

$$\text{on a alors : } \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}.$$

Définition 1

Le torseur des efforts (ou torseur des actions mécaniques) s'écrit :

$$\mathcal{T}_F = \underset{A}{\mathcal{R}}[\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A]$$

On distingue parmi les efforts appliqués à un système matériel fermé :

- les **efforts intérieurs** : exercés par une partie du système sur une autre partie du système, donc par des éléments intérieurs au système étudié ;
- les **efforts extérieurs** : exercés par des éléments ne faisant pas partie du système, donc extérieurs au système étudié.

Ces efforts peuvent résulter d'actions à distance (exemple : poids, force d'interaction électromagnétique) ou d'action de contact (exemple : réaction du support, forces de pression, ...).

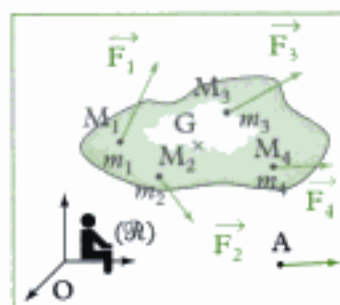


Fig. 1 - Ensemble de forces appliquées à un système de points matériels.

1. On admet que de manière générale, pour un système continu, les efforts appliqués à un système matériel sont modélisables par une résultante et un moment (qui est indépendant de la résultante dans le cas général) ! Le moment comprend le moment des forces élémentaires et les couples élémentaires appliqués à chaque élément de matière composant le système.

A.2. Cas particulier : couple

Définition 2

Un couple est un ensemble de forces dont la résultante est nulle.

Le torseur associé à cet ensemble de forces est un couple.

Par exemple sur la figure 2, l'ensemble des deux forces s'exerçant sur la tige forme un couple, puisque la résultante est nulle. Un couple est responsable d'une rotation uniquement : on parle par exemple du couple moteur exercé par un moteur sur la partie tournante qu'il entraîne.

Propriété

Comme $\vec{R} = \vec{0}$, le moment du couple (ou du torseur) ne dépend pas du point où on le calcule ; en effet :

$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} = \vec{\mathcal{M}}_A.$$

On confond souvent le couple et son moment.

A.3. Cas particulier : glisseur

A.3.1 - Définition

Définition 3

Un glisseur est un ensemble de forces dont le moment est nul en un point.¹

Le torseur associé à cet ensemble de forces est un glisseur.

Propriété

Si le moment est nul en B : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$, alors le moment en un autre point A est perpendiculaire à la résultante \vec{R} et s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{R} \wedge \vec{BA} = \vec{R} \wedge \vec{BA} = \vec{AB} \wedge \vec{R}.$$

Tout se passe comme si une seule force \vec{R} était appliquée en B ; le torseur, ici un glisseur, est aussi appelé force.

Exemple : poids d'un système matériel \mathcal{S} dans un champ de gravitation \vec{g} uniforme.

Chaque élément de volume $dV(M)$ centré en M, de masse $dm(M)$, est soumis à la force de pesanteur élémentaire : $d\vec{F}(M) = dm(M)\vec{g}$.

La résultante de l'ensemble des forces précédentes est le poids du système matériel :

$$\vec{P} = \iiint_M d\vec{F}(M) = \iiint_M dm(M)\vec{g} = \vec{g} \iiint_M dm(M) = m\vec{g},$$

en notant $m = \iiint_M dm(M)$ la masse du système matériel.

Exprimons le moment de l'ensemble de forces au centre d'inertie G du système matériel :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \iiint_M \vec{GM} \wedge d\vec{F}(M) = \iiint_M \vec{GM} \wedge dm(M)\vec{g} = \left(\iiint_M dm(M)\vec{GM} \right) \wedge \vec{g}.$$

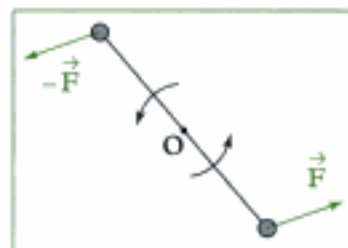


Fig. 2 - Couple exercé sur une tige.

1. On peut ainsi décomposer une action mécanique en un glisseur (ie une force appliquée en un point A) et un couple (de résultante nulle).

Par définition du centre d'inertie G du système matériel :

$$\iiint_M dm(M) \overrightarrow{GM} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \vec{0}.$$

En un autre point A : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}$.

Le poids d'un système matériel est un glisseur appliqué au centre d'inertie G , qui est confondu avec le centre de gravité, car \vec{g} est uniforme.

Les forces de pesanteur appliquées à un système matériel se comportent comme une force unique $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée en G .

A.3.2 - Rappel : moment d'un glisseur \vec{F} appliqué en M

Le glisseur (ou la force) étant un cas d'effort appliqué à un système matériel très fréquent, il est bon de savoir déterminer rapidement le moment d'un glisseur en un point ou le moment d'un glisseur par rapport à un axe.

Définition 4

Le moment en A du glisseur (ou de la force) \vec{F} appliqué en M est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} \text{ (en Nm).}$$

Le moment par rapport à l'axe Δ du glisseur (ou de la force) \vec{F} appliqué en M est la projection sur l'axe Δ du moment en un point A de l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}.$$

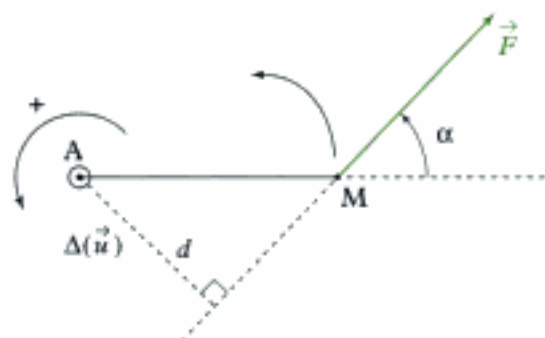


Fig. 3 - Moment d'un glisseur ayant tendance à faire tourner dans le sens direct autour de Δ

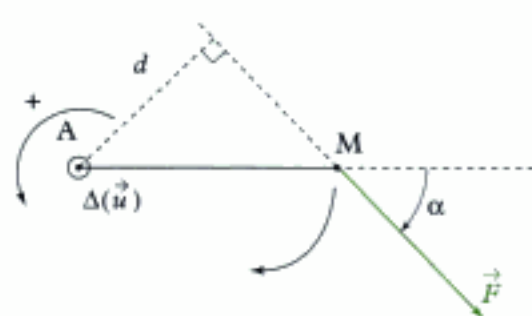


Fig. 4 - Moment d'un glisseur ayant tendance à faire tourner dans le sens indirect autour de Δ .

On a $\mathcal{M}_\Delta = \pm AM \|\vec{F}\| \sin \alpha$, soit :

$$\mathcal{M}_\Delta = \pm d \|\vec{F}\|, \text{ avec } d = AM |\sin \alpha|$$

Dans cette égalité :

- d est le bras de levier (m) ;
- $\|\vec{F}\|$ est la norme de la force (N) ;
- On a le signe + si \vec{F} a tendance à faire tourner le point M dans le sens direct autour de l'axe $\Delta = (A ; \vec{u})$ (fig. 3).
- On a le signe - si \vec{F} a tendance à faire tourner le point M dans le sens indirect autour de l'axe $\Delta = (A ; \vec{u})$ (fig. 4).

B. Actions de contact entre solides

Supposons que le contact entre deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 reste ponctuel : appelons I le point de contact (géométrique) à l'instant t entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . On définit aussi le plan tangent au contact en I ainsi que la normale à ce plan en I.

Les actions de contact exercées par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 sont entièrement caractérisées par un torseur réduit en I (par exemple), composé d'une résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N} + \vec{T}$ (figure 5) et d'un moment résultant en I, \vec{M}_1 .

On supposera par la suite que $\vec{M}_1 = \vec{0}$ (on néglige les frottements de roulement et de pivotement) : les actions de contact forment alors un glisseur (ou une force) $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ appliqué au point de contact I, composé d'une composante normale \vec{N} (perpendiculaire au plan tangent), appelée réaction normale, et d'une composante tangentielle \vec{T} appelée réaction tangentielle ou force de frottement de glissement (ou résistance au glissement).

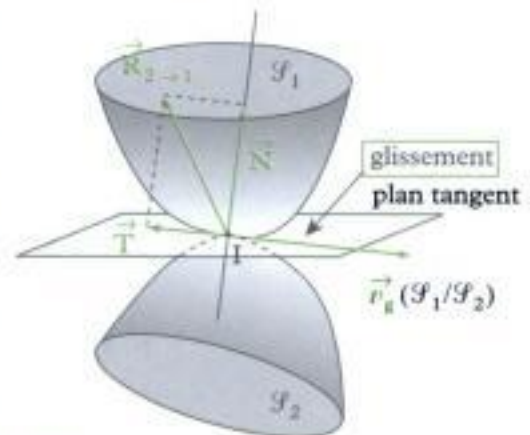


Fig. 5 - Contact entre deux solides à l'instant t

1. Quelques valeurs du coefficient de frottement :

Contact entre :	f
caoutchouc/bitume sec	0,6
caoutchouc/bitume mouillé	0,3
caoutchouc/bitume glacé	0,08
acier/acier non lubrifié	0,15
acier/acier lubrifié	0,01
toujours glissement	0
glissement impossible	∞

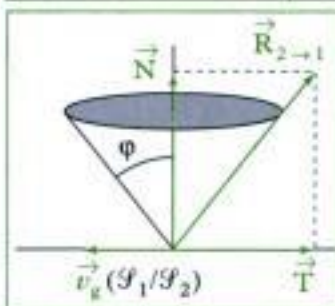


Fig. 6 - Cône de frottement.

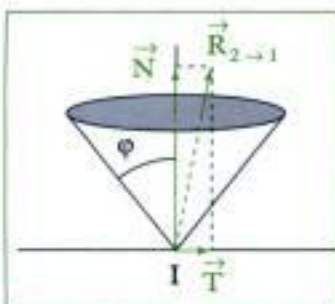


Fig. 7 - Cas de non glissement.

B.1. Lois d'Amontons-Coulomb

Les lois d'Amontons-Coulomb (ou lois de Coulomb) permettent de relier les paramètres cinématiques du glissement (vitesse de glissement) aux paramètres dynamiques (efforts de contact).

Cas du glissement : $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}} \neq \vec{0}$.

On constate alors expérimentalement que l'on a : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ (avec f appelé coefficient de frottement) ; f est un nombre sans unité, qui dépend de la nature des matériaux en contact et non de la surface de contact, ayant des valeurs de l'ordre de 0,1 à 1.¹

On a de plus :

- $\vec{T} \wedge \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$, c'est-à-dire \vec{T} est colinéaire à la vitesse de glissement ;
- $\vec{T} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \leq 0$, c'est-à-dire \vec{T} est de sens opposé à la vitesse de glissement.

La force $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N} + \vec{T}$ présente donc un angle $\varphi = \arctan(f)$ avec la normale \vec{N} ; comme cette propriété est vraie quelle que soit la direction de la vitesse de glissement $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ en I, $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ se trouve donc sur l'arête d'un cône appelé cône de frottement (fig. 6).

Cas du non glissement : $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}} = \vec{0}$.

On a : $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$.

La force $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N} + \vec{T}$ (fig. 7) est alors contenue à l'intérieur du cône de frottement, de 1/2 angle au sommet : $\varphi = \arctan(f)$.

Ce cas de non glissement englobe le cas particulier du roulement sans glissement.

1. On distingue les liaisons unilatérales, dans lesquelles le contact entre les deux solides peut se rompre des liaisons bilatérales, dans lesquelles le contact ne peut pas se rompre par construction.

Remarques :

- Si $f = 0$, il n'y a pas de frottement et $\vec{T} = \vec{0}$; donc la force $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N}$ est normale au plan tangent.
- En appelant $\vec{n}_{2 \rightarrow 1}$ le vecteur unitaire normal au plan tangent orienté de \mathcal{S}_2 vers \mathcal{S}_1 , alors le contact entre \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_1 a toujours lieu si : $\vec{n}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{N} > 0$; sinon ($\vec{n}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{N} = 0$), le contact se rompt.¹
- L'utilisation pratique des lois d'Amontons-Coulomb précédentes se fait en supposant *a priori* que le contact a lieu :

– **avec glissement**, on a alors une égalité dynamique ($\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$) permettant de résoudre le problème ; en fin de résolution, il faut vérifier si l'hypothèse de départ est bonne en vérifiant l'inégalité cinématique :

$$\vec{T} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \leq 0 ;$$

– **sans glissement**, on a alors une égalité cinématique :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/R} - \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_2)_{/R} = \vec{0},$$

permettant de résoudre le problème ; en fin de résolution il faut vérifier si l'hypothèse de départ est bonne en vérifiant l'inégalité dynamique :

$$\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|.$$

B.2. Liaison surfacique parfaite entre deux solides

Les liaisons surfaciques entre deux solides (étudiées en SI) permettent d'éliminer des degrés de liberté sur les six qui sont disponibles pour caractériser le mouvement d'un solide par rapport à un autre.

B.2.1 - Liaison pivot parfaite

Une **liaison pivot** entre le solide \mathcal{S}_1 et le solide \mathcal{S}_2 est une liaison n'autorisant qu'une rotation de \mathcal{S}_2 autour de l'un de ses axes Δ , fixe par rapport à \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 ne possède qu'un unique degré de liberté de rotation par rapport à \mathcal{S}_1 , fig. 8).

Elle est parfaite si le moment par rapport à l'axe Δ des actions de contact exercé par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est nul : $M_\Delta = 0$ (autrement dit le moment en un point O de l'axe Δ est perpendiculaire à Δ).

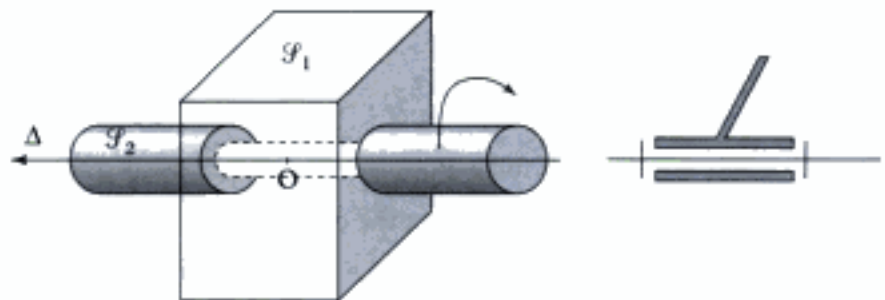


Fig. 8 - Liaison pivot entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

Remarques :

- La réaction d'axe, action mécanique exercée par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est quelconque et n'a aucune raison d'être nulle ; de la même manière, les composantes du moment en un point O de l'axe Δ perpendiculaires à Δ n'ont aucune raison d'être nulles.
- Pour mettre en mouvement \mathcal{S}_2 par rapport à \mathcal{S}_1 , il suffit d'exercer un couple dont le moment par rapport à Δ est quasi nul.

B.2.2 - Liaison rotule parfaite

Une **liaison rotule** entre le solide \mathcal{S}_1 et le solide \mathcal{S}_2 est une liaison autorisant toutes les rotations \mathcal{S}_2 autour de l'un de ses points O, fixe par rapport à \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 possède 3 degrés de liberté de rotation par rapport à \mathcal{S}_1 , fig. 9).

Elle est parfaite si le moment en O des actions de contact exercé par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est nul : $\vec{M}_O = \vec{0}$.



Fig. 9 - Liaison rotule entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

Remarques :

- Le résultante de l'action mécanique de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou réaction de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est quelconque et n'a aucune raison d'être nulle.
- Pour mettre en mouvement \mathcal{S}_2 par rapport à \mathcal{S}_1 , il suffit d'exercer un couple dont le moment en O est quasi nul.

C. Théorème de la résultante cinétique ou théorème du centre de masse

On considère un système matériel \mathcal{S} en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On suppose, pour la démonstration, que le système est composé d'un ensemble de points matériels (fig. 10) ; si le système est continu, on suppose qu'il est décomposable en un ensemble d'éléments de matière quasi ponctuels de volume $dV(M)$, de masse $m = dm(M) = \mu(M)dV(M)$ ($\mu(M)$ étant la masse volumique de l'élément de matière situé au voisinage de M) centrés sur les points M_i et que ces éléments de matière sont assimilables à des points matériels.¹

1. L'assimilation des éléments quasi ponctuels de matière en points matériels n'est pas toujours possible (ex. : pour les matériaux diélectriques) car il faut pouvoir considérer que chaque point matériel n'a aucun mouvement de rotation (interne) propre. Si la décomposition n'est pas possible, on admettra alors les théorèmes de la dynamique, qui sont vérifiés en pratique pour tous les types de systèmes matériels !

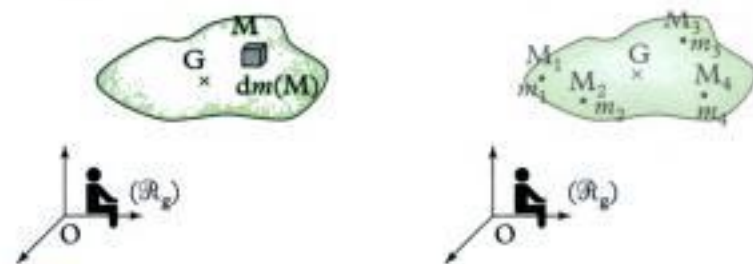


Fig. 10 - Décomposition d'un système à répartition de masse en système d'éléments quasi ponctuels et système de points matériels.

Appliquons alors le principe fondamental de la dynamique (2^e loi de Newton) à chaque élément quasi ponctuel (point M_i) composant le système :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

$\vec{F}_{e \rightarrow i}$ est la somme des forces extérieures au système \mathcal{S} appliquées au point M_i et $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$ est la somme des forces intérieures au système \mathcal{S} appliquées au point M_i par le reste du système.

En sommant sur tout le système, on obtient :

$$\sum_i \left(\frac{d\vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Expression dans laquelle :

$$\bullet \sum_i \left(\frac{d\vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \right) \right]_{/\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g}$$

est la dérivée par rapport au temps dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g de la résultante cinétique (ou quantité de mouvement) du système matériel \mathcal{S} ;

• $\sum_i \vec{F}_{e \rightarrow i} = \vec{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des actions extérieures appliquées à \mathcal{S} ;

• la somme $\sum_{i \neq j} \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{F}_{\text{int}}$ est la résultante des actions intérieures à \mathcal{S} : en regroupant par deux les termes de la somme, sous la forme : $\vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j}$, on a d'après le principe des actions réciproques (3^e loi de Newton) :

$$\vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{0} \text{ et donc } \vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}.$$

On obtient ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}},$$

qui est la généralisation du principe fondamental de la dynamique vu en première année ; comme on a réussi à la démontrer, cette loi est un théorème.

Théorème 1

Théorème de la résultante cinétique (TRC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des forces extérieures (ou résultante des actions mécaniques extérieures) appliquées à un système matériel fermé \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g de la résultante cinétique du système \mathcal{S} :

$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$	$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$ résultante cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) t temps (s) \vec{F}_{ext} résultante des actions mécaniques extérieures (N)
--	--

Comme $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g}$, on a aussi la relation : $m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$.

Théorème 2

Théorème du centre de masse (TCM)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des forces extérieures (ou résultante des actions mécaniques extérieures) appliquées à un système matériel fermé \mathcal{S} est égale au produit de la masse m du système \mathcal{S} par l'accélération du centre de masse G du système dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$	m masse du système (kg) $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g}$ accélération du centre de masse G ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) \vec{F}_{ext} résultante des actions mécaniques extérieures (N)
---	---

Cas particulier : dans le cas où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ (système isolé ou pseudo-isolé), la résultante cinétique du système se conserve au cours du temps.

D. Théorèmes du moment cinétique

On considère un système matériel \mathcal{S} en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On suppose, pour la démonstration, que le système est composé d'un ensemble de points matériels ; si le système est continu, on suppose qu'il est décomposable en un ensemble d'éléments de matière quasi ponctuels de volume $dV(M)$, de masse $m = dm(M) = \mu(M)dV(M)$ ($\mu(M)$ étant la masse volumique de l'élément de matière situé au voisinage de M) centrés sur les points M_i et que ces éléments de matière sont assimilables à des points matériels.

Appliquons alors le théorème du moment cinétique (vu en première année) en un point A fixe de \mathcal{R}_g à chaque élément quasi ponctuel du système :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{M}_A(\vec{F}_{e \rightarrow i}) + \sum_{j \neq i} \vec{M}_A(\vec{F}_{j \rightarrow i}) \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} \end{aligned}$$

en sommant sur tout le système, on a :

$$\sum_i \left(\frac{d\vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Expression dans laquelle :

$$\bullet \sum_i \left(\frac{d\vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \text{ est la}$$

dérivée par rapport au temps dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g du moment cinétique en A du système matériel \mathcal{S} ;

• $\sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} = \vec{M}_{A, \text{ext}}$ est le moment résultant en A des actions extérieures au système \mathcal{S} ;

• la somme $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{M}_{A, \text{int}}$ est le moment résultant en A des actions intérieures à \mathcal{S} : en regroupant par deux les termes de la somme, sous la forme : $\vec{AM}_j \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}$, on a :

$\vec{AM}_j \wedge (-\vec{F}_{i \rightarrow j}) + \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = (\vec{AM}_i - \vec{AM}_j) \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{M}_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{0}$
(car la force $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ est portée par $M_j M_i$ d'après le principe des actions réciproques (3^e loi de Newton)), et donc :

$$\vec{M}_{A, \text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}.^{1, 2, 3}$$

On obtient ainsi : $\left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A, \text{ext}}$ ⁴, qui est la généralisation du

théorème du moment cinétique en un point A fixe du référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; comme on a réussi à la démontrer, cette loi est un théorème.

1. On obtient ainsi la propriété suivante : la résultante des actions intérieures à un système fermé est nulle et le moment en un point quelconque des actions intérieures est nul.

2. Considérons que le système \mathcal{S} est constitué de deux sous-systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en interaction :

on appelle $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}$ la résultante et le moment résultant en A des actions de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 , et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1}$ la résultante et le moment résultant en A des actions de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 . Comme pour le système \mathcal{S} , $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ sont des forces intérieures, on a :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0},$$

soit : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

De la même manière, pour le système \mathcal{S} , $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1}$ sont des moments de forces intérieures, on a :

$$\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} = \vec{0},$$

soit : $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1}$.

On généralise ainsi le **théorème des actions réciproques**.

3. Si l'élément de matière quasi ponctuel de matière n'est pas assimilable à un point matériel, la

force $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ n'est pas forcément portée par $\vec{M}_j M_i$!

4. Le moment des actions extérieures peut être le moment d'une force (d'un glisseur) ou alors le moment d'un couple !

Théorème 3

Théorème du moment cinétique en un point fixe A (TMC(A))

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} en un point A fixe de \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A, \text{ext}}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$ moment cinétique en A ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
 $\vec{M}_{A, \text{ext}}$ moment en A des actions mécaniques extérieures ($\text{N} \cdot \text{m}$)

1. Le TRC et le TMC(A) correspondent à un unique théorème torsorien : la dérivée temporelle du torseur cinétique (résultante cinétique et moment cinétique) réduit en un point A fixe d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , est égale au torseur des actions mécaniques extérieures appliquées au système matériel étudié réduit en A.

Cas particuliers :

- Dans le cas où $\vec{M}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ (système isolé ou pseudo-isolé), le moment cinétique en A du système se conserve au cours du temps.
- Si le système matériel \mathcal{S} est au repos (en équilibre) dans le référentiel d'étude, alors $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ (quel que soit le point fixe A) : ces équations sont celles de la statique des systèmes matériels. La réciproque n'est vraie que si $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ et si, en plus, \mathcal{S} est au repos à un instant t_0 , alors le système est au repos (à chaque instant) dans le référentiel d'étude.

Montrons que l'on peut obtenir le théorème du moment cinétique barycentrique à partir du TMC(A) :

On part de : $\vec{L}^*(\mathcal{S}) = \vec{L}_G(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} + m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{AG}$, expression dans laquelle A est un point fixe de \mathcal{R}_g et dérivons cette égalité par rapport au temps dans \mathcal{R}_g ou \mathcal{R}^* (puisque \mathcal{R}^* est en translation par rapport à \mathcal{R}_g) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} &= \left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= \left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + m \left(\frac{d\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{AG} + m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \left(\frac{d\vec{AG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \end{aligned}$$

Comme A est un point fixe de \mathcal{R}_g , $\left(\frac{d\vec{AG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} - \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g}$,

donc : $m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \left(\frac{d\vec{AG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$; de plus, d'après le TCM,

$$m \left(\frac{d\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_{e \rightarrow i} \text{ et d'après le TMC(A),}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A, \text{ext}} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i}, \text{ on a :}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_i \vec{F}_{e \rightarrow i} \wedge \vec{AG} = \sum_i (\vec{AM}_i + \vec{GA}) \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i}$$

$$\text{ainsi : } \left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \sum_i \vec{GM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} = \vec{M}_{G, \text{ext}}$$

Théorème 4

Théorème du moment cinétique barycentrique (TMC*)

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système matériel \mathcal{S} , la somme des moments en G, centre de masse de \mathcal{S} , des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}^* du moment cinétique barycentrique du système \mathcal{S} :

$$\left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt}\right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{M}_{G, \text{ext}}$$

$\vec{L}^*(\mathcal{S})$	moment cinétique barycentrique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
$\vec{M}_{G, \text{ext}}$	moment en G, des actions mécaniques extérieures ($\text{N} \cdot \text{m}$)

1. Le TMC* est vrai dans le référentiel \mathcal{R}^* qui n'est pourtant pas galiléen, sans pour autant faire apparaître de forces d'inertie ! C'est tout l'intérêt de ce référentiel.

En repartant du TMC(A), si $\Delta = (A, \vec{u})$ est un axe fixe de \mathcal{R}_g (\vec{u} vecteur unitaire), on obtient le théorème du moment cinétique (scalaire) par rapport à cet axe : multiplions scalairement par \vec{u} le TMC(A) :

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{u} \cdot \vec{M}_{A, \text{ext}} \quad \text{soit} \quad \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g})}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{M}_{A, \text{ext}} \quad \text{car } \vec{u}$$

2. On peut aussi projeter le TMC* sur un axe ! Ex TMC* (Δ_0) (voir paragraphe F).

est fixe dans \mathcal{R}_g , soit $\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}} \quad \text{TMC}(\Delta),^2$

Théorème 5

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe Δ (TMC(Δ))

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments, par rapport à un axe Δ fixe de \mathcal{R}_g , des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ :

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}$$

$L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$	moment cinétique par rapport à l'axe Δ ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
$M_{\Delta, \text{ext}}$	moment par rapport à Δ des actions mécaniques extérieures ($\text{N} \cdot \text{m}$)

E. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Supposons que l'on étudie le mouvement d'un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (A, \vec{u})$ (vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{u}$) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

On peut utiliser le TMC(Δ) :

$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}$$

et le TCM :

$$m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

1. ... Ou si \mathcal{S} possède un plan de symétrie perpendiculaire à Δ passant par A.

Si de plus le solide \mathcal{S} se trouve entièrement dans un plan passant par A et perpendiculaire à l'axe de rotation Δ ou s'il est de révolution autour de l'axe Δ^1 , alors : $\vec{L}_A(\mathcal{R})_{/\mathcal{R}_g} = J_\Delta \vec{\Omega}$ et on peut alors aussi utiliser le TMC(A) :

$$J_\Delta \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A, \text{ext}} \quad \text{avec} \quad \Delta = (A, \vec{u}) = (A, \vec{\Omega}).$$

2. Ce cas correspond aux limitations apportées par le programme officiel : le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ garde une direction constante au cours du temps.

F. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

Supposons que l'on étudie le mouvement d'un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe de direction fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g (vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{u}$) ; \mathcal{S} est alors en rotation dans son référentiel barycentrique \mathcal{R}^* autour de l'axe $\Delta_G = (G, \vec{u})$ (fixe dans \mathcal{R}^*).²

On peut utiliser le TMC*(Δ_G) :

$$J_{\Delta_G} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_G, \text{ext}}$$

et le TCM :

$$m \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Si de plus, le solide \mathcal{S} se trouve entièrement dans un plan passant par G et perpendiculaire à l'axe de rotation Δ_G ou s'il est de révolution autour de $\Delta_G = (G, \vec{u})$ ³, alors : $\vec{L}^*(\mathcal{S}) = J_{\Delta_G} \vec{\Omega}$ et on peut aussi utiliser le TMC* :

$$J_{\Delta_G} \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{M}_{G, \text{ext}}$$

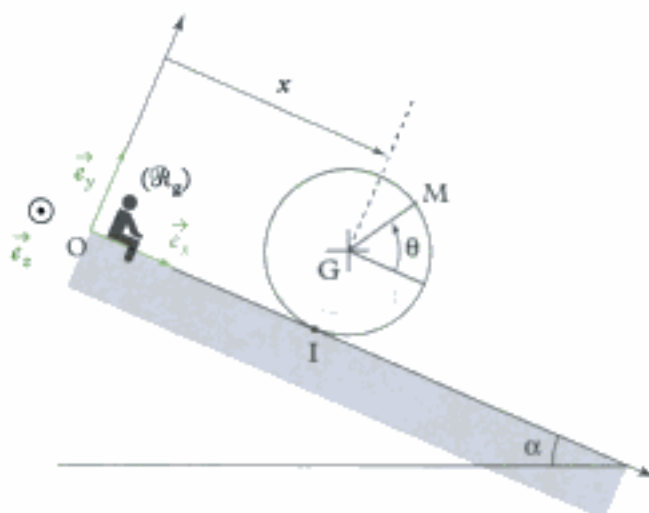
Remarque : si le système est composé de plusieurs solides, on peut appliquer les théorèmes à l'ensemble du système mais aussi à chaque solide composant le système !

3. ... Ou si \mathcal{S} possède un plan de symétrie perpendiculaire à Δ passant par G.

Application 1 Mouvement d'une roue : glissement et roulement

Considérons une roue modélisée par un disque homogène \mathcal{S} , de centre G, de rayon r , de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à l'axe $(G; \vec{e}_z)$, pouvant se déplacer sur le plan incliné (axe $(O; \vec{e}_x)$) ; elle est lâchée à $t = 0$, à partir d'un état de repos ; on suppose qu'elle reste dans le plan vertical $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$ au cours de son mouvement. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (lié au sol) est supposé galiléen. On repère la position angulaire de la roue à l'aide de l'angle : $\theta = (\vec{e}_x, \vec{GM})$. Le coefficient de frottement entre le sol et la roue est f . L'abscisse de G est notée x .

1. Étudier le mouvement de la roue en supposant qu'il y a roulement sans glissement ; déterminer la valeur limite de l'angle α assurant le roulement sans glissement.
2. Étudier le mouvement de la roue en supposant qu'il y a glissement et roulement ; déterminer la valeur limite de l'angle α assurant le glissement.



Solution

1. ■ Analyse cinématique

Supposons qu'il y ait roulement sans glissement entre la roue et le sol ; alors on a montré (voir chapitre 1 : cinématique du solide) que la condition de roulement sans glissement donnait :

$$\dot{x} = -r\dot{\theta} \quad (\text{eq 0})$$

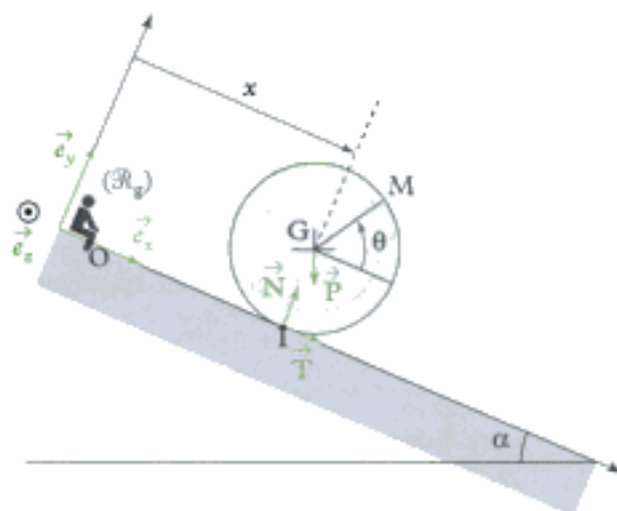
le plan incliné ne changeant rien à l'étude.

Il faudra vérifier, en fin d'étude, que l'hypothèse de RSG est effectivement vraie, c'est-à-dire que : $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$, $\vec{R}_c = \vec{T} + \vec{N}$ étant le glisseur de contact entre la roue et le sol (exercé par le sol sur la roue en I).

■ Analyse dynamique

→ Appliquons alors le TCM à la roue : $\left[\frac{d\vec{p}(\mathcal{F})/\mathcal{R}_0}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}}$.

• La résultante cinétique de la roue est : $\vec{p}(\mathcal{F})/\mathcal{R}_0 = m\dot{x}\vec{e}_x$.



• Efforts extérieurs appliqués à la roue :

– le glisseur poids de la roue appliqué en G : $\vec{P} = -mg\cos(\alpha)\vec{e}_y + mg\sin(\alpha)\vec{e}_x$;

– le glisseur de contact exercé par le sol sur la roue : $\vec{R}_c = \vec{T} + \vec{N} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$;

a priori, on ne connaît pas le sens de la force de frottement \vec{T} .

• Le TCM donne : $m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\cos(\alpha)\vec{e}_y + mg\sin(\alpha)\vec{e}_x + T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$.

Les projections de cette relation sur \vec{e}_x et \vec{e}_y donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T + mg\sin(\alpha) & \text{(eq 1)} \\ 0 = -mg\cos(\alpha) + N & \text{(eq 2)} \end{cases}$$

La réaction normale du sol N est connue :

$$N = mg\cos(\alpha).$$

Par contre, on constate que le TCM ne suffit pas à étudier le mouvement de la roue car T est encore inconnue dans l'équation (eq 1).

→ Il faut donc utiliser un autre théorème, le TMC* (Δ_G) :

$$\frac{dL_{\Delta_G}^*(\mathcal{F})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_G, \text{ext}}, \text{ avec } \Delta_G = (G, \vec{e}_x);$$

en effet, la roue est en rotation dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* autour de l'axe fixe Δ_G .

Remarque : étant donné que la roue est un solide plan et se trouve dans le plan vertical perpendiculaire à Δ_G (ou que la roue est de révolution par rapport à Δ_G), on aurait pu utiliser le TMC*, c'est-à-dire un théorème vectoriel.

• Ainsi, le moment cinétique barycentrique de la roue par rapport à l'axe Δ_G est : $L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = J\dot{\theta}$.

• Moments en G des efforts extérieurs appliqués à la roue :

– pour le poids de la roue appliqué en G : $\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{P}) = 0$ (le bras de levier est nul) ;

– pour le glisseur de contact exercé par le sol sur la roue : $\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{R}_e) = rT$ (voir dessin) ; le bras de levier est r et T a tendance à faire tourner la roue dans le sens direct autour de Δ_G ;

• Le TMC* (Δ_G) donne : $J\ddot{\theta} = rT$ soit : $\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = rT$ (eq 3).

→ En dérivant (eq 0) par rapport au temps, on a : $\ddot{x} = -r\ddot{\theta}$; on peut donc remplacer dans (eq 3) :

$$-\frac{1}{2}mr\ddot{x} = rT.$$

Avec (eq 1), on obtient :

$$-\frac{1}{2}mr\ddot{x} = mr\ddot{x} - rmg\sin(\alpha), \text{ soit } \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin(\alpha)$$

(l'unité de $\frac{2}{3}g\sin(\alpha)$ est $m \cdot s^{-2}$ ce qui est homogène à une accélération), ou encore :

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}\frac{g\sin(\alpha)}{r} \text{ (relation homogène).}$$

L'accélération \ddot{x} de la roue est constante et positive : le mouvement de la roue se fait dans le sens des x croissants.

• **Vérification**

On peut déterminer \vec{T} :

$$\vec{T} = -\frac{1}{3}mg\sin(\alpha)\vec{e}_x$$

(qui est réellement orientée dans le sens des x décroissants) ; on constate que \vec{T} est une force qui s'oppose au mouvement ; attention, ce n'est pas toujours le cas ; ici, elle permet la rotation de la roue.

Le RSG a lieu si :

$$\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|, \text{ soit } \frac{1}{3}mg\sin(\alpha) \leq fmg\cos(\alpha), \text{ soit } \tan(\alpha) \leq 3f.$$

Si l'angle α est trop grand, il y aura glissement.

2. ■ Analyse cinématique

Supposons qu'il y ait glissement (et éventuellement roulement) entre la roue et le sol ; la condition de roulement sans glissement n'est pas vérifiée : $\dot{x} \neq -r\dot{\theta}$. Par contre, on a : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ avec \vec{T} de même direction que la vitesse de glissement mais de sens opposé ; on peut supposer que la vitesse de glissement $\vec{v}_g = (\dot{x} + r\dot{\theta})\vec{e}_x$ est dirigée selon $+\vec{e}_x$, puisqu'au démarrage, il n'y a que le poids qui agit ; ainsi, on peut supposer que \vec{T} est dirigé selon $-\vec{e}_x$.

Il faudra vérifier en fin d'étude que l'hypothèse du glissement est vraie, soit : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$;

■ Analyse dynamique

→ Appliquons le TCM à la roue :

$$\left[\frac{d\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_E}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_E} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

• La résultante cinétique de la roue est : $\vec{p}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_E} = m\dot{x}\vec{e}_x$.

• Les forces extérieures appliquées à la roue sont :

– le glisseur poids de la roue appliqué en G : $\vec{P} = -mg\cos(\alpha)\vec{e}_y + mg\sin(\alpha)\vec{e}_x$;

– le glisseur de contact exercé par le sol sur la roue : $\vec{R}_c = \vec{T} + \vec{N} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$; on connaît dans ce cas le sens de la force de frottement \vec{T} ;

• Le TCM donne : $m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\cos(\alpha)\vec{e}_y + mg\sin(\alpha)\vec{e}_x + T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$.

Les projections de cette relation sur \vec{e}_x et \vec{e}_y donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T + mg\sin(\alpha) & \text{(eq 1)} \\ 0 = -mg\cos(\alpha) + N & \text{(eq 2)} \end{cases}$$

La réaction normale du sol \vec{N} est connue : $\vec{N} = mg\cos(\alpha)\vec{e}_y$. Comme $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos(\alpha)$ (et donc $\vec{T} = -T\vec{e}_x = -fmg\cos(\alpha)\vec{e}_x$, qui est dirigé selon les x décroissants), on connaît l'accélération de la roue ;

(eq 1) donne :

$$\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)), \text{ soit } \dot{x} = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))t;$$

l'accélération est constante ! Le frottement intervient dans l'accélération !

→ Le TMC*(Δ_G) donne l'accélération angulaire :

$$J\ddot{\theta} = rT, \text{ soit } \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = rmg(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)) - rmg\sin(\alpha),$$

ou encore $\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = -rmgfcos(\alpha)$; ainsi :

$$\ddot{\theta} = -\frac{2fg\cos(\alpha)}{r}.$$

(l'unité de $\frac{2fg\cos(\alpha)}{r}$ est $\frac{m \cdot s^{-2}}{m} = s^{-2}$ ce qui est homogène à une accélération angulaire $\text{rad} \cdot s^{-2}$ (le radian étant sans dimension)).

$$\text{soit } \dot{\theta} = -\frac{2fg\cos(\alpha)}{r}t.$$

Il y a roulement et glissement dans ce cas.

• **Vérification :**

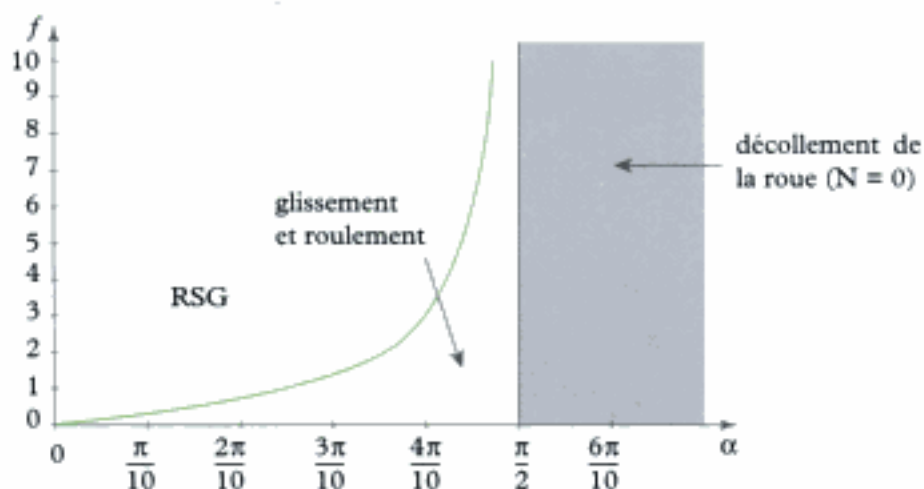
Le glissement a lieu si $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$, soit :

$$-fmg\cos(\alpha)(\dot{x} + r\dot{\theta}) < 0, \text{ soit encore } \dot{x} + r\dot{\theta} > 0,$$

ce qui donne $t(g \sin(\alpha) - 3f g \cos(\alpha)) > 0$, soit $\tan(\alpha) > 3f$.

Si l'angle α devient trop petit, le glissement cesse et le RSG a lieu.

Remarque : on peut tracer la courbe donnant la limite entre RSG et glissement et roulement.



L'essentiel

✓ Efforts ou actions mécaniques

Le torseur des efforts (ou torseur des actions mécaniques ou torseur des forces) appliqués à un système matériel peut se mettre sous la forme : $\mathcal{T}_F = \mathbf{A}[\vec{R}, \vec{M}_A]$ avec :

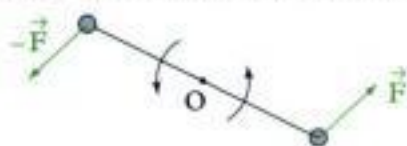
- $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ ou $\vec{R} = \iiint_M d\vec{F}(M)$ est la **résultante des forces**, qui est la somme vectorielle des forces appliquées ;

- $\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_i$,

ou $\vec{M}_A = \iiint_M \vec{M}_A(d\vec{F}(M)) = \iiint_M \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}(M)$ est le **moment (résultant) en un point A**, qui est la somme des moments en A des forces appliquées.

1. Cas particulier : couple

Un couple est un ensemble de forces dont la résultante est nulle.



Propriété : le moment du couple (ou du torseur) ne dépend pas du point, $\vec{M}_B = \vec{M}_A$.

2. Cas particulier : glisseur

Un glisseur est un ensemble de forces dont le moment est nul en un point.

On a, pour tout point A : $\vec{M}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$. Tout se passe comme si une seule force \vec{R} était appliquée en B ; le torseur, ici un glisseur, est aussi appelé force.

Exemple : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un système matériel \mathcal{S} dans un champ de gravitation \vec{g} uniforme est un glisseur appliqué au centre d'inertie G du système \mathcal{S} .

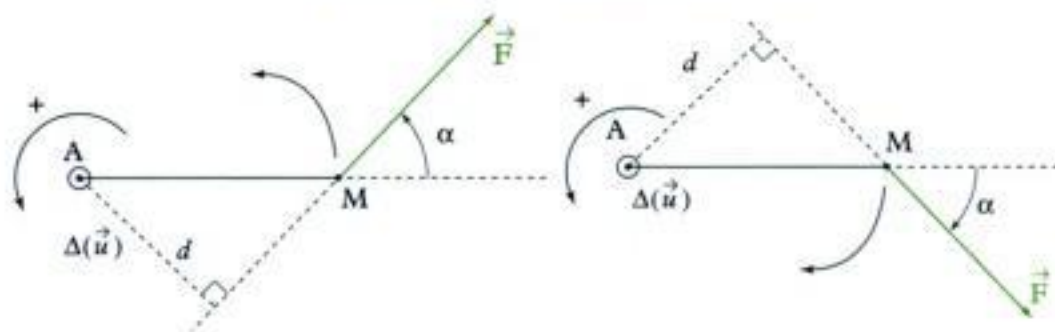
3. Moment d'un glisseur \vec{F} appliqué en M

- Le moment en A du glisseur \vec{F} appliqué en M est :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} \quad (\text{en Nm})$$

Le moment par rapport à l'axe Δ du glisseur \vec{F} appliqué en M est la projection sur l'axe du Δ du moment en un point A de l'axe Δ :

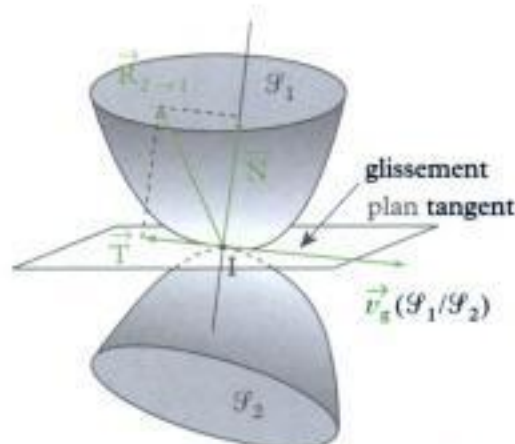
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$



- On a : $\mathcal{M}_\Delta = \pm d \|\vec{F}\|$, avec $d = AM|\sin\alpha|$.
- d est le bras de levier (m) ;
- $\|\vec{F}\|$ est la norme de la force (N) ;
- on a le signe :
 - + si \vec{F} a tendance à faire tourner le point M dans le sens direct autour de l'axe $\Delta = (A ; \vec{u})$
 - si \vec{F} a tendance à faire tourner le point M dans le sens indirect autour de l'axe $\Delta = (A ; \vec{u})$.

✓ Actions de contact entre solides

Les actions de contact forment alors un **glisseur (force)** $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ appliqué au point de contact I, composé d'une composante normale \vec{N} (perpendiculaire au plan tangent), appelée **réaction normale**, et d'une composante tangentielle \vec{T} appelée **réaction tangentielle ou force de frottement de glissement** (ou résistance au glissement).



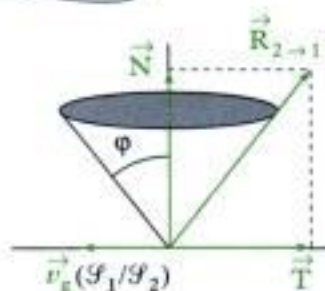
• Lois d'Amontons-Coulomb

Cas du glissement

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I \in S_1)_{/\mathbb{R}} - \vec{v}(I \in S_2)_{/\mathbb{R}} \neq \vec{0}.$$

\vec{T} est déterminée par :

- $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, avec f coefficient de frottement (norme de \vec{T}) ;
- $\vec{T} \wedge \vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$: \vec{T} est colinéaire à la vitesse de glissement (direction de \vec{T}) ;
- $\vec{T} \cdot \vec{v}_g(S_1/S_2) \leq 0$: \vec{T} est de sens opposé à la vitesse de glissement (sens de \vec{T}).



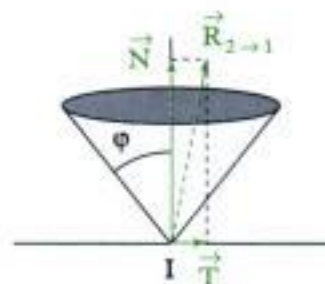
La force $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N} + \vec{T}$ présente donc un angle $\varphi = \arctan(f)$ avec la normale \vec{N} ; $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ se trouve sur l'arête d'un cône appelé cône de frottement.

Cas du non glissement

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I \in S_1)_{/\mathbb{R}} - \vec{v}(I \in S_2)_{/\mathbb{R}} = \vec{0}.$$

On doit vérifier $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$.

La force $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N} + \vec{T}$ est alors contenue à l'intérieur d'un cône de $1/2$ angle au sommet : $\varphi = \arctan(f)$. Ce cas de non glissement englobe le cas particulier du roulement sans glissement.



Remarques :

- Si $f = 0$, alors il n'y a pas de frottement et $\vec{T} = \vec{0}$: la force $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N}$ est normale au plan tangent.
- En appelant $\vec{n}_{2 \rightarrow 1}$ le vecteur unitaire normal au plan tangent orienté de S_2 vers S_1 , alors le contact entre S_2 et S_1 a toujours lieu si : $\vec{n}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{N} > 0$; sinon ($\vec{n}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{N} = 0$), le contact se rompt.

• **Liaison surfacique parfaite entre deux solides**

→ **Liaison pivot parfaite**

Une liaison pivot entre le solide \mathcal{S}_1 et le solide \mathcal{S}_2 est une liaison n'autorisant qu'une rotation de \mathcal{S}_2 autour de l'un de ses axes Δ , fixe par rapport à \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 ne possède qu'un unique degré de liberté de rotation par rapport à \mathcal{S}_1).

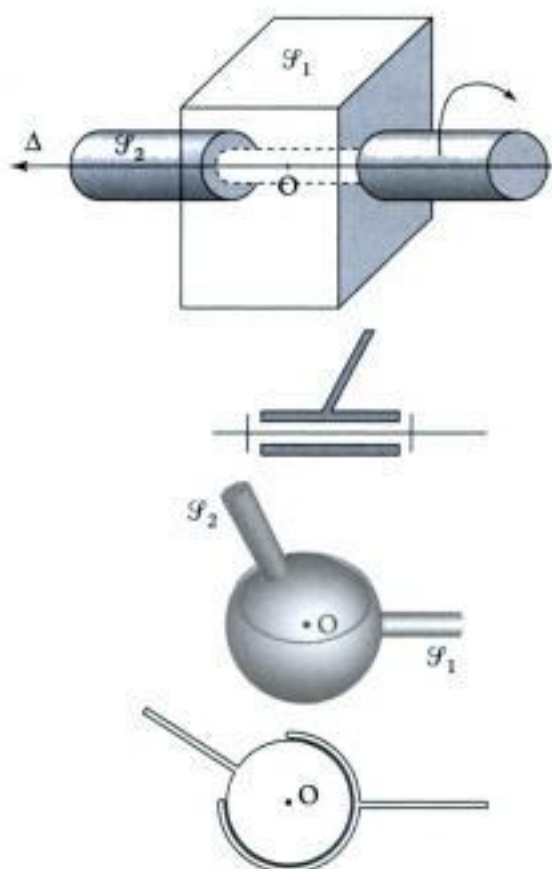
Elle est parfaite si le moment par rapport à l'axe Δ des actions de contact exercé par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est nul : $\mathcal{M}_\Delta = 0$ (autrement dit le moment en un point O de l'axe Δ est perpendiculaire à Δ).

→ **Liaison rotule parfaite**

Une liaison rotule entre le solide \mathcal{S}_1 et le solide \mathcal{S}_2 est une liaison autorisant toutes les rotations \mathcal{S}_2 autour de l'un de ses points O, fixe par rapport à \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 possède 3 degrés de liberté de rotation par rapport à \mathcal{S}_1).

Elle est parfaite si le moment en O des actions de contact exercé par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou de réaction de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}.$$



✓ **Théorème de la résultante cinétique ou théorème du centre de masse**

• **Théorème de la résultante cinétique (TRC)**

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des forces extérieures (ou résultante des actions mécaniques extérieures) appliquées à un système matériel fermé \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g de la résultante cinétique du système \mathcal{S} :

$$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} \text{ résultante cinétique (kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ t \text{ temps (s)} \\ \vec{F}_{\text{ext}} \text{ résultante des actions mécaniques extérieures (N)} \end{array} \right.$$

• **Théorème du centre de masse (TCM)**

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des forces extérieures (ou résultante des actions mécaniques extérieures) appliquées à un système matériel fermé \mathcal{S} est égale au produit de la masse m du système \mathcal{S} par l'accélération du centre de masse G du système dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$$m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ masse du système (kg)} \\ \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} \text{ accélération du centre de masse G (m} \cdot \text{s}^{-2}) \\ \vec{F}_{\text{ext}} \text{ résultante des actions mécaniques extérieures (N)} \end{array} \right.$$

• **Théorème des actions réciproques** : si le système \mathcal{S} est constitué de deux sous systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en interaction : alors on a : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} = -\vec{\mathcal{M}}_{A,2 \rightarrow 1}$ (quel que soit le point A).

($\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est la résultante et $\vec{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2}$ est le moment résultant en A des actions de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 , et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est la résultante et $\vec{\mathcal{M}}_{A,2 \rightarrow 1}$ est le moment résultant en A des actions de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1).

✓ **Théorème du moment cinétique**

• **Théorème du moment cinétique en un point fixe A (TMC(A))**

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} en un point A fixe de \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{A point fixe de } \mathcal{R}_g \\ \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} \text{ moment cinétique en A (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \vec{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \text{ moment en A des actions mécaniques} \\ \text{extérieures (N} \cdot \text{m)} \end{array} \right.$$

• **Théorème du moment cinétique barycentrique (TMC*)**

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système matériel \mathcal{S} , la somme des moments en G, centre de masse de \mathcal{S} , des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}^* du moment cinétique barycentrique du système \mathcal{S} :

$$\left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{G, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{L}^*(\mathcal{S}) \text{ moment cinétique barycentrique (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \vec{\mathcal{M}}_{G, \text{ext}} \text{ moment en G, des actions mécaniques} \\ \text{extérieures (N} \cdot \text{m)} \end{array} \right.$$

• **Théorème du moment cinétique par rapport à un axe Δ (TMC(Δ))**

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments, par rapport à un axe Δ fixe de \mathcal{R}_g , des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ :

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{l} L_{\Delta}(\mathcal{S}) \text{ moment cinétique par rapport à l'axe } \Delta \\ \text{(kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \text{ moment par rapport à } \Delta \text{ des actions mécani-} \\ \text{ques extérieures (N} \cdot \text{m)} \end{array} \right.$$

✓ **Solide en rotation autour d'un axe fixe**

Le solide \mathcal{S} est en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (A, \vec{u})$ (vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{u}$) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

On peut utiliser le TMC(Δ) : $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$ et le TCM : $m \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$.

✓ **Cas particuliers de la statique**

Si le système matériel \mathcal{S} est au repos (en équilibre) dans le référentiel d'étude, alors $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ (quel que soit le point fixe A) : ces équations sont celles de la statique des systèmes matériels.

La réciproque n'est vraie que si $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ et si, en plus, \mathcal{S} est au repos à un instant t_0 , alors le système est au repos (à chaque instant) dans le référentiel d'étude.

✓ Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

Le solide \mathcal{S} est en rotation autour d'un axe de direction fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g (vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{u}$) ; \mathcal{S} est alors en rotation dans son référentiel barycentrique \mathcal{R}^* autour de l'axe $\Delta_G = (G, \vec{u})$ (fixe dans \mathcal{R}^*). On peut utiliser le

$$\text{TMC}^*(\Delta_G) : J_{\Delta_G} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta_G, \text{ext}}$$

et le TCM :
$$m \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer une force inconnue en appliquant le TCM (ou le TRC) ?

Soi(en)t un (plusieurs) solide(s) en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. On définit la position du (des) centre(s) de gravité, la (les) masse(s) et le(s) paramètre(s) de mouvement. On cherche à déterminer une force inconnue.

→ Savoir faire

1 Définir le système étudié.



Pour le choisir, il faut se rappeler que le TCM ne fait intervenir que les forces extérieures. On choisira donc un système qui rende

- intérieures les forces inconnues inintéressantes,
- extérieure la force à déterminer.

2 Définir le référentiel galiléen d'étude.



Le plus souvent il s'agit d'un référentiel fixe par rapport à la Terre.

3 Faire le bilan des forces extérieures appliquées au système. Définir leurs directions. Réaliser éventuellement un dessin.

4 Écrire l'équation vectorielle du TCM : pour cela exprimer le vecteur accélération du centre de gravité du système (par exemple à l'aide du vecteur position et du vecteur vitesse).

5 Projeter cette relation vectorielle afin d'obtenir une (des) équation(s) scalaire(s).



On peut projeter sur :

- la (ou les) direction(s) de la force à déterminer,
- une direction perpendiculaire à une force inconnue inintéressante (afin de la faire disparaître).



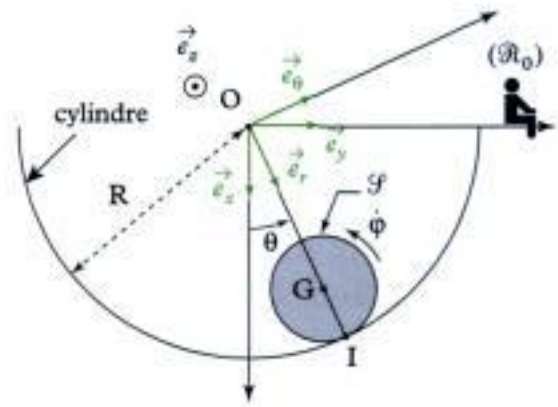
Une équation vectorielle peut donner en projection dans le plan deux équations scalaires.

Vérifier les résultats obtenus (homogénéité, signes, cas particuliers connus...)

→ Application

On considère un solide \mathcal{S} constitué d'une bille homogène de centre G , de rayon r , de masse m , roulant sans glisser dans un cylindre creux, d'axe $(O; \vec{e}_z)$ et de rayon R ($R > r$), attaché à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Déterminer les actions de contact en I en fonction de m, g, θ, R et r .



Solution

1 Système étudié

Ici il n'y a qu'un solide en mouvement donc le système étudié sera la bille \mathcal{S} .

2 Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, lié au cylindre creux.

3 Efforts extérieurs appliqués au système :

- poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ appliqué en G ;
- réaction au niveau de I : $\vec{R}_c = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$.



En général, au niveau d'un contact, on décompose la réaction en une composante normale et une composante tangentielle (afin de préparer une éventuelle étude du frottement du point de contact).

4 Le TCM s'écrit :

$$m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R}_c = mg\vec{e}_x - N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta \quad (1)$$

avec $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{v}(G)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0}$ et

$$\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d((R-r)\vec{e}_r)}{dt}\right]_{/\mathcal{R}_0} = (R-r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} &= \left[\frac{d((R-r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt}\right]_{/\mathcal{R}_0} = (R-r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + (R-r)\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} \\ &= (R-r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + (R-r)\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r) = \underbrace{(R-r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}_{\text{acc. tangentielle}} - \underbrace{(R-r)\dot{\theta}^2\vec{e}_r}_{\text{acc. normale}} \end{aligned}$$



On retrouve les termes classiques d'accélération normale et tangentielle présents dans le cadre d'une trajectoire circulaire.

L'équation vectorielle (1) du TCM s'écrit donc :

$$m[(R-r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - (R-r)\dot{\theta}^2\vec{e}_r] = mg\vec{e}_x - N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta.$$

On cherche N et T , donc on va projeter la relation vectorielle précédente sur $\vec{e}_r(N)$ et $\vec{e}_\theta(T)$.

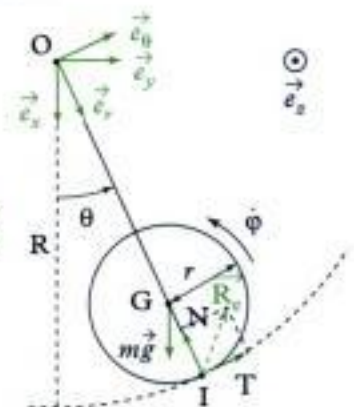
• Projection sur \vec{e}_r

$$m[(R-r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - (R-r)\dot{\theta}^2\vec{e}_r] \cdot \vec{e}_r = mg\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r - N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r + T\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r$$

soit $m \times 0 - m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N + 0$, donc :

$$N = mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$$

$\begin{array}{ccccccc} & & m \cdot s^{-2} & & m & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ N = & mg\cos\theta & + & m(R-r)\dot{\theta}^2 & & & \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\ N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} & \text{kg} & & \text{kg} & (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 & & \end{array}$



• **Projection sur \vec{e}_θ**

$$m[(R-r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - (R-r)\dot{\theta}^2\vec{e}_r] \cdot \vec{e}_\theta = mg\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta - N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta + T\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

soit $m(R-r)\ddot{\theta} - 0 = mg \underbrace{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin\theta} - 0 + T$, donc :

$$T = mgsin\theta + m(R-r)\ddot{\theta}$$

$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ kg kg $rad \cdot s^{-2}$

Méthode 2

Comment déterminer un effort inconnu (force ou couple) en appliquant le TMC(Δ) ?

Soit(ent) un (plusieurs) solide(s) en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. On définit la position du (des) centre(s) de gravité, la (les) masse(s), le(s) moment(s) d'inertie et le(s) paramètre(s) de mouvement. On cherche à déterminer un effort inconnu.

→ **Savoir faire**

1 Définir le système étudié.



Pour le choisir, il faut se rappeler que le TMC ne fait intervenir que les efforts extérieurs. On choisira donc un système qui rende :

- intérieurs les efforts inconnus inintéressants ;
- extérieur l'effort à déterminer.

2 Définir le référentiel galiléen d'étude.



Le plus souvent il s'agit d'un référentiel fixe par rapport à la terre.

3 Faire le bilan des efforts extérieurs appliqués au système. Définir leurs directions et leurs points d'applications. Réaliser éventuellement un dessin.

4 Écrire :

- le TCM (Δ_O) : Δ_O étant un axe fixe passant par un point fixe dans le référentiel galiléen ;
- le TCM* (Δ_G) : Δ_G étant un axe de direction fixe passant par le centre de gravité du système.



Le point de calcul (O ou G) doit être choisi :

- en fonction de l'axe par rapport auquel sont donnés les moments d'inertie ;
- de manière à faciliter les calculs des moments ;
- de manière à « éliminer » des forces inconnues inintéressantes (par l'intermédiaire de la nullité de leur moment).



Si le mouvement du centre de gravité G_Σ d'un système Σ est compliqué, l'équation du TCM* (Δ_{G_Σ}) est à proscrire. Dans ce cas, il vaut mieux appliquer le TMC(Δ) à chacun des solides.

5 Déterminer le moment cinétique du système par rapport à l'axe considéré.

6 Déterminer le moment des efforts extérieurs par rapport à l'axe considéré (couple ou \pm bras de levier \times force).

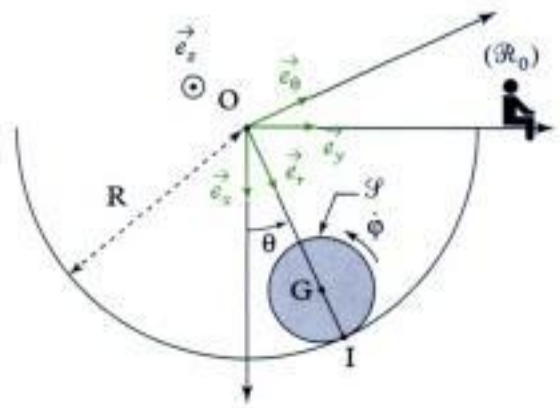
7 Exprimer l'équation scalaire du TMC(Δ) afin d'obtenir l'effort inconnu.

→ Application

On considère un solide \mathcal{S} constitué d'une bille, de centre G et de rayon r , de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{2}{5}mr^2$ par rapport à $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$, qui roule sans glisser dans un cylindre creux d'axe $(O; \vec{e}_z)$ de rayon R (avec $R > r$) attaché à un référentiel galiléen

$\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Déterminer la composante tangentielle de l'action de contact en I en fonction de m, r et φ .



Solution

1 Système étudié

Ici il n'y a qu'un solide en mouvement donc ce sera la bille \mathcal{S} .

2 Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au cylindre creux.

3 Efforts extérieurs appliqués au système

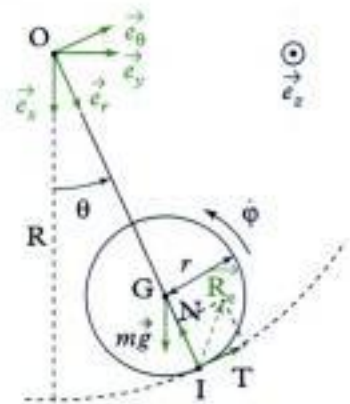
- poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ appliqué en G ;
- réaction : $\vec{R}_c = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$ en I .

4 On va écrire le TMC* (Δ_G) avec $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$.

En effet :

- on nous donne le moment d'inertie par rapport à Δ_G ;
- le moment du poids est nul par rapport à Δ_G .

$$\frac{d}{dt}(L_{\Delta_G}^*(\mathcal{S})) = M_{\Delta_G, \text{ext}} \quad (1)$$



5 Moment cinétique barycentrique

$$L_{\Delta_G}^*(\mathcal{S}) = J \times \dot{\varphi} = \frac{2}{5}mr^2 \times \dot{\varphi}.$$

6 Moments des efforts extérieurs :

- poids : $M_{\Delta_G}(\vec{P}) = 0$ (bras de levier nul) ;
- réaction en I : $M_{\Delta_G}(\vec{R}_c) = 0 \times N \overset{\text{sens}}{+} \underset{\text{bras de levier}}{r} \times \underset{\text{force}}{T} = rT$.



Cette équation ne nous permettrait pas de déterminer l'expression de N .

7 L'équation (1) scalaire du TMC* (Δ_G) s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}mr^2 \times \dot{\varphi}\right) = 0 + rT \quad \text{soit} \quad \frac{2}{5}mr^2 \ddot{\varphi} = rT,$$

et donc :

$$T = \frac{2}{5}mr \ddot{\varphi}$$

$N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ kg $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$

Méthode 3

Comment déterminer une équation différentielle du mouvement en appliquant les théorèmes de la dynamique (TCM et TCM(Δ)) ?

Soit(ent) un (plusieurs) solide(s) en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. On définit la position du (des) centre(s) de gravité, la (les) masse(s), le(s) moment(s) d'inertie et le(s) paramètre(s) de mouvement. On cherche à déterminer une équation différentielle (en fonction d'un paramètre) de mouvement.

→ Savoir faire

❶ Écrire les relations cinématiques qui existent entre les différents paramètres de mouvement.

❷ Écrire les équations de la dynamique :

• TCM (voir méthode 1) ;

• TMC (voir méthode 2).



À l'inverse de la mécanique du point où TCM et TMC aboutissent aux mêmes équations, en mécanique du solide, l'application des 2 théorèmes (TCM et TMC) est le plus souvent nécessaire et ces 2 théorèmes donnent de toute façon des équations indépendantes !

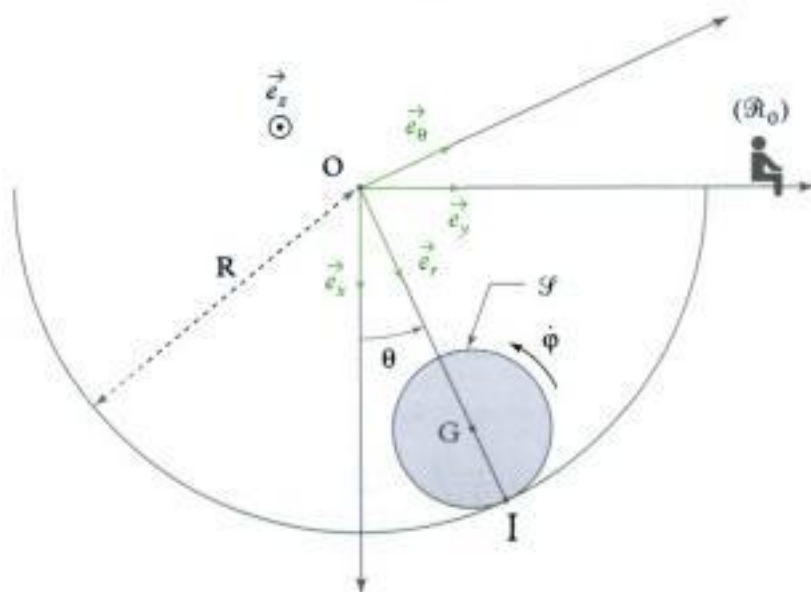
❸ Obtenir l'équation de mouvement désirée :

• en « éliminant » les inconnues de liaison entre les différentes équations de la dynamique,

• en « éliminant » les paramètres de mouvement « indésirables » avec les relations cinématiques.

→ Application

On considère un solide \mathcal{S} constitué d'une bille, de centre G et de rayon r , de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{2}{5}mr^2$ par rapport à $\Delta_G = (G ; \vec{e}_z)$, qui roule sans glisser dans un cylindre creux d'axe $(O ; \vec{e}_z)$ de rayon R ($R > r$) attaché à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la bille (en θ).



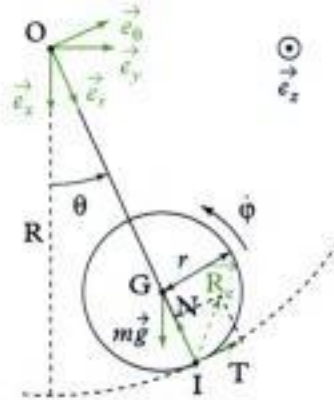
Solution

- ① Il y a roulement sans glissement au niveau du point de contact I donc :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S})/\mathcal{S}_0 = \vec{0}$$

qui conduit à (voir exercice 8 chapitre 1) :

$$(\mathbf{R} - r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (\text{eq 1})$$



- ② Les équations de la dynamique donnent :

• TCM (voir méthode 1) :

$$N = mg \cos \theta + m(\mathbf{R} - r)\dot{\theta}^2 \quad (\text{eq 2})$$

$$T = mg \sin \theta + m(\mathbf{R} - r)\ddot{\theta} \quad (\text{eq 3})$$

• TMC* (Δ_G) (voir méthode 2) :

$$T = \frac{2}{5} m r \ddot{\varphi} \quad (\text{eq 4})$$

- ③ En éliminant T entre (eq 3) et (eq 4), on obtient :

$$\frac{2}{5} m r \ddot{\varphi} = mg \sin \theta + m(\mathbf{R} - r)\ddot{\theta}.$$

Par ailleurs, la relation cinématique déduite du roulement sans glissement en I :

$$(\mathbf{R} - r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0$$

peut s'écrire (en dérivant par rapport au temps) :

$$(\mathbf{R} - r)\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi} = 0 \text{ soit } \ddot{\varphi} = -\frac{\mathbf{R} - r}{r}\ddot{\theta}.$$

En reportant l'expression de $\ddot{\varphi}$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{2}{5} m r \left(-\frac{\mathbf{R} - r}{r} \ddot{\theta} \right) = mg \sin \theta + m(\mathbf{R} - r)\ddot{\theta} \text{ soit } 0 = \left(1 + \frac{2}{5} \right) m(\mathbf{R} - r)\ddot{\theta} + mg \sin \theta$$

soit en simplifiant par m : $\frac{7}{5}(\mathbf{R} - r)\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$.

D'où l'équation différentielle du mouvement en θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(\mathbf{R} - r)} \sin \theta = 0.$$



Le coefficient $\frac{7}{5}$ vaut $\boxed{1} + \boxed{\frac{2}{5}}$, en effet, le mouvement de la bille se décompose :

• en un mouvement de translation : $\boxed{1}$ (masse : $1 m$) ;

• et un mouvement de rotation : $\boxed{\frac{2}{5}}$ (moment d'inertie : $\frac{2}{5} m r^2$).

Exercices

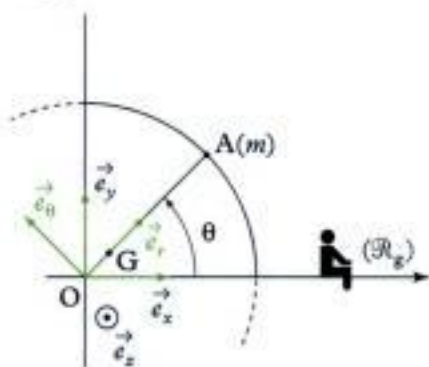
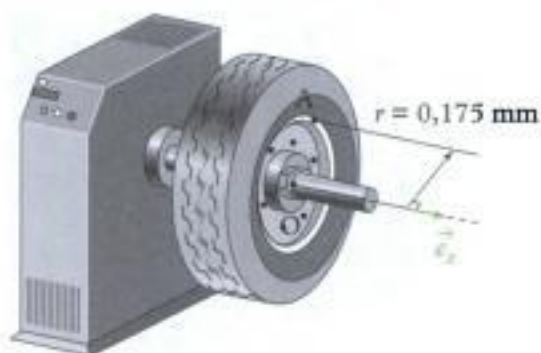
Niveau 1

Ex. 1 Équilibrage d'une roue de voiture

On modélise une roue de voiture déséquilibrée \mathcal{F} par un cylindre homogène de masse $M = 18 \text{ kg}$, et par une masse ponctuelle m se trouvant en A ($OA = r = 0,175 \text{ m}$) ; la position du centre de masse G de l'ensemble est donnée par :

$$\vec{OG} = \ell \vec{e}_r \text{ avec } (\ell = \frac{m}{M+m}r = \frac{m}{M}r \text{ car } m \ll M).$$

Cette roue est placée sur un dispositif de mesure d'équilibrage lié au référentiel galiléen terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; elle est mise en rotation à vitesse angulaire constante $\omega = 125 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



1) À l'aide du TCM appliqué à la roue \mathcal{F} , déterminer les expressions des composantes R_r et R_θ de la réaction de l'axe sur la roue \mathcal{F} .

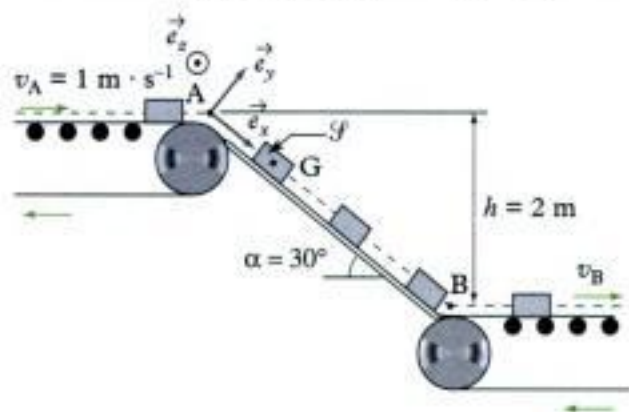
2) Déterminer l'ordre de grandeur de ℓ , puis de m , permettant de négliger l'effet du déséquilibre devant l'effet du poids.

Ex. 2 Au tri postal

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés depuis un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_A = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les colis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale ; le coefficient de frottement entre les colis et le plan incliné est $f = 0,5$. Les

colis arrivent en B avec une vitesse v_B qui doit, dans le cas d'un fonctionnement normal, être égale à la vitesse du second tapis roulant.

Le référentiel $\mathcal{R}_g(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



Déterminer, en appliquant le TCM, la vitesse v_B du second tapis roulant assurant un fonctionnement correct de l'ensemble.

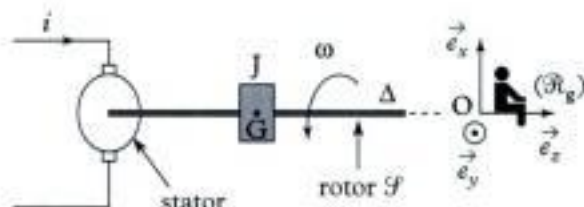
Niveau 2

Ex. 3 Mise en rotation d'un moteur de robotique

On étudie la phase de mise en rotation du rotor \mathcal{F} , (partie tournante) d'un moteur de robotique dans le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen.

Le rotor (\mathcal{F}), de moment d'inertie $J = 10,7 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, est soumis à un couple moteur \vec{C}_m , dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant i traversant le stator du moteur (partie fixe) :

$$\vec{C}_m = ki \vec{e}_z \text{ avec } k = 22 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{mA}^{-1}.$$



On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe Δ .

1) On néglige tous les frottements. Le courant i est constant : $i = I_0 = 0,1 \text{ A}$.

a) En utilisant le TMC(Δ) ($\Delta = (O; \vec{e}_z)$), écrire l'équation différentielle donnant la vitesse angulaire $\omega(t)$ de \mathcal{F} .

b) La résoudre en supposant qu'au départ, (\mathcal{F}) est au repos.

c) Déterminer et calculer le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse $\omega_0 = 1\,800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2) En réalité, le rotor \mathcal{F} est soumis à un couple de frottement sec $C_s = 400 \mu\text{N} \cdot \text{m}$ et à un couple de frottement fluide $C_f = \lambda\omega$ ($\lambda = 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$), tous deux s'opposant au mouvement. On a toujours :

$$i = I_0 = 0,1 \text{ A.}$$

a) En utilisant le TMC(Δ), écrire l'équation différentielle donnant la vitesse angulaire $\omega(t)$ de \mathcal{F} .

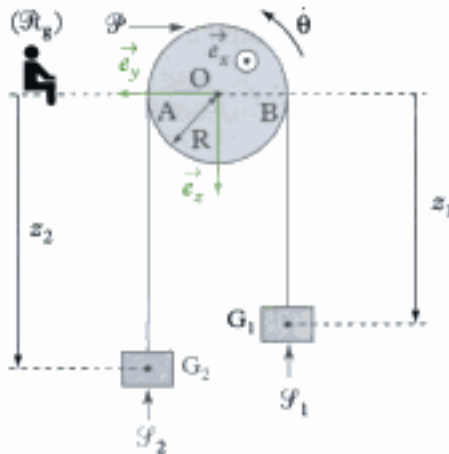
b) La résoudre en supposant qu'au départ \mathcal{F} est au repos.

c) Déterminer et calculer le temps T_1 mis pour atteindre le régime permanent (à 5 %). Conclusion.

Ex. 4 Machine d'Atwood

La machine d'Atwood est composée de deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de masses m_1 et m_2 , suspendus à un fil de masse négligeable ; ce fil est enroulé autour d'une poulie homogène, de centre O, de masse m , de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à son axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$. La poulie \mathcal{P} est mobile autour de Δ grâce à une liaison pivot parfaite.

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , initialement au repos sont lâchés sans vitesse initiale. Le fil ne glisse pas sur la poulie.



1) Étude cinématique

a) Exprimer la longueur ℓ du fil en fonction de R, z_1 (position du centre de masse G_1 et \mathcal{S}_1) et z_2 (position du centre de masse G_2 de \mathcal{S}_2). En déduire une relation entre \dot{z}_1 et \dot{z}_2 .

b) À l'aide de la condition de non glissement appliquée en A et B, déterminer une relation entre θ , R et \dot{z}_2 puis entre θ , R et \dot{z}_1 .

2) Étude dynamique

a) En appliquant le TMC(Δ) au système composé de la poulie \mathcal{P} , du fil et des deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , exprimer les accélérations \ddot{z}_1 et \ddot{z}_2 de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

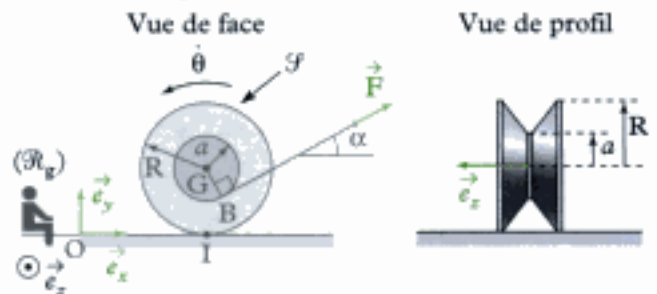
b) En appliquant le TCM à \mathcal{S}_1 puis à \mathcal{S}_2 , déterminer les tensions du fil T_1 et T_2 , retenant \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en fonction de m_1 et m_2 , g, J et R. En déduire l'expression de $T_2 - T_1$. Conclusion.

Ex. 5 Une bobine de fil

Une bobine de fil (\mathcal{F}) de masse M, de rayon intérieur a, de rayon extérieur R et de moment d'inertie J par rapport à son axe, est posée sur un sol horizontal, sur lequel elle ne peut que rouler sans glisser.

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

On applique au fil (de masse négligeable) une force \vec{F} faisant un angle α avec le sol.

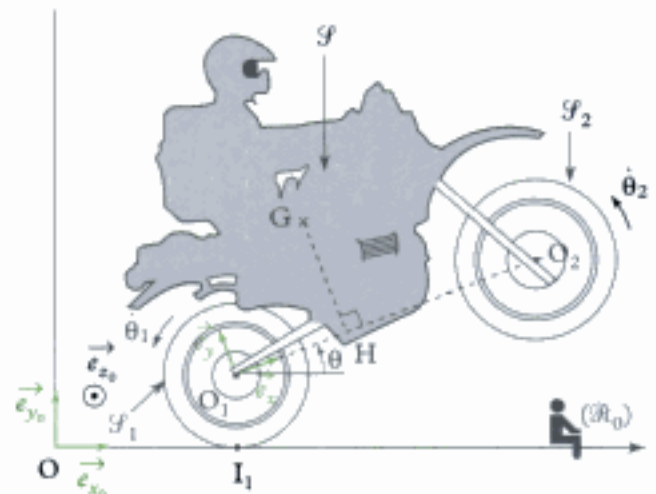


1) Déterminer l'accélération du centre de masse G de la bobine en fonction de F, R, α , M.

2) Déterminer le sens de déplacement de la bobine de fil suivant les valeurs de α .

Ex. 6 Wheeling d'une moto

On considère une moto en mouvement sur sa roue arrière par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ supposé galiléen.



Ce modèle comprend deux roues homogènes (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2), de centre de masse O_1 et O_2 , de rayon r, de masse et de moment d'inertie négligeables.

Le châssis et le motard sont modélisés par un solide (\mathcal{S}) de centre de gravité G tel que :

$$\vec{O_1G} = \vec{O_1H} + \vec{HG} = 1,5r\vec{e}_x + 1,5r\vec{e}_y,$$

de masse M et de moment d'inertie J par rapport à l'axe $(G; \vec{e}_{x_0})$.

On suppose que :

- l'action de l'air est négligeable ;
- le solide (\mathcal{S}) est incliné par rapport à l'horizontale d'un angle θ supposé constant et qu'il se déplace horizontalement avec une accélération (par rapport au sol) $\vec{a} = a_0 \vec{e}_{x_0}$;
- la roue arrière (\mathcal{S}_1) roule sans glisser sur le sol au niveau de I_1 : ainsi, on a la relation $\dot{x} + r\dot{\theta}_1 = 0$.

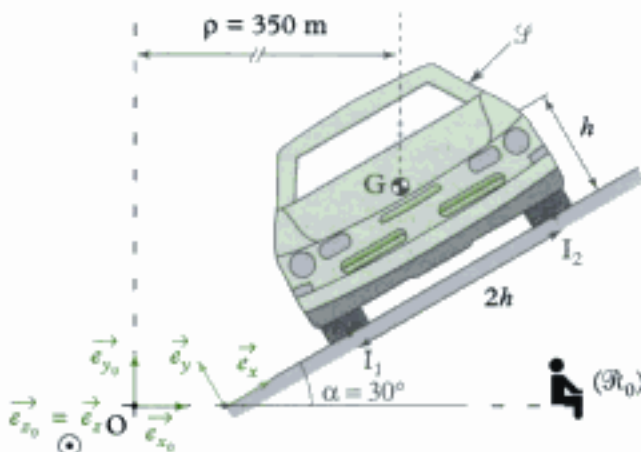
1) Déterminer la réaction du sol en I_1 ; conclure sur la présence de frottement.

2) Exprimer l'accélération a_0 en fonction de g et θ nécessaire pour maintenir θ constant. Tracer $\frac{a_0}{g}$ en fonction de θ .

Commentaires : Que dire du coefficient de frottement minimum nécessaire au mouvement étudié ?

Ex. 7 Voiture de course

Une voiture de course \mathcal{S} de masse M , de centre de masse G prend un virage de rayon constant ρ à une vitesse v constante ; la chaussée est relevée dans le virage (d'un angle α par rapport à l'horizontale) et le coefficient de frottement entre les pneus (en I_1 et I_2) et le sol est $f = 0,9$.



Le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ est supposé galiléen.

Donnée : $h = 1 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1) Déterminer les 3 relations qui existent entre les inconnues de liaison au niveau du sol (en I_1 et I_2).

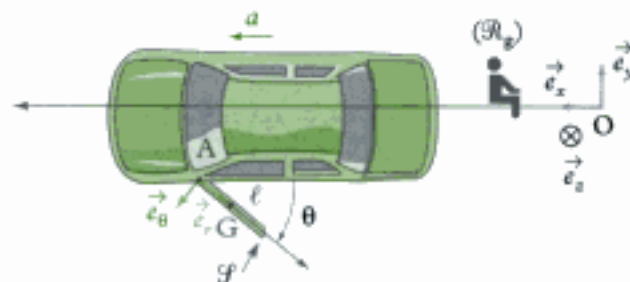
2) Sachant que l'adhérence est mobilisée de la même façon en I_1 et I_2 , donner les expressions des inconnues de liaison en I_1 et I_2 .

3) Déterminer la plage de vitesse qui permet à la voiture de ne pas déraper et de ne pas se renverser dans le virage.

Ex. 8 Portière de voiture

La portière \mathcal{S} d'une voiture est restée entrouverte par inadvertance au moment où la voiture se met à freiner créant une décélération constante a ($a < 0$). On veut étudier le mouvement de la porte pendant ce freinage. Pour cela on modélise la porte (vue de dessus) par une tige homogène de longueur ℓ , de masse m , de centre de gravité G et de moment d'inertie $I = \frac{m\ell^2}{12}$ par rapport à l'axe $(G; \vec{e}_z)$.

On suppose que $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen. On néglige tous les frottements.



1) a) Écrire l'équation différentielle du mouvement de la portière (en θ).

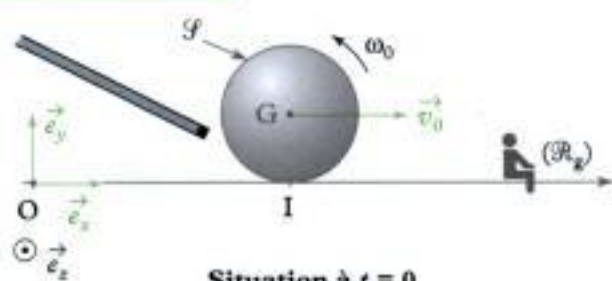
b) Déterminer la vitesse angulaire de la portière quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.

2) On étudie désormais une phase d'accélération constante de la voiture ($a > 0$). Au début du mouvement, la porte est ouverte d'un angle θ_0 ($\dot{\theta}_0 = 0$). Pour que la porte se referme seule, il faut que $\dot{\theta}(\theta = 0) = \dot{\theta}_{\min}$. Déterminer la relation entre θ_0 , a , ℓ et $\dot{\theta}_{\min}$ pour que cela soit possible.

Niveau 3

Ex. 9 Effet retro d'une boule de billard

On modélise une boule de billard par un disque \mathcal{S} homogène de masse m , de rayon R , de moment d'inertie J par rapport à son axe de révolution $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$, se déplaçant dans le plan vertical $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ du référentiel galiléen $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le joueur de billard met en mouvement \mathcal{S} : vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, vitesse angulaire initiale ω_0 ($v_0 > 0$ et $\omega_0 > 0$). Le coefficient de frottement sur le tapis est f .



Situation à $t = 0$

1) Phase ① : roulement et glissement

a) Exprimer la vitesse de glissement initiale de (\mathcal{F}) . En déduire son sens.

b) Appliquer le TCM et le $\text{TMC}^*(\Delta_G)$ afin de déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$ du point G et la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la boule de billard \mathcal{F} .

c) En déduire la durée t_0 de cette phase de glissement, ainsi que $v(t_0)$ et $\omega(t_0)$.

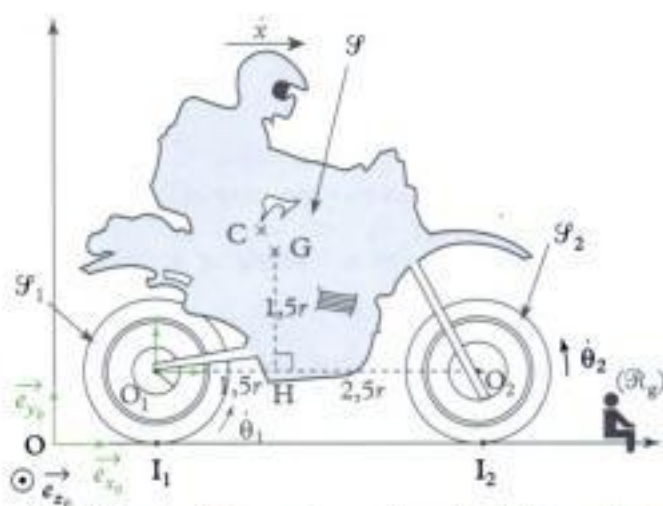
2) Phase ② : roulement sans glissement

a) Appliquer à nouveau le TCM et le $\text{TMC}^*(\Delta_G)$ à partir de $t' = 0$ (avec $t' = t - t_0$) afin de déterminer les lois horaires $v(t')$ et $\omega(t')$.

b) Déterminer les conditions initiales (v_0, ω_0) nécessaires pour que la boule de billard repasse par sa position de départ.

Ex. 10 Accélération d'une moto

On étudie l'accélération du châssis d'une moto et de son pilote \mathcal{S} , de centre de masse C, de masse M en translation à la vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ ($\dot{x} > 0$). La roue arrière \mathcal{S}_1 (resp. avant \mathcal{S}_2) a une masse $m = \frac{M}{24}$, un rayon r , un centre de gravité O_1 (resp. O_2) et un moment d'inertie $J = \frac{mr^2}{2}$ par rapport à l'axe passant par son centre de masse. L'action du moteur est modélisée par un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_z$ appliqué à la roue arrière.



On néglige les frottements au niveau des liaisons pivot des axes de roues (les liaisons sont parfaites) et les frottements de l'air. Le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. On définit G, le centre de masse de l'ensemble $\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$ tel que :

$$O_1H = HG = 1,5r \text{ et } HO_2 = 2,5r.$$

On suppose que les roues roulent sans glisser sur le sol (en I_1 et I_2). Aussi, on a : $\dot{x} + r\dot{\theta}_1 = 0$ et $\dot{x} + r\dot{\theta}_2 = 0$.
Données : $r = 35 \text{ cm}$; $m = 10 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1) À l'aide de 4 équations de la dynamique, déterminer les expressions des actions de liaison en I_1 et I_2 en fonction de m, r et \ddot{x} .

2) À l'aide d'une autre équation de la dynamique, exprimer Γ en fonction de m, r et \ddot{x} .

3) Déterminer le couple maximum applicable afin pour que la roue arrière ne patine pas (on appellera f le coefficient de frottement entre les roues et le sol).

4) Déterminer l'expression du couple maximum applicable afin pour que la moto ne se cabre pas (roue avant qui décolle).

5) Tracer sur un même graphique en fonction du coefficient de frottement f ($0 \leq f \leq 1$), le couple maxi avant patinage de la roue arrière (question 3) et le couple maxi avant soulèvement de la roue avant (question 4).

Indiquer les zones où on pourra cabrer la moto, où on aura patinage de la roue arrière. Commentaires.

Indications

Ex. 2 Penser à calculer la durée de glissement en intégrant l'équation différentielle du mouvement.

Ex. 5 1) Appliquer les TCM et $\text{TMC}^*(\Delta_G)$, puis utiliser la condition de roulement sans glissement en I.

Ex. 6 1) Appliquer le TCM à l'ensemble.

2) Appliquer le $\text{TMC}^*(\Delta_G)$ à l'ensemble.

Ex. 7 1) Appliquer le TCM et $\text{TMC}^*(\Delta_G)$ à (\mathcal{F}) .

$$2) \text{ On a } \frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2} = \frac{T_1 + T_2}{N_1 + N_2}$$

Ex. 8 1) Appliquer les TCM et $\text{TMC}^*(\Delta_G)$ au solide \mathcal{F} . On ne s'intéressera qu'aux efforts qui se développent dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .

Ex. 10 1) Appliquer le TCM et $\text{TMC}^*(\Delta_G)$ à l'ensemble, puis le $\text{TMC}^*(\Delta_{O_1})$ à (\mathcal{S}_2) .

2) Appliquer le $\text{TMC}^*(\Delta_{O_1})$ à (\mathcal{S}_1) .

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) **Système étudié** : roue déséquilibrée (\mathcal{S}).

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Efforts extérieurs appliqués au système

- poids : $\vec{P} = (m + M)\vec{g}$ appliqué en G ;
- réaction de l'axe : \vec{R} appliquée en O.

$$\text{TCM : } (M + m)\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (1)$$

Accélération de G en coordonnées polaires

- $\vec{OG} = \ell \vec{e}_r$;
- $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \ell \omega \vec{e}_\theta$;
- $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\ell \omega^2 \vec{e}_r$ (car $\omega = \text{constante}$) ;

(1) s'écrit donc :

$$-(M + m)\ell \omega^2 \vec{e}_r = -(M + m)g \cos \theta \vec{e}_\theta - (M + m)g \sin \theta \vec{e}_r + R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} R_r = (M + m)g \sin \theta - (M + m)\ell \omega^2 \\ R_\theta = (M + m)g \cos \theta \\ R_z = 0. \end{cases}$$

2) Le terme $(M + m)\ell \omega^2$ est négligeable devant $(M + m)g \sin \theta$ si :

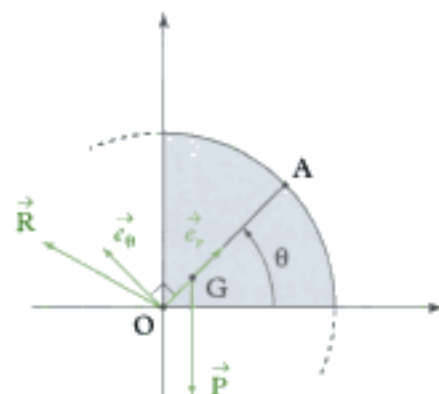
$$(M + m)\ell \omega^2 \ll (M + m)g \sin \theta < (M + m)g$$

soit $\ell \omega^2 \ll g$ et donc si $\ell \ll \frac{g}{\omega^2}$,

ou encore : $\frac{m}{m + M} r \ll \frac{g}{\omega^2}$ soit enfin (car $M + m \approx M$) :

$$m \ll \frac{gM}{\omega^2 r}$$

A.N. : $\ell \ll \frac{9,81}{125^2}$, $\ell \ll 630 \mu\text{m}$; $m \ll \frac{9,81 \times 18}{125^2 \times 0,175}$ soit $m \ll 64 \text{ g}$.



On constate que, dès qu'un très petit déséquilibre se produit, l'effort engendré au niveau des liaisons (pivot) de l'axe sur son support devient très grand, entraînant une usure prématurée !

Exercice 2

L'étude se fait lors de la phase de glissement sur le plan incliné en appliquant le TCM.

Système étudié : un colis (\mathcal{S}).

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Efforts extérieurs appliqués au système \mathcal{S}

• poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

• réaction du plan incliné : $\vec{R} = -T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$

TCM :

$$m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (1) \text{ où } m \text{ est la masse d'un colis.}$$

Accélération de G :

• $\vec{AG} = x\vec{e}_x$;

• $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$;

• $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

(1) s'écrit donc :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\cos\alpha\vec{e}_y + mg\sin\alpha\vec{e}_x + (-T)\vec{e}_x + N\vec{e}_y.$$

En projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y , on a :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} N = mg\cos\alpha \\ m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T. \end{cases}$$

Comme \mathcal{S} glisse sur le plan incliné, on a :

$$|T| = f|N|, \text{ soit } T = fmg\cos\alpha.$$

☀ En effet, la vitesse de glissement de (\mathcal{S}) sur le plan incliné est dirigée selon \vec{e}_x donc \vec{T} doit être dirigée selon $-\vec{e}_x$:
 $\vec{T} = -T\vec{e}_x$ avec $T > 0$.

Ainsi $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$, soit :

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \text{cte.}$$

La vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$ du solide (\mathcal{S}) s'écrit donc :

$$v(t) = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + \text{cte.}$$

Or $v(0) = v_A$ (début de la phase de glissement) donc $\text{cte} = v_A$; donc :

$$v(t) = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + v_A \quad (2)$$

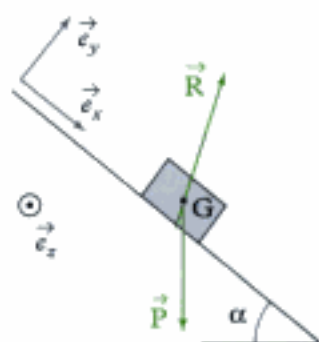
Afin de déterminer la vitesse au point B, il faut déterminer la durée de la phase de glissement ; pour cela, on doit utiliser la distance de glissement $d = \frac{h}{\sin\alpha}$.

On intègre (2) une nouvelle fois :

$$x(t) = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_A t + \text{cte.}$$

Or à $t = 0$, $x(t) = 0$; donc $\text{cte} = 0$. Ainsi :

$$x(t) = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_A t.$$



La durée de glissement t_g est la solution positive de l'équation du second degré :

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_A t - \frac{h}{\sin\alpha} = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = v_A^2 + 4 \frac{h}{\sin\alpha} \times \frac{g}{2} (\sin\alpha - f\cos\alpha) = v_A^2 + 2gh \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)$$

$$\text{et la solution : } t_g = \frac{-v_A + \sqrt{v_A^2 + 2gh \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Ainsi la vitesse en B est :

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_g + v_A, \text{ soit } v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)}.$$

$$\text{A.N. : } t_g = \frac{-1 + \sqrt{1^2 + 2 \times 2 \times 9,81 \times \left(1 - \frac{0,5}{\tan 30^\circ}\right)}}{9,81(\sin 30^\circ - 0,5 \cos 30^\circ)} \approx 2,28 \text{ s}$$

$$\text{et } v_B = \sqrt{1^2 + 2 \times 2 \times 9,81 \times \left(1 - \frac{0,5}{\tan 30^\circ}\right)} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Comme il n'y a qu'un seul degré de liberté (x) l'utilisation d'une méthode énergétique aurait été plus simple !

Exercices de niveau 2

Exercice 3

1) a) Le solide \mathcal{S} étant en rotation autour de l'axe fixe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ du référentiel galiléen \mathcal{R}_g , on utilise le TMC (Δ) afin de déterminer l'équation du mouvement de rotation donnant $\omega(t)$.

Système étudié : \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

Efforts extérieurs appliqués au système

- poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_x$ appliqué en un point de l'axe ;
- couple de moteur : $\vec{C}_m = kI_0\vec{e}_z$;
- Réaction de la liaison pivot : $\mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} = 0$ si la liaison est parfaite.

TMC (Δ)

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \quad (1)$$

Moment cinétique de \mathcal{S} par rapport à Δ

$$L_{\Delta}(\mathcal{S}) = J\omega.$$

Moment des efforts extérieurs par rapport à Δ

- $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0$ car le bras de levier du poids par rapport à Δ est nul ;
- $C_m = \vec{C}_m \cdot \vec{e}_z = kI_0$;
- $\mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} = 0$.

(1) s'écrit :

$$J\dot{\omega} = C_m + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})}, \text{ soit } \dot{\omega} = \frac{C_m}{J}.$$

b) Comme $\frac{C_m}{J} = \frac{k I_0}{J} = \text{cte}$, on a :

$$\omega(t) = \frac{C_m}{J} t + \text{cte.}$$

Avec la condition initiale, $\omega(0) = 0 = \text{cte}$, on obtient :

$$\omega(t) = \frac{C_m}{J} t = \frac{k I_0}{J} t.$$

A.N. : $\omega(t) = \frac{22 \times 10^{-3} \times 0,1}{10,7 \times 10^{-7}} t = 2\,056 t.$

c) Afin de déterminer T_0 , on résout l'équation :

$$\omega(T_0) = \omega_0 \text{ soit } \frac{C_m}{J} T_0 = \omega_0,$$

ce qui donne :

$$T_0 = \frac{J \omega_0}{C_m} = \frac{J \omega_0}{k I_0}.$$

A.N. : $T_0 = \frac{10,7 \times 10^{-7} \times 1\,800}{22 \times 10^{-3} \times 0,1} = 0,87 \text{ s.}$

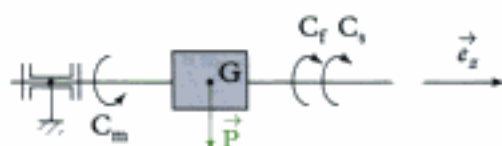
2) a) On reprend l'étude du 1) en ajoutant les couples de frottements ce qui donne :

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{G})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$$

ou encore $J \dot{\omega} = C_m - C_f - C_s + \mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})}$
 $= C_m - C_s - \lambda \omega$

ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{J}{\lambda} \dot{\omega} + \omega = \frac{C_m - C_s}{\lambda}.$$



 $\frac{J}{\lambda}$ est une constante de temps caractéristique des éléments mécaniques du moteur : elle est appelée constante de temps mécanique.

$$\tau_m = \frac{J}{\lambda} = \frac{10,7 \times 10^{-7}}{10^{-6}} = 1,07 \text{ s.}$$

b) L'équation différentielle s'écrit :

$$\tau_m \dot{\omega} + \omega = \frac{C_m - C_s}{\lambda} = \text{cte.}$$

La solution est la somme de la solution de l'équation sans second membre $\omega_\ell(t)$ et d'une solution particulière (ω_f).

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\tau_m \dot{\omega} + \omega = 0 \quad (2).$$

Son équation caractéristique est :

$$\tau_m r + 1 = 0 \text{ soit } r = -\frac{1}{\tau_m}.$$

La solution de (2) est : $\omega_\ell(t) = A e^{rt} = A e^{-\frac{t}{\tau_m}}$.

La solution particulière est de la forme du second membre (ici, une constante) : $\omega_f = \frac{C_m - C_s}{\lambda}$.

La solution totale est donc :

$$\omega(t) = \omega_\ell(t) + \omega_f = A e^{-\frac{t}{\tau_m}} + \frac{C_m - C_s}{\lambda}.$$

Avec la condition initiale, $\omega(0) = 0$, on a :

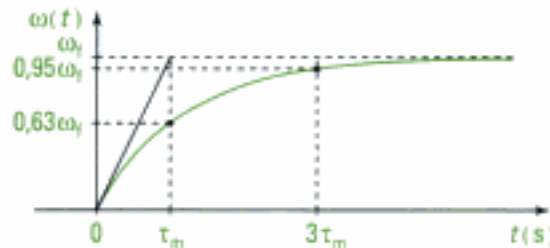
$$0 = A + \frac{C_m - C_s}{\lambda} = A + \omega_f, \text{ d'où } A = -\omega_f,$$

et la solution est donc :

$$\omega(t) = \omega_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right), \text{ soit } \omega(t) = \frac{C_m - C_s}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right).$$



$\omega(t)$ a l'allure classique d'un système du premier ordre.



c) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $\omega(t) \rightarrow \omega_f = \frac{C_m - C_s}{\lambda}$.

$$\text{A.N. : } \omega_f = \frac{22 \times 10^{-3} \times 0,1 - 400 \times 10^{-6}}{10^{-6}} = 1\,800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

En régime permanent, $\omega(t)$ vaut ω_f .

Pour atteindre cette valeur, ou plus précisément 95 % de cette valeur, le temps mis T_1 vérifie :

$$0,95\omega_f = \omega_f \left(1 - e^{-\frac{T_1}{\tau_m}}\right) \text{ soit } e^{-\frac{T_1}{\tau_m}} = 0,05,$$

et donc $T_1 = \ln(0,05) \times (-\tau_m)$.

Ainsi : $T_1 = 3\tau_m$.

$$\text{A.N. : } T_1 = 3\tau_m = 3 \times 1,07 = 3,21 \text{ s}.$$

Conclusion : le fait de prendre en compte les frottements montre que le moteur est en réalité plus de 3,5 fois plus lent que ce qui pourrait être prévu en négligeant les frottements : le modèle sans frottement est trop simpliste.

Exercice 4

1) a) La longueur du fil est $\ell = z_1 + z_2 + \pi R$ constante, donc, en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{\ell} = 0 = \dot{z}_1 + \dot{z}_2 \text{ soit } \dot{z}_1 = -\dot{z}_2, \text{ ou encore } \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2.$$

b) Comme il y a non glissement en B, $\vec{v}_{(B \in \text{fil})/\mathcal{P}} = \vec{0}$,

c'est-à-dire $\vec{v}_{(B \in \text{fil})/\mathcal{R}_g} - \vec{v}_{(B \in \mathcal{P})/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ ou encore :

$$\vec{v}_{(B \in \text{fil})/\mathcal{R}_g} = \vec{v}_{(B \in \mathcal{P})/\mathcal{R}_g} \quad (1)$$

Comme le brin de fil entre B et G_1 est en translation dans \mathcal{R}_g , $\vec{v}_{(B \in \text{fil})/\mathcal{R}_g} = \vec{v}_{(G_1)/\mathcal{R}_g} = \dot{z}_1 \vec{e}_z$.

En utilisant la FFCS au solide \mathcal{P} entre O et $B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{(B \in \mathcal{P})/\mathcal{R}_g} &= \vec{v}_{(O)/\mathcal{R}_g} + \vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{OB} \\ &= \vec{0} + \dot{\theta} \vec{e}_x \wedge (-R \vec{e}_y) \\ &= -R\dot{\theta} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

(1) donne donc : $\dot{z}_1 = -R\dot{\theta}$.

De même en A : $\dot{z}_2 = R\dot{\theta}$.

 Si le fil ne glisse pas sur la poulie, c'est qu'il existe un coefficient de frottement suffisamment important entre les deux.

2) a) **Système étudié** : $\Sigma = \mathcal{P} \cup \text{fil} \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

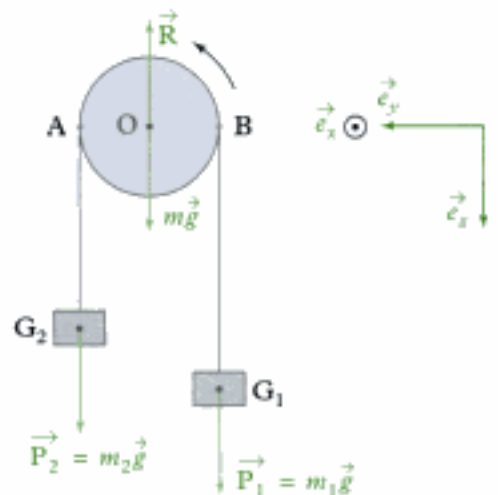
Efforts extérieurs appliqués à Σ

• poids : $\vec{P} = m\vec{g}$; $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$; $\vec{P}_2 = m_2\vec{g}$ appliqués respectivement en O, G_1 et G_2 ;

• réaction de l'axe Δ : $\begin{cases} \vec{R} \text{ appliqué en O} \\ \mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} = 0. \end{cases}$

 Les autres efforts (tensions) sont des efforts intérieurs au système étudié.

 La liaison pivot étant parfaite, le moment de réaction de l'axe par rapport à l'axe est donc nul.



TMC (Δ) : $\frac{dL_{\Delta}(\Sigma)}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$ (2)

avec $\Delta = (O, \vec{e}_x)$.

Moment cinétique du système par rapport à Δ :

$$L_{\Delta}(\Sigma) = L_{\Delta}(\mathcal{P}) + L_{\Delta}(\text{fil}) + L_{\Delta}(\mathcal{G}_1) + L_{\Delta}(\mathcal{G}_2)$$

avec :

• $L_{\Delta}(\mathcal{P}) = J\dot{\theta}$;

• $L_{\Delta}(\text{fil}) = 0$ (car la masse du fil est négligeable) ;

• $L_{\Delta}(\mathcal{G}_1) = [\overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \vec{v}(G_1)_{f_{\mathcal{R}_g}}] \cdot \vec{e}_x = [(-R\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z) \wedge m_1 \dot{z}_1 \vec{e}_z] \cdot \vec{e}_x$
 $= [-m_1 R \dot{z}_1 \vec{e}_x] \cdot \vec{e}_x = -m_1 R \dot{z}_1$;

• $L_{\Delta}(\mathcal{G}_2) = m_2 R \dot{z}_2$ (en utilisant la même méthode).

Moment des efforts extérieurs par rapport à l'axe Δ

• $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \mathcal{M}_{\Delta}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_{\Delta}(m_1\vec{g}) + \mathcal{M}_{\Delta}(m_2\vec{g}) = 0 + (-R m_1 g) + R m_2 g$;

• $\mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} = 0$.

(2) s'écrit donc : $J\ddot{\theta} - m_1 R \ddot{z}_1 + m_2 R \ddot{z}_2 = Rg(m_2 - m_1)$.

Avec $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$ et $\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{z}_1}{R}$, on obtient :

$$\left(-\frac{J}{R} - m_1 R - m_2 R\right) \ddot{z}_1 = Rg(m_2 - m_1) \text{ soit } \ddot{z}_1 = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$

Donc : $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1 = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$.

 Le mouvement est uniformément accéléré.

 Le résultat est homogène, en effet : $\frac{m \cdot s^{-2} \times kg}{kg} = m \cdot s^{-2}$.

b) **Système étudié** : \mathcal{S}_1 .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

Efforts extérieurs appliqués à S_1

• Poids : $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g} = m_1 g \vec{e}_z$.

• Tension : $\vec{T}_1 = -T_1 \vec{e}_z$.

Le TCM s'écrit : $m_1 \vec{a}(G_1)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{ext}$ (1)

(1) s'écrit :

$$m_1 \ddot{z}_1 \vec{e}_z = m_1 g \vec{e}_z - T_1 \vec{e}_z \text{ soit } T_1 = m_1 (g - \ddot{z}_1).$$

ou encore :

$$T_1 = m_1 \frac{g \left(2m_2 + \frac{J}{R^2} \right)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$

De même, on obtient :

$$T_2 = m_2 (g - \ddot{z}_2) \text{ soit } T_2 = m_2 (g + \ddot{z}_1) = m_2 \frac{g \left(2m_1 + \frac{J}{R^2} \right)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$

Ainsi : $T_2 - T_1 = \frac{g \frac{J}{R^2} (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$ soit $T_2 - T_1 = g \frac{J(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)R^2 + J}$.

Conclusion : Dans le cas général $T_1 \neq T_2$ sauf si $m_1 = m_2$ ou si on néglige le moment d'inertie J de la poulie, ou encore si le fil glisse sur la poulie.

Exercice 5

1) Dans cet exercice, il y a quatre inconnues : les deux inconnues de liaison (T et N) entre le sol et la bobine de fil \mathcal{S} , l'accélération \ddot{x} de \mathcal{S} et la vitesse angulaire de \mathcal{S} . Il faut donc quatre équations scalaires, deux provenant du TCM projeté sur les deux axes \vec{e}_x et \vec{e}_y , une provenant du TMC* (Δ_G), $\Delta_G = (G, \vec{e}_z)$ et une provenant de la condition de RSG au point I.

Commençons par appliquer le TCM.

Système étudié : bobine de fil \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

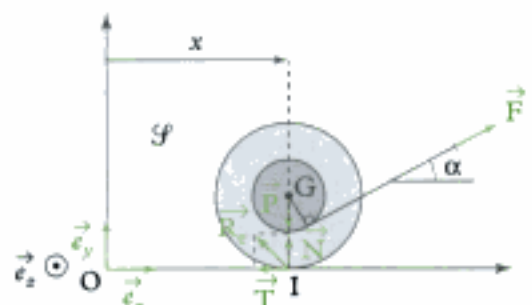
Efforts extérieurs appliqués à \mathcal{S}

• Poids : $\vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{e}_y$ appliqué en G.

• Force : \vec{F} appliquée via le fil en B.

 Le fil sans masse restant tendu transmet intégralement les efforts.

• Réaction du sol : $\vec{R}_c = \vec{T} + \vec{N} = -T \vec{e}_x + N \vec{e}_y$.



$$\text{TCM : } M \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_e} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (1)$$

Accélération de G : $\vec{a}(G) = \ddot{x} \vec{e}_x$.

$$(1) \text{ s'écrit donc : } M \ddot{x} \vec{e}_x = -mg \vec{e}_y + F \cos \alpha \vec{e}_x + F \sin \alpha \vec{e}_y + (-T) \vec{e}_x + N \vec{e}_y,$$

ce qui donne en projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\begin{cases} M \ddot{x} = F \cos \alpha - T & (2) \\ 0 = F \sin \alpha + N - mg \end{cases}$$

$$\text{Appliquons ensuite le TMC}^* (\Delta_G) : \frac{dL_{\Delta_G}^*}{dt} = M_{\Delta_G, \text{ext}} \quad (3)$$

Moment cinétique barycentrique par rapport à Δ_G

$$L_{\Delta_G}^* = J \dot{\theta}.$$

Moment des efforts extérieurs par rapport à Δ_G :

- $M_{\Delta_G}(\vec{P}) = 0$;
- $M_{\Delta_G}(\vec{F}) = aF$ (a étant le bras de levier) ;
- $M_{\Delta_G}(\vec{R}_e) = -RT$ (\vec{N} a un bras de levier nul) ;

$$(3) \text{ s'écrit donc : } J \ddot{\theta} = aF - RT \quad (4)$$

Enfin la condition de roulement sans glissement de la bobine de fil \mathcal{S} sur le sol en I s'écrit :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\text{sol}} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}_e} = \vec{0}.$$

En utilisant la FFCS appliquée à \mathcal{S} entre les deux points I $\in \mathcal{S}$ et G, on trouve :

$$\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_e} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_e} \wedge \vec{GI} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \dot{x} \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (-R \vec{e}_y) = \vec{0}.$$

$$\text{Alors } \dot{x} \vec{e}_x + R \dot{\theta} \vec{e}_x = \vec{0} \quad \text{ce qui donne : } \dot{x} = -R \dot{\theta} \quad (5).$$

$$\text{Ainsi en reportant } \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}}{R} \text{ tirée de (5) dans (4) on trouve : } T = \frac{a}{R} F + \frac{J}{R^2} \ddot{x}.$$

En reportant dans (2), on a :

$$M \ddot{x} = F \cos \alpha - \left(\frac{a}{R} F + \frac{J}{R^2} \ddot{x} \right) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = \frac{F \left[\cos \alpha - \frac{a}{R} \right]}{M + \frac{J}{R^2}}.$$



$$\frac{F \left[\cos \alpha - \frac{a}{R} \right]}{M + \frac{J}{R^2}} \text{ a comme unité : } \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \text{ la relation est homogène.}$$

2) Si $\cos \alpha > \frac{a}{R}$, c'est-à-dire si $\alpha > \text{Arccos}\left(\frac{a}{R}\right)$ alors $\ddot{x} > 0$ et la bobine de fil se déplace dans le sens $+\vec{e}_x$.

Si $\cos \alpha < \frac{a}{R}$, c'est-à-dire si $\alpha < \text{Arccos}\left(\frac{a}{R}\right)$ alors $\ddot{x} < 0$ et la bobine de fil se déplace dans le sens $-\vec{e}_x$.



C'est une expérience facile à réaliser !



Le mouvement n'est qu'horizontal donc $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

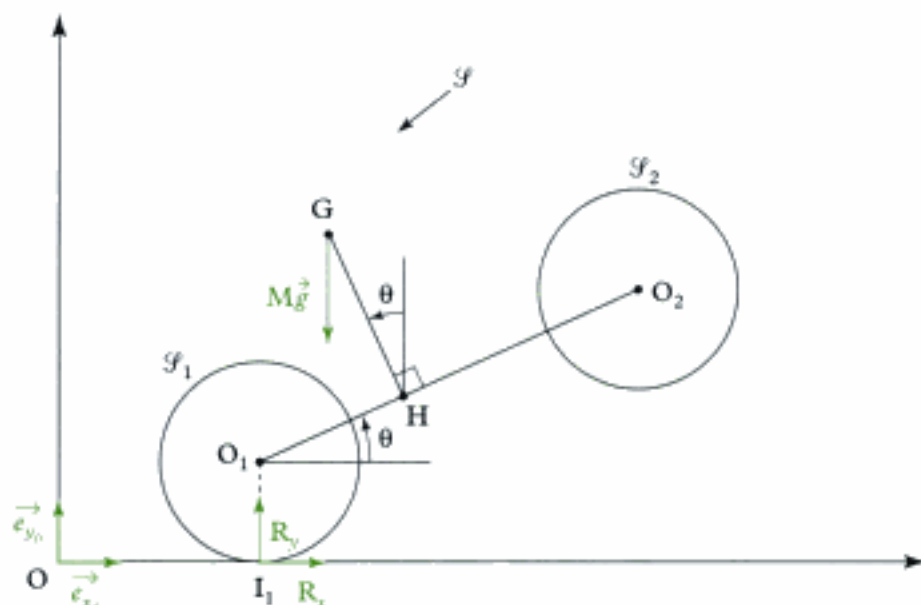
Exercice 6

1) Comme nous cherchons la réaction du sol en I_1 (c'est dire une force), nous pouvons commencer par appliquer le TCM. Par ailleurs, comme les actions des liaisons pivot entre \mathcal{F} et \mathcal{F}_1 et entre \mathcal{F} et \mathcal{F}_2 ne nous intéressent pas, il faut prendre un système où ces actions sont des actions intérieures :

on prendra donc le système $\Sigma = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Système étudié : l'ensemble $\Sigma = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$.



Efforts extérieurs appliqués au système

• Poids

– poids de \mathcal{F}_1 : négligeable ;

– poids de \mathcal{F} : $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_{y_0}$ appliqué en G.

• Réaction du sol : $\vec{R} = R_x\vec{e}_{x_0} + R_y\vec{e}_{y_0}$.

Équation du TCM :

$$m_\Sigma \vec{a}(G_\Sigma)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (\text{où } G_\Sigma \text{ est le centre de masse de } \Sigma)$$

$$\text{soit } M \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} + m_1 \underbrace{\vec{a}(O_1)_{/\mathcal{R}_0}}_{\text{négligeable}} + m_2 \underbrace{\vec{a}(O_2)_{/\mathcal{R}_0}}_{\text{négligeable}} = R_x \vec{e}_{x_0} + R_y \vec{e}_{y_0} - Mg \vec{e}_{y_0}.$$

Or $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = a_0 \vec{e}_{x_0}$ (énoncé). Ainsi l'équation vectorielle précédente s'écrit :

$$M a_0 \vec{e}_{x_0} = R_x \vec{e}_{x_0} + R_y \vec{e}_{y_0} - Mg \vec{e}_{y_0}.$$

Comme on cherche R_x et R_y , il suffit de projeter cette relation vectorielle sur \vec{e}_{x_0} et \vec{e}_{y_0} .

$$\text{Projection sur } \vec{e}_{x_0} : M a_0 \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_{x_0} = (R_x \vec{e}_{x_0} + R_y \vec{e}_{y_0} - Mg \vec{e}_{y_0}) \cdot \vec{e}_{x_0}$$

$$\text{soit } M a_0 = R_x \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_{x_0} + (R_y - Mg) \vec{e}_{y_0} \cdot \vec{e}_{x_0} \quad \text{soit } M a_0 = R_x + 0, \quad \text{donc :}$$

$$\mathbf{R_x = M a_0.}$$

Projection sur \vec{e}_{y_0} : $M a_0 \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_{y_0} = (R_x \vec{e}_{x_0} + (R_y - Mg) \vec{e}_{y_0}) \cdot \vec{e}_{y_0}$

soit $0 = R_x \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_{y_0} + (R_y - Mg) \vec{e}_{y_0} \cdot \vec{e}_{y_0}$ soit $0 = 0 + R_y - Mg$, donc :

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{M}g.$$

Dès qu'il y a accélération horizontale ($a_0 \neq 0$), $R_x \neq 0$ donc il faut du frottement entre la roue et le sol, c'est le frottement qui permet à la moto de modifier sa vitesse.

2) Comme on cherche une équation qui traduit que $\theta = \text{cte}$ (rotation), on va écrire une équation de moment. Comme les inconnues des liaisons pivot ne nous intéressent pas, on utilisera le système Σ et comme on néglige les masses de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , G est aussi le centre de gravité de Σ ; on appliquera donc le TMC* par rapport à l'axe $(G, \vec{e}_{z_0}) = \Delta_G$.

 On aurait aussi pu appliquer le TMC par rapport à l'axe $(O; \vec{e}_{z_0})$ car O est fixe dans \mathcal{R}_0 .

Système étudié : Σ .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_0 .

Efforts extérieurs

- $\vec{P} = -Mg \vec{e}_{y_0}$ appliqué en G ;
- $\vec{R} = R_x \vec{e}_{x_0} + R_y \vec{e}_{y_0}$ appliqué en I_1 .

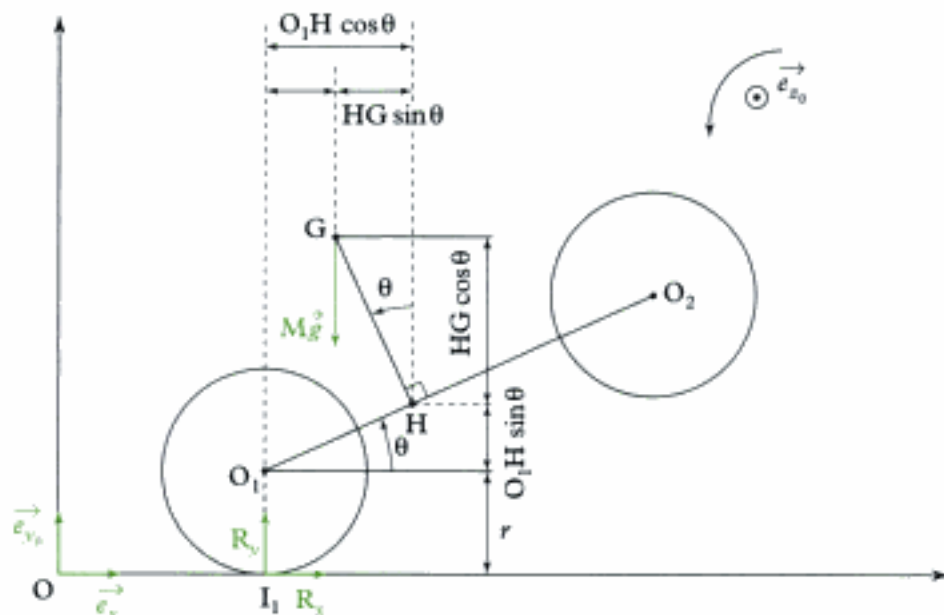
$$\text{TMC}^*(\Delta_G) : \frac{dL_{\Delta_G}^*(\Sigma)}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_G, \text{ext}} \quad (1)$$

Moment cinétique de Σ par rapport à Δ_G

$$L_{\Delta_G}^*(\Sigma) = L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_1) + L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}_2) = J\dot{\theta} = 0.$$

négligeables car les masses et moments d'inertie sont négligeables

 $L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = 0$ car \mathcal{F} n'est pas en rotation par rapport à \mathcal{R}_0 ; en effet $\theta = \text{cte}$ donc $\dot{\theta} = 0$.



Moments des efforts extérieurs

- poids : $\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{P}) = 0$ car le poids s'applique en G donc le bras de levier par rapport à Δ_G est nul ;

• réaction du sol : $\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{R}) = \mathcal{M}_{\Delta_G}(\mathbf{R}_x \vec{e}_{x_0}) + \mathcal{M}_{\Delta_G}(\mathbf{R}_y \vec{e}_{y_0})$

avec $\mathcal{M}_{\Delta_G}(\mathbf{R}_x \vec{e}_{x_0}) = + \underbrace{(r + O_1 H \sin \theta + HG \cos \theta)}_{\text{bras de levier}} \times \underbrace{\mathbf{R}_x}_{\text{force}} = (r + 1,5r \sin \theta + 1,5r \cos \theta) \mathbf{R}_x$

et $\mathcal{M}_{\Delta_G}(\mathbf{R}_y \vec{e}_{y_0}) = - \underbrace{(O_1 H \cos \theta - HG \sin \theta)}_{\text{bras de levier}} \times \underbrace{\mathbf{R}_y}_{\text{force}} = -(1,5r \cos \theta - 1,5r \sin \theta) \mathbf{R}_y$.

Ainsi l'équation (1) du TMC*(Δ_G) s'écrit :

$$0 = 0 + (r + 1,5r \sin \theta + 1,5r \cos \theta) \mathbf{R}_x - (1,5r \cos \theta - 1,5r \sin \theta) \mathbf{R}_y.$$

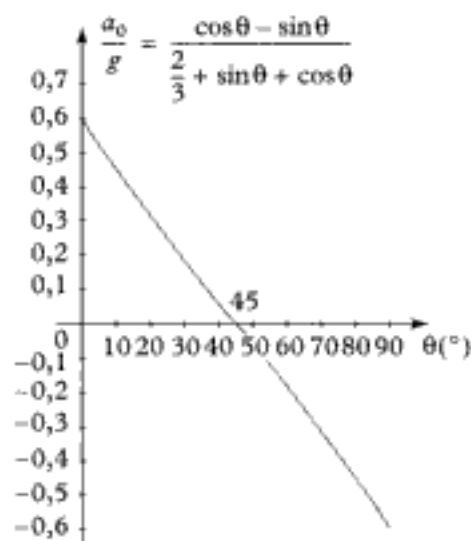
Or $\mathbf{R}_x = M a_0$ et $\mathbf{R}_y = M g$, donc on obtient :

$$0 = r(1 + 1,5 \sin \theta + 1,5 \cos \theta) \times M a_0 - r(1,5 \cos \theta - 1,5 \sin \theta) M g$$

soit, en simplifiant par r et M :

$$a_0 = \frac{1,5}{1,5} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\frac{1}{1,5} + \sin \theta + \cos \theta} g \quad \text{ou encore} \quad a_0 = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\frac{2}{3} + \sin \theta + \cos \theta} g.$$

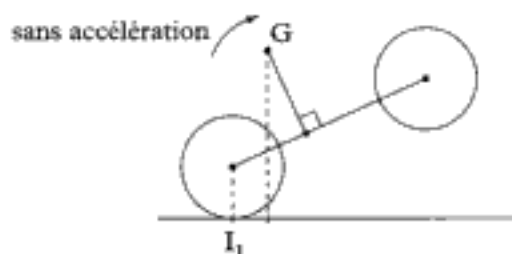
Le tracé de $\frac{a_0}{g}(\theta)$ donne donc :



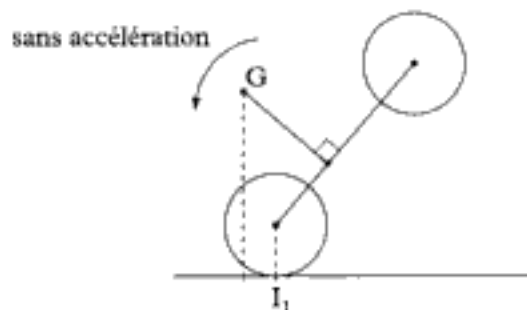
Commentaires :

• On voit que l'accélération change de signe pour $\theta = 45^\circ$, ce qui est normal puisque cette position correspond à G sur la verticale passant par I_1 .

• Si $\theta < 45^\circ$, sans accélération et sous l'effet du poids de la moto + motard, la moto a tendance à retomber au sol ; pour obtenir un angle θ constant, il faut une accélération positive.



• Si $\theta > 45^\circ$, sans accélération et sous l'effet du poids de la moto + motard, la moto a tendance à se retourner ; pour obtenir un angle θ constant, il faut une accélération négative (c'est-à-dire une décélération).



Coefficient de frottement minimum

Pour que la roue arrière roule sans glisser, il faut que : $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f$.

Ici, cela donne :

$$f > f_{\min} = \frac{|R_x|}{|R_y|} = \frac{|Ma_0|}{|Mg|} = \left| \frac{a_0}{g} \right|.$$

Ainsi la courbe $\frac{a_0}{g}(\theta)$ donne (au signe près) le coefficient de frottement minimum nécessaire à l'obtention du roulement sans glissement au niveau de I_1 , pour chaque valeur d'angle θ .

Exercice 7

1) On nous demande trois relations qui sont constituées par les trois équations de la dynamique. Nous allons donc appliquer le TCM et TMC* (Δ_G) au système \mathcal{S} .

Système étudié : la voiture \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$.

Efforts extérieurs appliqués au système

• poids : $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_{y_0}$ en G ;

• réactions du sol

- en I_1 : $\vec{R}_1 = N_1\vec{e}_y + T_1\vec{e}_x$;

- en I_2 : $\vec{R}_2 = N_2\vec{e}_y + T_2\vec{e}_x$.

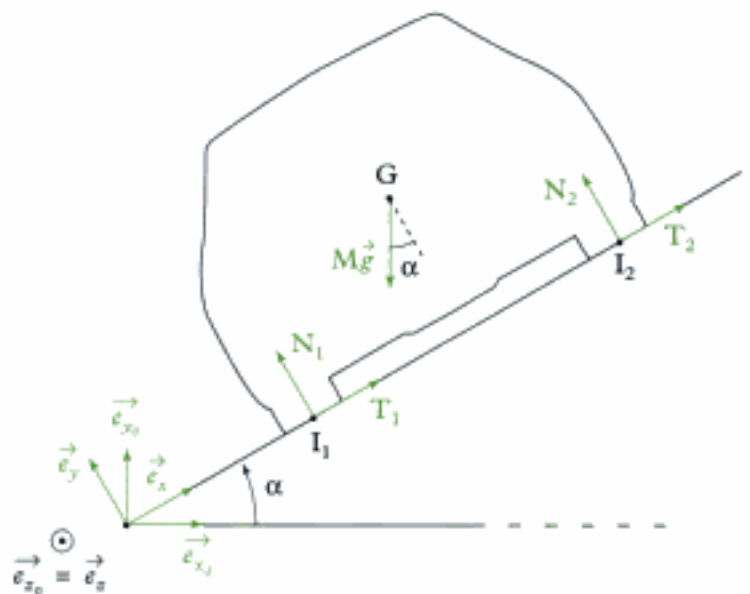
Équation du TCM

$$M\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \quad (1)$$

$$\text{avec } \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = -\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{x_0} \quad (\text{car } v = \text{cte}).$$



Il s'agit de l'accélération normale dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon ρ parcourue à la vitesse constante (v).



L'équation (1) s'écrit :

$$-M\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{x_0} = -Mg\vec{e}_{y_0} + N_1\vec{e}_y + T_1\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y + T_2\vec{e}_x.$$

On projette cette relation sur \vec{e}_x et \vec{e}_y car on cherche N_1 , T_1 , N_2 et T_2 .

$$\text{Projection sur } \vec{e}_x : -M\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_x = (-Mg\vec{e}_{y_0} + N_1\vec{e}_y + T_1\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y + T_2\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x$$

$$-M\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha = -Mg\sin\alpha + T_1 + T_2.$$

$$\text{Projection sur } \vec{e}_y : -M\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_y = (-Mg\vec{e}_{y_0} + N_1\vec{e}_y + T_1\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y + T_2\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_y$$

$$M\frac{v^2}{\rho}\sin\alpha = -Mg\cos\alpha + N_1 + N_2.$$

Équation du TMC* (Δ_G) ($\Delta_G = (G, \vec{e}_z)$) :

$$\frac{dL_{\Delta_G}^*(\mathcal{F})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_G, \text{ext}} \quad (2)$$

avec $L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = 0$;



\mathcal{F} n'est pas en rotation autour de l'axe (G, \vec{e}_z) ,

$$\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{P}) = 0 ;$$

$$\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{R}_1) = -N_1 \frac{2h}{2} + T_1 h ;$$

$$\mathcal{M}_{\Delta_G}(\vec{R}_2) = N_2 \frac{2h}{2} + T_2 h.$$

L'équation (2) du TMC* s'écrit : $0 = -N_1 + T_1 + N_2 + T_2$.

2) L'adhérence est mobilisée de la même façon en I_1 et I_2 donc : $\frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2}$.

On a donc quatre équations à quatre inconnues (N_1, N_2, T_1, T_2) :

$$\text{(éq 1)} \quad -M \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha = -Mg \sin \alpha + T_1 + T_2$$

$$\text{(éq 2)} \quad M \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha = -Mg \cos \alpha + N_1 + N_2$$

$$\text{(éq 3)} \quad 0 = -N_1 + T_1 + N_2 + T_2$$

$$\text{(éq 4)} \quad \frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2}$$

À l'aide de (éq 1) et (éq 3) et en faisant disparaître $T_1 + T_2$, on obtient :

$$-M \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha = -Mg \sin \alpha + N_1 - N_2.$$

On a par ailleurs (éq 2) : $M \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha = -Mg \cos \alpha + N_1 + N_2$.

Par addition et soustraction de ces deux dernières relations, on obtient :

$$-M \frac{v^2}{\rho} (\cos \alpha - \sin \alpha) = -Mg (\cos \alpha + \sin \alpha) + 2N_1$$

$$N_1 = \frac{Mg}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) - \frac{Mv^2}{2\rho} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$\begin{array}{ccc} \text{kg} & \text{m} \cdot \text{s}^{-2} & \text{kg} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \uparrow & & \uparrow \\ N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} & & \text{m} \end{array}$

et $-M \frac{v^2}{\rho} (\cos \alpha + \sin \alpha) = -Mg (\sin \alpha - \cos \alpha) - 2N_2$

$$N_2 = \frac{Mg}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{Mv^2}{2\rho} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

(**éq 4**) s'écrit aussi : $\frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2} = \frac{T_1 + T_2}{N_1 + N_2}$; soit avec (**éq 1**) et (**éq 2**) :

$$\frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2} = \frac{T_1 + T_2}{N_1 + N_2} = \frac{Mg \sin \alpha - M \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha}{Mg \cos \alpha + M \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha}$$

Avec les expressions de N_1 et N_2 , on obtient :

$$T_1 = \frac{g \sin \alpha - \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha}{g \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha} \times \left[\frac{Mg}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) - \frac{Mv^2}{2\rho} (\cos \alpha - \sin \alpha) \right]$$

$$T_2 = \frac{g \sin \alpha - \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha}{g \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha} \times \left[\frac{Mg}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{Mv^2}{2\rho} (\cos \alpha + \sin \alpha) \right]$$

3) Pour que la voiture ne dérape pas, il faut que :

$$\frac{\left\| \vec{T}_1 \right\|}{\left\| \vec{N}_1 \right\|} = \frac{\left\| \vec{T}_2 \right\|}{\left\| \vec{N}_2 \right\|} < f, \text{ soit dans notre cas } \frac{|T_1|}{N_1} = \frac{|T_2|}{N_2} < f.$$



Une norme est toujours positive. Et comme T_1 et T_2 peuvent changer de signe, il faut conserver la valeur absolue. N_1 et N_2 sont toujours positives.

On obtient : $\frac{\left| g \sin \alpha - \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha \right|}{g \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha} < f$ soit $-f < \frac{g \sin \alpha - \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha}{g \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha} < f$.



Il y a 2 conditions (double inégalité) car la voiture pourrait glisser :

- vers la droite dans le cas d'une vitesse excessive ($T_1 < 0$; $T_2 < 0$);
- vers la gauche dans le cas d'une vitesse trop faible ($T_1 > 0$; $T_2 > 0$).

Traçons la courbe :

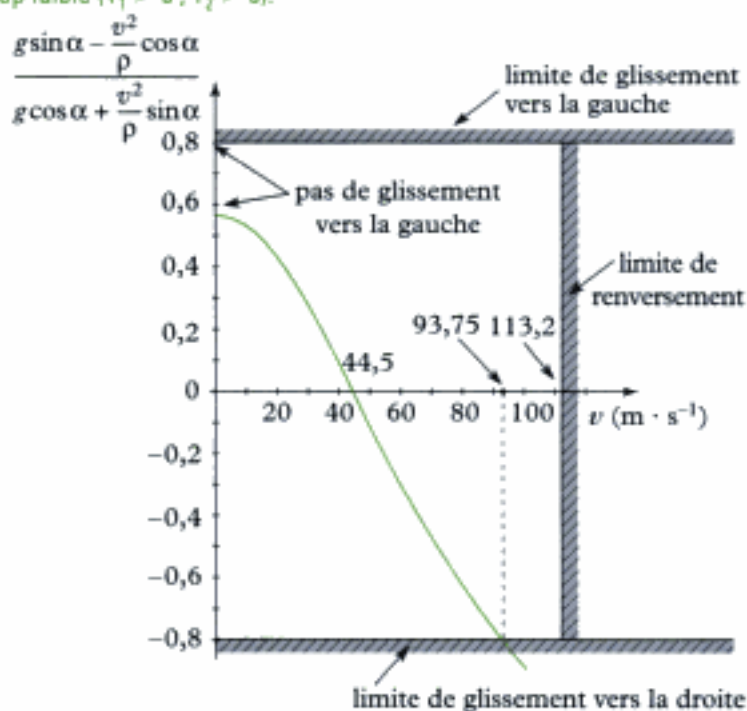
$$v \mapsto \frac{g \sin \alpha - \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha}{g \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha}$$

La courbe montre que :

- le coefficient de frottement est suffisamment élevé pour éviter le glissement vers la gauche ($v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$);
- il faut limiter la vitesse à $93,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 337,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour éviter le glissement vers la droite.

Pour ce qui est du glissement, on a donc : $0 \leq v \leq 337,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Pour que la vitesse ne se renverse pas, il ne faut pas qu'il y ait soulèvement d'une des 2 roues, soit :



Hidden page

Hidden page



On intègre, puisqu'on nous donne une information sur la vitesse sachant que $\dot{\theta} = 0$ quand $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\min}$ quand $\theta = 0$.

$$\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right]_0^{\theta_{\min}} = \frac{3}{2} \frac{a}{\ell} [\cos \theta]_{\theta_0}^0 \text{ soit } \frac{\dot{\theta}_{\min}^2}{2} - 0 = \frac{3}{2} \frac{a}{\ell} (1 - \cos \theta_0), \text{ soit aussi :}$$

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{\ell}{a} \frac{\dot{\theta}_{\min}^2}{3}$$

m
 $(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2$
 $(m \cdot \text{s}^{-2})$



• Expression homogène.

• Pour $\dot{\theta}_{\min}$ donné, plus a est grand, plus θ_0 est proche de 0 : plus on accélère fort, moins la portière a besoin « d'élan » pour se refermer toute seule.

Exercices de niveau 3

Exercice 9

1) a) $\vec{v}_g(t=0) = \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{\text{sol}} = \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{\mathcal{R}_g} = \vec{v}(G) + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{GI}$ (FFCS)

$$= v_0 \vec{e}_x + \omega_0 \vec{e}_z \wedge (-R \vec{e}_y) = (v_0 + R\omega_0) \vec{e}_x.$$

$\vec{v}_g(0)$ est dirigée selon $+\vec{e}_x$ car $v_0 + R\omega_0 > 0$; il y a effectivement glissement car $v_0 + R\omega_0 \neq 0$.

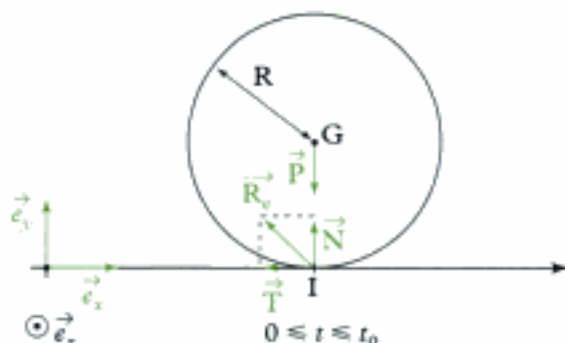
b) **Système étudié : S.**

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

Efforts extérieurs appliqués sur \mathcal{F}

• Poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$ appliqué en G.

• Réaction du sol : $\vec{R}_e = \vec{T} + \vec{N}$ appliquée en I, point de contact entre (\mathcal{F}) et le sol; comme \vec{v}_g est dirigée selon $+\vec{e}_x$, \vec{T} est dirigée selon $-\vec{e}_x$; $\vec{T} = -T \vec{e}_x$; de plus, il y a glissement, donc : $T = fN$.



Le TCM s'écrit : $m \vec{a}(G)_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$ (1)

En appelant x l'abscisse de G, on a : $\vec{a}(G)_{\mathcal{R}_g} = \ddot{x} \vec{e}_x$. (1) s'écrit donc :

$$m \ddot{x} \vec{e}_x = -mg \vec{e}_y - T \vec{e}_x + N \vec{e}_y.$$

En projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -T \\ 0 = N - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -T \\ N = mg \end{cases}.$$

Comme $T = fN = fmg$, on a :

$$m \ddot{x} = -fmg \text{ soit } \ddot{x} = -fg.$$

On obtient $\dot{x}(t) = v(t) = -fgt + \text{cte}$.

Or, à $t = 0$, $v(0) = v_0 = \text{cte}$; donc : $v(t) = -fgt + v_0$.

Le TMC* (Δ_G) s'écrit :

$$\frac{dL_{\Delta_G}^*(\mathcal{F})}{dt} = M_{\Delta_G, \text{ext}} \quad (2)$$

Moment cinétique par rapport à Δ_G : $L_{\Delta_G}^*(\mathcal{F}) = J\omega$.

Moment des efforts extérieurs par rapport à Δ_G

- $M_{\Delta_G}(\vec{P}) = 0$ (car le bras de levier est nul pour \vec{P}) ;
- $M_{\Delta_G}(\vec{T}) = -RT$ (R , bras de levier de \vec{T} , signe $-$ car tendance à la rotation autour de $-\vec{e}_z$) ;
- $M_{\Delta_G}(\vec{N}) = 0$ (bras de levier nul).

(2) s'écrit : $J\dot{\omega} = -RT$ soit $J\dot{\omega} = -Rfmg$, d'où $\dot{\omega} = -\frac{Rfmg}{J}$.

En intégrant, on trouve :

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{Rfmg}{J} t.$$

c) La phase ① de glissement se termine lorsque la vitesse de glissement s'annule, soit :

$$\vec{v}_g(t_0) = \vec{0}, \text{ donc } v(t_0) + R\omega(t_0) = 0.$$

$-fgt_0 + v_0 + R\omega_0 - \frac{fmgR^2}{J} t_0 = 0$, soit :

$$t_0 = \frac{v_0 + R\omega_0}{fg\left(1 + \frac{mR^2}{J}\right)}.$$

À cet instant : $v_1 = v(t_0) = v_0 - fgt_0 = v_0 - \frac{v_0 + R\omega_0}{1 + \frac{mR^2}{J}} = \frac{v_0 \frac{mR^2}{J} - R\omega_0}{1 + \frac{mR^2}{J}}$

et $\omega_1 = \omega(t_0) = \omega_0 - \frac{Rfmg}{J} t_0 = \omega_0 - \frac{mR}{J} \frac{v_0 + R\omega_0}{1 + \frac{mR^2}{J}} = \frac{\omega_0 - \frac{mR}{J} v_0}{1 + \frac{mR^2}{J}} = -\frac{v_1}{R}$.

2) a) Pendant la phase ②, il n'y a plus de glissement.

 On n'a plus $T = fN$ mais $T < fN$ car $\vec{r}_g = \vec{0}$.

(1) s'écrit : $\begin{cases} m\ddot{x} = -T \\ N = mg \end{cases}$ et (2) s'écrit : $J\dot{\omega} = -RT$.

Comme $\vec{v}_g = \vec{0}$, on a : $v + R\omega = 0$ soit $v = \dot{x} = -R\omega$. (3)

Ainsi (2) donne : $T = -\frac{J}{R} \dot{\omega} = -\frac{J}{R} \left(-\frac{\ddot{x}}{R}\right) = \frac{J}{R^2} \ddot{x}$

dans (1) : $m\ddot{x} = -\frac{J}{R^2} \ddot{x}$ soit $\left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} = 0$ ce qui donne :

$$\ddot{x}(t') = 0, \text{ ou encore } \dot{x}(t') = v(t') = \text{cte.}$$

Or, à $t' = 0$, $v(t' = 0) = v_1 = \text{cte}$; donc : $v(t') = v_1 = \text{cte}$,

et donc d'après (3) : $\omega(t') = -\frac{v_1}{R} = \omega_1 = \text{cte}$.

b) Pour que la boule de billard repasse par sa position de départ (au niveau du point O, en $x = 0$), il faut que :

$$v(t_1) = v_1 < 0 \text{ soit } v_0 \frac{mR^2}{J} < R\omega_0, \text{ ou encore } v_0 < \frac{J\omega_0}{mR}.$$

⚙️ $\frac{J\omega_0}{mR}$ a comme unité $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui homogène à une vitesse (v_0).

⚙️ La boule de billard repasse en roulant sans glisser, par sa position initiale.

⚙️ Lors de la phase ① pour que la boule de billard repasse par sa position d'origine en roulant sans glisser, la vitesse $v(t)$ a dû s'annuler à un instant $t_1 = \frac{v_0}{fg}$ (avant de devenir négative) tel que :

$$t_1 < t_0 \text{ soit } \frac{v_0}{fg} < \frac{v_0 + R\omega_0}{fg\left(1 + \frac{mR^2}{J}\right)} \text{ ce qui redonne } v_0 < \frac{J\omega_0}{mR}!$$

Exercice 10

1) • Comme nous cherchons l'expression des inconnues de liaison avec le sol et que les inconnues des liaisons pivot ne nous intéressent pas, on va commencer par écrire les trois équations (scalaires) de la dynamique sur le système complet $\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$.

Appliquons le TCM à Σ (1 équation vectorielle = 2 équations scalaires dans le plan) :

Système étudié : $\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$.

Référentiel galiléen : \mathcal{R}_0 .

Efforts appliqués au système

• Poids \mathcal{S}_1 : $\vec{P}_1 = m\vec{g} = -m\vec{g}e_{y_0}$ (en O_1) ;

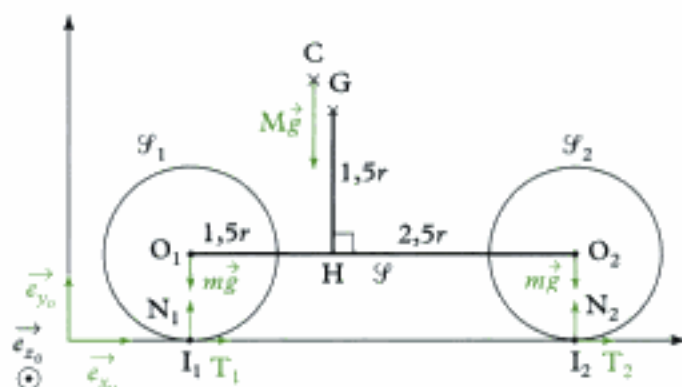
Poids \mathcal{S}_2 : $\vec{P}_2 = m\vec{g} = -m\vec{g}e_{y_0}$ (en O_2) ;

Poids \mathcal{S} : $\vec{P} = M\vec{g} = -24m\vec{g}e_{y_0}$ (en C) ;

• Action du sol :

– en I_1 , $\vec{R}_1 = N_1\vec{e}_{y_0} + T_1\vec{e}_{x_0}$;

– en I_2 , $\vec{R}_2 = N_2\vec{e}_{y_0} + T_2\vec{e}_{x_0}$.



⚙️ Le couple moteur $\vec{\Gamma}$ appliqué entre \mathcal{S} et \mathcal{S}_1 est un effort intérieur au système Σ .

Équation du TCM : $m_\Sigma \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}}$ (1)

Or $m_\Sigma \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = m\vec{a}(O_1) + M\vec{a}(C) + m\vec{a}(O_2) = m\ddot{x}\vec{e}_{x_0} + M\ddot{x}\vec{e}_{x_0} + m\ddot{x}\vec{e}_{x_0} = 26m\ddot{x}\vec{e}_{x_0}$.

⚙️ O_1 , C et O_2 sont trois points de \mathcal{S} qui est en translation par rapport à \mathcal{R}_0 . Ils ont donc la même vitesse et la même accélération (ici horizontale).

Hidden page

Hidden page

Les quatre équations de la dynamique demandées sont donc :

$$\text{(éq 1)} \quad T_1 + T_2 = 26m\ddot{x}$$

$$\text{(éq 2)} \quad N_1 + N_2 = 26mg$$

$$\text{(éq 3)} \quad -m\ddot{x} = -1,5N_1 + 2,5N_2 + 2,5(T_1 + T_2)$$

$$\text{(éq 4)} \quad T_2 = -\frac{m}{2}\ddot{x}$$

(éq 1) et (éq 4) permettent d'écrire :

$$T_2 = -\frac{m}{2}\ddot{x} \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{53}{2}m\ddot{x}.$$



Si $\ddot{x} > 0$, $T_1 > 0$: ce frottement sert à faire avancer la moto !

(éq 1) et (éq 3) donnent (en faisant « disparaître » $T_1 + T_2$) :

$$-m\ddot{x} = -1,5N_1 + 2,5N_2 + 2,5 \times 26m\ddot{x} \quad \text{soit} \quad 2,5N_2 - 1,5N_1 = -66m\ddot{x} \quad \text{(éq 5)}.$$

Par ailleurs (éq 2) donne : $N_1 + N_2 = 26mg$.

En utilisant (éq 2) et (éq 5) et en utilisant la substitution, on peut écrire :

$$2,5N_2 - 1,5(26mg - N_2) = -66m\ddot{x}, \quad \text{d'où} \quad 4N_2 = 39mg - 66m\ddot{x}$$

$$N_2 = \frac{39}{4}mg - \frac{33}{2}m\ddot{x}.$$

On a aussi :

$$2,5(26mg - N_1) - 1,5N_1 = -66m\ddot{x}, \quad \text{soit} \quad 4N_1 = 65mg + 66m\ddot{x}.$$

$$N_1 = \frac{65}{4}mg + \frac{33}{2}m\ddot{x}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} & \text{kg} & \text{kg} \end{matrix}$



Ces 2 expressions sont homogènes ;

• Si $\ddot{x} = 0$, $N_1 = \frac{65}{4}mg = \left(\frac{2,5r}{4r}\right) \times 26mg$ (OK) et $N_2 = \frac{39}{4}mg = \left(\frac{1,5r}{4r}\right) \times 26mg$ (OK)

• Si $\ddot{x} > 0$, $N_1 \nearrow$ (la roue arrière est « surchargée » : OK) et $N_2 \searrow$ (la roue avant est « déchargée » : OK).

2) On a vu dans la question précédente que l'équation de moment appliqué à \mathcal{S}_1 par rapport à l'axe $\Delta_{O_1} = (O_1; \vec{e}_{z_0})$ faisait apparaître le couple Γ . C'est donc cette équation que l'on va écrire.

Système étudié : \mathcal{S}_1 .

Référentiel galiléen : \mathcal{R}_0 .

Efforts extérieurs appliqués au système

• Poids : $\vec{P}_1 = -mg\vec{e}_{y_0}$ en O_1 ;

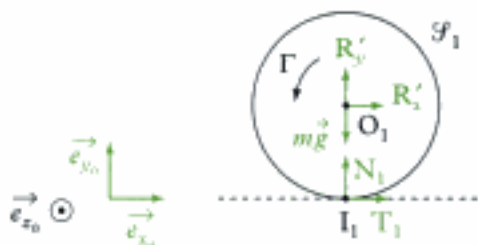
• Réaction du sol : $\vec{R}_1 = N_1\vec{e}_{y_0} + T_1\vec{e}_{x_0}$ en I_1 .

• Action de la liaison pivot : $\vec{R}' = R'_x\vec{e}_{x_0} + R'_y\vec{e}_{y_0}$ en O_1 .



Pas de moment selon $(O_1; \vec{e}_{z_0})$ car pas de frottement.

• Couple moteur : $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_{z_0}$.



$$\text{TMC}^*(\Delta_{O_1}) : \frac{d}{dt} L_{\Delta_{O_1}}^*(\mathcal{F}_1) = \mathcal{M}_{\Delta_{O_1}, \text{ext}} \quad (4)$$

$$\text{Moment cinétique barycentrique} : L_{\Delta_{O_1}}^*(\mathcal{F}_1) = J \times \dot{\theta}_1 = \frac{mr^2}{2} \times \left(-\frac{\dot{x}}{r}\right) = -\frac{m}{2} r \dot{x}.$$

Moment des efforts extérieurs :

- Poids : $\mathcal{M}_{\Delta_{O_1}}(\vec{P}_1) = 0.$
- Réaction du sol : $\mathcal{M}_{\Delta_{O_1}}(\vec{R}_1) = +rT_1.$
- Action de la liaison pivot : $\mathcal{M}_{\Delta_{O_1}}(\vec{R}') = 0.$
- Couple moteur : $\mathcal{M}_{\Delta_{O_1}}(\vec{\Gamma}) = \Gamma.$

L'équation (4) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{m}{2} r \dot{x}\right) = rT_1 + \Gamma \quad \text{soit} \quad -\frac{m}{2} r \ddot{x} = rT_1 + \Gamma.$$

Or $T_1 = \frac{53}{2} m \ddot{x}$ (voir question précédente). Donc :

$$\Gamma = -\frac{m}{2} r \ddot{x} - r \times \frac{53}{2} m \ddot{x} \quad \text{soit} \quad \Gamma = -27mr \ddot{x}$$

$N \cdot m = (kg \cdot m^2 \cdot s^{-2})$



• Si $\ddot{x} > 0$, alors $\Gamma < 0$ ce qui est normal car Γ est orienté positivement par \vec{e}_{θ_1} , c'est-à-dire dans « le sens trigonométrique direct ».

• $\Gamma = -\left(\boxed{24} + \boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{2}}\right) mr \ddot{x}$ ce qui est normal car le couple Γ sert à :

- « mettre » en translation : $f \rightarrow \boxed{24}$ (Masse $M = 24 m$)
- « mettre » en translation : $f_1 \rightarrow \boxed{1}$ (Masse : 1 m)
- « mettre » en translation : $f_2 \rightarrow \boxed{1}$ (Masse : 1 m)
- « mettre » en rotation : $f_1 \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$ (Moment d'inertie = $\frac{1}{2} mr^2$)
- « mettre » en rotation : $f_2 \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$ (Moment d'inertie = $\frac{1}{2} mr^2$).

3) Pour que la roue arrière ne patine pas, il faut que la condition ci-après soit vérifiée :

$$\frac{\|\vec{T}_1\|}{\|\vec{N}_1\|} < f \quad \text{qui s'écrit ici} \quad \frac{T_1}{N_1} < f.$$

Or $T_1 > 0$ quand $\ddot{x} > 0$ (notre étude) et $N_1 > 0$, donc on doit vérifier : $\frac{T_1}{N_1} < f.$

En reportant les expressions de T_1 et N_1 en fonction de \ddot{x} et l'expression de Γ en fonction de \ddot{x} , expressions trouvées dans les questions 1) et 2), on obtient :

$$\frac{\frac{53}{2} m \times \left(\frac{-\Gamma}{27mr}\right)}{\frac{65}{4} mg + \frac{33}{2} m \left(\frac{-\Gamma}{27mr}\right)} < f.$$



Comme $\Gamma < 0$, on conservera $(-\Gamma)$.

$$\text{Alors : } (-\Gamma) < \frac{\frac{65}{4}fmg}{\frac{53}{54r} - \frac{11}{18r}f} \text{ ou } (-\Gamma)_{\max, 1} = \frac{\frac{65}{4}fmgr}{\frac{53}{54} - \frac{11}{18} \times f}$$

4) Pour que la roue avant ne décolle pas, il faut vérifier que : $N_2 \geq 0$.

Avec l'expression de N_2 en fonction de \ddot{x} et l'expression de Γ en fonction de \ddot{x} , cette condition s'écrit :

$$\frac{39}{4}mg - \frac{33}{2}m \times \left(\frac{-\Gamma}{27mr} \right) \geq 0, \text{ soit } (-\Gamma) \leq \frac{39}{4}mgr, \text{ soit aussi } (-\Gamma) \leq \frac{351}{22}mgr.$$

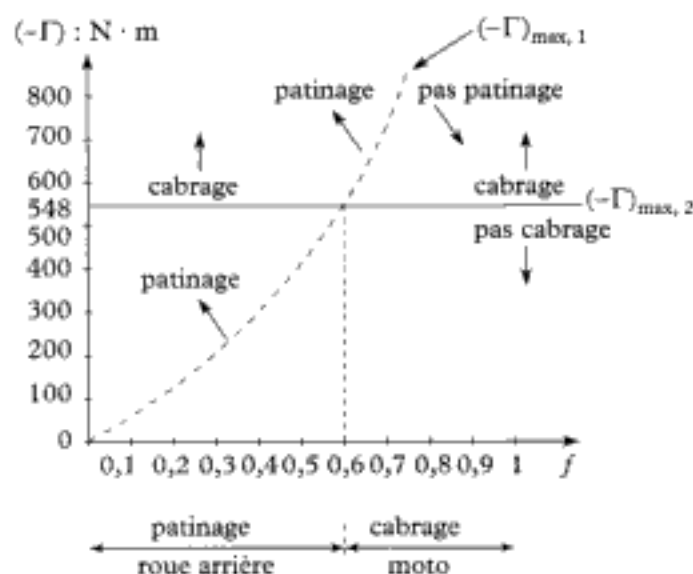
$$(-\Gamma)_{\max, 2} = \frac{351}{22}mgr.$$

A.N. :

$$(-\Gamma)_{\max, 2} \approx 548 \text{ Nm.}$$

5) On doit tracer sur un même graphique.

- $f \rightarrow (-\Gamma)_{\max, 1}$: qui limite la zone de glissement (patinage) de celle de non glissement (non patinage) de la roue arrière.
- $f \rightarrow (-\Gamma)_{\max, 2}$: qui limite la zone de cabrage de la moto de la zone où la moto ne se cabre pas.



Les deux courbes se croisent pour $f = 0,6$.

Ainsi, en cas de couple moteur « important » :

- si $f < 0,6$ il y aura patinage de la roue arrière (le coefficient de frottement est faible) ;
- si $f > 0,6$ il y aura cabrage de la moto, avant patinage (le coefficient de frottement est fort).

Énergétique des systèmes et du solide

Introduction

L'énergie permet, via les théorèmes de la puissance cinétique, de l'énergie cinétique ou de l'énergie mécanique, de résoudre certains problèmes de mécanique des systèmes et du solide. Mais, bien qu'équivalents aux théorèmes de la dynamique, ils font intervenir les forces intérieures (via leurs puissances ou leurs travaux) !

Plan du chapitre 4

A. Puissance d'un ensemble de forces appliquées à un système matériel	150
B. Puissance des efforts extérieurs appliqués à un solide \mathcal{S}	152
C. Puissance des efforts intérieurs	154
D. Puissance des actions de contact entre deux solides	155
1. Cas du contact ponctuel	155
2. Cas des liaisons parfaites	157
E. Travail d'un ensemble de forces	158
F. Énergie potentielle	159
G. Théorèmes énergétiques	160
1. Théorème de la puissance cinétique	160
2. Théorème de l'énergie cinétique	161
3. Théorème de l'énergie mécanique	161
H. Solide en rotation autour d'un axe fixe	162
I. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe	163
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	165
Énoncés des exercices	174
Indications	178
Solution des exercices	179

A. Puissance d'un ensemble de forces appliquées à un système matériel

A.1. Définitions

On considère un système matériel \mathcal{S} , soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i appliquées aux différents points M_i (du système \mathcal{S}), se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 1).

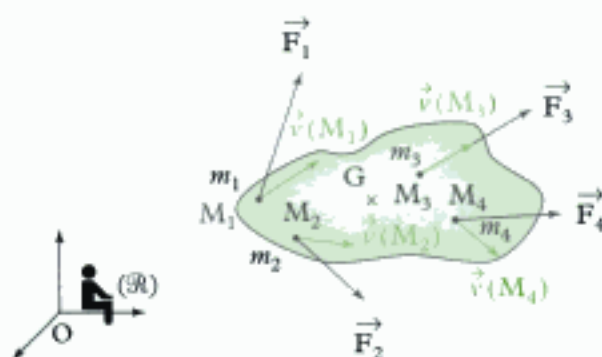


Fig. 1 - Ensemble de forces appliquées à un système de points matériels.

Definition 1

La puissance des forces \vec{F}_i appliquées aux points M_i (composant le système matériel \mathcal{S}) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , est la somme des puissances des forces appliquées à chaque point M_i :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	puissance des forces appliquées à \mathcal{S} (W ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$)
\vec{F}_i	forces (N)
$\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de M_i ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Pour un ensemble de forces réparties $d\vec{F}(M)$ appliquées aux différents points M (d'un système matériel continu \mathcal{S}) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , la puissance du système de forces (ou de l'ensemble de forces) est définie par la relation (fig. 2) :

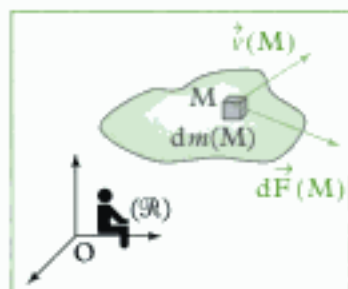


Fig. 2 - Force répartie appliquée à un système continu.

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{M}} d\vec{F}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	puissance des forces appliquées à \mathcal{S} (W ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$)
$d\vec{F}$	force élémentaire (N)
$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de M ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Un ensemble de forces est moteur si $\mathcal{P} > 0$.

Un ensemble de forces est résistant si $\mathcal{P} < 0$.

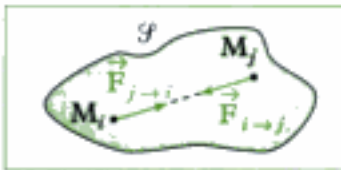


Fig. 3 - Forces intérieures d'un système matériel.

A.2. Puissance des forces intérieures

On considère à nouveau, pour la démonstration, un système matériel \mathcal{S} , composé d'un ensemble de points matériels M_i se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 3). La puissance des forces intérieures est :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_j \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}.$$

En regroupant par deux les termes $\vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} + \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}(M_j)_{/\mathcal{R}}$, on obtient (d'après le principe des actions réciproques) :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} + \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}(M_j)_{/\mathcal{R}} &= -\vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} + \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}(M_j)_{/\mathcal{R}} \\ &= \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot [\vec{v}(M_j)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}] \\ &= \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{d\overline{M_i M_j}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire : $\mathcal{P}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{d\overline{M_i M_j}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

D'après le principe des actions réciproques (3^e loi de Newton), $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ est porté par $\overline{M_i M_j}$, on peut écrire : $\vec{F}_{i \rightarrow j} = F_{i \rightarrow j} \vec{e}_{i \rightarrow j}$ et $\overline{M_i M_j} = r_{ij} \vec{e}_{i \rightarrow j}$ (avec $\vec{e}_{i \rightarrow j}$ un vecteur unitaire de l'axe $M_i M_j$), on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{d\overline{M_i M_j}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} &= F_{i \rightarrow j} \vec{e}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{d(r_{ij} \vec{e}_{i \rightarrow j})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \\ &= F_{i \rightarrow j} \vec{e}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{dr_{ij}}{dt} \vec{e}_{i \rightarrow j} + r_{ij} \left(\frac{d\vec{e}_{i \rightarrow j}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \right). \end{aligned}$$

Comme $\vec{e}_{i \rightarrow j}$ est un vecteur unitaire de l'axe $M_i M_j$, on a $\vec{e}_{i \rightarrow j}^2 = 1$ soit, en dérivant par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{e}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{i \rightarrow j}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = 0.$$

Ainsi, $\vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \left(\frac{d\overline{M_i M_j}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = F_{i \rightarrow j} \dot{r}_{ij}$ et donc :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} F_{i \rightarrow j} \dot{r}_{ij}$$

Ainsi la puissance des forces intérieures est indépendante du référentiel ; en effet, $F_{i \rightarrow j}$, comme toute force, et r_{ij} , comme toute distance, sont indépendants du référentiel.²

De plus, si les distances r_{ij} entre les points du système matériel sont constantes, la puissance des forces intérieures est nulle.

Propriété 1

La puissance des forces intérieures à un unique solide est nulle.³

1. Le coefficient $\frac{1}{2}$ apparaît car chaque puissance de force est comptée deux fois dans cette somme.

2. La puissance des efforts mécaniques intérieurs est indépendante du référentiel, mais la puissance des efforts mécaniques extérieurs dépend du référentiel !

3. Attention, pour un système composé de deux solides en contact, même ponctuel, la puissance des efforts intérieurs au système n'est pas nulle dans le cas général, puisqu'il y a mouvement relatif !

1. Cette puissance dépend du référentiel \mathcal{R} ; elle peut être motrice dans un référentiel et résistante dans un autre.

A.3. Puissance des forces extérieures

La puissance des forces extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est¹ :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

ou

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

Exemple : cas du poids (résultante des forces de pesanteur) d'un système matériel continu \mathcal{S} de masse m dans un champ de pesanteur uniforme.

La force de pesanteur élémentaire appliquée à chaque point M de \mathcal{S} est :

$$d\vec{P}(M) = dm(M)\vec{g}.$$

Ainsi, la puissance des forces de pesanteur (du poids) est :

$$\mathcal{P} = \iiint_M dm(M)\vec{g} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\iiint_M dm(M)\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \right) \cdot \vec{g} = m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{g}.$$

On obtient $\mathcal{P} = -mg\dot{z}$ dans le cas où l'axe vertical $(O ; \vec{e}_z)$ est orienté vers le haut (fig. 4).

Remarques

• Ainsi, si $\dot{z} > 0$, le solide \mathcal{S} monte et le poids est alors une force résistante : $\mathcal{P} < 0$; d'où le signe moins dans la formule.

• Si on note \dot{z} la projection de la vitesse de G sur l'axe vertical $(O ; \vec{e}_z)$ orienté vers le bas, alors on a : $\mathcal{P} = mg\dot{z}$.

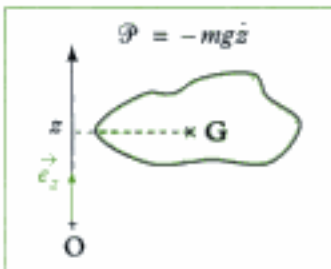


Fig. 4 - Puissance des forces de pesanteur.

B. Puissance des efforts extérieurs appliqués à un solide \mathcal{S}

B.1. Relation générale

Soit un système matériel \mathcal{S} composé d'un **unique solide**, soumis à un ensemble de forces (extérieures au solide étudié) $d\vec{F}(M)$ formant un torseur de résultante \vec{R}_{ext} et de moment $\vec{M}_{A, \text{ext}}$ en A (A est un point du solide) ; le mouvement de \mathcal{S} est caractérisé par la vitesse $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ d'un de ses points et par le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} : $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$.

La puissance des efforts extérieurs appliqués au solide \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

Soit, en tenant compte de la FFCS :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot \left(\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \\ &= \left(\iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \right) \cdot \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM}) \end{aligned}$$

Hidden page

B.3.2 - Cas d'un couple

Si le solide \mathcal{S} est soumis à un ensemble de forces équivalent à un couple de moment $\vec{\Gamma}$, la résultante du couple (torseur) étant nulle, on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{\Gamma})_{/\mathcal{R}} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

C. Puissance des efforts intérieurs à un ensemble de deux solides

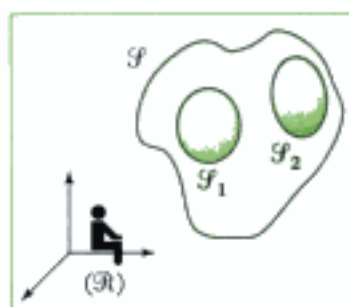


Fig. 5 - Deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en mouvement.

C.1. Relation générale

Soient deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} (fig. 5). La puissance des efforts intérieurs mis en jeu entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (puissance des inter-efforts du système $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, ou puissance intérieure) est la **puissance totale** :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}}.$$

En appelant $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}$ la résultante et le moment en A des actions mécaniques exercées par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 , on a (d'après le théorème des actions réciproques) :

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} = -\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}.$$

(A étant un point quelconque). Ainsi, d'après le paragraphe B.1. :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) &= \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} \\ &\quad + \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) &= \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot [\vec{v}(A \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(A \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}] \\ &\quad + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}}) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$$

1. Cette puissance est indépendante du référentiel !

Remarque : On peut aussi écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{S}_1} + \vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1}.$$

Il faut noter que cette expression ne fait intervenir que le mouvement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 .

Pour calculer la puissance des inter-efforts (puissance totale) d'un système composé de plusieurs solides (au moins 2), on additionne les puissances des inter-efforts de chaque couple de solides composant le système.

C.2. Puissance d'efforts intérieurs particuliers

Si les actions mécaniques de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 se réduisent à un **glisseur** $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ appliqué en A, alors :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{R}_{2 \rightarrow 1}) = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2}$$

Si les actions mécaniques de \mathcal{F}_2 sur \mathcal{F}_1 se réduisent à un couple de moment $\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1}$, alors :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1}) = \vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2}$$

C.3. Cas particulier : un des deux solides est fixe

Si \mathcal{F}_2 est fixe dans le référentiel \mathcal{R} , alors :

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{F}_2/\mathcal{R}} = 0,$$

car $\vec{v}(A \in \mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_2/\mathcal{R}} = \vec{0}$. On a donc :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{F}_1/\mathcal{R}}.$$

On retrouve, pour la puissance des efforts intérieurs, l'expression de la puissance des efforts extérieurs appliquées à un solide (ici \mathcal{F}_1) :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2).$$

D. Puissance des actions de contact entre deux solides

D.1. Cas du contact ponctuel

Supposons que le contact entre deux solides \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 reste ponctuel : appelons I le point de contact (géométrique) à l'instant t entre \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

Les actions de contact exercées par \mathcal{F}_2 sur \mathcal{F}_1 sont entièrement caractérisées par un glisseur de résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N}_{2 \rightarrow 1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ appliquée en I (fig. 6).

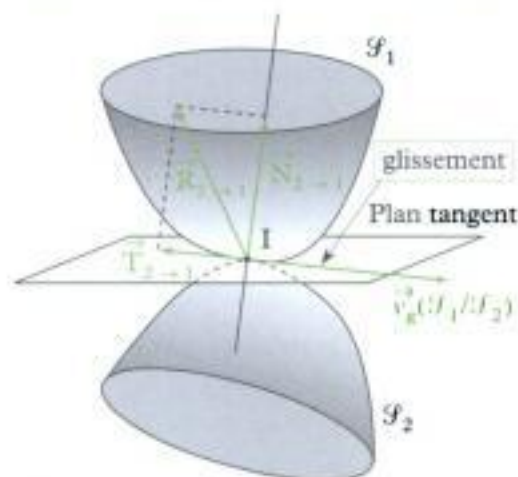


Fig. 6 - contact entre deux solides l'instant t .

D.1.1 - Puissance des actions mécaniques intérieures pour un contact ponctuel

La puissance (totale) des actions mécaniques intérieures de contact (puissance de l'action et de la réaction ou puissance des inter-efforts ou puissance intérieure) exercées entre les deux solides \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 s'écrit, d'après le § C.2 :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{F}_2}.$$

En faisant apparaître la vitesse de glissement \vec{v}_g de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2},$$

on obtient :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$$

Remarques

• On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) &= \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{R}}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1) \\ &= \vec{\mathbf{T}}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1). \end{aligned}$$

• Cette puissance est indépendante du référentiel puisque la résultante $\vec{\mathbf{R}}_{2 \rightarrow 1}$, comme toute force, et la vitesse de glissement $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ sont indépendantes du référentiel.

• Cette puissance est toujours négative ou nulle (à cause des lois de Coulomb, $\vec{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 1}$ est opposé à $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$).

• Elle est nulle (on dit alors que la liaison entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 est parfaite) si :

– la vitesse de glissement est nulle : \mathcal{S}_1 ne glisse pas sur \mathcal{S}_2 (c'est le cas s'il y a roulement sans glissement) ;

– la force de frottement est nulle : le coefficient de frottement est alors nul : le contact se fait sans frottement.

D.1.2 - Puissance des actions mécaniques extérieures pour un contact ponctuel

La puissance des actions mécaniques extérieures de contact exercées par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 s'exprime, dans le référentiel \mathcal{R} , par :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}.$$

Remarques

• Contrairement au cas de la puissance intérieure, elle dépend du référentiel \mathcal{R} .

• Si le solide \mathcal{S}_2 est fixe dans le référentiel \mathcal{R} , on obtient la relation importante (voir § C.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} &= \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) \\ &= \vec{\mathbf{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} \\ &= \vec{\mathbf{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \\ &= \vec{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \end{aligned}$$

Cette puissance $\mathcal{P}_{\text{ext}}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}}$ est nulle s'il y a non glissement de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 ($\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$) ou si la liaison se fait sans frottement ($\vec{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$).

D.2. Cas des liaisons parfaites

Définition 2

Une liaison (par exemple, une liaison pivot ou rotule) est parfaite si la puissance (totale) des efforts intérieurs de contact est nulle.

Exemples des liaisons sans frottement

• Pour la liaison pivot sans frottement d'axe Δ , en chaque point I de la surface de contact entre les deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de la liaison (fig. 7), la force élémentaire $d\vec{R}_{2 \rightarrow 1}(I)$ exercée par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est perpendiculaire au plan tangent¹; elle est donc perpendiculaire à la vitesse de glissement $\vec{v}_g(I, \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ en I entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . La puissance intérieure (totale) des efforts mis en jeu dans la liaison pivot (action et réaction) est donc nulle :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot}) = \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \iint_I d\vec{R}_{2 \rightarrow 1}(I) \cdot \vec{v}_g(I, \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = 0$$

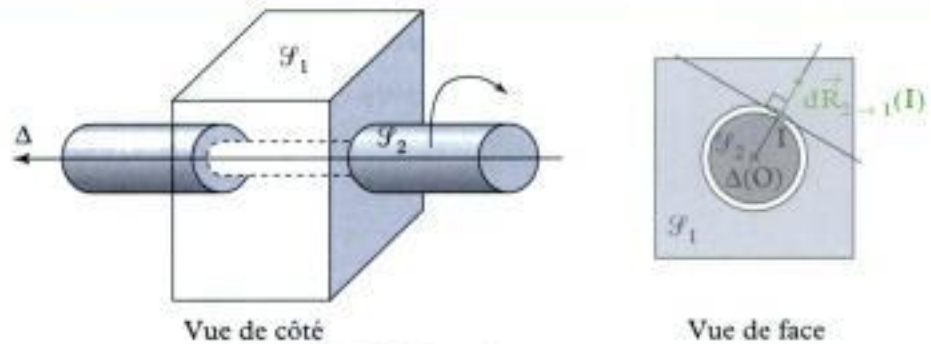


Fig. 7 - Liaison pivot.

Une liaison pivot sans frottement est donc une liaison parfaite !²

Remarque : si \mathcal{S}_1 est fixe dans \mathcal{R} , $\mathcal{P}_{\text{ext}}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = 0$.

• Pour la liaison rotule sans frottement de centre O , en chaque point I de la surface de contact entre les deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (fig. 8), la force élémentaire $d\vec{R}_{2 \rightarrow 1}(I)$ exercée par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est perpendiculaire au plan tangent³; elle est donc perpendiculaire à la vitesse de glissement $\vec{v}_g(I, \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ en I entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 ; la puissance intérieure (totale) des efforts mis en jeu dans la liaison pivot (action et réaction) est donc nulle :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{rotule}) = \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \iint_I d\vec{R}_{2 \rightarrow 1}(I) \cdot \vec{v}_g(I, \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = 0$$

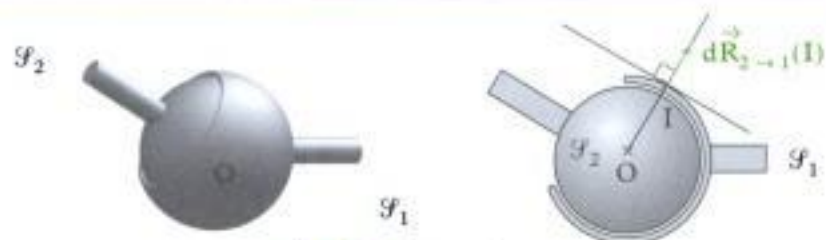


Fig. 8 - Liaison rotule.

Une liaison rotule sans frottement est donc une liaison parfaite !

Remarque : si \mathcal{S}_1 est fixe dans \mathcal{R} , $\mathcal{P}_{\text{ext}}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = 0$.

1. La liaison est sans frottements en chaque point de contact.

2. C'est la puissance totale (action et réaction) des efforts mécaniques intérieurs à la liaison qui est nulle, c'est-à-dire la somme de la puissance des efforts mécaniques exercés par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 et de la puissance des efforts mécaniques exercés par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 ; mais cette puissance est indépendante du référentiel; on peut donc la calculer dans le référentiel lié à \mathcal{S}_1 , en appelant $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1} = \omega \vec{u}$ le vecteur rotation instantané de \mathcal{S}_2 par rapport à \mathcal{S}_1 et O un point de l'axe Δ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \vec{R} \cdot \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1} \\ &= (\vec{M}_O \cdot \vec{u})\omega = M_\Delta \omega; \end{aligned}$$

la liaison étant parfaite,

$\mathcal{P}_{\text{int}} = M_\Delta \omega = 0$, quel que soit ω , c'est-à-dire que $M_\Delta = 0$: on retrouve la condition donnée dans le chapitre 3 pour qu'une liaison soit parfaite !

3. La liaison est sans frottements en chaque point de contact.

E. Travail d'un ensemble de forces

E.1. Définitions

Définition 3

On appelle travail infinitésimal δW d'un ensemble de forces $d\vec{F}$ appliquées aux différents points M , calculés entre les instants t et $t + dt$ entre lesquels chaque point M se déplace de $d\vec{OM}$, le scalaire :

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \iiint_M d\vec{F}(M) \cdot d\vec{OM}$$

δW	travail élémentaire (J ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)
$d\vec{F}$	force élémentaire (N)
\vec{OM}	(m)

Dans le cas d'un ensemble de points matériels M_i soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i , le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i.$$

Définition 4

On appelle travail $W_{t_1 \rightarrow t_2}$ d'un système de forces réparties $d\vec{F}(M)$ appliquées aux différents points M d'un système matériel, calculé entre les instants t_1 et t_2 , le scalaire :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt.$$

E.2. Cas des forces intérieures

Le travail infinitésimal des forces intérieures s'écrit, dans le cas d'un ensemble de points matériels :

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} F_{i \rightarrow j} dr_{ij}.$$

Ce travail est indépendant du référentiel d'étude et est nul dans le cas d'un système composé d'un solide **unique** car $dr_{ij} = 0$.

E.3. Cas des forces extérieures

Pour un système à répartition de masse continue, le travail infinitésimal des forces extérieures s'écrit :

$$\delta W_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot d\vec{OM}$$

1. Le travail élémentaire des forces de pesanteur est :

$$\delta W = mg dz,$$

dans le cas où l'axe vertical $(O; \vec{e}_z)$ est orienté vers le bas (z étant la position du centre de masse G du système matériel).

Exemple : cas du poids (résultante des forces de pesanteur) d'un système matériel \mathcal{S} de masse m dans un champ de pesanteur uniforme.

Le travail élémentaire des forces de pesanteur¹ (du poids) est :

$$\delta W = -mg dz,$$

dans le cas où l'axe vertical $(O ; \vec{e}_z)$ est orienté vers le haut (z étant l'altitude du centre de masse G du système matériel). Entre deux instants t_1 et t_2 entre lesquels le point G passe d'une altitude z_1 et z_2 , le travail des forces de pesanteur est :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = -mg[z]_{z_1}^{z_2} = mg(z_1 - z_2),$$

il ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des positions initiales et finales de G (fig. 9).



Fig. 9 - Travail des forces de pesanteur entre deux instants t_1 et t_2 .

F. Énergie potentielle

Définition 5

Un ensemble de forces appliquées à un système matériel \mathcal{S} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p si pour toute évolution du système entre les instants t_1 et t_2 , la variation d'énergie potentielle est égale à l'opposé du travail de l'ensemble de forces considéré :

$$\Delta \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_1} = -W_{t_1 \rightarrow t_2}$$

\mathcal{E}_p	énergie potentielle (J ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)
$W_{t_1 \rightarrow t_2}$	travail (J)

1. On dit que l'ensemble de forces est conservatif.

Remarques

- La variation d'énergie potentielle est indépendante du chemin suivi pour aller de sa position initiale à sa position finale.
- La fonction énergie potentielle est indépendante du temps.
- Pour une évolution infinitésimale du système, on a : $d\mathcal{E}_p = -\delta W$.
- La fonction \mathcal{E}_p est définie à une constante additive près.

Exemple : cas du poids (résultante des forces de pesanteur) d'un système matériel \mathcal{S} de masse m dans un champ de pesanteur uniforme.

Dans le cas où l'axe vertical $(O ; \vec{e}_z)$ est orienté vers le haut (z étant l'altitude du centre de masse G du système matériel), on a montré qu'entre deux instants t_1 et t_2 entre lesquels le point G passe d'une altitude z_1 et z_2 , le travail des forces de pesanteur est :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = -mg[z]_{z_1}^{z_2} = mg(z_1 - z_2),$$

et donc qu'il ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des positions initiales et finales de G .

Les forces de pesanteur appliquées à un système matériel dérivent d'une énergie potentielle (de pesanteur) $\mathcal{E}_{p_p} = mgz + \text{cte}$ (elles sont conservatives) ; en effet :

$$-W_{t_1 \rightarrow t_2} = mg(z_2 - z_1) = \mathcal{E}_{p_p}(M_2) - \mathcal{E}_{p_p}(M_1) = \Delta \mathcal{E}_{p_p}.$$

G. Théorèmes énergétiques

G.1. Théorème de la puissance cinétique

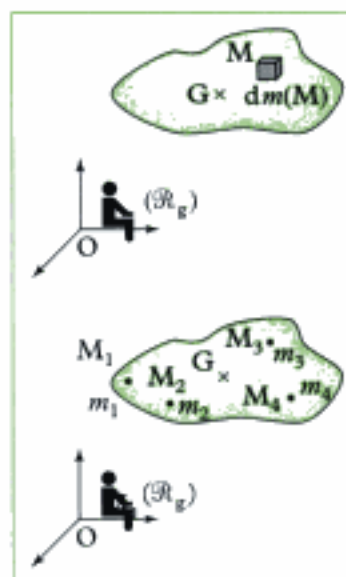


Fig. 10 - Décomposition d'un système à répartition de masse continue en système d'éléments quasi ponctuels et système de points matériels.

On considère un système matériel \mathcal{S} en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On suppose, pour la démonstration, que le système est composé d'un ensemble de points matériels (fig. 10) ; si le système est continu, on suppose qu'il est décomposable en un ensemble d'éléments de matière quasi ponctuels de volume $dV(M)$, de masse :

$$m = dm(M) = \mu(M)dV(M),$$

($\mu(M)$ étant la masse volumique de l'élément de matière situé au voisinage de M) centrés sur les points M et que ces éléments de matière sont assimilables à des points matériels.

Dérivons l'expression de l'énergie cinétique du système matériel \mathcal{S} exprimée dans \mathcal{R}_g ($\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$) par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R}_g (on calcule ainsi la puissance cinétique) :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \frac{d\mathcal{E}_c(M_i)}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v^2(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \right),$$

$$\text{soit } \frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \right)$$

$$\text{ou encore } \frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \left(\frac{d\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}, \text{ soit :}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{a}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}.$$

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique (2^e loi de Newton ou PFD) :

$$m_i \vec{a}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} + \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i},$$

où $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$ et $\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}$ sont respectivement la somme des forces extérieures et intérieures au système \mathcal{S} appliquées au point M_i .

$$\text{Ainsi } \frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \cdot (\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} + \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}), \text{ soit :}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} + \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}.$$

Le terme $\sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}$ n'a aucune raison d'être nul, même si $\sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \vec{0}$!

En appelant \mathcal{P}_{ext} la puissance des forces extérieures appliquées au système \mathcal{S} (qui dépend du référentiel) et \mathcal{P}_{int} la puissance des forces intérieures appliquées au système \mathcal{S} (qui ne dépend pas du référentiel), on obtient :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

Théorème 1

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} est égale à la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système) :

$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}}$	$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g}{dt}$ puissance cinétique (W)
	$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g$ énergie cinétique (J)
	\mathcal{P}_{ext} puissance des actions mécaniques extérieures (W)
	\mathcal{P}_{int} puissance des actions mécaniques intérieures (W)

Remarques

- Il faut prendre garde à ne pas oublier la puissance des efforts mécaniques intérieurs au système étudié !
- Si le système est composé d'un **unique** solide, alors : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

G.2. Théorème de l'énergie cinétique

À partir du TPC, on obtient :

$$d\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}dt + \mathcal{P}_{\text{int}}dt.$$

Soit, entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\Delta\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_1) = W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} + W_{\text{int}, t_1 \rightarrow t_2}.$$

Théorème 2

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un système matériel \mathcal{S} entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} :

$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) &= \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_1) \\ &= W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} + W_{\text{int}, t_1 \rightarrow t_2} \end{aligned}$	$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})$ énergie cinétique (J ou le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)
	W_{ext} travail des actions mécaniques extérieures (J)
	W_{int} travail des actions mécaniques intérieures (J)

G.3. Théorème de l'énergie mécanique

Parmi les forces extérieures et intérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} , certaines dérivent (dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g) d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\mathcal{S})$ dont la somme est :

$$\mathcal{E}_p(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_{p_{\text{cm}}}(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_{p_{\text{int}}}(\mathcal{S}).$$

Les autres sont des forces non conservatives.

L'énergie mécanique du système matériel \mathcal{S} est, dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$$\mathcal{E}_m(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_p(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}).$$

Théorème 3

Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie mécanique du système matériel \mathcal{S} entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces non conservatives (nc), extérieures et intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{E}_m(\mathcal{S}) &= \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_1) \\ &= W_{nc, ext, t_1 \rightarrow t_2} + W_{nc, int, t_1 \rightarrow t_2}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_m(\mathcal{S})$ énergie mécanique
(J ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)

$W_{nc, ext, t_1 \rightarrow t_2}$ travail des actions mécaniques non conservatives extérieures (J)

$W_{nc, int, t_1 \rightarrow t_2}$ travail des actions mécaniques non conservatives intérieures (J)

1. On pourrait définir le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}_{nc, ext} + \mathcal{P}_{nc, int}$$

Remarque : si toutes les forces (extérieures et intérieures) qui travaillent (qui ont un travail non nul) dérivent d'une énergie potentielle dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le système est **conservatif** et l'énergie mécanique du système \mathcal{S} se conserve : $\mathcal{E}_m(\mathcal{S}) = \text{cte}$.

On constate que si le système matériel \mathcal{S} est isolé ($W_{ext} = 0$) (contrairement au cas d'un point matériel), l'énergie mécanique n'a aucune raison de se conserver, à cause des forces intérieures (sauf si ces dernières sont conservatives) !

Dans le cas de forces non conservatives dissipatives, l'énergie mécanique du système diminue ; elle est transformée en énergie interne ou microscopique (dissipée sous forme d'énergie thermique) ; ceci est expliqué par le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé isolé : l'énergie totale, comprenant l'énergie macroscopique (énergie mécanique) et microscopique (énergie interne) se conserve.

H. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Supposons que l'on étudie le mouvement d'un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (A ; \vec{u})$ (vecteur rotation instantané $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{u}$) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Le TPC s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g}{dt} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}_g} = \vec{R} \cdot \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_g} = \vec{R} \cdot \vec{0} + \vec{M}_A \cdot \omega \vec{u}$$

\vec{R} est la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées au solide \mathcal{S} ; \vec{M}_A est le moment en A du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées au solide \mathcal{S} . Attention, ici : $\mathcal{P}_{int} = 0$!

$$\text{d'où : } \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \right) = \mathcal{M}_\Delta \omega}$$

\mathcal{M}_Δ est le moment des actions mécaniques extérieures appliquées au solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ ; J_Δ est le moment d'inertie du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ .

Remarques

- Les couples sont inclus dans \mathcal{M}_Δ .
- Si le moment d'inertie J_Δ n'est pas connu, on pourra utiliser le 2^e théorème de Kœnig pour déterminer l'énergie cinétique dans \mathcal{R}_g .
- Si $\mathcal{M}_\Delta = 0$, alors la vitesse angulaire ω est constante.
- Si on développe l'équation du TPC, on obtient : $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$, qui est le TMC(Δ).

I. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

Supposons que l'on étudie le mouvement d'un solide \mathcal{F} en rotation autour d'un axe de direction fixe \vec{u} (vecteur rotation instantané $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{u}$) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Le TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(G) + \frac{1}{2} J_{\Delta_G} \omega^2 \right) = \vec{R} \cdot \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{M}_{\Delta_A} \omega$$

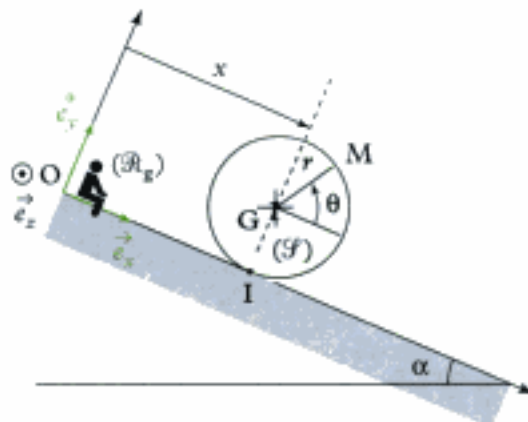
\mathcal{M}_{Δ_A} est le moment des actions mécaniques extérieures appliquées au solide \mathcal{F} par rapport à l'axe $\Delta_A = (A ; \vec{u})$ où A est un point quelconque du solide \mathcal{F} .

Remarques

- Les couples sont inclus dans \mathcal{M}_{Δ_A} .
- On prend souvent $A \equiv G$, centre de masse de \mathcal{F} .

Application 1 Mouvement d'une roue

Considérons une roue modélisée par un disque homogène \mathcal{F} , de centre G, de rayon r , de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} m r^2$ par rapport à l'axe (Gz) , pouvant se déplacer sur le plan incliné d'axe $(O ; \vec{e}_x)$; elle est lâchée à $t = 0$, à partir d'un état de repos. On suppose qu'elle reste dans le plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_y) au cours de son mouvement. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (lié au sol) est supposé galiléen. On repère la position angulaire de la roue à l'aide de l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{GM})$. Le coefficient de frottement entre le sol et la roue est f .



Étudier le mouvement de la roue en supposant qu'il y a roulement sans glissement.

Solution

1. Analyse cinématique

Comme il y a roulement sans glissement entre la roue et le sol ; on a montré (au chapitre 1, cinématique) que la condition de roulement sans glissement donnait : $\dot{x} = -r\dot{\theta}$.

2. Analyse énergétique

Appliquons le TPC à la roue dans le référentiel \mathcal{R}_g , soit : $\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{F})/\mathcal{R}_g}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}}$.

• Commençons par exprimer l'énergie cinétique de la roue :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}mv^2(\text{G})/\mathcal{R}_g \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}mv^2(\text{G})/\mathcal{R}_g = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{E}_c(\mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Avec la condition de RSG, $\dot{x} = -r\dot{\theta}$, on a : $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$.

• Bilan des actions mécaniques appliquées à la roue

– Extérieures

→ Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ en G : $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P})/\mathcal{R}_g = m\vec{g} \cdot \vec{v}(\text{G})/\mathcal{R}_g = m\vec{g} \cdot \dot{x}\vec{e}_x = mg\dot{x} \sin(\alpha)$.

→ La réaction du sol $\vec{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ en I : $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R})/\mathcal{R}_g = \vec{R} \cdot \vec{v}(\text{I} \in \mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \vec{R} \cdot \vec{0} = 0$,

car $\vec{v}(\text{I} \in \mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \vec{v}_g = \vec{0}$ puisqu'il y a RSG.

– Intérieures

→ La puissance des actions mécaniques intérieures est nulle car le système étudié est un unique solide : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

• Utilisation du TPC

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{F})}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}, \text{ soit } \frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} = mg\dot{x} \sin(\alpha), \text{ ce qui donne : } \ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin(\alpha).$$

Les théorèmes énergétiques permettent d'obtenir rapidement l'expression de l'accélération car, avec la condition de RSG, le système ne possède qu'un seul degré de liberté !

Remarques

• Comme $\vec{P} \cdot \vec{v}(\text{G})/\mathcal{R}_g = \mathcal{P}(\vec{P})$ et $\mathcal{M}_{\Delta_0} = 0$, on aurait pu écrire directement, à l'aide du paragraphe I,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \dot{\theta}^2 \right] = mg\dot{x} \sin(\alpha), \text{ ce qui redonne le résultat à l'aide de la condition de RSG.}$$

• On aurait aussi pu utiliser le TEM en remarquant que la seule force travaillant lors de ce mouvement est le poids de la roue, qui est une force conservative : le système mécanique étudié, la roue, est un système conservatif. Ainsi : $\mathcal{E}_m(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_p(\mathcal{F}) + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \text{cte}$.

Avec $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \dot{\theta}^2$ et $\mathcal{E}_p(\mathcal{F})/\mathcal{R}_g = \mathcal{E}_{p_f} = -mgx \sin(\alpha) + \text{cte}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \dot{\theta}^2 - mgx \sin(\alpha) = \text{cte}.$$

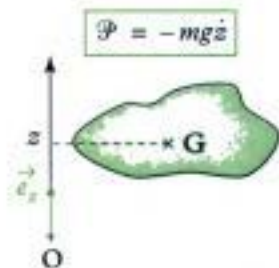
On retrouve ainsi le résultat à l'aide de la condition de RSG et en dérivant par rapport au temps.

Hidden page

• **Puissance des forces extérieures**

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(\mathbf{M}) \cdot \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$$

ou
$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} \cdot \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$$



Exemple : cas du poids (résultante des forces de pesanteur) d'un système matériel \mathcal{S} de masse m dans un champ de pesanteur **uniforme** : $\mathcal{P} = -mgz$ dans le cas où l'axe vertical ($O ; \vec{e}_z$) est orienté vers le haut.

✓ **Puissance des efforts extérieurs appliqués à un solide \mathcal{S}**

•
$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{\mathbf{A}, \text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Le système matériel \mathcal{S} composé d'un **unique solide**, soumis à un ensemble de forces (extérieures au solide étudié) formant un torseur de résultante \vec{R}_{ext} et de moment en \mathbf{A} $\vec{M}_{\mathbf{A}, \text{ext}}$ (**A est un point du solide**) ; le mouvement de \mathcal{S} est caractérisé par la vitesse $\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}$ d'un de ses points et par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} .

• Si \mathbf{A} n'est pas naturellement élément de \mathcal{S} , on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{\mathbf{A}, \text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

• **Puissance pour quelques mouvements particuliers**

1) Si le solide \mathcal{S} est en **translation** dans le référentiel \mathcal{R} , alors quel que soit le point \mathbf{A} appartenant au solide, $\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0}$; ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}}$$

2) Si le solide \mathcal{S} est en **rotation** autour de l'axe Δ fixe dans le référentiel \mathcal{R} , alors quel que soit le point \mathbf{A} appartenant à l'axe $\Delta = (\mathbf{A} ; \vec{u})$, $\vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}$ (\vec{u} est un vecteur unitaire de Δ) ; ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{M}_{\mathbf{A}, \text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = (\vec{M}_{\mathbf{A}, \text{ext}} \cdot \vec{u})\omega = M_{\Delta, \text{ext}}\omega$$

• **Puissance d'efforts particuliers**

1) Si le solide \mathcal{S} est soumis à un ensemble de forces équivalent à un **glisseur** de résultante \vec{R} dont le moment est nul en \mathbf{A} (ou à une force appliquée en \mathbf{A}), on a : $\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{R} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}$

2) Si le solide \mathcal{S} est soumis à un ensemble de forces équivalent à un **couple** de moment $\vec{\Gamma}$, la résultante du couple (torseur) étant nulle, on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

✓ **Puissance des efforts intérieurs à un ensemble de deux solides (puissance des inter-efforts)**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) &= \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} \\ &= \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_{\mathbf{A}, 2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

• Cas particulier d'un glisseur $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ appliqué en \mathbf{A} (ou d'une force appliquée en \mathbf{A}) :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}$$

- Cas particulier d'un couple de moment $\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1}$:

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) = \vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$$

- Si \mathcal{S}_2 est fixe dans le référentiel \mathcal{R} :

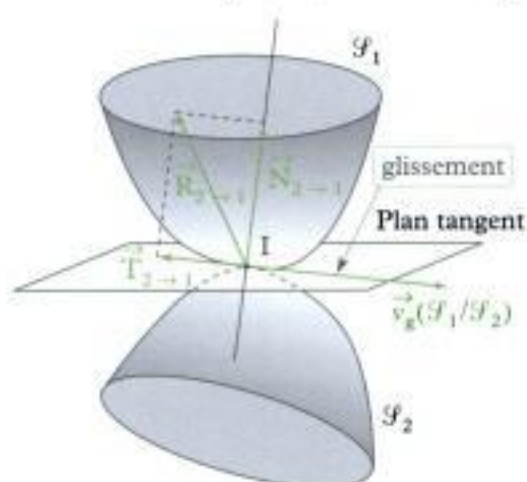
$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2).$$

• Puissance des actions de contact ponctuel entre deux solides

Les actions de contact exercées par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 sont entièrement caractérisées par un glisseur de résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{N}_{2 \rightarrow 1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ appliquée en I.

La puissance (totale) des actions intérieures de contact (de l'action et de la réaction ou puissance des inter efforts) exercées entre les deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(1 \leftrightarrow 2) &= \mathcal{P}(1 \rightarrow 2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} \\ &= \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \end{aligned}$$



Remarques

- Cette puissance est indépendante du référentiel.
- Cette puissance est toujours négative ou nulle (à cause des lois de Coulomb, $\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ est opposé à $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$).
- Elle est nulle si :
 - la vitesse de glissement est nulle : \mathcal{S}_1 ne glisse pas sur \mathcal{S}_2 (c'est le cas s'il y a roulement sans glissement) ;
 - la force de frottement est nulle : le coefficient de frottement est alors nul et le contact se fait sans frottement.
- Si \mathcal{S}_2 est fixe dans le référentiel \mathcal{R} , la puissance des actions mécaniques extérieures exercées par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(2 \rightarrow 1)_{/\mathcal{R}} = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2).$$

• Liaisons parfaites

Une liaison (par exemple, une liaison pivot ou rotule) est parfaite si la puissance (totale) des efforts intérieurs de contact est nulle.

Par exemple, une liaison pivot sans frottement d'axe Δ est une liaison parfaite. De même, une liaison rotule sans frottement de centre O est une liaison parfaite.

Si l'un des deux solides de la liaison (pivot ou rotule) est fixe dans le référentiel \mathcal{R} , alors la puissance des efforts extérieurs exercés par ce solide sur le second (mobile dans \mathcal{R}) est nulle.

✓ Travail d'un ensemble de forces

- On appelle travail infinitésimal δW calculé entre les instants t et $t + dt$ entre lesquels chaque point M se déplace de \overrightarrow{dOM} , le scalaire :

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \iiint_M \mathbf{dF}(\mathbf{M}) \cdot \overrightarrow{dOM} \quad \left| \begin{array}{l} \delta W \text{ travail élémentaire (J ou kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}) \\ \mathbf{dF} \text{ force élémentaire (N)} \\ \overrightarrow{OM} \text{ (m)} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un ensemble de points matériels M_i soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i , le travail élémentaire s'écrit : $\delta W = \mathcal{P} dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{dOM}_i$

- On appelle travail $W_{t_1 \rightarrow t_2}$ d'un système de forces réparties $\mathbf{dF}(\mathbf{M})$ appliquées aux différents points M d'un système matériel, calculé entre les instants t_1 et t_2 , le scalaire :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt.$$

✓ Énergie potentielle

Un ensemble de forces appliquées à un système matériel \mathcal{S} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p si pour toute évolution du système entre les instants t_1 et t_2 , la variation d'énergie potentielle est égale à l'opposé du travail de l'ensemble de forces considéré :

$$\Delta \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_1} = -W_{t_1 \rightarrow t_2} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_p \text{ énergie potentielle} \\ \text{(J ou kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}) \\ W_{t_1 \rightarrow t_2} \text{ travail (J)} \end{array} \right.$$

Exemple : les forces de pesanteur (résultante dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme) appliquées à un système matériel dérivent d'une énergie potentielle (de pesanteur) $\mathcal{E}_{p_2} = mgz + \text{cte}$, z étant dirigé vers le haut ; les forces de pesanteur sont conservatives.

✓ Théorèmes énergétiques

- Théorème de la puissance cinétique (TPC)**

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} est égale à la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système) :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g}{dt} \text{ puissance cinétique (W)} \\ \mathcal{E}_c(\mathcal{S})/\mathcal{R}_g \text{ énergie cinétique (J)} \\ \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} \text{ puissance des actions mécaniques} \\ \text{extérieures dans } \mathcal{R}_g \text{ (W)} \\ \mathcal{P}_{\text{int}} \text{ puissance des actions mécaniques} \\ \text{intérieures (W)} \end{array} \right.$$

Hidden page

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un système à l'aide du TPC ?

Soit un système mécanique en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. On définit, pour chacun des solides constituant le système, la position de son centre d'inertie, sa masse, son moment d'inertie et son (ses) paramètre(s) de mouvement.

On cherche à déterminer l'équation différentielle du mouvement du système.

→ Savoir faire

- 1 Définir le système étudié.
- 2 Définir le référentiel galiléen d'étude.
- 3 Faire le bilan des efforts (extérieurs **et** intérieurs) appliqués au système.
- 4 Écrire l'équation scalaire du TPC en déterminant :
 - l'énergie cinétique du système ;
 - la puissance des efforts (extérieurs **et** intérieurs) appliqués au système.
- 5 En déduire l'équation différentielle du mouvement recherché en utilisant les éventuelles relations cinématiques qui existent entre les différents paramètres de mouvement.



L'équation du TPC donnera directement l'équation différentielle du mouvement :

- s'il y a un seul paramètre de mouvement indépendant (tous les autres paramètres doivent s'exprimer en fonction de celui-ci) ;
- si les inconnues de liaison ne travaillent pas (pas de frottement, pas de glissement, déplacement perpendiculaire à l'effort...).

Sinon il faudra aussi écrire des équations de la dynamique (TCM et/ou TMC).

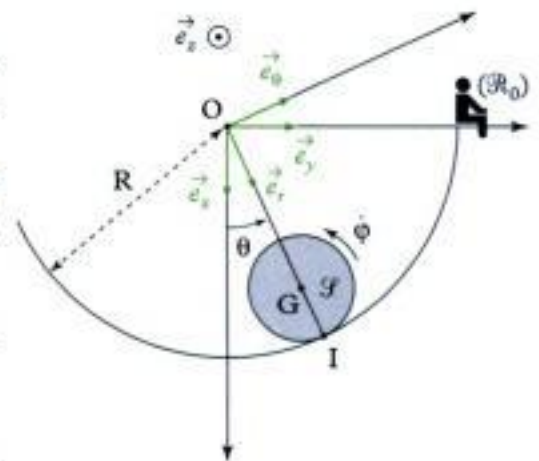
→ Application

On considère un solide \mathcal{S} constitué d'une bille de centre G , de rayon r , de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{2}{5}mr^2$ par rapport à l'axe $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$, qui roule sans glisser dans un cylindre creux d'axe $(O; \vec{e}_z)$, de rayon R ($R > r$) attaché à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On donne la relation cinématique déduite du non-glissement en I :

$$(R - r)\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 0.$$

Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la bille (en θ).



Hidden page

soit en simplifiant par $\dot{\theta}$, m et $(R - r)$:

$$\frac{2}{5}(R - r)\ddot{\theta} + (R - r)\ddot{\theta} = -g \sin \theta, \text{ soit } \frac{7}{5}(R - r)\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

D'où l'équation différentielle du mouvement de \mathcal{S} (en θ) :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \sin \theta = 0.$$

Méthode 2

Comment déterminer « une vitesse angulaire » dans un système mécanique à l'aide du TEC/TEM ?

Soit un système mécanique en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. On définit, pour chacun des solides constituant le système, la position de son centre d'inertie, sa masse, son moment d'inertie et son (ses) paramètre(s) de mouvement.

À partir de la connaissance d'une vitesse dans une position donnée (à un instant donné), on cherche à connaître cette vitesse dans une autre position (à un autre instant).

→ Savoir faire

- ❶ Définir le système mécanique étudié.
- ❷ Définir le référentiel galiléen d'étude.
- ❸ Faire le bilan des efforts (extérieurs **et** intérieurs) appliqués au système.
- ❹ Appliquer le TEC/TEM (en précisant bien les deux instants de calcul) :
 - en déterminant la variation d'énergie cinétique du système ;
 - en déterminant le travail des efforts (extérieurs **et** intérieurs).

Afin d'obtenir la vitesse angulaire recherchée, on utilisera éventuellement les relations cinématiques qui existent entre les différents paramètres de mouvement.



On obtiendra directement le résultat :

- s'il y a *un seul* paramètre de mouvement indépendant ;
- si les inconnues de liaison ne travaillent pas.

→ Application

On considère un solide \mathcal{S} constitué d'une bille de centre G , de rayon r , de masse m et de moment d'inertie :

$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

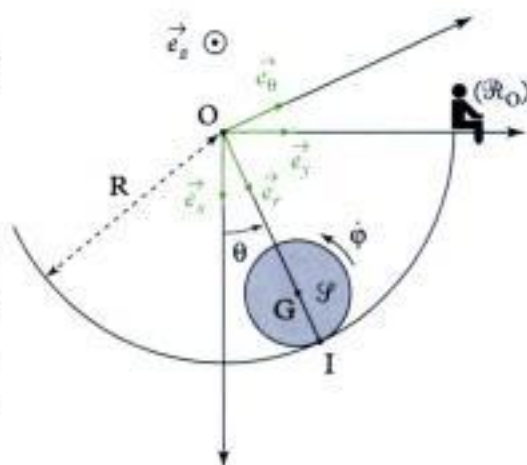
par rapport à l'axe $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$ qui roule sans glisser dans un cylindre creux d'axe $(O; \vec{e}_z)$ et de rayon R ($R > r$) attaché à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On donne la relation cinématique déduite du non-glissement en I :

$$(R - r)\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 0.$$

La bille est lâchée sans vitesse initiale de la position $\theta = \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$).

On cherche la valeur de $\dot{\phi}$ lorsque la bille passe pour la 1^{re} fois au point bas ($\theta = 0$).



Hidden page

Hidden page

Ex. 3 Le yo-yo

Un yo-yo \mathcal{Y} , de centre de masse G , est constitué de deux cylindres identiques ($\vec{OG} = x\vec{e}_x + a\vec{e}_y$), de masse individuelle M , de rayon R et de moments d'inertie individuels :

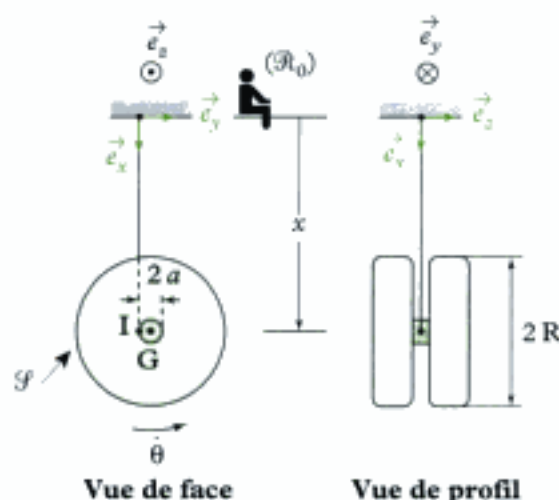
$$J = \frac{1}{2}MR^2,$$

par rapport à l'axe $\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$.

Ces deux cylindres sont reliés entre eux par un petit cylindre de rayon a ($a < R$) supposé sans masse sur lequel le fil est enroulé.

On lâche le yo-yo sans vitesse initiale.

Le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



1) Déterminer l'accélération \vec{x} du centre d'inertie G du yo-yo.

2) Déterminer la tension du fil.

Niveau 2

Ex. 4 Freinage d'une voiture

Une voiture \mathcal{V} est composée d'un châssis de masse $M = 1$ t et de quatre roues de masse $m = 20$ kg, de rayon $R = 0,3$ m et de moment d'inertie par rapport à leurs axes :

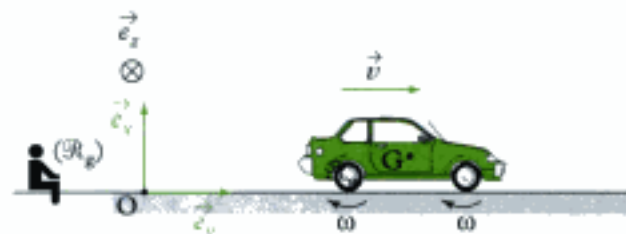
$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

Elle freine alors que sa vitesse est $v_0 = 130$ km · h⁻¹. On suppose que le mouvement est rectiligne et que les roues roulent sans glisser sur le sol, matérialisant le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On donne la condition de RSG :

$$v(t) = R\omega(t),$$

où $v(t)$ est la vitesse de la voiture et $\omega(t)$ est la vitesse angulaire des roues à un instant t .

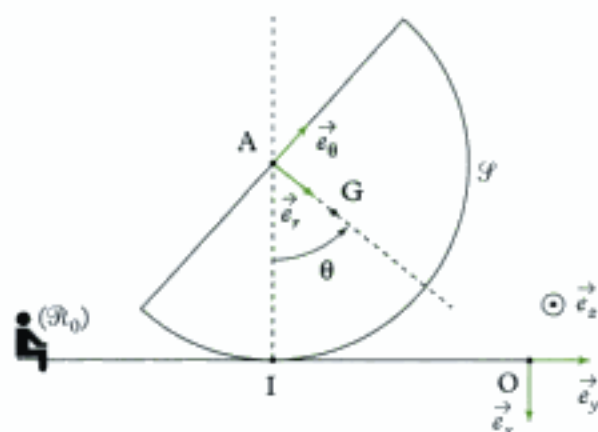


1) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{V})$ de la voiture \mathcal{V} à un instant t . La calculer à $t = 0$, lorsque sa vitesse est v_0 .

2) À l'aide du TEC, déterminer la distance d'arrêt d si \mathcal{V} est soumise à quatre couples de freinage constants $C_0 = 350$ Nm appliqués aux quatre roues.

Ex. 5 Oscillations d'un demi-cylindre

On étudie les oscillations d'un demi-cylindre (\mathcal{P}) homogène, de centre de masse G tel que $AG = \lambda r$, de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J = kmr^2$ par rapport à l'axe $(G; \vec{e}_z)$, qui roule sans glisser sur le plan horizontal attaché au repère galiléen $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Données : $\lambda = \frac{4}{3\pi}$ et $k = \frac{1}{2} - \lambda^2$.

1) Écrire l'équation différentielle du mouvement de \mathcal{P} (en θ).

2) Déterminer la période propre des petites oscillations.

Ex. 6 Chute d'une échelle

On étudie le mouvement de chute d'une échelle \mathcal{E} de longueur 2ℓ , de centre de masse G , de masse m et de moment d'inertie $I = \frac{m\ell^2}{3}$ par rapport à l'axe

$\Delta_G = (G; \vec{e}_z)$. On suppose qu'il y a du frottement entre l'échelle et le sol en A et qu'il n'y a pas de frottement en B.

Le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Comme $y(G) = \ell \cos\theta$, il vient :

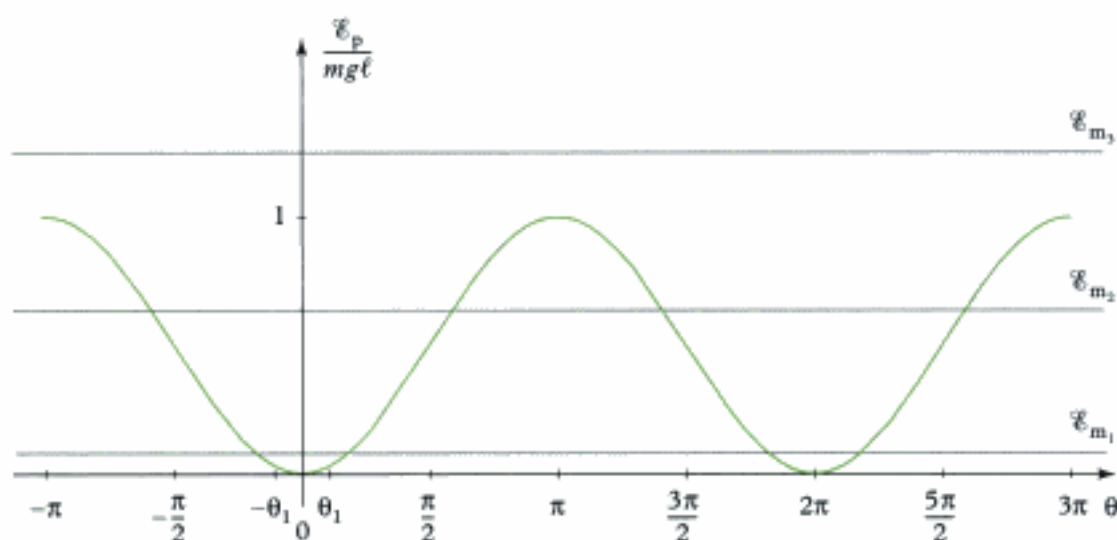
$$\mathcal{E}_p = -mg\ell \cos\theta + \text{cte.}$$

En choisissant la référence d'énergie potentielle en $\theta = 0$;

$$0 = -mg\ell + \text{cte, donc } \mathcal{E}_p = mg\ell(1 - \cos\theta).$$



\mathcal{E}_p s'appelle énergie potentielle de pesanteur.



4) Le système étudié est conservatif. En effet, la seule force qui travaille au cours de ce mouvement (le poids) dérive d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = mg\ell(1 - \cos\theta) \text{ donc } \mathcal{E}_m(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}_e} = \text{cte} = \mathcal{E}_m(t = 0).$$

Or $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$; donc :

$$\mathcal{E}_m(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = \mathcal{E}_m(t = 0) = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + mg\ell(1 - \cos\theta_0).$$



On obtient une intégrale première du mouvement.

À l'aide de la courbe de la question 3), on peut déterminer les différents types de mouvements possibles ; en effet, \mathcal{E}_c représente l'écart entre \mathcal{E}_m et \mathcal{E}_p (cet écart est forcément positif) :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J}(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p).$$

De plus les minima d' \mathcal{E}_p correspondent à des positions d'équilibre stable du balancier ($\theta = \dots, 0, 2\pi, \dots$, rad) et les maxima à des positions d'équilibre instable ($\theta = \dots, -\pi, \pi, \dots$, rad).

• Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_1}$ et si $\theta(t = 0) \in]-\pi ; +\pi[$, alors le balancier va osciller de manière quasi-sinusoïdale autour de la position $\theta = 0$ avec une période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}.$$

• Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_2}$ et si $\theta(t = 0) \in]-\pi ; +\pi[$, alors le balancier va osciller de manière non sinusoïdale autour de la position $\theta = 0$.

• Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_3}$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ne s'annule jamais : le mouvement du balancier est révolutif de type fronde.

Exercice 2

1) On va appliquer le TPC à \mathcal{F} .

Système étudié : \mathcal{F} .

Référentiel galiléen : \mathcal{R}_0 .

Efforts appliqués :

• extérieurs :

→ poids : $\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{g}$ en G ;

→ ceux de la liaison pivot en O (sans frottement) ;

→ ceux de la liaison pivot en A (sans frottement) ;

→ couple moteur : $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$;

• intérieurs au solide \mathcal{F} .

Le TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{E}_c(\mathcal{F})] = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad (1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

• énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0}^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}^2 + 0$.

 $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$ car G est sur l'axe de rotation $(O; \vec{e}_y)$.

Ainsi $\mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}^2$.

• Puissances des efforts :

→ poids, $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{poids}) = \vec{P} \cdot \underbrace{\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} = 0$;

→ pivot en O, $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{pivot en O}) = 0$;

→ pivot en A, $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{pivot en A}) = 0$.

 Les liaisons pivot sont sans frottement (parfaites) donc ne dissipent pas de puissance ; comme de plus un des solides en contact est fixe dans \mathcal{R}_0 , $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{pivot en O}) = \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot en O}) = 0$. Idem en A : $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{pivot en A}) = \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot en A}) = 0$.

→ couple moteur : $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma} \cdot \dot{\theta}\vec{e}_y = \Gamma\vec{e}_y \cdot \dot{\theta}\vec{e}_y = \Gamma\dot{\theta}$.

L'équation du TPC(1) s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}^2\right) = \Gamma\dot{\theta} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta}^2 \sin(2\theta) \times \dot{\theta}$$

Soit en simplifiant sur $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} = 0$ n'est pas une solution intéressante) :

$$\boxed{(I_1 + I_2)\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta}^2 \sin(2\theta) = \Gamma(\theta)} \quad (2)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2$

2) Pour obtenir l'expression de $\dot{\theta}$, il faut intégrer l'équation différentielle (2).

On multiplie d'abord par $\dot{\theta}$:

$$(I_1 + I_2)\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\lambda\dot{\theta}^2 \sin(2\theta)\dot{\theta} \quad \text{soit} \quad (I_1 + I_2)d\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \lambda\dot{\theta}^2 d\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right),$$

ou encore : $(I_1 + I_2)\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \lambda\dot{\theta}^2 \frac{\cos 2\theta}{2} + \text{cte}$.

Or, quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ donc, on a : $(I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \lambda \dot{\theta}_0^2 \times 0 + cte.$

Ainsi :

$$(I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \lambda \dot{\theta}_0^2 \frac{\cos 2\theta}{2} + (I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}$$

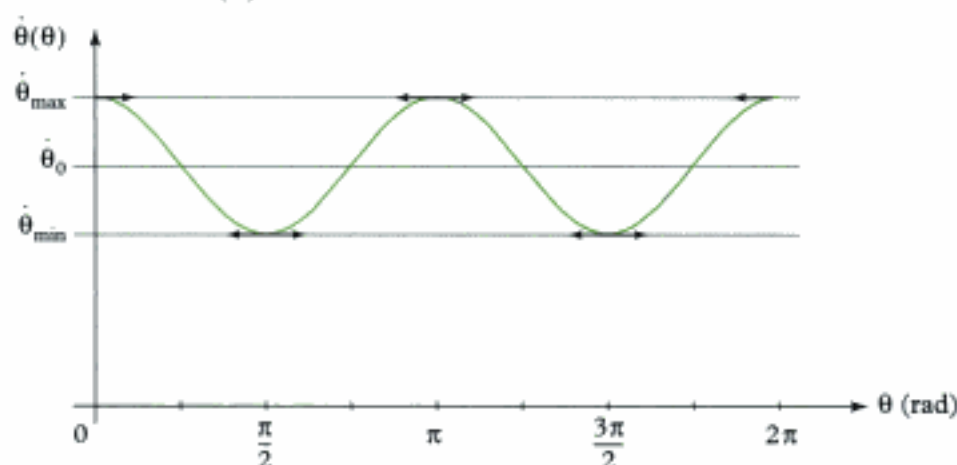
ou encore :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \frac{\lambda \dot{\theta}_0^2}{I_1 + I_2} \cos 2\theta} = \dot{\theta}_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda}{I_1 + I_2} \cos 2\theta}.$$

Comme $\frac{\lambda}{I_1 + I_2} \ll 1$, on a : $\dot{\theta} \approx \dot{\theta}_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \cos 2\theta \right]$. Ainsi :

$$\dot{\theta}(\theta) = \dot{\theta}_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \cos 2\theta \right].$$

Le tracé de la fonction $\theta \rightarrow \dot{\theta}(\theta)$ donne la courbe suivante :



• **Commentaire** : quand le couple moteur varie, la vitesse angulaire de (\mathcal{S}) varie (« la vitesse du moteur » varie).

• $\dot{\theta}_0$ représente la vitesse angulaire moyenne :

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\int_0^\pi \dot{\theta}(\theta) d\theta}{\pi - 0}.$$



Pour déterminer l'expression de $\dot{\theta}(\theta)$, on aurait pu utiliser le TEC appliqué à \mathcal{S} .

TEC :

• instant initial : $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ quand $\theta = \frac{\pi}{4} = \theta_1$.

• instant final : $\dot{\theta}$

$$\Delta \mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} \text{ soit } \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}_0^2 = W_{\text{ext}}(\text{mot}) + 0$$

$$\begin{aligned} \text{avec } W_{\text{ext}}(\text{mot}) &= \int_{\theta_1, \dot{\theta}=\dot{\theta}_1}^{\theta} \Gamma(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} -\lambda \dot{\theta}_0^2 \sin 2\theta d\theta = -\lambda \dot{\theta}_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \sin 2\theta d\theta \\ &= -\lambda \dot{\theta}_0^2 \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} = -\lambda \dot{\theta}_0^2 \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} + 0 \right] = +\lambda \dot{\theta}_0^2 \frac{\cos 2\theta}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi le TEC donne : } \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\dot{\theta}_0^2 = \lambda \dot{\theta}_0^2 \frac{\cos 2\theta}{2} \dots$$

3) L'expression de $\dot{\theta}(\theta)$ donne :

• $\dot{\theta}_{\text{max}} = \dot{\theta}_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \right]$ quand $\cos 2\theta = 1$;

Hidden page

L'équation (1) du TPC s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + M \dot{x}^2 \right) = 2Mg \dot{x}.$$

Il y a deux paramètres (x et θ) mais qui sont liés car il n'y a pas glissement au point de contact I ; la FFCS donne :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{S})}_{e^{\mathcal{S}}}_{/\mathcal{R}_0} = \underbrace{\vec{v}(G)}_{e^{\mathcal{S}}}_{/\mathcal{R}_0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (-a \vec{e}_y) = \dot{x} \vec{e}_x + (-a \dot{\theta}) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y \\ &= \dot{x} \vec{e}_x + (-a \dot{\theta}) (-\vec{e}_x) = (\dot{x} + a \dot{\theta}) \vec{e}_x. \end{aligned}$$

On a donc $\dot{x} + a \dot{\theta} = 0$, soit $\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{a}$.

En reportant cette valeur dans l'équation du TPC, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} MR^2 \left(-\frac{\dot{x}}{a} \right)^2 + M \dot{x}^2 \right) = 2Mg \dot{x}, \text{ soit } \frac{1}{2} \frac{MR^2}{a^2} \times 2\dot{x} \ddot{x} + M \times 2\dot{x} \ddot{x} = 2Mg \dot{x}.$$

Soit, en simplifiant par M et \dot{x} ($\dot{x} = 0$ n'est pas une solution intéressante) :

$$\frac{R^2}{a^2} \ddot{x} + 2\ddot{x} = 2g, \text{ puis } \ddot{x} = \frac{2}{2 + \frac{R^2}{a^2}} g$$

ou encore :

$$\ddot{x} = \frac{1}{1 + \frac{R^2}{2a^2}} g$$

$\begin{matrix} \nearrow m \cdot s^{-2} \\ \nwarrow m^2 \quad \nearrow m^2 \end{matrix}$

2) Pour déterminer la tension du fil, les méthodes énergétiques ne fonctionnent pas car cette tension ne travaille pas dans \mathcal{R}_0 . Il va donc falloir utiliser un théorème de la dynamique.

Par exemple le TCM projeté sur \vec{e}_x :

Système : \mathcal{S} (masse : $2M$).

Référentiel galiléen : \mathcal{R}_0 .

Efforts extérieurs appliqués au système S

→ poids \vec{P} ;

→ tension du fil \vec{T} .

Équation du TCM :

$$2M \times \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{P} + \vec{T}, \text{ soit } 2M \times \ddot{x} \vec{e}_x = 2Mg \vec{e}_x - T \vec{e}_x.$$

Soit en projection sur \vec{e}_x : $T = 2Mg - 2M \cdot \ddot{x}$.

En reportant l'expression de \ddot{x} obtenue dans la 1^{re} question, on obtient :

$$T = 2Mg - 2M \times \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2a^2}} \text{ soit } T = \frac{\frac{R^2}{2a^2}}{1 + \frac{R^2}{2a^2}} \cdot 2Mg$$

ou encore :

$$T = \frac{1}{\frac{R^2}{2a^2} + 1} \cdot 2Mg$$

$\begin{matrix} \nearrow N = kg \cdot m \cdot s^{-2} \\ \nwarrow m^2 \quad \nearrow m^2 \quad \nwarrow kg \quad \nearrow m \cdot s^{-2} \end{matrix}$

 Comme le yo-yo chute, $T < \text{Poids} = 2Mg$ (ok).

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) La voiture \mathcal{S} est composée :

- d'un châssis qui est en translation par rapport à \mathcal{R}_g ; son énergie cinétique est $\mathcal{E}_{c_1/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}Mv^2$;
- de quatre roues identiques dont le mouvement est composé (pour chacune d'elles) d'un mouvement d'ensemble de translation caractérisé par la vitesse de leurs centres de masse dans \mathcal{R}_g et d'un mouvement de rotation propre ; leurs énergies cinétiques sont :

$$\mathcal{E}_{c_2/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_{c_3/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_{c_4/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_{c_5/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

L'énergie cinétique de la voiture \mathcal{S} est donc :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}Mv^2 + 4\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\right).$$

En tenant compte de la condition de RSG, on a :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}Mv^2 + 4\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2\right)$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\left(M + 4m + 4\frac{J}{R^2}\right)v^2.$$

Avec $J = \frac{1}{2}mR^2$, on a :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(M + 4m + 2m)v^2 \quad \text{soit} \quad E_c(S) = \frac{1}{2}(M + 6m)v^2.$$

A.N. À $t = 0$:

$$E_c(0) = \frac{1}{2}(1\,000 + 6 \times 20)\left(\frac{130}{3,6}\right)^2 \approx 7,3 \times 10^5 \text{ J} \approx 730 \text{ kJ}.$$

2) **Système étudié** : voiture \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

Bilan des efforts appliqués à S

• extérieurs :

→ poids : $\vec{P} = (M + 4m)\vec{g}$;

→ réactions : $\vec{R}_e = \vec{T} + \vec{N}$ du sol aux quatre points de contact avec les roues.

 Comme il y a RSG, il y a du frottement, donc \vec{T} existe ($\vec{T} \neq \vec{0}$) !

• intérieurs :

→ couple de freinage $\vec{\Gamma}_0 = -4C_0\vec{e}_z$.

 C'est un couple de freinage, d'où le signe -.

TEC appliqué entre $t = 0$ (vitesse v_0) et t_1 (vitesse $v = 0$) :

$$\Delta\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_c(t_1) - \mathcal{E}_c(t = 0) = \mathcal{W}_{\text{ext}, t = 0 \rightarrow t_1} + \mathcal{W}_{\text{int}, t = 0 \rightarrow t_1} \quad (1)$$

• **Énergie cinétique**

$\mathcal{E}_c(t_1) = 0$ car $v(t_1) = 0$

$\mathcal{E}_c(t = 0) = \mathcal{E}_c(0) = \frac{M + 6m}{2}v_0^2.$

• **Travaux des efforts mécaniques**

• extérieurs :

→ $W(\vec{P}) = 0$ car le poids est perpendiculaire au déplacement.

→ La puissance totale des actions de contact avec le sol est nulle car la vitesse de glissement de \mathcal{S} sur le sol est nulle :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{S} \leftrightarrow \text{sol}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{S} \rightarrow \text{sol})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{sol} \rightarrow \mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = 0.$$

Comme le sol est fixe dans \mathcal{R}_g , $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{S} \rightarrow \text{sol})_{/\mathcal{R}_g} = 0$ donc : $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{sol} \rightarrow \mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = 0$

donc $W(\vec{R}_e) = \int_{t=0}^{t_1} \mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{sol} \rightarrow \mathcal{S}) dt = 0.$

La somme des travaux des 4 réactions du sol est donc nulle.

• intérieurs :

$$\bullet W(\vec{\Gamma}_0) = \int_{t=0}^{t_1} \vec{\Gamma}_0 \cdot \vec{\Omega} dt = \int_{t=0}^{t_1} -\Gamma_0 \omega dt$$

↑ action de la caisse sur les roues
 ↑ mouvement des roues par rapport à la caisse
 ↑ couple de freinage opposé à la vitesse angulaire

soit : $W(\vec{\Gamma}_0) = -\frac{\Gamma_0}{R} \int_{t=0}^{t_1} v dt = -\frac{\Gamma_0}{R} \int_{t=0}^{t_1} dx = -\frac{\Gamma_0}{R} d$ (d la distance d'arrêt, Γ_0 constant).

(1) s'écrit donc : $0 - \frac{M + 6m}{2} v_0^2 = -\frac{\Gamma_0}{R} d = -\frac{4C_0 d}{R}$, soit $d = \frac{(M + 6m) R v_0^2}{8C_0}$.

$\frac{\text{kg} \times \text{m} \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m}$. La relation est homogène.

A.N. $d = \frac{(1\,000 + 6 \times 20) \times 0,3 \times \left(\frac{130}{3,6}\right)^2}{8 \times 350} = 156 \text{ m}.$

Exercice 5

1) Comme le mouvement de \mathcal{S} ne dépend que d'un paramètre (θ) et qu'il n'y a pas de glissement I, on peut appliquer le TEC pour écrire l'équation différentielle du mouvement.

Système étudié : \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0 = (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Efforts appliqués à S

• extérieurs :

→ poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ (en G) ;

→ contact $\vec{R} = -N\vec{e}_x + T\vec{e}_y$ en I ;

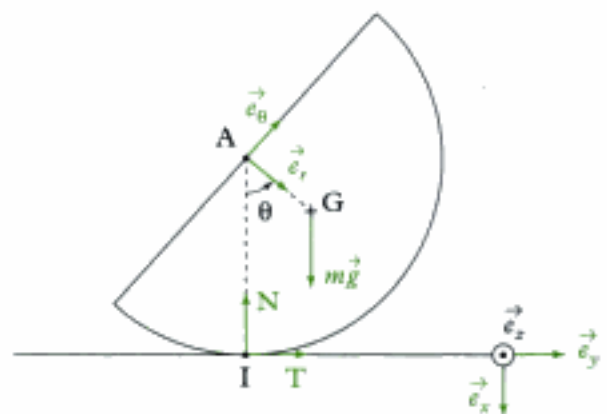
• intérieurs au solide \mathcal{S} .

Équation du TPC :

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(\mathcal{S})] = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad (1).$$

Énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) + \frac{1}{2} m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0}^2$$



$$\begin{aligned} \text{où } \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} k m r^2 \dot{\theta}^2 \text{ et } \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}_0} = \underbrace{\vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{F}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{F}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathbf{IG}} \\ &= \vec{0} + \dot{\theta} \vec{e}_x \wedge (-r \vec{e}_x + \lambda r \vec{e}_y) \\ &= r \dot{\theta} (-\vec{e}_y + \lambda \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$



En effet, il n'y a pas glissement en I, donc $\vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$.

On utilise cette information pour déterminer la vitesse de G en appliquant la formule de Varignon.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \vec{v}^2(\mathbf{G}) &= \vec{v}(\mathbf{G}) \cdot \vec{v}(\mathbf{G}) = (r \dot{\theta})^2 (-\vec{e}_y + \lambda \vec{e}_\theta) \cdot (-\vec{e}_y + \lambda \vec{e}_\theta) \\ &= r^2 \dot{\theta}^2 ((-1)^2 + (\lambda)^2 - 2\lambda \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \vec{v}^2(\mathbf{G}) = r^2 \dot{\theta}^2 (1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta).$$

$$\text{Ainsi } E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m r^2 [k + (1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta)] \dot{\theta}^2.$$

• **Puissances des efforts :**

→ poids :

$$\mathcal{P}(\text{poids}) = \vec{P} \cdot \vec{v}(\mathbf{G})_{/\mathcal{R}_0} = m g \vec{e}_x \cdot r \dot{\theta} (-\vec{e}_y + \lambda \vec{e}_\theta) = m g r \dot{\theta} \lambda \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -m g r \dot{\theta} \lambda \sin \theta ;$$

→ action du sol en I :

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(\mathbf{I} \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}_0} = 0 \text{ (car il n'y a pas de glissement) ;}$$

→ actions mécaniques intérieures au solide \mathcal{F} : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

Ainsi l'équation (1) du TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m r^2 (k + (1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta)) \dot{\theta}^2 \right] = -m g r \dot{\theta} \lambda \sin \theta,$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} m r^2 [k + (1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta)] \times 2 \times \dot{\theta} \times \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m r^2 (2\lambda \sin \theta \dot{\theta}) \dot{\theta}^2 = -m g r \dot{\theta} \lambda \sin \theta.$$

Soit en simplifiant par m , r et $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} \neq 0$), on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$[k + (1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta)] r \ddot{\theta} + r \lambda \sin \theta \dot{\theta}^2 + g \lambda \sin \theta = 0.$$

2) Pour obtenir la période des petites oscillations, il faut linéariser l'expression précédente :

comme θ est petit, $\begin{cases} \cos \theta \approx 1 \\ \sin \theta \approx \theta \end{cases}$ et :

$$[k + 1 + \lambda^2 - 2\lambda] r \ddot{\theta} + 0 + g \lambda \theta = 0$$

↑
 $\theta \dot{\theta}^2$ est un terme infiniment petit d'ordre 3 donc négligeable.

$$\text{soit : } \ddot{\theta} + \frac{g \lambda}{r(k + 1 + \lambda^2 - 2\lambda)} \theta = 0 \text{ qui peut s'écrire } \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0,$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{g \lambda}{r(k + 1 + \lambda^2 - 2\lambda)} = \frac{g \lambda}{r \left(\frac{1}{2} - \lambda^2 + 1 + \lambda^2 - 2\lambda \right)} = \frac{g \lambda}{r \left(\frac{3}{2} - 2\lambda \right)} = \frac{g}{r \left(\frac{3}{2\lambda} - 2 \right)}$$

$$\text{soit } \omega_0^2 = \frac{g}{r \left(\frac{3}{2 \cdot \frac{4}{3\pi}} - 2 \right)} = \frac{g}{r \left(\frac{9\pi}{8} - 2 \right)} > 0$$

Hidden page

Puissances des efforts :

• extérieurs

→ poids :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0} = -mg\vec{e}_y \cdot \ell\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) = -mg\ell\dot{\theta}\cos\theta;$$

→ réaction en A :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_A) = \vec{R}_A \cdot \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}_0} = (N_A\vec{e}_y + T_A\vec{e}_x) \cdot (-2\ell\sin\theta\dot{\theta}\vec{e}_x) = -T_A \times 2\ell\sin\theta\dot{\theta} = fN_A \times 2\ell\sin\theta\dot{\theta}.$$

🌀 Comme il y a glissement en A, $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_A) \neq 0$. Par ailleurs, $\sin\theta > 0$, $\dot{\theta} < 0$ donc $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_A) < 0$: normal car le frottement s'oppose au mouvement de chute.

→ réaction en B :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_B) = N_B\vec{e}_x \cdot \vec{v}(B)_{/\mathcal{R}_0} = 0$$

car $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}_0}$ est selon \vec{e}_y .

🌀 Comme il n'y a pas de frottement en B, \vec{R}_B ne travaille pas.

• intérieurs : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

L'équation (1) du TPC s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \right] = -mg\ell\dot{\theta}\cos\theta + fN_A \times 2\ell\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} m \ell^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = [fN_A \times 2\ell\sin\theta - mg\ell\cos\theta]\dot{\theta}.$$

Soit en simplifiant par $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} \neq 0$) :

$$\frac{4}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} = 2fN_A \ell \sin\theta - mg\ell \cos\theta \quad (2)$$

🌀 Comme il y avait du glissement et du frottement en A, on savait *a priori* que l'équation du TPC ne suffirait pas à obtenir l'équation différentielle du mouvement.

3) Il faut donc écrire une équation de la dynamique afin de déterminer N_A . Par exemple, l'équation du TCM en projection sur \vec{e}_y .

Système : \mathcal{S} .

Référentiel galiléen : \mathcal{R}_0 .

Efforts extérieurs appliqués :

- \vec{P} ;
- \vec{R}_B ;
- \vec{R}_A .

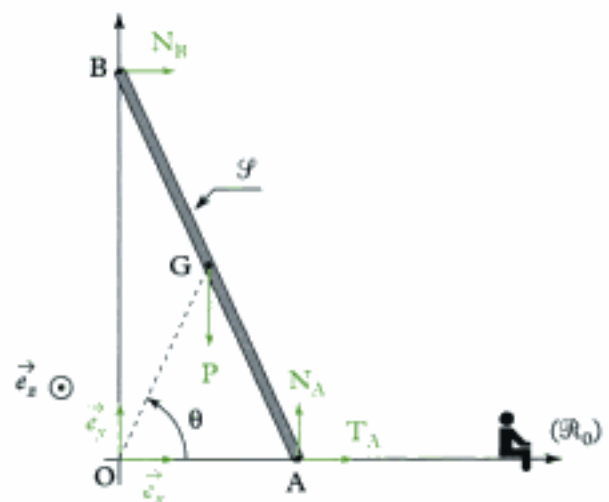
Équation du TCM :

$$m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R}_B + \vec{R}_A \quad (3)$$

accélération de G :

$$\vec{a}(G) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(G)) = \frac{d}{dt}(\ell\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)) = \ell\ddot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) + \ell\dot{\theta}(-\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_x - \sin\theta\dot{\theta}\vec{e}_y)$$

$$\text{soit } \vec{a}(G) = -(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_x + (\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e}_y.$$



L'équation vectorielle (3) du TCM s'écrit donc :

$$m[-(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_x + (\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e}_y] = -mg\vec{e}_y + N_B\vec{e}_x + N_A\vec{e}_y + T_A\vec{e}_x.$$

En projection sur \vec{e}_y , cela donne :

$$m(\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta) = -mg + N_A \text{ soit } N_A = mg + m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta).$$

En reportant cette expression de N_A dans l'équation (2), on obtient :

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = f[mg + m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)] \times 2\ell\sin\theta - mg\ell\cos\theta$$

ce qui donne l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\frac{4}{3}\ell^2\ddot{\theta} - 2f\ell^2\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta + 2\ell^2f\dot{\theta}^2\sin^2\theta = [2f\sin\theta - \cos\theta]g\ell}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ m^2 \text{ rad} \cdot s^{-2} & m^2 \text{ rad} \cdot s^{-2} & m^2 (\text{rad} \cdot s^{-1})^2 & m^2 (\text{rad} \cdot s^{-1})^2 & m \cdot s^{-2} & m \end{matrix}$

4) À l'équilibre, on peut reprendre l'équation ci-dessus avec $\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$ qui donne :

$$0 = (2f\sin\theta_0 - \cos\theta_0)g\ell \text{ soit } 2f\sin\theta_0 = \cos\theta_0, \text{ donc } \theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{2f}\right).$$

Aussi pour qu'il y ait équilibre, il faut que :

$$\theta \geq \theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{2f}\right).$$



• Quand $f \rightarrow 0^{(+)}$ (très peu d'adhérence), $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (il faut que l'échelle soit verticale).

• Quand f croît, θ_0 décroît (plus il y a d'adhérence, plus l'échelle tient dans une position inclinée).

Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) Comme il y a non glissement en I et que le fil est inextensible :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2)_{/\mathcal{F}_1} = \vec{0} = \vec{v}(I \in \mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_0} - \vec{v}(I \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0} - \vec{v}(I \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0}.$$



• \mathcal{F}_2 est en translation dans \mathcal{R}_0 , donc $\vec{v}(I \in \mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_0}$.

$$\text{Or } \underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{F}_1} = \underbrace{\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0}}_{\in \mathcal{F}_1} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{CI}}_{\in \mathcal{F}_1} = \vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0} + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (r\vec{e}_y) = \vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0} + r\dot{\theta}(-\vec{e}_x).$$

$$\text{Ainsi } \vec{0} = \vec{v}(G) - (\vec{v}(C) - r\dot{\theta}\vec{e}_x) \text{ donc } \vec{v}(G) = \vec{v}(C) - r\dot{\theta}\vec{e}_x.$$

On a, de l'autre côté de la poulie, non glissement en L :

$$\vec{v}(L \in \mathcal{R}_0)_{/\mathcal{F}_1} = \vec{0} = -\vec{v}(L \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}_0}.$$

$$\text{Or } \underbrace{\vec{v}(L \in \mathcal{F}_1)}_{\in \mathcal{F}_1} / \mathbb{R}_0 = \underbrace{\vec{v}(C)}_{\in \mathcal{F}_1} / \mathbb{R}_0 + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_1 / \mathbb{R}_0}}_{\uparrow} \wedge \overrightarrow{CL} = \vec{v}(C) / \mathbb{R}_0 + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (-r \vec{e}_y) = \vec{v}(C) / \mathbb{R}_0 + r \dot{\theta} \vec{e}_x.$$

$$\text{Ainsi } \vec{0} = \vec{v}(C) / \mathbb{R}_0 + r \dot{\theta} \vec{e}_x; \text{ donc } \vec{v}(C) = -r \dot{\theta} \vec{e}_x.$$

$$\text{Or } \vec{v}(C) = \dot{x} \vec{e}_x.$$

On obtient alors (grâce à la 1^{re} relation) :

$$\vec{v}(G) = -r \dot{\theta} \vec{e}_x - r \dot{\theta} \vec{e}_x = -2r \dot{\theta} \vec{e}_x = 2\vec{v}(C)$$

$$\vec{v}(G) = 2\dot{x} \vec{e}_x.$$

2) Comme la position du système Σ ne dépend que d'un paramètre et qu'il n'y a pas de glissement, on peut utiliser uniquement le TPC pour trouver l'équation différentielle du mouvement.

• **Système étudié** : $\Sigma = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \text{fil}$.

• **Référentiel galiléen** : $\mathbb{R}_0 (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Efforts appliqués à Σ**

• extérieurs :

$$\rightarrow \text{poids de } \mathcal{F}_1 : \vec{P}_1 = m\vec{g} = mg\vec{e}_x;$$

$$\rightarrow \text{poids de } \mathcal{F}_2 : \vec{P}_2 = M\vec{g} = Mg\vec{e}_x;$$

$$\rightarrow \text{action du ressort en C} : \vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \quad (\ell_0 : \text{longueur à vide du ressort})$$

$$\rightarrow \text{réaction du support en A} : \vec{R}_A = R_A \vec{e}_x$$

• intérieurs :

\rightarrow entre le fil et la poulie, pas de glissement donc pas de puissance dissipée ;

\rightarrow entre le fil et \mathcal{F}_2 , force \vec{T}_B qui ne travaille pas car $\vec{v}(B \in \mathcal{F}_2) / \text{fil} = \vec{0}$ (le fil et \mathcal{F}_2 sont attachés en B donc il n'y a pas de mouvement relatif en B).

$$\text{Équation du TPC} : \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(\Sigma)] = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad (1)$$

• **Énergie cinétique** : $\mathcal{E}_c(\Sigma) = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1) + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2) + \mathcal{E}_c(\text{fil})$
(0)

$$\text{où } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_1) + \frac{1}{2} m \vec{v}^2(C) / \mathbb{R}_0 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \frac{mr^2 \dot{\theta}^2}{x^2} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} m \dot{x}^2$$

$$\text{et } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}_2) + \frac{1}{2} M \vec{v}^2(G) / \mathbb{R}_0 = \underbrace{0}_{(0)} + \frac{1}{2} M \times (2\dot{x})^2, \text{ donc } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2) = \frac{1}{2} \times 4M\dot{x}^2.$$

(pas de rotation)

$$\text{Ainsi } E_c(\Sigma) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m + 4M \right] \dot{x}^2.$$

• **Puissance des efforts**

• extérieurs :

$$\rightarrow \text{poids de } \mathcal{F}_1 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_1) = mg\vec{e}_x \cdot \vec{v}(C) / \mathbb{R}_0 = mg\vec{e}_x \cdot \dot{x} \vec{e}_x = mg\dot{x};$$

$$\rightarrow \text{poids de } \mathcal{F}_2 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_2) = Mg\vec{e}_x \cdot \vec{v}(G) / \mathbb{R}_0 = Mg\vec{e}_x \cdot (2\dot{x} \vec{e}_x) = 2Mg\dot{x};$$

$$\rightarrow \text{ressort en C} : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F}) = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot \vec{v}(C) / \mathbb{R}_0 = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot (\dot{x} \vec{e}_x) = -k(x - \ell_0)\dot{x};$$

• intérieurs : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

Ainsi l'équation (1) du TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m + 4M \right) \dot{x}^2 \right] = (mg + 2Mg)\dot{x} - k(x - \ell_0)\dot{x}$$

soit $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m + 4M \right) \times 2\dot{x}\ddot{x} = (m + 2M)g\dot{x} - k(x - \ell_0)\dot{x}$

soit en simplifiant par \dot{x} ($\dot{x} \neq 0$) :

$$\left(\frac{3}{2}m + 4M \right) \ddot{x} + k(x - \ell_0) = (m + 2M)g \quad (2)$$

• À l'équilibre, $\ddot{x} = 0$, donc l'équation ci-dessus s'écrit :

$$k(x_{\text{eq}} - \ell_0) = (m + 2M)g \quad (3)$$

En posant $X = x - x_{\text{eq}}$ (X représente la distance par rapport à la position d'équilibre).

On a $\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \\ \ddot{X} = \ddot{x} \end{cases}$ et l'équation (2) devient :

$$\left(\frac{3}{2}m + 4M \right) \ddot{X} + k(X + x_{\text{eq}} - \ell_0) = (m + 2M)g.$$

Soit en soustrayant l'équation (3) :

$$\left(\frac{3}{2}m + 4M \right) \ddot{X} + kX = 0 \text{ ou encore } \ddot{X} + \frac{k}{\frac{3}{2}m + 4M} X = 0$$

soit : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{\frac{3}{2}m + 4M}$, X : distance par rapport à la position d'équilibre.

La période propre du mouvement s'écrit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m + 4M}{k}}$$

$\leftarrow s$
 $\leftarrow kg$
 $\leftarrow N \cdot m^{-1} = kg \cdot s^{-2}$

Exercice 8

1) Expression de la vitesse de glissement \vec{v}_g :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{E}} = \vec{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{R}_0} - \vec{v}(I \in \mathcal{C})_{/\mathcal{R}_0}, \text{ soit } \vec{v}_g = v\vec{e}_x - r\omega\vec{e}_x$$

donc : $\vec{v}_g = (v - r\omega)\vec{e}_x$.

On voit que lorsque $v = 0$ (au départ), $v_g = -r\omega\vec{e}_x$: \mathcal{F} glisse donc sur les rouleaux (au départ).

2) Appliquons le TCM à (\mathcal{F}) :

Système étudié : \mathcal{F} .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_0 .

Efforts extérieurs appliqués au système

→ poids de \mathcal{S} : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;

→ réaction \vec{R} d'un rouleau : $\vec{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_z$;

pour n rouleaux, on aura $n\vec{R} = n(\vec{T} + \vec{N})$.

 Comme il y a glissement, $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ soit $|T| = fN$.

Par ailleurs $\vec{T} = T\vec{e}_x$ s'oppose au glissement $\vec{v}_g = (v - r\omega)\vec{e}_x$.

Comme $\vec{v}_g \cdot \vec{e}_x < 0$, $T > 0$, donc on a : $T = fN$.

 Au départ, $v = 0$ donc, jusqu'à l'instant t_1 où $\vec{v}_g = \vec{0}$, on a : $\vec{v}_g \cdot \vec{e}_x < 0$.

• L'équation du TCM s'écrit :

$$m\vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + n\vec{R} \text{ soit } m\frac{dv}{dt}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_z + nT\vec{e}_x + nN\vec{e}_z.$$

En projection sur \vec{e}_x , on obtient : $m\frac{dv}{dt} = nT$. (1)

En projection sur \vec{e}_z , on obtient : $0 = nN - mg$. (2)

De plus puisqu'il y a glissement, on aura : $T = fN$. (3)

En utilisant les équations (1), (2) et (3), on trouve :

$$m\frac{dv}{dt} = fmg, \text{ soit } \frac{dv}{dt} = fg.$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$v = fgt + K.$$

Or à $t = 0$, $v = 0$, donc $K = 0$; finalement, on obtient :

$$v = fgt.$$

Cette phase se poursuit tant que la vitesse de glissement ne s'annule pas : t_1 correspond donc à l'instant où la vitesse de glissement s'annule.

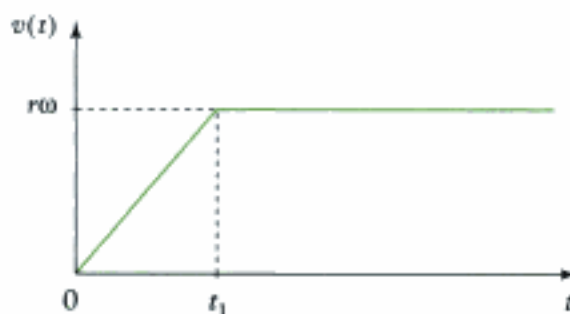
Ainsi : $\vec{v}_g = (v - r\omega)\vec{e}_x$.

Or $v = fgt$ donc $\vec{v}_g = (fgt - r\omega)\vec{e}_x$.

À l'instant t_1 : $\vec{v}_g = \vec{0}$; donc $fgt_1 - r\omega = 0$ soit : $t_1 = \frac{r\omega}{fg}$.

A.N. $t_1 = \frac{0,1 \times 2\pi}{0,1 \times 10}$, soit $t_1 \approx 0,628$ s

La courbe $t \rightarrow v(t)$ donne :



 À partir de t_1 , \vec{v}_g reste nulle et $v(t) = r\omega$.

3) Pour obtenir l'expression d'un travail, on peut utiliser le TEC.

Système étudié : \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_0 .

Bilan des efforts appliqués au système :

• extérieurs :

→ poids : \vec{P} de \mathcal{S} ;

→ réaction : $n\vec{R}$ de n rouleaux (action des rouleaux \mathcal{C} sur la plaquette \mathcal{S}).

• intérieurs au solide \mathcal{S} .

• **Équation du TEC** entre les instants $t = 0$ ($v = 0$) et $t = t_1$ (fin du glissement) :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_1) - \mathcal{E}_c(0) = \underbrace{W_{\text{ext}}}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} + W_{\text{int}} \quad (4)$$

• **Énergie cinétique :** $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 (\text{G})_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} m v^2$.

Or $v(t_1) = r\omega$ et $v(t = 0) = 0$.

• **Travaux des efforts**

• extérieurs :

→ poids : $W(\vec{P}) = 0$ car déplacement horizontal ;

→ réaction : $W(n\vec{R}) = W_1$.

• intérieurs : $W_{\text{int}} = 0$.

Ainsi l'équation (4) du TEC s'écrit :

$$\frac{1}{2} m (r\omega)^2 - 0 = 0 + W_1 \text{ soit } \boxed{W_1 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2}$$

$J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ kg m^2 $(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2$



On aurait pu calculer directement W_1 ; en effet :

$$\begin{aligned} W_1 &= W(n\vec{R}) = \int_0^{t_1} \mathcal{P}(n\vec{R}) dt = \int_0^{t_1} \underbrace{(nN\vec{e}_y + nT\vec{e}_x)}_{\text{effort extérieur sur } \mathcal{S}} \cdot \underbrace{\vec{v}(I \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}_0}}_{\substack{\Delta \text{ mouvement de} \\ \mathcal{S} \text{ par rapport à } \mathcal{R}_0}} dt \\ &= \int_0^{t_1} (nN\vec{e}_y + nT\vec{e}_x) \cdot v\vec{e}_x dt = \int_0^{t_1} f(nN)(v) dt \\ &= \int_0^{t_1} f(mg)(fgt) dt = f^2 mg^2 \left[\frac{t^2}{2} - 0 \right] \end{aligned}$$

soit en reportant l'expression de t_1 :

$$W_1 = f^2 mg^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{r\omega}{fg} \right)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2.$$

4) Pour trouver le travail (W_2) fourni par le moteur, on applique le TEC :

Système : $(\mathcal{S}) + n(\mathcal{C}) = \Sigma$.

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_0 .

Bilan des efforts appliqués au système

• extérieurs :

→ poids de \mathcal{S} ;

→ poids de $n(\mathcal{C})$;

→ n liaisons pivot (centre les n rouleaux) sans frottement ;

→ moteur ;

• intérieurs :

→ contact entre les n rouleaux et la plaque.

Le TEC s'écrit, entre $t = 0$ ($v = 0$) et $t = t_1$ ($v = r\omega$ ou $\vec{v}_G = \vec{0}$) :

$$\Delta \mathcal{E}_c(\Sigma) = \mathcal{E}_c(t_1) + \mathcal{E}_c(t = 0) = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} \quad (5)$$

• Énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma) = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) + \underbrace{n\mathcal{E}_c(\mathcal{C})}_{\text{cte car } \omega = \text{cte}}, \text{ avec } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G)_{/\mathcal{R}_0} + \mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ainsi $E_c(\Sigma) = \frac{1}{2}mv^2 + \text{cte}.$

• Travaux des efforts

• extérieurs :

→ $W_{\text{ext}}(\text{poids } \mathcal{F}) = 0$ car altitude constante ;

→ $W_{\text{ext}}(\text{poids } \mathcal{C}) = 0$;

→ $W_{\text{ext}}(\text{liaison pivot}) = 0$ car pas de frottement et axe des liaisons pivot fixe dans \mathcal{R}_0 ;

→ $W_{\text{moteur}} = W_2$;

• intérieurs :

effort de \mathcal{C} sur \mathcal{F} \wedge mouvement relatif de \mathcal{F} par rapport à \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \rightarrow W(\text{contact}) &= \int_0^{t_1} \overrightarrow{nR} \cdot \overrightarrow{v}(I \in \mathcal{F})_{/\mathcal{C}} dt = \int_0^{t_1} n(N\vec{e}_z + T\vec{e}_x) \cdot (v - r\omega)\vec{e}_x dt \\ &= \int_0^{t_1} (nfN\vec{e}_x) \cdot (v - r\omega)\vec{e}_x dt = \int_0^{t_1} fmg(v - r\omega) dt = fmg \int_0^{t_1} (fgt - r\omega) dt \\ &= fmg \left[fg \frac{t_1^2}{2} - r\omega t_1 - 0 \right] = f^2 g^2 m \frac{t_1^2}{2} - fmgr\omega t_1 \end{aligned}$$

en reprenant l'expression de t_1 , on a :

$$W(\text{contact}) = f^2 g^2 m \frac{1}{2} \left(\frac{r\omega}{fg} \right)^2 - fmgr\omega \frac{r\omega}{fg} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - mr^2\omega^2 = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

L'équation (5) du TEC s'écrit donc :

$$\left(\frac{1}{2}m(r\omega)^2 + \text{cte} \right) - (0 + \text{cte}) = W_2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \text{ soit } W_2 = mr^2\omega^2.$$

Ainsi $W_2 = 2W_1$; il n'y a que la moitié du travail fourni par le moteur qui « profite » à la plaquette. L'autre moitié est dissipée sous forme de chaleur par frottement au niveau des points de contact entre les rouleaux et la plaquette.

Exercice 9

1) Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement du vélo d'appartement ($\Sigma = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_5$) en θ_3 , on va appliquer le TPC sur Σ .

Système : $\Sigma = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_5$.

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Bilan des efforts appliqués Σ

• extérieurs :

→ poids de \mathcal{F}_5 : $\vec{P}_5 = m_5\vec{g}$ en G_5 ;

• intérieurs :

→ couple moteur (de \mathcal{F} sur \mathcal{F}_3) : $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$;

→ frein (de \mathcal{F} sur \mathcal{F}_5) : $\vec{\Gamma}_f = -\Gamma_f\vec{e}_y$

- liaison pivot en G_3 (entre \mathcal{S} et \mathcal{S}_3) sans frottement ;
- liaison pivot en G_5 (entre \mathcal{S} et \mathcal{S}_5) sans frottement ;
- courroie (entre \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_5) ne dissipe pas de puissance (énoncé) ;
- efforts intérieurs à chaque solide \mathcal{S} , \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_5 .

Équation du TPC :
$$\frac{d}{dt}[\mathcal{E}_c(\Sigma)] = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad (1)$$

- **Énergie cinétique :** $\mathcal{E}_c(\Sigma) = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_3) + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_5)$
 donc : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = 0$ car \mathcal{S} n'est pas en mouvement dans \mathcal{R}_0 ;
 avec $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_3) \approx 0$ car la masse et le moment d'inertie sont négligeables ;

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_5) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}_5) + \frac{1}{2} m_5 \underbrace{\vec{v}^2(G_5)_{/\mathcal{R}_0}}_0 = \frac{1}{2} I_5 \dot{\theta}_5^2 + 0 = \frac{1}{2} m_5 r_5^2 \dot{\theta}_5^2.$$

Donc $\mathcal{E}_c(\Sigma) = \frac{1}{2} m_5 r_5^2 \dot{\theta}_5^2.$

• **Puissance des efforts appliqués à Σ**

– extérieurs :

→ poids $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_5) = m_5 \vec{g} \cdot \underbrace{\vec{v}(G_5)_{/\mathcal{R}_0}}_0 = 0$

– intérieurs :

- couple moteur : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{\Gamma}) = \overbrace{\vec{\Gamma} \cdot \dot{\theta}_3 \vec{e}_y}^{\substack{\text{effort de} \\ \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_3}} \cdot \overbrace{\vec{\theta}_3 \vec{e}_y}^{\substack{\text{mouvement de } \mathcal{S}_3, \text{ par} \\ \text{rapport à } \mathcal{S}}} = \Gamma \dot{\theta}_3 ;$
- frein : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{\Gamma}_f) = \vec{\Gamma}_f \cdot \dot{\theta}_5 \vec{e}_y = -\Gamma_f \vec{e}_y \cdot \dot{\theta}_5 \vec{e}_y = -\Gamma_f \dot{\theta}_5 ;$
- pivot en G_3 : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot } G_3) = 0$, pas de frottement ;
- pivot en G_5 : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot } G_5) = 0$, pas de frottement ;
- courroie : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{courroie}) = 0$, pas de puissance dissipée (voir énoncé) ;
- efforts intérieurs aux solides \mathcal{S} , \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_5 : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0.$

Ainsi l'équation (1) du TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_5 r_5^2 \dot{\theta}_5^2 \right] = \Gamma \dot{\theta}_3 - \Gamma_f \dot{\theta}_5.$$

- Comme on cherche l'équation du mouvement en θ_3 , on exprime le paramètre θ_5 en fonction de θ_3 :

$$\dot{\theta}_5 = \frac{\dot{\theta}_3}{k}.$$

L'équation précédente s'écrit : $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_5 r_5^2 \times \left(\frac{\dot{\theta}_3}{k} \right)^2 \right] = \Gamma \dot{\theta}_3 - \Gamma_f \times \frac{\dot{\theta}_3}{k},$

soit $\frac{1}{2} \frac{m_5 r_5^2}{k^2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_3)^2 = \left(\Gamma - \frac{\Gamma_f}{k} \right) \dot{\theta}_3$ ou $\frac{1}{2} \frac{m_5 r_5^2}{k^2} \times 2 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 = \left(\Gamma - \frac{\Gamma_f}{k} \right) \dot{\theta}_3.$

Soit encore, en simplifiant par $\dot{\theta}_3$:

$$\boxed{\frac{m_5 r_5^2}{k^2} \ddot{\theta}_3 = \Gamma - \frac{\Gamma_f}{k}} \quad \text{ou} \quad I_{\text{eq}} \ddot{\theta}_3 = \Gamma - \Gamma_R$$

kg m² rad · s⁻² N · m N · m
↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

2) a) b) En identifiant les deux équations précédentes, on obtient :

$$I_{\text{eq}} = \frac{m_5 r_5^2}{k^2} \quad \text{et} \quad \Gamma_R = \frac{\Gamma_f}{k}$$

- I_{eq} représente le moment d'inertie par rapport à l'axe ($G_3 ; \vec{e}_y$) équivalent au solide \mathcal{S}_5 en rotation.
- Γ_R représente le couple résistant de freinage, appliqué sur \mathcal{S}_5 ramené au niveau du pédalier.

3) a) Pour que la simulation soit parfaite, il faut que les équations de mouvement en θ_3 (au niveau du pédalier) soient identiques entre le vélo d'appartement et le vélo normal, ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{m_5 r_5^2}{k^2} = 80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & (2) \\ \frac{\Gamma_f}{k} = 74 \text{ N} \cdot \text{m} & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) donne :

$$\frac{m_5}{k^2} = \frac{80}{0,2^2} = 2\,000 \text{ kg}$$

Il faut choisir un rapport de réduction k entre le pédalier (\mathcal{S}_3) et la roue arrière (\mathcal{S}_5) envisageable (k pas trop petit) et une masse m_5 envisageable pour permettre le transport du vélo d'appartement (m_5 pas trop grande).

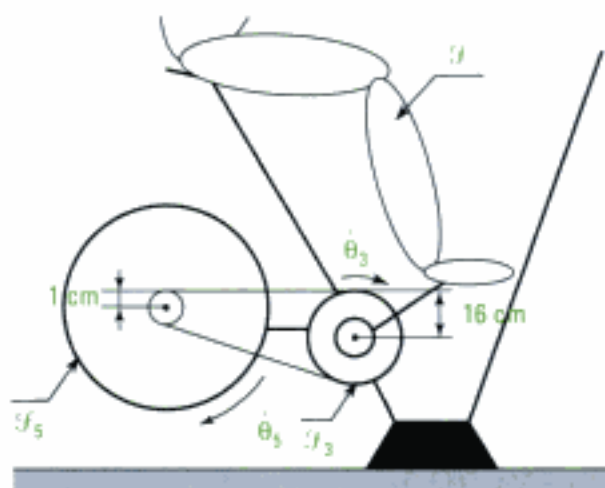
On prend des valeurs de k : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{16}$ et on calcule les valeurs de m_5 correspondantes :

k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{16}$
m_5 (kg)	2 000	500	125	31,25	20	13,9	10,2	7,8

On retiendra $k = \frac{1}{16}$ et $m_5 = 7,8 \text{ kg}$.



Le rapport k correspond au rapport des rayons entre le pédalier et la roue arrière (voir exercice de cinématique – chapitre 1).



$k = \frac{1}{16}$ correspond par exemple à un rayon de 1 cm pour la roue arrière (c'est peu !) et de 16 cm pour le pédalier (c'est déjà beaucoup !). Il ne semble pas raisonnable de descendre en dessous de $\frac{1}{16}$ pour k .

b) Si on prend $k = \frac{1}{16}$, on obtient avec l'équation (3) :

$$\Gamma_f = 74 \times k = 74 \times \frac{1}{16} = 4,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Exercice 10

1) Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement du vélo de route ($\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$), comme tous les paramètres de mouvement s'expriment en fonction d'un seul (par exemple θ_3, \dots) et qu'il n'y a pas de glissement au niveau des contacts (H, J), nous allons utiliser le TPC (1 équation scalaire) appliqué à Σ .

Système étudié : $\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$.

Référentiel galiléen : \mathcal{R}_0 (O ; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

Bilan des efforts appliqués à Σ

- extérieurs :

→ poids :

sur \mathcal{S}_1 : $\vec{P}_1 = m\vec{g}$ en G_1 ;

sur \mathcal{S}_2 : $\vec{P}_2 = m\vec{g}$ en G_2 ;

sur \mathcal{S}_4 : $\vec{P}_4 = m\vec{g}$ en G_4 ;

→ action du sol :

sur \mathcal{S}_1 : $\vec{R}_1 = N_1\vec{e}_z + T_1\vec{e}_x$ en H ;

sur \mathcal{S}_2 : $\vec{R}_2 = N_2\vec{e}_z + T_2\vec{e}_x$ en J.

- intérieurs :

→ couple moteur (de \mathcal{S}_4 sur \mathcal{S}_3) : $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$;

→ chaîne (entre \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_2) : ne dissipe pas de puissance (énoncé) ;

→ liaison pivot en G_3 (entre \mathcal{S}_4 et \mathcal{S}_3) : sans frottement ;

→ liaison pivot en G_2 (entre \mathcal{S}_4 et \mathcal{S}_2) : sans frottement ;

→ liaison pivot en G_1 (entre \mathcal{S}_4 et \mathcal{S}_1) : sans frottement ;

→ efforts intérieurs à chaque solide $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ et \mathcal{S}_4 .

• **Équation du TPC** : $\frac{d}{dt}[\mathcal{E}_c(\Sigma)] = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$ (1)

• **Énergie cinétique** : $\mathcal{E}_c(\Sigma) = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1) + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_2) + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_3) + \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_4)$

où : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}_1) + \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G_1)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_2) = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}_1)$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_3) = 0 \text{ (masse et moment d'inertie négligeables)}$$

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}_4) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}_4) + \frac{1}{2}M\vec{v}^2(G_4)_{/\mathcal{R}_0} = 0 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

↑
 \mathcal{S}_4 est en translation dans \mathcal{R}_0

$$\text{donc } E_c(\Sigma) = (I\dot{\theta}_1^2 + m\dot{x}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2.$$

• Puissance des efforts appliqués à Σ :

– extérieurs :

$$\rightarrow \text{poids : } \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_1) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_2) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_4) = m\vec{g} \cdot \vec{v}(G_1) + m\vec{g} \cdot \vec{v}(G_2) + M\vec{g} \cdot \vec{v}(G_4)$$

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{poids}) = (2m + M)\vec{g} \cdot \dot{x}\vec{e}_x = (2m + M)g\dot{x} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = -(2m + M)g\dot{x} \sin\gamma$$



Quand $\gamma > 0$ et $\dot{x} > 0$, $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{poids}) < 0$, ce qui est normal car quand le vélo monte, le poids est résistant.

→ action du sol :

$$\text{sur } \mathcal{S}_1 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_1) = 0 \text{ (car pas de glissement)}$$

$$\text{sur } \mathcal{S}_2 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_2) = 0 \text{ (car pas de glissement)}$$

• intérieurs :

$$\rightarrow \text{couple moteur : } \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{\Gamma}) = \underbrace{\vec{\Gamma} \cdot \dot{\theta}_3 \vec{e}_y}_{\substack{\text{action de mouvement de } \mathcal{S}_3 \\ \text{sur } \mathcal{S}_2 \text{ par rapport à } \mathcal{S}_4}} = \Gamma \vec{e}_y \cdot \dot{\theta}_3 \vec{e}_y = \Gamma \dot{\theta}_3 ;$$

$$\rightarrow \text{chaîne : } \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{chaîne}) = 0, \text{ pas de puissance dissipée ;}$$

$$\rightarrow \text{pivot en } G_1 : \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot } G_1) = 0, \text{ pas de frottement ;}$$

$$\rightarrow \text{pivot en } G_2 : \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot } G_2) = 0, \text{ pas de frottement ;}$$

$$\rightarrow \text{pivot en } G_3 : \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot } G_3) = 0, \text{ pas de frottement ;}$$

$$\rightarrow \text{efforts intérieurs aux solides } \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3 \text{ et } \mathcal{S}_4 : \mathcal{P}_{\text{int}} = 0.$$

Ainsi l'équation (1) du TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[(I\dot{\theta}_1^2 + m\dot{x}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \right] = -(2m + M)g\dot{x} \sin\gamma + \Gamma\dot{\theta}_3.$$

• Comme on cherche l'équation du mouvement en θ_3 , on va exprimer les différents paramètres en fonction de θ_3 :

$$\rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_3}{\lambda}$$

$$\rightarrow \dot{x} = r\dot{\theta}_1 = \frac{r}{\lambda}\dot{\theta}_3.$$

L'équation précédente s'écrit donc (à l'aide de ces relations) :

$$\frac{d}{dt} \left[I \times \left(\frac{\dot{\theta}_3}{\lambda} \right)^2 + m \left(\frac{r}{\lambda} \dot{\theta}_3 \right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{r}{\lambda} \dot{\theta}_3 \right)^2 \right] = -(2m + M)g \frac{r}{\lambda} \dot{\theta}_3 \sin\gamma + \Gamma \dot{\theta}_3,$$

$$\text{soit } \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{I}{\lambda^2} + \frac{mr^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{\lambda^2} \right) \dot{\theta}_3^2 \right] = \left[\Gamma - (2m + M)g \frac{r}{\lambda} \sin\gamma \right] \dot{\theta}_3$$

$$\text{ou } 2 \frac{I + mr^2 + \frac{1}{2}Mr^2}{\lambda^2} \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 = \left(\Gamma - (2m + M)g \frac{r}{\lambda} \sin\gamma \right) \dot{\theta}_3.$$

Soit en simplifiant par $\ddot{\theta}_3$ ($\dot{\theta}_3 = 0$ est une solution inintéressante) :

$$\frac{\overset{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{2I} + \overset{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{2mr^2} + \overset{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{Mr^2} \ddot{\theta}_3 = \overset{\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\Gamma} - \overset{\text{kg}}{(2m + M)} \overset{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{g} \overset{\text{m}}{r} \frac{\sin \gamma}{\lambda} \quad \text{ou } I_{\text{eq}} \ddot{\theta}_3 = \Gamma - \Gamma_R.$$

2) En identifiant les deux équations précédentes, on obtient :

$$I_{\text{eq}} = \frac{2I}{\lambda^2} + \frac{2mr^2}{\lambda^2} + \frac{Mr^2}{\lambda^2}.$$

$$\text{A.N. : } I_{\text{eq}} = \frac{2 \times 0,05}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2 \times 1 \times 0,35^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{70 \times 0,35^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}, \text{ d'où } I_{\text{eq}} = 80,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

I_{eq} représente physiquement le moment d'inertie par rapport à l'axe ($G_3; \vec{e}_y$), équivalent à l'ensemble des solides de Σ en mouvement, soit :

- deux roues en translation : $\frac{2mr^2}{\lambda^2}$;
- deux roues en rotation : $\frac{2I}{\lambda^2}$;
- le cadre + cycliste en translation : $\frac{Mr^2}{\lambda^2}$.

3) En identifiant les deux équations de la question 1), on obtient aussi :

$$\Gamma_R = (2m + M)gr \frac{\sin \gamma}{\lambda}.$$

$$\text{A.N. : } \Gamma_R = (2 \times 1 + 70) \times 9,81 \times 0,35 \times \frac{\sin(\arctan(10\%))}{\frac{1}{3}}, \Gamma_R = 73,8 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Γ_R représente physiquement le couple résistant ramené au niveau du pédalier, équivalent à l'ensemble des efforts résistants, c'est-à-dire ici les différents poids :

- des 2 roues → $2mg$;
- du cadre + cycliste → Mg .


Quelques problèmes


Introduction









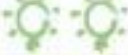
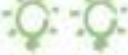






Quatre sujets posés lors de concours sont proposés dans ce chapitre :

- problème 1, concours ENTPE (PC) ;
- problème 2, concours commun Polytechnique (MP) ;
- problème 3, concours Mines Ponts (PSI) ;
- problème 4, concours Mines Ponts (MP-PC).

Ces sujets sont le plus souvent complets et abordent tous les aspects du cours de mécanique du programme de deuxième année.

 pour une utilisation limitée du chapitre ;

 pour une bonne maîtrise des notions du chapitre.

Chapitres	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4
1. Cinématique				
2. Cinétique				
3. Dynamique				
4. Énergétique				

Plan du chapitre 5

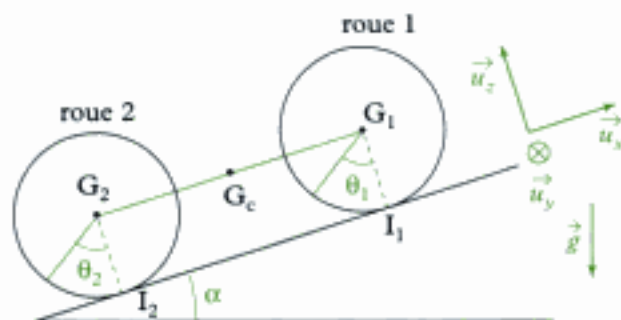
Problème 1. Modélisation d'une voiture	202
<i>Solution</i>	204
Problème 2. Mouvements d'un cerceau	215
<i>Solution</i>	217
Problème 3. Investigations d'un physicien préoccupé	227
<i>Solution</i>	229
Problème 4. Entraînement d'une charge mécanique par un moteur	236
<i>Solution</i>	237

Problèmes

Problème 1 : Modélisation d'une voiture

Ce problème propose une modélisation d'une voiture qui gravit un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizontale.

Le repère $(O ; x, y, z)$, défini sur la figure, est le repère de projection. Le repère est fixe par rapport au référentiel d'étude.



Le véhicule est modélisé comme suit : une roue avant, une roue arrière, une tige.

• **La roue avant motrice** dite roue 1 dans la suite, possède les caractéristiques suivantes : elle est assimilée à un disque circulaire de rayon a , de masse m de centre d'inertie G_1 confondu avec son centre géométrique ; on note $J = \frac{ma^2}{2}$ le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe $G_1\vec{u}_y$. On repère la position de G_1 par son abscisse x_1 sur (Ox) et la rotation par l'angle θ_1 . On note I_1 le point de contact avec le sol.

• **La roue arrière, porteuse non motrice**, dite roue 2 dans la suite, est de même, de rayon a , de masse m , de centre d'inertie G_2 et de moment d'inertie J par rapport à $G_2\vec{u}_y$. On repère de même cette roue par l'abscisse x_2 de G_2 sur (Ox) et par l'angle de rotation θ_2 .

On note I_2 le point de contact avec le sol.

• L'ensemble S {carcasse de la voiture et moteur} est modélisé par **une tige**, de longueur 2ℓ , reliant G_1 à G_2 . Le centre d'inertie G_c de S est le milieu de $G_1G_2 = 2\ell$.

La masse de S est M , son moment d'inertie par rapport à $G_c\vec{u}_y$ est noté J_c . L'abscisse de G_c est notée x_c .

Le coefficient de frottement entre une roue et le sol, identique pour les deux roues et dans tous les cas, est noté f . Le champ de pesanteur est \vec{g} de module $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Les actions de l'ensemble S sur la roue avant en G_1 sont réductibles à une résultante :

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{u}_x + F_{1z}\vec{u}_z$$

et à un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_y$ avec $\Gamma > 0$.

L'action de l'ensemble S sur la roue arrière en G_2 est réductible à une résultante :

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{u}_x + F_{2z}\vec{u}_z$$

De même l'action du sol sur la roue avant est réductible à une résultante \vec{R}_1 et sur la roue arrière à une résultante \vec{R}_2 .

On suppose que les deux roues roulent sans glisser.

- 1) Quels sont les vecteurs rotations des roues 1 et 2 ? Écrire les relations de non glissement. Quelles relations existent entre les dérivées par rapport au temps de x_1 , x_2 et x_c ?
- 2) Écrire les relations vectorielles, imposées par les principes fondamentaux de la dynamique, pour la roue 1. Projeter ces relations dans le repère de projection. Elles forment l'ensemble d'équations (1).
- 3) Écrire les relations vectorielles, imposées par les principes fondamentaux de la dynamique, pour la roue 2. Projeter ces relations dans le repère de projection. Elles forment l'ensemble d'équation (2).
- 4) Écrire les relations vectorielles, imposées par les principes fondamentaux de la dynamique, pour l'ensemble S . Projeter ces relations dans le repère de projection. Elles forment l'ensemble d'équation (3).
- 5) Donner les expressions de F_{1z} et F_{2z} en fonction de Γ , M , g , a , α et ℓ . Commenter les résultats obtenus.
- 6) Donner une relation liant l'accélération $\gamma = \ddot{x}_c$ du véhicule, F_{1x} , Γ et α .
- 7) Donner une relation liant l'accélération γ du véhicule, F_{2x} et α .
- 8) Calculer l'accélération en fonction de Γ , m , M , g , a et α . Que devient cette relation si $M \gg m$?

Dans la suite on fera l'approximation $M \gg m$.

9) Déterminer la valeur Γ_{\min} de Γ , qui assure l'équilibre du véhicule sur la pente.

10) Quelle inégalité doit vérifier f pour que cet équilibre soit possible ?

11) On suppose la relation précédente vérifiée.

Calculer \vec{R}_1 au cours du mouvement, par ses composantes.

12) Déterminer la valeur de Γ , soit Γ_{\max} , qui assure l'avancée du véhicule avec un roulement sans glissement. Pour $\Gamma < \Gamma_{\max}$, la roue avant peut-elle décoller ?

13) La roue 2 peut-elle glisser ?

14) À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, dans l'approximation $M \gg m$, et en justifiant, déterminer directement l'accélération γ du véhicule lorsque les roues roulent sans glisser.

Dans la suite du problème on supposera toujours que $M \gg m$, que les roues roulent sans glisser et que $\alpha = 0$.

15) La viscosité cinématique de l'air est :

$$\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

En utilisant une évaluation du nombre de Reynolds et en fixant l'ordre de grandeur de certains paramètres, estimer un ordre de grandeur de la vitesse du véhicule pour laquelle l'écoulement de l'air est turbulent.

16) On admet que les actions de frottement de l'air sur le véhicule sont équivalentes à une résultante unique \vec{F} qui s'applique à la carrosse en G_c .

Un modèle analytique possible de cette force est :

$$\vec{F} = -\lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^n \cdot \vec{u}_x.$$

Proposer une valeur de n que l'on conservera dans la suite.

17) Exprimer, dans le cadre de ces nouvelles hypothèses, l'ensemble d'équations (3).

18) Déterminer l'accélération γ du véhicule en fonction de sa vitesse v , Γ , n , M , λ et a .

19) Déterminer la vitesse limite v_l du véhicule.

20) Le coefficient λ est donné par la relation :

$$\lambda = 0,5 C_x \Sigma \rho,$$

où ρ est la masse volumique de l'air dont on donnera une valeur approchée ; Σ est la surface projetée du véhicule, dans le plan (yOz) (maître couple) ; C_x est un coefficient aérodynamique.

Déterminer le coefficient C_x du véhicule.

Données :

$v_l = 160 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $\Gamma = 150 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M = 900 \text{ kg}$;
 $\Sigma = 1,3 \text{ m}^2$ et $a = 0,3 \text{ m}$.

21) En utilisant le résultat de la question 18, exprimer, en général, le temps écoulé en fonction de la vitesse atteinte et des caractéristiques fournies.

22) Donner, pour le véhicule considéré, la durée τ nécessaire pour passer de 0 à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

23) On a trouvé expérimentalement $C_x = 0,3$ et $\tau = 15,4 \text{ s}$.

Quel élément essentiel, non pris en compte dans le modèle peut expliquer les écarts éventuels ?

Indications

15) Le nombre de Reynolds : $R_e = \frac{vL}{\nu}$ définit un écoulement turbulent quand $R_e > 10^3$ (environ).

16) Le frottement de l'air est proportionnel au carré de la vitesse.

Solution du problème 1

1) Soit \mathcal{S}_1 la roue avant motrice 1 ;

soit \mathcal{S}_2 la roue arrière 2 ;

soit \mathcal{R} le référentiel ($O ; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$).

Le vecteur rotation de la roue 1, \mathcal{S}_1 (sous entendu par rapport au sol, donc \mathcal{R}) est :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} = \dot{\theta}_1 \vec{u}_y.$$

De même, le vecteur rotation de la roue 2, \mathcal{S}_2 est :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} = \dot{\theta}_2 \vec{u}_y.$$

Il y a non glissement en I_1 entre la roue avant (\mathcal{S}_1) et le sol (\mathcal{R}) donc :

$$\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

• Comme \mathcal{R} est fixe, nous ne prendrons pas de référentiel intermédiaire.

• Pour exprimer $\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}$, nous allons « passer » par un point naturellement élément de \mathcal{S}_1 dont le mouvement est plus simple ; ici : G_1 :

$$\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{G_1 I_1}$$

avec $\vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG_1} \right)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (x_1 \vec{u}_x + a \vec{u}_z) \right]_{/\mathcal{R}} = \dot{x}_1 \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{G_1 I_1} = -a \vec{u}_z$.

Aussi $\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}_1 \vec{u}_x + \dot{\theta}_1 \vec{u}_y \wedge (-a \vec{u}_z) = \dot{x}_1 \vec{u}_x - a \dot{\theta}_1 \vec{u}_x = (\dot{x} - a \dot{\theta}_1) \vec{u}_x = \vec{0}$,



• Cette expression est homogène à une vitesse exprimée en $m \cdot s^{-1}$.

• La vitesse de glissement est bien élément du plan tangent (\vec{u}_x, \vec{u}_y).

Soit en projection sur \vec{u}_x : $\dot{x}_1 = a \dot{\theta}_1$.



• Si $\dot{x} > 0$ alors $\dot{\theta}_1 > 0$: ok.

De même pour \mathcal{S}_2 : $\dot{x}_2 = a \dot{\theta}_2$.

x_1, x_2 et x_c sont les abscisses des points G_1, G_2 et G_c qui sont tous, naturellement éléments du solide S (carcasse de voiture et moteur) qui est en translation dans \mathcal{R} :

$$\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \vec{0},$$

donc $\vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(G_2)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(G_c)_{/\mathcal{R}}$.



• Quand un solide est en translation, tous ses points ont la même vitesse.

Or $\vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG_1} \right)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{I_1 G_1}) \right]_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt} (x_1 \vec{u}_x + a \vec{u}_z) \right]_{/\mathcal{R}} = \dot{x}_1 \vec{u}_x$.



\vec{u}_x est constant dans \mathcal{R} .

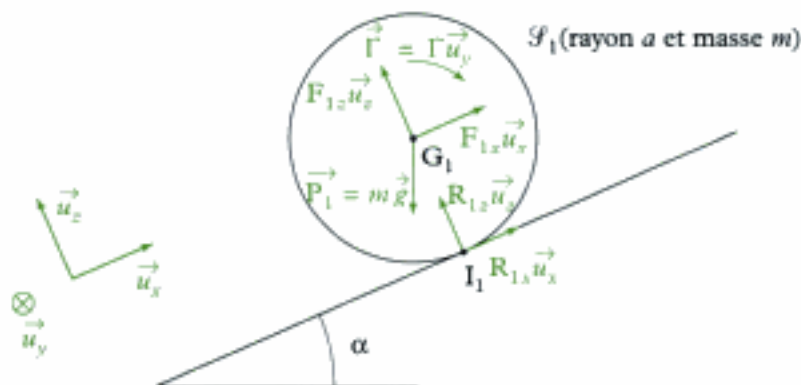
$a = cte$.

\vec{u}_z est constant dans \mathcal{R} .

De même $\vec{v}(G_2)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}_2 \vec{u}_x$ et $\vec{v}(G_c)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}_c \vec{u}_x$.

Donc $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_c$.

2) On va écrire les équations de la dynamique (TCM + TMC) pour la roue 1 (\mathcal{S}_1).



Actions extérieures appliquées à \mathcal{S}_1

Système étudié : \mathcal{S}_1 .

Référentiel galiléen : \mathcal{R} .

Actions mécaniques extérieures appliquées au système

- poids : $\vec{P}_1 = m\vec{g}$ (vertical vers le bas) appliqué en G_1 ;
- les actions de S sur \mathcal{S}_1 :
 - force (liaison pivot) : $\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{u}_x + F_{1z}\vec{u}_z$ appliquée en G_1 ;
 - couple moteur : $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_y$ ($\Gamma > 0$) ;
- l'action du sol sur \mathcal{S}_1 : $\vec{R}_1 = R_{1x}\vec{u}_x + R_{1z}\vec{u}_z$ appliquée en I_1 .

Équation de la dynamique

- deux équations du TCM ;
- une équation du moment cinétique (TMC(Δ)).

Le TCM s'écrit :

$$m\vec{a}(G_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{P}_1 + \vec{F}_1 + \vec{R}_1,$$

$$\text{avec } \vec{a}(G_1)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d\vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt}(\dot{x}_1\vec{u}_x) \right]_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}_1\vec{u}_x.$$

L'équation du TCM s'écrit alors :

$$m\ddot{x}_1\vec{u}_x = m\vec{g} + F_{1x}\vec{u}_x + F_{1z}\vec{u}_z + R_{1x}\vec{u}_x + R_{1z}\vec{u}_z.$$

- En projection sur \vec{u}_x , on obtient :

$$m\ddot{x}_1\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = (m\vec{g} + F_{1x}\vec{u}_x + F_{1z}\vec{u}_z + R_{1x}\vec{u}_x + R_{1z}\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_x$$

$$m\ddot{x}_1 = m\vec{g} \cdot \vec{u}_x + F_{1x} + 0 + R_{1x} + 0 = mg \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + F_{1x} + R_{1x}$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin\alpha + F_{1x} + R_{1x}.$$

Comme m est en kg, \ddot{x}_1 et g en $m \cdot s^{-2}$, cette équation est bien homogène à une force exprimée en N.

- En projection sur \vec{u}_z , on obtient :

$$m\ddot{x}_1\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = (m\vec{g} + F_{1x}\vec{u}_x + F_{1z}\vec{u}_z + R_{1x}\vec{u}_x + R_{1z}\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_z$$

$$0 = m\vec{g} \cdot \vec{u}_z + 0 + F_{1z} + 0 + R_{1z} = mg \times 1 \times \cos(\pi - \alpha) + F_{1z} + R_{1z}$$

$$0 = -mg \cos\alpha + F_{1z} + R_{1z}.$$

Équation du théorème du moment cinétique TMC(Δ_1) avec $\Delta_1 = (G_1, \vec{u}_y)$



A priori, on peut appliquer cette équation du moment cinétique en n'importe quel point. Ici l'énoncé nous donne le moment d'inertie de \mathcal{S}_1 autour de (G_1, \vec{u}_y) : aussi va-t-on écrire l'équation du théorème du moment cinétique en G_1 projetée sur \vec{u}_y , c'est-à-dire du TMC(Δ_1).

$$\vec{u}_y \cdot \left(\frac{d\vec{L}_{G_1}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}}}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \vec{u}_y \cdot \vec{M}_{G_1}(\vec{P}_1) + \vec{u}_y \cdot \vec{M}_{G_1}(\vec{F}_1) + \vec{u}_y \cdot \vec{M}_{G_1}(\vec{\Gamma}) + \vec{u}_y \wedge \vec{M}_{G_1}(\vec{R}_1)$$

avec :

$$\vec{u}_y \cdot \left(\frac{d\vec{L}_{G_1}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}}}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{u}_y \cdot \vec{L}_{G_1}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} \right) \text{ et } \vec{u}_y \cdot \vec{L}_{G_1}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} = J\dot{\theta}_1 (= L_{(G_1, \vec{u}_y)}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} = L_{\Delta_1}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}})$$

$$\text{donc } \vec{u}_y \cdot \left(\frac{d\vec{L}_{G_1}(\mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}}}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \frac{d}{dt} (J\dot{\theta}_1) = J\ddot{\theta}_1 ;$$

$$\bullet \vec{M}_{G_1}(\vec{P}_1) = \vec{0} \text{ car } \vec{P}_1 \text{ est appliquée en } G_1 ;$$

$$\bullet \vec{M}_{G_1}(\vec{F}_1) = \vec{0} \text{ car } \vec{F}_1 \text{ est appliquée en } G_1 ;$$

$$\bullet \vec{M}_{G_1}(\vec{\Gamma}) = \Gamma \vec{u}_y ;$$

$$\bullet \vec{M}_{G_1}(\vec{R}_1) = \vec{G}_1 \vec{I}_1 \wedge \vec{R}_1 = -a \vec{u}_z \wedge (R_{1x} \vec{u}_x + R_{1z} \vec{u}_z) = -a R_{1x} \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x \\ = -a R_{1x} \times 1 \times 1 \times 1 \times \vec{u}_y = -a R_{1x} \vec{u}_y .$$

Aussi l'équation du moment cinétique s'écrit :

$$J\ddot{\theta}_1 = 0 + \vec{u}_y \cdot \Gamma \vec{u}_y + \vec{u}_y \cdot (-a R_{1x} \vec{u}_y)$$

$$J\ddot{\theta}_1 = \Gamma - a R_{1x} .$$

L'ensemble d'équations (1) est donc :

$$m\ddot{x}_1 = -m g \sin \alpha + F_{1x} + R_{1x} \quad (1.1)$$

$$0 = -m g \cos \alpha + F_{1z} + R_{1z} \quad (1.2)$$

$$J\ddot{\theta}_1 = \Gamma - a R_{1x} \quad (1.3)$$

3) On procède par analogie avec ce que l'on vient de faire pour la roue avant 1 (\mathcal{S}_1) : les actions mécaniques sont similaires. La seule différence, c'est l'absence de couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_y$.

Aussi l'ensemble d'équations (2) est donc :

$$m\ddot{x}_2 = -m g \sin \alpha + F_{2x} + R_{2x} \quad (2.1)$$

$$0 = -m g \cos \alpha + F_{2z} + R_{2z} \quad (2.2)$$

$$J\ddot{\theta}_2 = -a R_{2x} \quad (2.3)$$



On remplace l'indice 1 par l'indice 2 et on supprime le couple moteur Γ .

4) On cherche désormais à écrire les équations de la dynamique pour la carcasse S.

Hidden page

• Par analogie avec la question 3) :

$$\vec{u}_y \cdot \vec{L}_{G_c}(S)/\mathcal{R} = J\ddot{\theta} = 0.$$



S est en translation par rapport à \mathcal{R} : $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}_y = \vec{0}$

$$\bullet \vec{M}_{G_c}(\vec{P}_1) = \vec{0}$$

$$\bullet \vec{M}_{G_c}(-\vec{F}_1) = \vec{G}_c \vec{G}_1 \wedge (-\vec{F}_1) = \ell \vec{u}_x \wedge (-F_{1x} \vec{u}_x - F_{1z} \vec{u}_z) \\ = -\ell F_{1z} (-\vec{u}_y) = (\ell F_{1z}) \vec{u}_y.$$

$$\bullet \vec{M}_{G_c}(-\vec{\Gamma}) = -\Gamma \vec{u}_y.$$

$$\bullet \vec{M}_{G_c}(-\vec{F}_2) = \vec{G}_c \vec{G}_2 \wedge (-\vec{F}_2) = -\ell \vec{u}_x \wedge (-F_{2x} \vec{u}_x - F_{2z} \vec{u}_z) \\ = \ell F_{2z} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = \ell F_{2z} (-\vec{u}_y) = -\ell F_{2z} \vec{u}_y.$$

L'équation du théorème du moment cinétique devient :

$$\vec{u}_y \cdot \left[\frac{d\vec{L}_{G_c}(S)/\mathcal{R}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = 0 = 0 + (-\Gamma + \ell F_{1z}) - \ell F_{2z} \\ \mathbf{0} = -\Gamma + \ell F_{1z} - \ell F_{2z}.$$

Le système d'équation (3) est donc :

$$\mathbf{M}\ddot{x}_c = -Mg \sin \alpha - F_{1x} - F_{2x} \quad (3.1)$$

$$0 = Mg \cos \alpha + F_{1z} + F_{2z} \quad (3.2)$$

$$0 = -\Gamma + \ell F_{1z} - \ell F_{2z} \quad (3.3)$$

5) Les inconnues F_{1z} et F_{2z} apparaissent « seules » dans les équations (3.2) et (3.3) ; on utilise donc ces deux équations et en travaillant par combinaison linéaire :

$$(\ell \times (3.2) + (3.3)) \Leftrightarrow 0 = \ell Mg \cos \alpha + \ell F_{1z} + \ell F_{2z} - \Gamma + \ell F_{1z} - \ell F_{2z} \\ \text{soit } 2\ell F_{1z} = \Gamma - \ell Mg \cos \alpha, \text{ soit aussi :}$$

$$F_{1z} = \frac{\Gamma}{2\ell} - \frac{Mg \cos \alpha}{2}$$

$$(\ell \times (3.2) - (3.3)) \Leftrightarrow 0 = \ell Mg \cos \alpha + \ell F_{1z} + \ell F_{2z} + \Gamma - \ell F_{1z} + \ell F_{2z} \\ \text{soit } 2\ell F_{2z} = -\Gamma - \ell Mg \cos \alpha, \text{ soit aussi :}$$

$$F_{2z} = -\frac{\Gamma}{2\ell} - \frac{Mg \cos \alpha}{2}.$$



a n'intervient pas ...



Ces expressions sont homogènes à des forces en N.

Commentaires :

$$\bullet \text{ Si } \Gamma = 0, F_{1z} = F_{2z} = \frac{-Mg \cos \alpha}{2} < 0.$$

$$\bullet \text{ Si } \Gamma > 0, |F_{1z}| < |F_{2z}|.$$

6) On remarque que F_{1x} et R_{1x} apparaissent « seules » dans les équations (1.1) et (1.3) ; on utilise donc ces deux équations en éliminant R_{1x} et en utilisant $\ddot{\theta}_1 = \frac{\ddot{x}_c}{a} = \frac{\gamma}{a}$.



À tout instant, on a $\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{a}$ (RSG en I_1) et $\dot{x}_1 = \dot{x}_c$; il suffit alors de dériver par rapport au temps.

L'équation (1.3) donne :

$$R_{1x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{J}{a} \ddot{\theta}_1 = \frac{\Gamma}{a} - \frac{m a^2}{a \times 2} \times \frac{\gamma}{a} \text{ soit } R_{1x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{m}{2} \gamma.$$

L'équation (1.1) devient :

$$\begin{aligned} m \gamma &= -m g \sin \alpha + F_{1x} + \frac{\Gamma}{a} - \frac{m}{2} \gamma \\ \frac{3}{2} m \gamma &= -m g \sin \alpha + F_{1x} + \frac{\Gamma}{a} \end{aligned} \quad (4)$$



Comme m est en kg, γ et g sont en $m \cdot s^{-2}$, Γ est en Nm et a en m, cette expression est homogène à une force en $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$.

7) On procède de la même manière que dans la question 6) mais cette fois, on utilise les deux équations (2.1) et (2.3) ; on obtient :

$$\frac{3}{2} m \gamma = -m g \sin \alpha + F_{2x}. \quad (5)$$



Pour obtenir ce résultat, il suffit de prendre la relation (4) obtenue dans la question 6), de remplacer F_{1x} par F_{2x} et d'annuler Γ ; en effet la seule différence entre la roue avant (\mathcal{S}_1) et la roue arrière (\mathcal{S}_2), c'est le couple moteur $\vec{\Gamma}$ qui n'est présent que sur la roue motrice (\mathcal{S}_1).

8) En utilisant les relations (3.1), (4) et (5), on voit que F_{1x} et F_{2x} sont seules à apparaître ; on utilise donc ces trois relations en faisant disparaître F_{1x} et F_{2x} .

La relation (3.1) devient :

$$M \gamma = -M g \sin \alpha - \left[\frac{3}{2} m \gamma + m g \sin \alpha - \frac{\Gamma}{a} \right] - \left[\frac{3}{2} m \gamma + m g \sin \alpha \right]$$

soit $(M + 3m)\gamma = -(M + 2m)g \sin \alpha + \frac{\Gamma}{a}$ et donc :

$$\gamma = \frac{\frac{\Gamma}{a} - (M + 2m)g \sin \alpha}{M + 3m}.$$



Comme Γ est en $N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$, a en m, M et m en kg et g en $m \cdot s^{-2}$, cette expression est homogène à une accélération en $m \cdot s^{-2}$.

Si on suppose $M \gg m$, l'expression devient :

$$\gamma = \frac{\frac{\Gamma}{a} - M g \sin \alpha}{M} = \frac{\Gamma}{aM} - g \sin \alpha.$$

9) Pour assurer l'équation de la voiture sur la pente, il faut que :

$$\begin{aligned} \gamma &= 0 \text{ soit } \frac{\Gamma_{\min}}{aM} - g \sin \alpha = 0 \\ \Gamma_{\min} &= M g a \sin \alpha. \end{aligned}$$

10) Pour que cet équilibre soit possible, il faut que l'on puisse « passer » le couple moteur Γ , c'est-à-dire que la condition de non glissement soit satisfaite, soit :

$$\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\| \text{ où } \vec{T} \text{ est la réaction tangentielle et } \vec{N} \text{ est la réaction normale.}$$

Ici, pour la roue avant (\mathcal{S}_1), on doit vérifier $\|\mathbf{R}_{1x} \vec{u}_x\| < f \|\mathbf{R}_{1z} \vec{u}_z\|$, soit :

$$f > \frac{|\mathbf{R}_{1x}|}{|\mathbf{R}_{1z}|}$$

avec $R_{1z} \neq 0$ (c'est-à-dire que la roue ne décolle pas).

11) On cherche à déterminer l'expression de R_{1x} et de R_{1z} ; à l'aide de l'équation (1.3) :

$$m \frac{a^2}{2} \times \frac{\gamma}{a} = \Gamma - a R_{1x}, \text{ soit } R_{1x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{m\gamma}{2}.$$

Sachant que $\gamma = \frac{\Gamma}{aM} - g \sin \alpha$ on obtient :

$$R_{1x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{m\Gamma}{2aM} + \frac{mg \sin \alpha}{2},$$

soit puisque $\frac{m}{M} \ll 1$: $R_{1x} = \frac{\Gamma}{a} + \frac{mg \sin \alpha}{2}$.

Par ailleurs, comme $\Gamma > \Gamma_{\min} = Mg a \sin \alpha$ et que $m \ll M$, on peut simplifier R_{1x} :

$$R_{1x} = \frac{\Gamma}{a}.$$

Pour déterminer R_{1z} , on utilise l'équation (1.2) et le résultat de F_{1z} obtenu dans la question 5) :

$$0 = -mg \cos \alpha + \left[\frac{\Gamma}{2\ell} - \frac{Mg \cos \alpha}{2} \right] + R_{1z} \text{ soit } R_{1z} = \left(m + \frac{M}{2} \right) g \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2\ell}.$$

Or, comme $m \ll M$, on peut écrire :

$$R_{1z} \approx \frac{M}{2} g \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2\ell}.$$

12) Le couple moteur doit permettre le roulement sans glissement c'est-à-dire :

$$f > \frac{|R_{1x}|}{|R_{1z}|} = \frac{\left| \frac{\Gamma}{a} \right|}{\left| \frac{M}{2} g \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2\ell} \right|}.$$

Comme $\Gamma > 0$ et $R_{1z} > 0$, on obtient :

$$f > \frac{\frac{\Gamma}{a}}{\frac{M}{2} g \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2\ell}} \text{ soit } f \left(\frac{M}{2} g \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2\ell} \right) > \frac{\Gamma}{a}.$$

Donc $\Gamma \left(\frac{1}{a} + \frac{f}{2\ell} \right) < f \frac{M}{2} g \cos \alpha$, soit aussi :

$$\Gamma < \Gamma_{\max} = \frac{f \frac{M}{2} g \cos \alpha}{\frac{1}{a} + \frac{f}{2\ell}}.$$

Si $R_{1z} = 0^+$ (la roue avant décolle), la relation $f \geq \frac{|R_{1x}|}{|R_{1z}|} \rightarrow +\infty$ n'est plus envisageable ; aussi :

si $\Gamma < \Gamma_{\max}$, la roue avant ne peut pas décoller.

13) Pour déterminer R_{2x} et R_{2y} on peut reprendre la même démarche (pour la roue arrière) que celle développée dans la question 11) ; on obtient :

$$R_{2x} = 0 \text{ et } R_{2z} = \frac{M}{2} g \cos \alpha + \frac{\Gamma}{2\ell}, \text{ soit } \frac{R_{2x}}{R_{2z}} = 0 < f.$$

Donc la roue 2 ne peut glisser.

14) On veut l'équation du mouvement de l'ensemble ; on va donc appliquer le théorème de la puissance cinétique (TPC) sur le système complet.

Système étudié : $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup S = \Sigma$.

Référentiel galiléen : \mathcal{R} .

Actions mécaniques

• extérieures :

– poids de \mathcal{F}_1 , de \mathcal{F}_2 , de S respectivement \vec{P}_1 , \vec{P}_2 et \vec{P}_c (appliquées respectivement en G_1 , G_2 et G_c).

– action du sol sur \mathcal{F}_1 en I_1 : \vec{R}_1 appliquée en I_1 .

– action du sol sur \mathcal{F}_2 en I_2 : \vec{R}_2 appliquée en I_2 .

• intérieures :

– action entre \mathcal{F}_1 et S : $\begin{cases} \text{– liaison pivot, force } \vec{F}_1 \text{ en } G_1 ; \\ \text{– couple moteur } \vec{\Gamma} . \end{cases}$

– action entre \mathcal{F}_2 et S : force \vec{F}_2 en G_2 .

Le TPC s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

avec $\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_c(S)_{/\mathcal{R}}$.

$$\bullet \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G_1} \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2.$$

Quand il y a roulement sans glissement $\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{a}$.

$$\text{Aussi } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times \frac{ma^2}{2} \times \left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3m}{2} \dot{x}_1^2.$$

$$\bullet \text{ De même, } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}_2)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \times \frac{3m}{2} \times \dot{x}_2^2.$$

$$\bullet \mathcal{E}_c(S)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} M \vec{v}(G_c)_{/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G_c} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 + 0.$$

 S est en translation dans \mathcal{R} donc $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}_y = \vec{0}$.

$$\text{Donc } \mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 + \frac{13m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{13m}{2} \dot{x}_2^2.$$

Or $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_c$ et $m \ll M$; donc :

$$\mathcal{E}_c(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2$$

 Négliger m devant M revient à négliger l'énergie cinétique de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 devant celle de S.

Puissances des actions mécaniques extérieures

$$\bullet \text{ poids de } \mathcal{F}_1 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_1) = m \vec{g} \cdot \vec{v}(G_1)_{/\mathcal{R}} = m \vec{g} \cdot \dot{x}_1 \vec{u}_x = -m g \dot{x}_1 \sin \alpha ;$$

$$\bullet \text{ poids de } \mathcal{F}_2 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_2) = -m g \dot{x}_2 \sin \alpha \quad (\text{par analogie}) ;$$

$$\bullet \text{ poids de S : } \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{P}_c) = -M g \dot{x}_c \sin \alpha \quad (\text{par analogie}) ;$$

$$\bullet \text{ sol sur } \mathcal{F}_1 \text{ en } I_1 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_1) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}(I_1 \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = 0, \text{ car il y a roulement sans glissement donc } \vec{v}(I_1 \in \mathcal{F}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} ;$$

$$\bullet \text{ sol sur } \mathcal{F}_2 \text{ en } I_2 : \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}_2) = 0 \quad (\text{par analogie}) ;$$

 Pour la puissance des actions extérieures, la vitesse est calculée dans le référentiel \mathcal{R} .

Puissances des actions intérieures :

• action entre \mathcal{S}_1 et S : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{\Gamma}) = \Gamma \vec{u}_y \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/S} = \Gamma \vec{u}_y \cdot \dot{\theta}_1 \vec{u}_y = \Gamma \dot{\theta}_1 = \Gamma \frac{\dot{x}_1}{a}$;

$\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot}) = \mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{F}_1) = 0$



Pour la puissance des actions intérieures, c'est-à-dire la puissance totale des actions de la liaison, on prend en compte le mouvement relatif de $\mathcal{S}_1 \rightarrow S$:

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{couple moteur}) = \vec{M}(S \rightarrow \mathcal{S}_1) \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/S} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/S}$$

On aurait aussi pu écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{couple moteur}) = \underbrace{-\vec{\Gamma}}_{\vec{M}(\mathcal{S}_1 \rightarrow S)} \cdot \underbrace{\vec{\Omega}_{S/\mathcal{S}_1}}_{\text{mouvement relatif de } S \text{ par rapport à } \mathcal{S}_1}$$



La liaison pivot entre \mathcal{S}_1 et S est sans frottement, donc ne dissipe pas de puissance.

• action entre \mathcal{S}_2 et S : $\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{pivot}) = \mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{F}_2) = 0$.

Ainsi la TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 \right) = -(2m + M)g \dot{x}_c \sin \alpha + \Gamma \frac{\dot{x}_c}{a}$$



En effet $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_c$.

De plus $m \ll M$, donc on obtient :

$$\frac{1}{2} M \times 2 \dot{x}_c \ddot{x}_c = -Mg \dot{x}_c \sin \alpha + \frac{\Gamma \dot{x}_c}{a}$$

Comme $\dot{x}_c = 0$ n'est pas la solution qui nous intéresse et comme $\gamma = \ddot{x}_c$, on obtient :

$$M\gamma = -Mg \sin \alpha + \frac{\Gamma}{a}$$



On retrouve le résultat de la question 8) dans l'hypothèse $m \ll M$.

15) Le nombre de Reynolds $R_e = \frac{vL}{\nu}$ indique un écoulement turbulent quand $R_e > 10^3$ (environ), avec :

- v la vitesse caractéristique (ici celle du véhicule) ($m \cdot s^{-1}$) ;
- L la longueur caractéristique (m) ; ici on peut prendre $L = 1$ m ;
- ν la viscosité cinématique du fluide dans lequel le mouvement s'effectue ($m^2 \cdot s^{-1}$), ici de l'air avec $\nu = 1,5 \times 10^{-5} m^2 \cdot s^{-1}$.

Ainsi $R_e = \frac{vL}{\nu} = 10^3$, soit $\frac{v \times 1}{1,5 \times 10^{-5}} = 10^3$ ou encore $v = 0,015 m \cdot s^{-1}$

$$v = 0,054 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Ainsi on peut considérer que l'écoulement est toujours turbulent pour une voiture.

16) $\vec{F} = -\lambda(\dot{x})^n \vec{u}_x$.

On sait que, pour le frottement de l'air en régime turbulent, la force est proportionnelle au carré de la vitesse ; ici, cela revient à prendre :

$$n = 2.$$

17) Comme la force de frottement est appliquée en G_c , seule l'équation de la dynamique (3.1) (TCM projeté sur \vec{u}_x) est modifiée :

$$M \ddot{x}_c = -Mg \sin \alpha - F_{1x} - F_{2x} - \lambda \dot{x}_c^2.$$



On rajoute le nouveau terme $\vec{F} = -\lambda \dot{x}_c^2 \vec{u}_x$.

Par ailleurs, on suppose $\alpha = 0$; donc on obtient :

$$M \ddot{x}_c = -F_{1x} - F_{2x} - \lambda \dot{x}_c^2.$$

18) On adapte le résultat de la question 8) en rajoutant le terme $-\lambda \dot{x}_c^2$ et dans le cas où $\alpha = 0$, on obtient :

$$M \ddot{x}_c = \frac{\Gamma}{a} - \lambda \dot{x}_c^2, \text{ soit } M\gamma = \frac{\Gamma}{a} - \lambda v^n.$$

19) L'équation précédente est bien connue (mouvement d'un projectile dans l'air avec une force de frottement proportionnelle à v^2). Elle conduit à une vitesse limite lorsque l'accélération s'annule ; dans ce cas, l'équation précédente devient :

$$0 = \frac{\Gamma}{a} - \lambda v_\ell^2, \text{ soit } v_\ell = \sqrt{\frac{\Gamma}{a\lambda}}.$$

20) La relation $v_\ell = \sqrt{\frac{\Gamma}{a\lambda}}$ permet de calculer λ si on connaît Γ , a et v_ℓ :

$$\lambda = \frac{\Gamma}{a v_\ell^2}.$$



Γ est exprimé en $N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$, a en m et v_ℓ en $m \cdot s^{-1}$.

λ est donc exprimé en $\frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{m \cdot m^2 \cdot s^{-2}} = kg \cdot m^{-1}$.

$$\text{A.N. : } \lambda = \frac{150}{0,3 \times \left(\frac{160}{3,6}\right)^2} = 0,253 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

Comme $\lambda = 0,5 \cdot C_x \Sigma \rho$, on en déduit :

$$C_x = \frac{2\Gamma}{\Sigma \cdot \rho \cdot v_\ell^2 a}.$$



Comme Γ est en $N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$, Σ en m^2 , ρ en $kg \cdot m^{-3}$, v_ℓ en $m \cdot s^{-1}$, et a en m , C_x est sans dimension :

$$\frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{m^2 \times kg \cdot m^{-3} \times m^2 \cdot s^{-2} \times m}$$

A.N. On prend $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour la masse volumique de l'air et l'on a :

$$C_x = \frac{2 \times 150}{1,3 \times 1,3 \times \left(\frac{160}{3,6}\right)^2 \times 0,3} = 0,3.$$

21) L'équation de la question 18) s'écrit :

$$M \frac{dv}{dt} = \frac{\Gamma}{a} - \lambda v^2, \text{ avec } v_\ell = \sqrt{\frac{\Gamma}{a\lambda}}.$$

On obtient :

$$M \frac{dv}{dt} = \lambda (v_\ell^2 - v^2).$$

Cette équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dv}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{\lambda}{M} dt, \text{ soit } \frac{d\left(\frac{v}{v_\ell}\right)}{1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^2} = \frac{\lambda v_\ell}{M} dt.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$\text{Arg th}\left(\frac{v}{v_\ell}\right) = \frac{\lambda v_\ell}{M} t + \text{cte}.$$

À $t = 0$, $v = 0$ donc $\text{cte} = 0$, donc, pour passer de 0 à v , il faut un temps τ qui vérifie :

$$\tau = \frac{M}{\lambda v_\ell} \text{Arg th}\left(\frac{v}{v_\ell}\right).$$

22) A.N.

• $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit $v \approx \frac{100}{3,6} \approx 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

• $v_\ell = \frac{160}{3,6} \approx 44,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

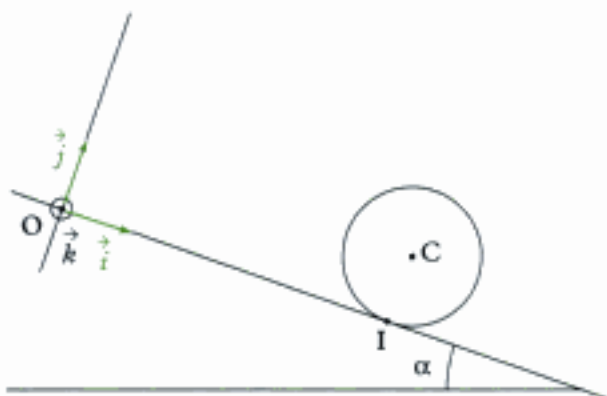
donc $\tau = \frac{900}{0,253 \times 44,4} \text{Arg th}\left(\frac{27,8}{44,4}\right)$, soit $\tau \approx 59 \text{ s}$.

23) Expérimentalement, on a trouvé $C_x = 0,3$ et $\tau = 15,4 \text{ s}$.

Le C_x est obtenu avec une très bonne précision (!) ; en revanche on constate une grosse erreur sur la valeur de τ : en effet le modèle ne prend pas compte de boîte de vitesse, qui fait très fortement « augmenter » la valeur de Γ (donc diminuer τ).

Problème 2 : Mouvements d'un cerceau

On se propose d'étudier quelques mouvements d'un cerceau de masse m modélisé par un cercle de centre C et de rayon R . Ces mouvements auront lieu dans le plan vertical $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ le long d'un plan incliné de longueur suffisante, faisant l'angle α avec l'horizontale. Le contact en I du cerceau et du plan incliné est toujours supposé réalisé, et il est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f (terme positif et constant). On posera $\vec{OI} = x\vec{i}$.



Dans tout le problème on raisonne dans le référentiel \mathcal{R}_L . On note $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère lié à \mathcal{R}_L supposé galiléen. On désignera par :

- $\vec{v} = v\vec{i}$ le vecteur vitesse de C ;
- $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ le vecteur de rotation du cerceau ;
- $\vec{V} = V\vec{i}$ le vecteur de glissement du cerceau par rapport au plan incliné ;
- $\vec{F}_R = T\vec{i} + N\vec{j}$ la réaction du plan incliné sur le cerceau ;
- $J = mR^2$ le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe $C\vec{k}$.

À l'instant origine ($t = 0$), I se trouve en O et les conditions initiales imposées au cerceau sont $R\omega_0 > v_0 > 0$.

Données numériques

- $m = 300 \text{ g}$;
- $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (accélération de la pesanteur) ;
- $f = 0,2$;
- $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $R\omega_0 = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\sin \alpha = 0,1$.

Uniquement pour les applications numériques, on confondra $\cos \alpha$ et 1.

Partie I. Préliminaires

- 1) Vérifier que la vitesse de glissement \vec{V} (vitesse du point I du cerceau) à un instant quelconque est égale à $(v + R\omega)\vec{i}$.
- 2) Exprimer l'énergie cinétique \mathcal{E}_k du cerceau à un instant quelconque en fonction de m , v et $R\omega$.
- 3) Grâce au théorème du centre de masse et du théorème du moment cinétique et sans hypothèse particulière sur les mouvements du cerceau, trouver trois relations scalaires liant \dot{v} et $R\dot{\omega}$ (avec les notations classiques $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ et $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$) aux données.
- 4) Écrire le théorème de l'énergie cinétique : en déduire une relation homogène à une puissance liant \dot{v} et $R\dot{\omega}$ aux données.
- 5) L'équation obtenue au I.4) est-elle indépendante de celle obtenues au I.3) ?
- 6) Calculer ω_0 sachant que :
 $J = 75 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Partie II. Première phase

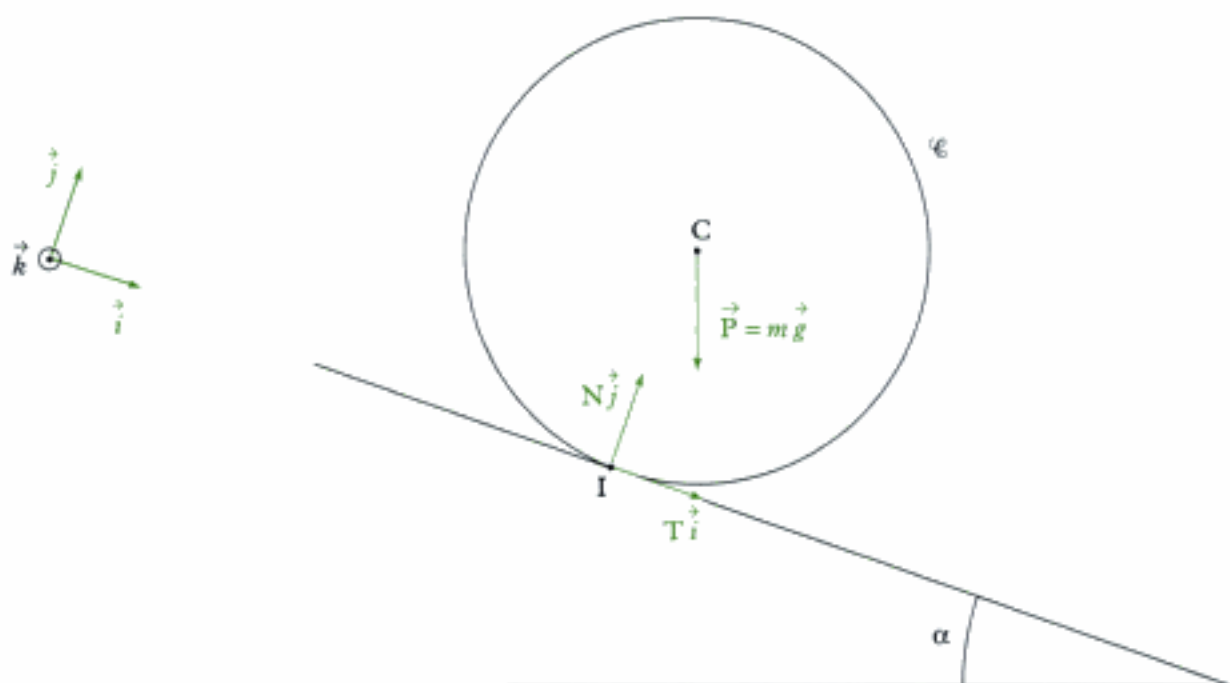
- 1) Calculer $V(t = 0)$.
En déduire précisément les caractéristiques du mouvement ultérieur du cerceau.
Exprimer T .
- 2) Trouver les lois d'évolution de v , $R\omega$ et V en fonction du temps.
On pourra poser $a = (f \cos \alpha - \sin \alpha)g$.
Calculer numériquement a .
- 3) En déduire que v s'annule pour un instant $t = t_1$ à déterminer.
Que valent alors $R\omega$ et V ? (On les désignera respectivement par $R\omega_1$ et V_1 .)
- 4) Exprimer la distance x_1 parcourue par C pendant cette première phase.
- 5) Application numérique : calculer T_1 (T_1 désigne la réaction du plan incliné selon \vec{i} pour cette phase 1), t_1 , $R\omega_1$, V_1 et x_1 .

Partie III. Deuxième phase

- 1) Décrire le type de mouvement pour $t > t_1$.
- 2) Quelles sont les lois d'évolution de v , $R\omega$ et V en fonction du temps au cours de cette deuxième phase ?

Hidden page

Hidden page



Actions mécaniques appliquées au cerceau

- Équation du théorème du centre de masse (TCM) :

$$m \vec{a}(C)_{/\mathbb{R}_L} = \vec{P} + \vec{F}_R = m \vec{g} + T \vec{i} + N \vec{j}$$

avec $\vec{a}(C)_{/\mathbb{R}_L} = \left(\frac{d}{dt} \vec{v}(C)_{/\mathbb{R}_L} \right)_{/\mathbb{R}_L} = \left[\frac{d}{dt} (v \vec{i}) \right]_{/\mathbb{R}_L} = \dot{v} \vec{i}$.

 \vec{i} est constant dans \mathbb{R}_L .

L'équation vectorielle s'écrit donc :

$$m \dot{v} \vec{i} = m \vec{g} + T \vec{i} + N \vec{j}. \quad (1)$$

En projection sur \vec{i} , (1) s'écrit :

$$m \dot{v} \vec{i} \cdot \vec{i} = (m \vec{g} + T \vec{i} + N \vec{j}) \cdot \vec{i},$$

soit $m \dot{v} = m \vec{g} \cdot \vec{i} + T \vec{i} \cdot \vec{i} + N \vec{j} \cdot \vec{i}$ soit $m \dot{v} = m g \cos(\vec{g}, \vec{i}) + T + 0 = m g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + T$

$$m \dot{v} = T + m g \sin \alpha \quad (\text{équation 1}).$$


En projection sur \vec{j} , (1) s'écrit :

$$m \dot{v} \vec{i} \cdot \vec{j} = (m \vec{g} + T \vec{i} + N \vec{j}) \cdot \vec{j}, \text{ soit } 0 = m \vec{g} \cdot \vec{j} + T \vec{i} \cdot \vec{j} + N \vec{j} \cdot \vec{j},$$

soit $0 = m g \cos(\vec{g}, \vec{j}) + 0 + N$, soit $0 = m g \cos(\pi - \alpha) + N$

$$0 = -m g \cos \alpha + N \quad (\text{équation 2}).$$

- Équation du théorème du moment cinétique TMC(Δ_C) avec $\Delta_C = (C, \vec{k})$.

 On nous donne le moment d'inertie par rapport à l'axe (C, \vec{k}) donc on choisit d'écrire l'équation du moment cinétique en C projetée sur \vec{k} , c'est-à-dire du TMC(Δ_C).

$$\vec{k} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{L}_C(\mathcal{E})_{/\mathbb{R}_L} \right)_{/\mathbb{R}_L} = \vec{k} \cdot \vec{M}_C(\vec{P}) + \vec{k} \cdot \vec{M}_C(\vec{F}_R) \quad (2)$$

Hidden page

Partie II

1) $V(t=0) = v(t=0) + R\omega(t=0) = v_0 + R\omega_0$, donc :

$$V(t=0) = 2 + 7 = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Donc à $t = 0$, il y a glissement au niveau du point de contact : le cerceau roule en glissant.

Les lois de Coulomb indiquent donc $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ et \vec{T} s'oppose au glissement.

Ici $\|\vec{T}_i\| = f\|\vec{N}_j\|$, soit $|T| = f|N|$.

Or $N = mg\cos\alpha$;



Voir (équation 2) question I. 3).

et $V > 0$ donc $T < 0$ ($|T| = -T$).



\vec{T} s'oppose au glissement.

On obtient donc :

$$-T = fmg\cos\alpha \text{ soit } T = -fmg\cos\alpha.$$

2) Pour trouver les lois d'évolution de v et $R\omega$ en fonction du temps, il nous faut utiliser les équations du TCM et du TMC.

• Pour v , (équation 1) de la question I. 3) donne :

$$m\dot{v} = T + mg\sin\alpha,$$

qui devient à l'aide de l'expression de T :

$$m\dot{v} = -fmg\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

$$\dot{v} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = -a.$$

Avec les valeurs numériques :

$$a = (f\cos\alpha - \sin\alpha)g = (0,2 \times 1 - 0,1) \times 10 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

On peut donc intégrer l'équation précédente :

$$v(t) = -at + \text{cte.}$$

Or à $t = 0$, $v(t=0) = v_0 = \text{cte}$, ainsi :

$$v(t) = -at + v_0.$$

• Pour ω , (équation 3) de la question I. 3) donne :

$$mR\dot{\omega} = T = -fmg\cos\alpha, \text{ soit } R\dot{\omega} = -fg\cos\alpha.$$



En valeur numérique $-fg\cos\alpha = -0,2 \times 10 \times 1 = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{cte}$.

Soit en intégrant :

$$R\omega(t) = -fg\cos(\alpha)t + \text{cte.}$$

Or à $t = 0$, $R\omega(t) = R\omega_0 = \text{cte}$; donc :

donc

$$R\omega(t) = -fg\cos(\alpha)t + R\omega_0.$$

Pour obtenir V , il suffit d'utiliser la relation :

$$V = v + R\omega$$

donc $V(t) = -at + v_0 - fg\cos(\alpha)t + R\omega_0$, soit :

$$V(t) = -(a + fg\cos\alpha)t + v_0 + R\omega_0.$$

3) Comme $v(t) = -at + v_0$, avec $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on sait qu'il existe un instant t_1 où v s'annule :

$$v(t_1) = 0 = -at_1 + v_0, \text{ soit } t_1 = \frac{v_0}{a}.$$



Comme v_0 est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et a en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, l'expression est bien homogène à un temps : $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{s}$.

Hidden page

Hidden page

On obtient donc : $v(t') = \frac{g \sin \alpha}{2} t' + v_2$.

Comme $R\omega(t') + v(t') = 0$, on a :

$$R\omega(t') = -\frac{g \sin \alpha}{2} t' - v_2.$$

En utilisant l'équation 3) de la question I. 3) : $T = mR\dot{\omega}$, on obtient :

$$T = m(-\dot{v}) = -m \frac{g \sin \alpha}{2}, \text{ soit } \mathbf{T} = -m \frac{g \sin \alpha}{2} < 0.$$

 On vérifie que $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$; en effet :

$$\|\vec{T}\| = |T| = mg \frac{\sin \alpha}{2} = 0,2 \times 10 \times \frac{0,1}{2} = 0,1 \text{ N}$$

$$f\|\vec{N}\| = fN = fmg \cos \alpha = 0,2 \times 0,2 \times 10 \times 1 = 0,4 \text{ N.}$$

Donc il y a bien roulement sans glissement.

3) Cette phase se termine lorsque la vitesse du cerceau s'annule ; en effet $v_2 < 0$ et $\dot{v}(t') > 0$

$$v(t'_1) = 0 = g \frac{\sin \alpha}{2} t'_1 + v_2$$

soit :

$$t'_1 = -\frac{2v_2}{g \sin \alpha}$$

 Cette expression est bien homogène à un temps en s.

• Comme $v_2 < 0$, $t'_1 > 0$ (ouf !).

On a toujours roulement sans glissement donc :

$$V(t'_1) = v(t'_1) + R\omega(t'_1) = 0 \text{ donc } \mathbf{R\omega'_1 = 0.}$$


4) Comme on a changé d'origine des temps, il ne faut pas oublier qu'à $t' = 0$, on est déjà en x_2 donc :

$$x'_1 = x_2 + \int_0^{t'_1} v(t') dt = x_2 + \int_0^{t'_1} \left(\frac{g \sin \alpha}{2} t' + v_2 \right) dt' = x_2 + \left[g \frac{\sin \alpha}{4} t'^2 + v_2 t' \right]_0^{t'_1}$$

$$\text{soit } x'_1 = x_2 + \frac{g \sin \alpha}{4} t'^2_1 + v_2 t'_1 = x_2 + \frac{g \sin \alpha}{4} \left(\frac{-2v_2}{g \sin \alpha} \right)^2 + v_2 \times \left(\frac{-2v_2}{g \sin \alpha} \right) = x_2 + \frac{v_2^2}{g \sin \alpha} - \frac{2v_2^2}{g \sin \alpha}.$$

Ainsi :

$$x'_1 = x_2 - \frac{v_2^2}{g \sin \alpha}$$

 Comme $\frac{v_2^2}{g \sin \alpha} > 0$, on a bien $x'_1 < x_2$: normal puisque le cerceau remontait encore.

5) Applications numériques :

$$\bullet t'_1 = -\frac{2v_2}{g \sin \alpha} = -\frac{2 \times (-1)}{10 \times 0,1} = 2 \text{ s}$$

$$\bullet x'_1 = x_2 - \frac{v_2^2}{g \sin \alpha} = 1,5 - \frac{(-1)^2}{10 \times 0,1} = 0,5 \text{ m.}$$

 Comme $x'_1 > 0$, à la fin de la 3^e phase, le cerceau n'est toujours pas revenu à sa position de départ.

Hidden page

Or :

• $W_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = 0$ car il y a roulement **sans glissement** donc T ne travaille pas.

$$\bullet W_{\text{ext}}(\vec{P}) = mg \underbrace{(x_1' - x_2)}_{\substack{\text{différence d'altitude de} \\ \text{C entre les instants} \\ t' = 0 \text{ et } t' = t_1'}}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{E}_k(t_1') - \mathcal{E}_k(0) = mg \sin \alpha (x_1' - x_2)$$

soit en reprenant l'expression de x_1' de la question IV. 4) :

$$\mathcal{E}_k(t_1') - \mathcal{E}_k(0) = mg \sin \alpha \times \left(\frac{-v_2^2}{g \sin \alpha} \right)$$

$$\mathcal{E}_k(t_1') - \mathcal{E}_k(0) = -mv_2^2.$$

On retrouve le résultat précédent, donc le TEC est bien vérifié.



Ouf !

2) La variation d'énergie cinétique entre $t = 0$ et $t = t_2$ (1^{re} et 2^e phase) s'écrit :

$$\mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t = 0) = \frac{1}{2} m[(R\omega_2)^2 + v_2^2] - \frac{1}{2} m[(R\omega_0)^2 + v_0^2] = mv_2^2 - \frac{1}{2} m[(R\omega_0)^2 + v_0^2],$$

$$\text{soit } \mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t = 0) = m \left[\frac{R\omega_0 a - fg \cos \alpha v_0}{a + fg \cos \alpha} \right]^2 - \frac{1}{2} m[(R\omega_0)^2 + v_0^2]$$

$$\text{A.N. } \mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t = 0) = 0,3 \times (-1)^2 - \frac{1}{2} 0,3[7^2 + 2^2]$$

$$\mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t = 0) = -7,65 \text{ J.}$$

Appliquons le TEC au cerceau C entre les instants $t = 0$ et $t = t_2$:

$$\mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t = 0) = W_{\text{ext}}(\vec{P}) + W_{\text{ext}}(\vec{F}_R)$$

$$W_{\text{ext}}(\vec{P}) = mg \times \underbrace{(x_2 - 0)}_{\substack{\text{différence d'altitude de} \\ \text{C entre } t = 0 \text{ et } t = t_2}} \sin \alpha$$

$$W_{\text{ext}}(\vec{P}) = mg x_2 \sin \alpha.$$

$$\text{A.N. } W_{\text{ext}}(\vec{P}) = 0,3 \times 10 \times 1,5 \times 0,1 = 0,45 \text{ J.}$$



Entre $t = 0$ et $t = t_2$, le cerceau descend « globalement » puisque le poids est moteur ($W_{\text{ext}}(\vec{P}) > 0$).

$$\bullet W_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = \int_{t=0}^{t=t_2} \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F}_R) dt.$$

Or $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = T(v + R\omega)$ (voir question I. 4).

Et pendant les phases 1 et 2, on a :

$$T = -fmg \cos \alpha; \quad v = -at + v_0; \quad R\omega = -fg \cos \alpha t + R\omega_0.$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = -fmg \cos \alpha (-at + v_0 - fg \cos \alpha t + R\omega_0).$$

$$\text{Donc } W_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = \int_{t=0}^{t=t_2} fmg \cos \alpha ((a + fg \cos \alpha)t - (v_0 + R\omega_0)) dt$$

$$= fmg \cos \alpha \left[(a + fg \cos \alpha) \frac{t^2}{2} - (v_0 + R\omega_0)t \right]_0^{t_2}$$

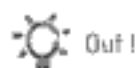
$$W_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = fmg \cos \alpha \left[(a + fg \cos \alpha) \frac{t_2^2}{2} - (v_0 + R\omega_0)t_2 \right]$$

$$\text{A.N. } W_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = 0,2 \times 0,3 \times 10 \times 1 \left[(1 + 0,2 \times 10 \times 1) \times \frac{3^2}{2} - (2 + 7) \times 3 \right] = -8,10 \text{ J.}$$

$$\text{Le TEC donne donc : } \mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t=0) = W_{\text{ext}}(\vec{P}) + W_{\text{ext}}(\vec{F}_R) = 0,45 - 8,1$$

$$\mathcal{E}_k(t_2) - \mathcal{E}_k(t=0) = -7,65 \text{ J.}$$

On retrouve le résultat précédent donc le TEC est bien vérifié.



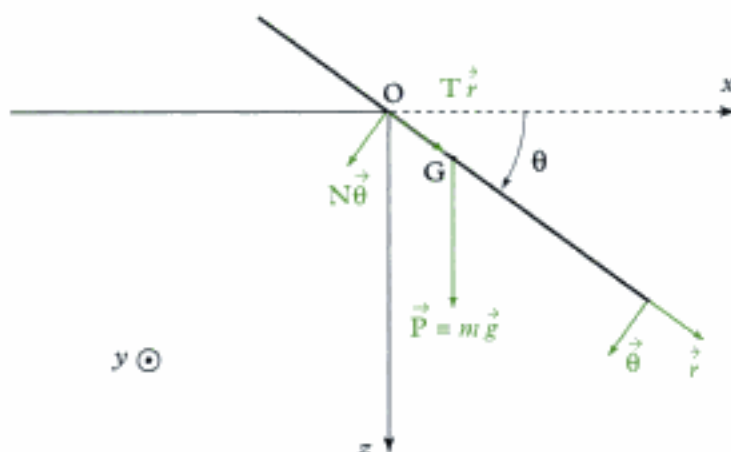
Hidden page

Hidden page

Solution du problème 3

1) On cherche à écrire l'équation vectorielle du théorème du centre de masse (TCM) appliquée à la tartine \mathcal{F} .

 L'équation vectorielle du théorème du centre de masse donnera deux équations scalaires (après projection dans $(\vec{r}, \vec{\theta})$).



Système étudié : la tartine \mathcal{F} .

Référentiel galiléen : le référentiel \mathcal{R} .

Actions mécaniques extérieures appliquées au système

- poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{z}$ appliqué au centre de gravité de la tartine : le point G.
- la réaction de la table : $\vec{R} = T\vec{r} + N\vec{\theta}$ appliquée en O.

 \vec{r} et $\vec{\theta}$ jouent ici le rôle de \vec{e}_r et \vec{e}_θ , habituellement définis dans cet ouvrage.

• Équation du théorème du centre de masse :

$$m \vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R} = mg\vec{z} + T\vec{r} + N\vec{\theta} \quad (1)$$

avec $\vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$

et $\vec{v}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d(\delta\vec{r})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \delta \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \delta\dot{\theta}\vec{\theta}$

donc $\vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\delta\dot{\theta}\vec{\theta}) = \delta \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\vec{\theta}) = \delta[\ddot{\theta}\vec{\theta} + \dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{r})] = \delta\ddot{\theta}\vec{\theta} - \delta\dot{\theta}^2\vec{r}$.

 $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$... avec la définition de θ ... et le sens de \vec{y} ...

En effet, appelons \mathcal{R}' le repère mobile dont deux vecteurs de base sont \vec{r} et $\vec{\theta}$ et appliquons la formule de Varignon :

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{r}$$

Ici $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$ car \vec{r} est fixe dans \mathcal{R}' .

Par ailleurs $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{y}$ car \vec{y} oriente les angles positifs dans le sens trigonométrique et θ est orienté positivement dans des aiguilles d'une montre (le sens inverse).

Hidden page

• $\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$ car cette action s'applique en O !

L'équation du théorème du moment cinétique devient :

$$\frac{d}{dt}(J_{Oy}(-\dot{\theta})) = -mg\delta \cos\theta + 0 \text{ soit } -m\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)\ddot{\theta} = -mg\delta \cos\theta,$$

$$\text{ou encore } \underbrace{\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)}_{(m^2)} \underbrace{\ddot{\theta}}_{(m \cdot s^{-2})} = \underbrace{g}_{(m \cdot s^{-2})} \underbrace{\delta}_{(m)} \cos\theta \quad (\text{équation 3})$$



• Comme a et δ sont en m , g en $m \cdot s^{-2}$ et $\ddot{\theta}$ en $rad \cdot s^{-2}$, cette expression est homogène à des $m^2 \cdot s^{-2}$.

• Quand $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta \geq 0$ donc $\ddot{\theta} > 0$: le moment du poids entraîne une accélération de rotation positive.

On utilise (équation 3) qu'on cherche à intégrer. Pour cela, on la multiplie par $\dot{\theta}$.



On pense à l'intégration de cette équation car, dans le résultat de l'énoncé, il n'apparaît plus $\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ mais seulement $\dot{\theta} = \omega$.

$$\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\delta \cos\theta \dot{\theta}.$$

Soit en intégrant :

$$\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} = g\delta \sin\theta + \text{cste.}$$

Or à $t = 0$, $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ donc $\text{cste} = 0$.

$$\text{Ainsi : } \left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} = g\delta \sin\theta \quad \text{soit} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g\delta}{\frac{a^2}{3} + \delta^2} \sin\theta.$$

$$\text{Soit } \omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\delta}{a + \frac{3\delta^2}{a}} \sin\theta, \quad \text{et enfin} \quad \omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\frac{\delta}{a}}{1 + \frac{3\delta^2}{a^2}} \sin\theta,$$

ou encore, en utilisant $\eta = \frac{\delta}{a}$

$$\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1 + 3\eta^2} \sin\theta = \omega_0^2 \sin\theta.$$

3) Pour cela, on applique le TEC car on cherche une relation déjà intégrée.

• Même système, même référentiel galiléen, mêmes actions mécaniques.

• Instant initial : $t = 0$.

• Instant final : t .

Le TEC s'écrit :

$$\mathcal{E}_{c_2}(\mathcal{F}) - \mathcal{E}_{c_1}(\mathcal{F}) = W_{\text{ext}}.$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c_2}(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2 \text{ car l'axe } (Oy) \text{ est fixe dans } \mathcal{R}. \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right) \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$



On peut retrouver l'expression de l'énergie cinétique à l'aide du 2^e théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_c^*(\mathcal{F}) + \frac{1}{2} m v(G)_{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{2} J_{Gy} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\delta \dot{\theta})^2 \quad (\text{voir question 1})$$

En effet $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = \delta \dot{\theta} \vec{e}_1$.

$$\text{Ainsi } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \frac{ma^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \delta^2 \dot{\theta}^2 \text{ soit } \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{ma^2}{3} + m\delta^2 \right)}_{J_{O_V}} \dot{\theta}^2$$

• $\mathcal{E}_{c_1}(\mathcal{F}) = 0$, car $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

• Travail des actions mécaniques :

$W_{\text{ext}}(\vec{R}) = 0$ (car le point d'application O de \vec{R} est fixe (dans \mathcal{R})).

$$W_{\text{ext}}(\vec{P}) = mg \underbrace{(0 - (-\delta \sin \theta))}_{\substack{\text{différence d'altitude entre les} \\ \text{2 instants } (t=0 \text{ et } t)}} = mg \delta \sin \theta$$



Référence des altitudes : au niveau du point O.

Ainsi le TEC s'écrit :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{a^2}{3} + \delta^2 \right) \dot{\theta}^2 - 0 = mg \delta \sin \theta$$

qui est bien l'équation trouvée en 2).

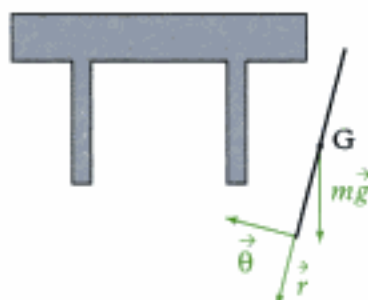
4) Lorsque la tartine (\mathcal{F}) quitte la table, elle reste soumise uniquement à son propre poids.

Pour trouver la loi d'évolution ultérieure de θ , on applique le théorème du moment cinétique en G.

• **Système** : tartine.

• **Référentiel galiléen** : \mathcal{R} .

• **Actions mécaniques extérieures appliquées** : \vec{P} poids en G.



Actions mécaniques appliquées à la tartine \mathcal{F} après le décollage

Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} (L_{(G\dot{y})}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}}) = \dot{y} \cdot \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P})$$

avec :

• $L_{(G\dot{y})}(\mathcal{F})_{/\mathcal{R}} = J_{Gy}(-\dot{\theta}) = -\frac{ma^2}{3} \dot{\theta}$;

• $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{0}$ car le poids s'applique en G.

Ainsi : $\frac{d}{dt} \left(-\frac{ma^2}{3} \dot{\theta} \right) = 0$ soit $\dot{\theta} = \text{cte}$.

Or à $t = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta} = \omega_0$; donc $\dot{\theta} = \omega_0$ et $\theta(t) = \omega_0 t + \text{cte}$.

Comme à $t = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}$$

☀ L'énoncé nous dit que la tartine quitte la table quand $\theta = \frac{\pi}{2}$; en fait, si on utilise (équation 2); en remplaçant $\ddot{\theta}$ par son expression (équation 3), on obtient :

$$m\delta \times \frac{g\delta \cos\theta}{\frac{a^2}{3} + \delta^2} = mg \cos\theta + N.$$

$$\text{Soit } N = mg \left(\frac{\delta^2}{\frac{a^2}{3} + \delta} - 1 \right) \cos\theta = mg \left(\frac{\delta^2 - \frac{a^2}{3} - \delta^2}{\frac{a^2}{3} + \delta} \right) \cos\theta = -\frac{1}{1 + \frac{3\delta^2}{a^2}} mg \cos\theta.$$

Ainsi $N(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$ donc la réaction s'annule bien pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Par contre l'étude a été faite dans l'hypothèse où il n'y avait pas de glissement en O :

$$f > \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|}.$$

Or si N devient très faible, cette condition ne sera plus réalisée donc il y aura en réalité glissement de la tartine avant la position $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5) Pour que la tartine ne retombe pas du côté du beurre, il faut au moins qu'elle retombe sur la tranche, soit :

$$\theta_f = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \left(\begin{array}{c} \text{G} \\ \text{O} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\}$$

$$\theta = \pi \quad \left(\begin{array}{c} \text{G} \\ \text{O} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \left(\begin{array}{c} \text{O} \\ \text{G} \end{array} \right)$$

6) Pour obtenir le temps de chute, il faut appliquer le théorème du centre de masse ($t > 0$) en projection sur \vec{z} :

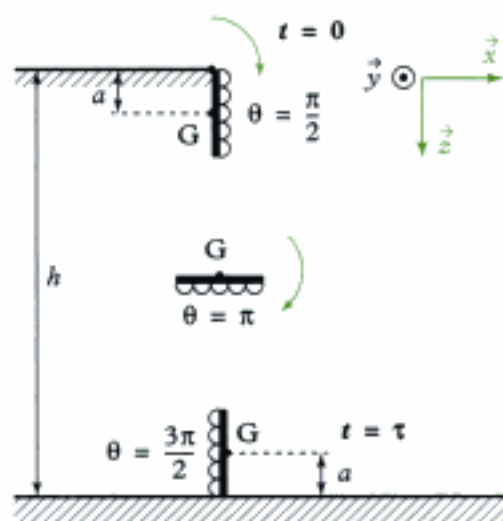


Fig. 3 - « Chute libre » de la tartine

• **Système étudié** : tartine \mathcal{F}

• **Référentiel galiléen** : \mathcal{R}

• **Actions mécaniques extérieures** : poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$m\vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{z}.$$

Si on pose $\vec{OG} = x\vec{x} + z\vec{z}$, on a alors $\vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{x} + \ddot{z}\vec{z}$;

l'équation s'écrit donc :

$$m(\ddot{x}\vec{x} + \ddot{z}\vec{z}) = mg\vec{z}.$$

En projection sur \vec{z} , on obtient :

$$m(\ddot{x}\vec{x} + \ddot{z}\vec{z}) \cdot \vec{z} = mg\vec{z} \cdot \vec{z}, \quad \text{soit} \quad m\ddot{z} = mg, \quad \text{soit} \quad \ddot{z} = g.$$

Soit en intégrant :

$$\dot{z}(t) = gt + \text{cte}$$

Or à $t = 0$, $\dot{z} = 0$ donc $\text{cte} = 0$ et en intégrant encore une fois :

$$z(t) = g\frac{t^2}{2} + \text{cte}.$$

Or à $t = 0$, $z = a$ donc $\text{cte} = a$, ainsi :

$$z(t) = g\frac{t^2}{2} + a.$$



Il s'agit d'une chute libre.

Par ailleurs, à $t = \tau$, $z(\tau) = h - a$, donc $h - a = g\frac{\tau^2}{2} + a$, et par conséquent :

$$\tau = \sqrt{2 \frac{h - 2a}{g}} \quad \begin{matrix} \text{(m)} \\ \text{(s)} \end{matrix}$$



La position initiale ($t = 0$: $z = a$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire l'extrémité de la tartine en O) introduite dans l'énoncé ne peut être envisagée sans glissement au niveau du point O.
(Ceci contredit l'hypothèse de pivotement sans glissement introduite au début de l'énoncé).

$$\text{A.N.} \quad \tau = \sqrt{2 \times \frac{0,75 - 0,1}{9,8}} \approx 0,36 \text{ s.}$$

Il y a **très peu de chance de la rattraper** !

7) Pour que la tartine puisse atterrir côté pain, il faut que :

$$\theta(t = \tau) \geq \frac{3\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \omega_0\tau + \frac{\pi}{2} \geq \frac{3\pi}{2}, \quad \text{soit} \quad \omega_0 \times \sqrt{\frac{2(h-2a)}{g}} \geq \pi,$$

soit en introduisant l'expression de ω_0 de la question 2) :

$$\sqrt{\frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2}} \sqrt{\frac{2(h-2a)}{g}} \geq \pi$$

qui s'écrit (puisque $\eta \ll 1$) et en élevant au carré :

$$\frac{g}{a} \frac{6\eta}{1} \times \frac{2(h-2a)}{g} \geq \pi^2 \quad \text{soit} \quad \eta \geq \frac{\pi^2 a}{12(h-2a)} = \frac{\pi^2}{12\left(\frac{h}{a} - 2\right)} = \alpha.$$

Ainsi

$$\eta \geq \eta_{\min} = \alpha = \frac{\pi^2}{12\left(\frac{h}{a} - 2\right)}.$$

$$\text{A.N. } \eta_{\min} = \frac{\pi^2}{12\left(\frac{75}{5} - 2\right)} \approx 0,063.$$

Or, comme $\eta \approx 0,02 < \eta_{\min} = 0,063$, donc **la tartine ne retombera pas du côté pain.**

8) Si on suppose a et h fixés,

$$\bullet \omega_0(\text{Mars}) = \sqrt{\frac{g_{\text{Mars}}}{g_{\text{Terre}}}} \omega_0(\text{Terre}), \text{ donc } \omega_0(\text{Mars}) < \omega_0(\text{Terre});$$

$$\bullet \tau(\text{Mars}) = \sqrt{\frac{g_{\text{Terre}}}{g_{\text{Mars}}}} \tau(\text{Terre}), \text{ donc } \tau(\text{Mars}) > \tau(\text{Terre});$$

en revanche η_{\min} **reste inchangé.**

Ainsi sur Mars, la tartine tournera moins vite, tombera plus longtemps mais **ne retombera pas non plus côté pain !**

9) Imaginons un humanoïde tombant par terre, en rotation autour d'un axe fixe (passant par ses pieds) :

Utilisons la conservation de l'énergie mécanique (TEM) :

• **Système** : humanoïde \mathcal{H} .

• **Référentiel galiléen** : la planète.

• **Actions mécaniques**

– réaction du sol en O (liaison pivot sans frottement)

– poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{z}$.

• Instant initial : $t = 0$ ($\theta = 0$);

• Instant final : t ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

$\mathcal{E}_m(\mathcal{H}) = \mathcal{E}_c(\mathcal{H}) + \mathcal{E}_p(\mathcal{H}) = \text{cte}$ car il n'y a pas d'effets dissipatifs

$$= \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 + mgz_G = \text{cte}$$

$$= 0 + mg\frac{h}{2} \quad (t = 0 \text{ quand } \theta = 0)$$

$$= \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2(\text{sol}) + 0 \quad (\text{c'est-à-dire quand } \theta = \frac{\pi}{2}).$$

Donc on en déduit que :

$$mgh = J_G \dot{\theta}^2(\text{sol})$$

L'énoncé suggère que $\dot{\theta}^2(\text{sol}) = \text{cte}$ pour tous les humanoïdes (associée à la limite de résistance de la boîte crânienne), on en déduit que :

$$mgh = \text{cte} \quad \text{donc} \quad g_{\text{Terre}} h_{\text{Terre}} = g_{\text{Mars}} h_{\text{Mars}}$$

$$\text{soit } h_{\text{Mars}} = \frac{g_{\text{Terre}}}{g_{\text{Mars}}} h_{\text{Terre}} = \frac{9,8}{3,7} \times 1,8 = 4,8 \text{ m.}$$

en prenant une taille humaine de 1,8 m.

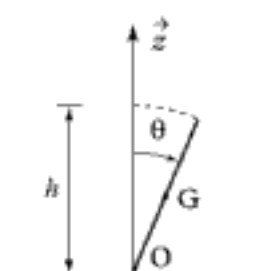
Par ailleurs, on a vu dans la question précédente que même sur Mars, la tartine avait toutes les chances de retomber du côté beurre !

10) La remarque de l'énoncé a déjà été évoquée lors des questions 4) et 6) ; en effet la rotation jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ ne pourra avoir lieu sans glissement.

• Au moment du décollement, le point G aura donc déjà (du fait du glissement) une vitesse verticale \rightarrow le **temps de chute va donc s'en trouver diminué** (très légèrement).

• Par ailleurs, pendant la phase de glissement, de l'énergie va être dissipée donc $\dot{\theta}(t=0) = \omega_0$ va également s'en **trouver diminuée.**

• Ainsi la vitesse de rotation va diminuer ainsi que le temps de chute donc **la probabilité de voir atterrir la tartine « du bon côté » va encore diminuer.**



Problème 4 : Entraînement d'une charge mécanique par un moteur

Ce problème a pour objectif l'étude de l'entraînement d'une charge mécanique par un moteur électrique. On appelle communément « charge mécanique » toute machine opposant un couple résistant au moteur devant l'entraîner.

Adaptation du moteur à sa charge mécanique

On s'intéresse ici aux mouvements où l'ensemble {moteur + charge} doit aller le plus vite possible d'une position d'équilibre à une autre. On peut considérer que, dans ces conditions, le couple résistant est nul. Les axes de rotation du moteur et de la charge sont confondus.

Soient J_m et J_c les moments d'inertie respectifs par rapport à l'axe commun de rotation de la partie mobile du moteur et de la machine entraînée, Γ_M le couple mécanique, supposé constant et indépendant de la charge, développé par le moteur et θ l'angle commun de rotation des parties mobiles, mesuré par rapport à un axe polaire. On définit les vitesses de montée en puissance par :

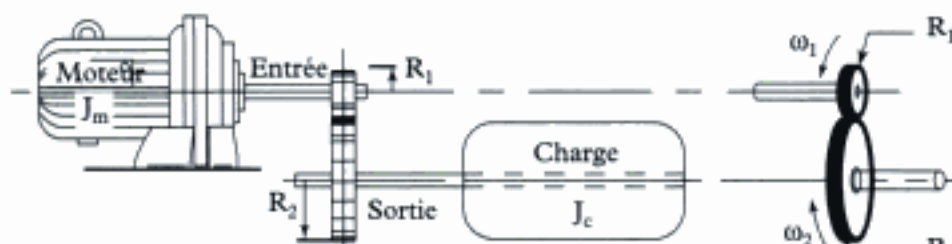
$$p_m = \frac{d}{dt} \text{ (puissance mécanique fournie par le moteur)}$$

$$p_c = \frac{d}{dt} \text{ (puissance mécanique reçue par la charge).}$$

1) Le moteur tourne seul. Montrer que :

$$p_m = \Gamma_M \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(\Gamma_M)^2}{J_m}.$$

2) On accouple directement le moteur à la charge, l'ensemble tournant à la vitesse angulaire ω .



Moteur, réducteur et charge.

Montrer que :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Gamma_M}{J_m + J_c} \quad \text{et} \quad r = \frac{p_c}{p_m} = \frac{J_m J_c}{(J_m + J_c)^2}.$$

3) Pour quelle valeur de J_m le rendement r est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

En utilisation industrielle, J_c est fixé et l'on cherche à accélérer la charge le plus rapidement possible. L'introduction d'un réducteur mécanique entre le moteur et sa charge permet d'atteindre ce but. Ce réducteur est constitué de deux roues dentées, de rayons respectifs R_1 et R_2 , de vitesses angulaires respectives :

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt}$$

et s'engrenant l'une dans l'autre.

La roue 1 est sur l'arbre du moteur, la roue 2 sur celui de la machine (figure ci-dessous).

On pose $a = \frac{R_1}{R_2}$, $a < 1$.

4) Déterminer la relation entre ω_1 , ω_2 et a . En négligeant le moment d'inertie des roues, déduire des équations générales de la dynamique du solide la relation :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{\Gamma_M}{J_m + a^2 J_c}.$$

5) Déterminer l'expression du rendement r , tel qu'il est défini en 2), en présence du réducteur.

6) Le moment d'inertie de la charge J_c est supérieur au moment d'inertie J_m du moteur.

Déterminer le domaine de valeurs de a tel que le rendement et l'accélération angulaire de la charge soient tous les deux améliorés par l'introduction du réducteur.

Indications

2) On conserve la valeur de p_m de la question 1) = moteur à vide.

Solution du problème 4

1) Soit \mathcal{P}_m la puissance fournie par le moteur :

$$\mathcal{P}_m = \Gamma_M \dot{\theta} \quad (= \mathcal{P}_{\text{ext}}(\Gamma_M)),$$

donc $p_m = \dot{\mathcal{P}}_m = \Gamma_m \ddot{\theta}$.

Il reste à déterminer $\ddot{\theta}$: quand le moteur tourne à vide, il est constitué d'un solide (\mathcal{S}_1) (inertie J_m) soumis à un couple Γ_M ; appliquons le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation (O, \vec{e}_z) : TMC($\Delta = (O, \vec{e}_z)$).

Système étudié : la partie tournante du moteur : \mathcal{S}_1

Référentiel galiléen : terrestre

Actions mécaniques extérieures

- un couple moteur Γ_M ;
- une liaison pivot d'axe (O, \vec{e}_z) sans frottement ;

L'équation du théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [L_{Oz}(\mathcal{S}_1)] = \Gamma_M + 0, \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} (J_m \dot{\theta}) = \Gamma_M.$$

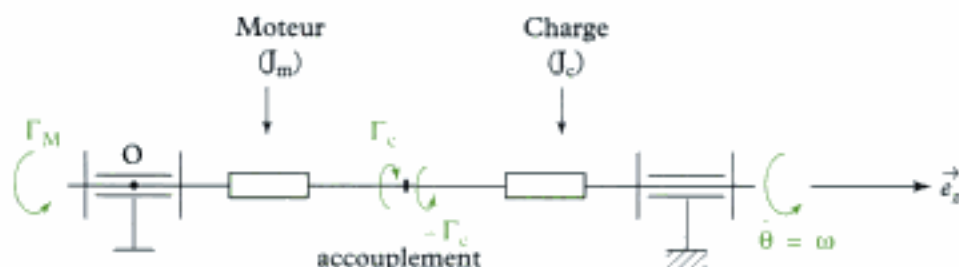
$$J_m \ddot{\theta} = \Gamma_M.$$

Ainsi :

$$p_m = \Gamma_M \cdot \dot{\theta} = \frac{\Gamma_M^2}{J_m}.$$

2) Si on accouple directement le moteur (J_m) à la charge (J_c), l'ensemble tournant à la même vitesse, on peut par analogie avec la question en déduire que :

$$(J_m + J_c) \ddot{\theta} = \Gamma_M \quad \ddot{\theta} = \frac{\Gamma_M}{J_m + J_c}.$$



Charge directement accouplée

On étudie alors un solide en rotation autour d'un axe fixe d'inertie $J_m + J_c$ (2 solides accouplés qui tournent à la même vitesse).

• Par ailleurs, on a toujours : $p_m = \dot{\mathcal{P}}_m = \frac{\Gamma_M^2}{J_m}$

• si on appelle \mathcal{P}_c la puissance reçue par la charge :

$$\mathcal{P}_c = \Gamma_c \dot{\theta} = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\Gamma_c) \quad \text{avec} \quad \Gamma_c : \text{le couple appliqué par le moteur sur la charge.}$$

Si on applique l'équation du moment cinétique uniquement à la charge, on en déduit (par analogie avec 1)) que :

$$J_c \ddot{\theta} = \Gamma_c, \quad \text{donc} \quad \Gamma_c = J_c \frac{\Gamma_M}{J_m + J_c} = \frac{J_c}{J_m + J_c} \Gamma_M.$$

Donc $\mathcal{P}_c = \frac{J_c}{J_m + J_c} \Gamma_M \dot{\theta}$, d'où :

$$p_c = \dot{\mathcal{P}}_c = \frac{J_c}{J_m + J_c} \Gamma_M \ddot{\theta} = \frac{J_c}{(J_m + J_c)^2} \Gamma_M^2.$$

On en déduit que :

$$r = \frac{p_c}{p_m} = \frac{\frac{J_c}{(J_m + J_c)^2} \Gamma_M^2}{\frac{\Gamma_M^2}{J_m}} = \frac{J_c J_m}{(J_m + J_c)^2}.$$



Le résultat donné dans l'énoncé supposait que l'on prenne pour p_m la puissance de montée à vide calculée dans 1), ce qui n'était pas précisé !

3) On cherche la valeur de J_m qui rend r maximal, c'est-à-dire :

$$\frac{dr}{dJ_m} = 0 \text{ avec } r = \frac{J_m J_c}{(J_m + J_c)^2}.$$



$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Donc $\frac{dr}{dJ_m} = \frac{(J_m + J_c)^2 \times J_c - J_m J_c \times 2(J_m + J_c)}{(J_m + J_c)^4} = 0$ soit $(J_m + J_c)^2 J_c - J_m J_c \times 2(J_m + J_c) = 0$,

soit en divisant par $(J_m + J_c) J_c$:

$$(J_m + J_c) - 2J_m = 0 \text{ soit } J_m = J_c \text{ ce qui donne } r = \frac{1}{4}.$$

4) Pour obtenir la relation entre ω_1 , ω_2 et $\alpha = \frac{R_1}{R_2}$, il faut utiliser le roulement sans glissement au point de contact I : $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} = \vec{0}$.

• Comme le mouvement relatif de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 est difficile à imaginer, on va introduire un repère intermédiaire : le sol (\mathcal{R}).

Ainsi $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}}$.

• Pour déterminer $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}}$, on va « passer » par un point naturellement élément de \mathcal{S}_1 et dont le mouvement dans \mathcal{R} est simple : O_1 ; la F.F.C.S. s'écrit :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{R}}}_{\substack{\in \mathcal{S}_1 \\ \in \mathcal{R}}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}}}_{\in \mathcal{S}_1} \wedge \underbrace{\vec{O}_1 I}_{\in \mathcal{R}}$$

avec :

• $\vec{v}(O_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ car O_1 est fixe dans \mathcal{R} .

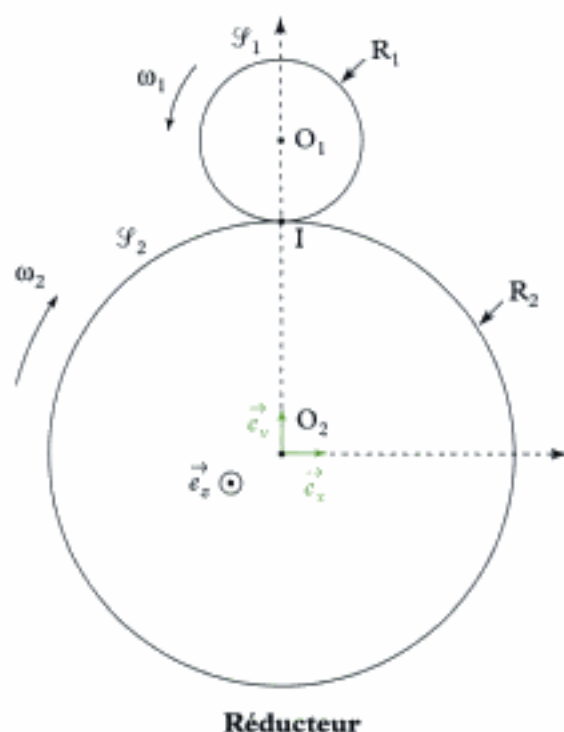
• $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} = \omega_1 \vec{e}_z$

• $\vec{O}_1 I = -R_1 \vec{e}_y$.

Donc $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} + \omega_1 \vec{e}_z \wedge (-R_1 \vec{e}_y)$

$$= -\omega_1 R_1 \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$$

$$= -\omega_1 R_1 (-\vec{e}_x) = \omega_1 R_1 \vec{e}_x.$$



Réducteur

- Par analogie, on calcule $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}}$ à l'aide de la F.F.C.S :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}} = \vec{v}(O_2)_{/\mathbb{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathbb{R}} \wedge \overrightarrow{O_2I}$$

avec :

- $\vec{v}(O_2)_{/\mathbb{R}} = \vec{0}$;
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathbb{R}} = -\omega_2 \vec{e}_x$.



Attention au sens de ω_2 (défini dans l'énoncé) par rapport à \vec{e}_x .

- $\overrightarrow{O_2I} = R_2 \vec{e}_y$

donc $\vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}} = \vec{0} + (-\omega_2 \vec{e}_x) \wedge R_2 \vec{e}_y = -R_2 \omega_2 \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -R_2 \omega_2 (-\vec{e}_z) = R_2 \omega_2 \vec{e}_z$.

- Ainsi la vitesse de glissement s'écrit :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{S}_2} = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1)_{/\mathbb{R}} - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2)_{/\mathbb{R}} = (R_1 \omega_1 - R_2 \omega_2) \vec{e}_z = \vec{0}.$$

Donc $R_1 \omega_1 - R_2 \omega_2 = 0$ soit $\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \omega_1 = a \omega_1$, d'où :

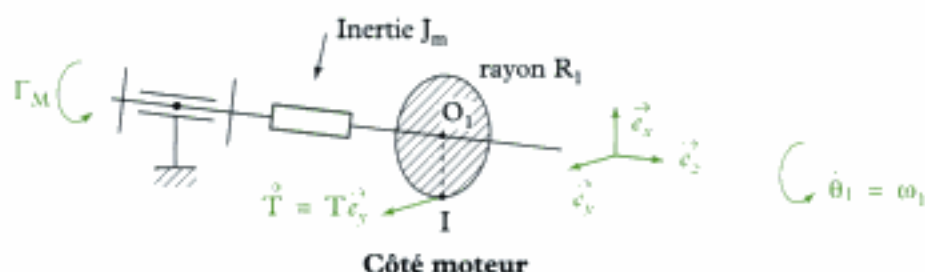
$$\omega_2 = a \omega_1.$$



Avec les sens définis par l'énoncé, si $\omega_1 > 0$ alors $\omega_2 > 0$ (Ok)

Pour déterminer le résultat indiqué dans l'énoncé, on va utiliser deux fois le théorème du moment cinétique :

- une fois appliqué à la partie tournante du moteur + Roue 1 ;
- une fois appliqué à la charge + Roue 2.



Système étudié : partie tournante du Moteur + Roue 1 (Moment d'inertie : J_m).

Référentiel galiléen : le sol.

Actions mécaniques extérieures

- le couple moteur $\Gamma_M \vec{e}_z$;
- la réaction de la roue 2 sur la roue 1 : $\vec{T} = T \vec{e}_y$;
- liaison pivot sans frottement.

L'équation du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $(O_1 \vec{e}_z)$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (L_{O_1, z}(\mathcal{S}_1)) = \vec{e}_z \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} (\text{couple moteur}) + \vec{e}_z \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} (\text{réaction de la roue 2}) + \vec{e}_z \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} (\text{liaison pivot})$$

avec :

- $L_{O_1}(\mathcal{S}_1) = J_m \cdot \dot{\theta}_1$;
- $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}$ (couple Moteur) = $\Gamma_M \vec{e}_z$;
- $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}$ (réaction de la roue 2) = $\overrightarrow{O_1I} \wedge \vec{T} = -R_1 \vec{e}_x \wedge T \vec{e}_y = -R_1 T \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -R_1 T \vec{e}_z$.

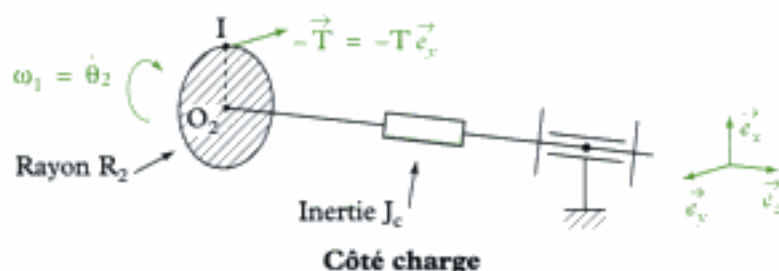
Ainsi l'équation du théorème du moment cinétique s'écrit :

$$J_m \ddot{\theta}_1 = \Gamma_M - R_1 T + 0 \quad (\text{équation 1})$$



Comme la liaison pivot est sans frottement, $\vec{e}_z \cdot \dot{\vec{M}}_{O_1}$ (liaison pivot) = 0.

On va maintenant écrire la 2^e équation du théorème du moment cinétique :



Système étudié : charge + Roue 2 (Moment d'inertie : J_c).

Référentiel galiléen : le sol.

Actions mécaniques extérieures

- la réaction de la roue 1 sur la roue 2 : $-\vec{T} = -T\vec{e}_y$;
- liaison pivot sans frottement.

L'équation du théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} L_{(O_2, \vec{e}_i)}(\mathcal{S}_2) = \vec{e}_z \cdot \vec{M}_{O_2} \text{ (réaction roue 1)} + \vec{e}_z \cdot \vec{M}_{O_2} \text{ (liaison pivot)}$$

avec :

$$\bullet L_{(O_2, \vec{e}_i)}(\mathcal{S}_2) = J_c(-\dot{\theta}_2) = -J_c \dot{\theta}_2.$$



Attention au signe...

$$\begin{aligned} \bullet \vec{M}_{O_2} \text{ (réaction roue 1)} &= \vec{O_2 I} \wedge (-\vec{T}) = R_2 \vec{e}_x \wedge (-T \vec{e}_y) \\ &= -R_2 T \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -R_2 T \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation du théorème du moment cinétique s'écrit :

$$-J_c \ddot{\theta}_2 = -R_2 T + 0 \quad (\text{équation 2})$$



Comme la liaison pivot est sans frottement, $\vec{e}_z \cdot \dot{\vec{M}}_{O_1}$ (liaison pivot) = 0.

En utilisant (équation 1) et en reportant l'expression de T trouvée dans (équation 2), on obtient :

$$J_m \ddot{\theta}_1 = \Gamma_M - R_1 \times \frac{J_c \ddot{\theta}_2}{R_2}.$$

Par ailleurs, on a démontré ci-avant que :

$$\dot{\theta}_2 = a \dot{\theta}_1, \text{ donc } \ddot{\theta}_2 = a \ddot{\theta}_1.$$

L'équation précédente devient donc (avec $a = \frac{R_1}{R_2}$) :

$$J_m \ddot{\theta}_1 = \Gamma_M - a J_c (a \ddot{\theta}_1) \text{ soit } (J_m + a^2 J_c) \ddot{\theta}_1 = \Gamma_M.$$

soit ou encore :

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\Gamma_M}{J_m + a^2 J_c}.$$

5) La puissance mécanique reçue par la charge s'écrit :

$$\mathcal{P}_c = \Gamma_c \times (-\dot{\theta}_2) = -R_2 T \times (-\dot{\theta}_2) = R_2 T \times \dot{\theta}_2.$$

 En effet, $\Gamma_c = -R_2 T$ est le couple reçu par la charge.

Or $R_2 T = J_c \ddot{\theta}_2$ (voir équation 2) et $\ddot{\theta}_2 = a \ddot{\theta}_1$ avec $\ddot{\theta}_1 = \frac{\Gamma_M}{J_m + a^2 J_c}$ (voir 4).

Donc $\mathcal{P}_c = J_c \times a \times \frac{\Gamma_M}{J_m + a^2 J_c} \times a \dot{\theta}_1$;

donc $p_c = \dot{\mathcal{P}}_c = \frac{J_c a^2}{J_m + a^2 J_c} \Gamma_M \ddot{\theta}_1$ soit $p_c = \frac{J_c a^2}{J_m + a^2 J_c} \Gamma_M \frac{\Gamma_M}{J_m + a^2 J_c}$.

ainsi $p_c = \frac{J_c a^2}{(J_m + a^2 J_c)^2} \Gamma_M^2$.

On a toujours $p_m = \frac{\Gamma_M^2}{J_m}$ (définie pour le moteur à vide).

Le rendement $r' = \frac{p_c}{p_m}$ s'écrit donc (en présence d'un réducteur) :

$$r' = \frac{J_c J_m a^2}{(J_m + a^2 J_c)^2}.$$

6) En l'absence de réducteur, on a :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_1 = \frac{\Gamma_M}{J_m + J_c} \\ r = \frac{J_c J_m}{(J_m + J_c)^2} \end{cases}$$

En présence d'un réducteur, on a :

$$\begin{cases} \dot{\omega}'_2 = a \dot{\omega}'_1 = \frac{a \Gamma_M}{J_m + a^2 J_c} \\ r' = \frac{J_c J_m a^2}{(J_m + a^2 J_c)^2} \end{cases}.$$

• Ainsi $\frac{\dot{\omega}'_2}{\dot{\omega}_2} = \frac{a \Gamma_M}{J_m + a^2 J_c} \times \frac{J_m + J_c}{\Gamma_M} = \frac{a(J_m + J_c)}{J_m + a^2 J_c}$.

L'accélération est améliorée si $\frac{\dot{\omega}'_2}{\dot{\omega}_2} > 1$ c'est-à-dire si $\frac{a(J_m + J_c)}{J_m + a^2 J_c} > 1$, soit :

$$\frac{a \left(\frac{J_m}{J_c} + 1 \right)}{\frac{J_m}{J_c} + a^2} > 1. \text{ On a par ailleurs (énoncé) } \frac{J_m}{J_c} < 1.$$

Étudions la fonction $a \mapsto f(a) = \frac{a(\alpha + 1)}{\alpha + a^2}$ avec $\alpha = \frac{J_m}{J_c} < 1$.

 Pour le rendement : $\frac{r'}{r} = \frac{a^2 (J_m + J_c)^2}{(J_m + a^2 J_c)^2} = f^2(a)$.

Ainsi si $f(a) > 1$, on a $\frac{\dot{\omega}'_2}{\dot{\omega}_2} > 1$ et $\frac{r'}{r} > 1$.

- $f(0) = 0$
- $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = 0$

$$\begin{aligned} \bullet f'(a) &= \frac{df}{da} = \frac{(\alpha + a^2)(\alpha + 1) - a(\alpha + 1) \times 2a}{(\alpha + a^2)^2} \\ &= \frac{\alpha + 1}{(\alpha + a^2)^2} [\alpha + a^2 - 2a^2] = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + a^2)^2} [\alpha - a^2]. \end{aligned}$$

Le tableau de variation de $f(a)$ est donc :

a	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$		
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	0	\nearrow	0	\searrow	0

Par ailleurs, on s'intéresse aux valeurs de a telles que :

$$f(a) = 1 \text{ c'est-à-dire } \frac{a(\alpha + 1)}{\alpha + a^2} = 1,$$

soit $a(\alpha + 1) = \alpha + a^2$ soit $a^2 - (\alpha + 1)a + \alpha = 0$, ce qui constitue une équation du 2nd degré.

$$\Delta = (\alpha + 1)^2 - 4(1)(\alpha) = (\alpha - 1)^2 = (1 - \alpha)^2.$$

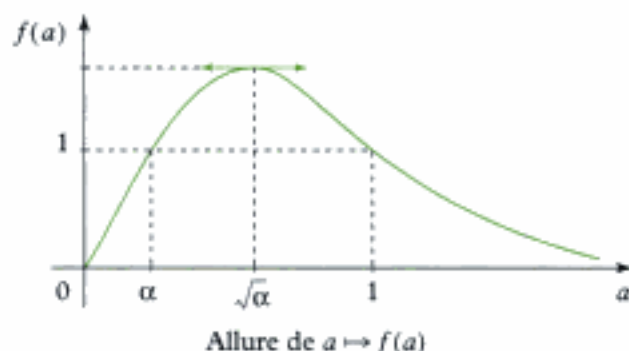
les solutions sont :

$$a = \frac{+(\alpha + 1) - \sqrt{(1 - \alpha)^2}}{2} = \frac{\alpha + 1 - (1 - \alpha)}{2} = \alpha$$

$$\text{ou } a = \frac{+(\alpha + 1) + \sqrt{(1 - \alpha)^2}}{2} = \frac{\alpha + 1 + (1 - \alpha)}{2} = 1.$$

 $\sqrt{(1 - \alpha)^2} = |1 - \alpha| = 1 - \alpha$ car $\alpha < 1$ donc $1 - \alpha > 0$.

La courbe représentative de $f(a)$ est donc :



On cherche a tel que $f(a) > 1$, donc il faut prendre a tel que $a \in]\alpha; 1[$, soit :

$$a \in \left] \frac{J_m}{J_c} ; 1 \right[.$$

 L'amélioration est maximale pour $a = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{J_m}{J_c}}$.

Rappels indispensables de mécanique de 1^{re} année

Introduction

Le cours de mécanique de deuxième année ne reprend pas l'ensemble des notions étudiées en première année ; certaines notions, non revues en deuxième année, doivent pourtant être maîtrisées pour les concours.

Ce dernier chapitre rappelle donc ces éléments qu'il est indispensable de réviser.

Attention, il ne constitue en aucun cas un résumé exhaustif du cours de mécanique de première année traité dans les ouvrages PCSI et MPSI...

Plan du chapitre 6

A. Oscillations – Équilibre – Stabilité	244
1. L'indispensable	244
2. Principales méthodes et application	246
B. Forces centrales, planètes, satellites	254
1. L'indispensable	254
2. Principales méthodes et application	256
C. Référentiels galiléen et non galiléen, changement de référentiels	260
1. L'indispensable	260
2. Principale méthode et application	262

A. Oscillations – Équilibre – Stabilité

A.1. L'indispensable

A.1.1 - Oscillations libres

• Oscillateur harmonique non amorti

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté x est un système physique vérifiant l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \omega_0 \text{ pulsation propre de l'oscillateur (rad} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

x est un paramètre décrivant la position de l'oscillateur.

L'oscillation d'un oscillateur harmonique est purement sinusoïdale. La période des oscillations est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \left| \begin{array}{l} T_0 \text{ période (s)} \\ \omega_0 \text{ pulsation propre (rad} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique est parabolique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte.}$$

• Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

Son équation différentielle est :

$$\ddot{x} + 2z\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 pulsation propre (rad · s⁻¹)
 z coefficient d'amortissement
(sans unité)

$$\text{ou } \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 pulsation propre (rad · s⁻¹)
 Q facteur de qualité
(sans unité) ($Q = \frac{1}{2z}$).

Si :

• $Q > \frac{1}{2}$ ($z < 1$), alors le régime est pseudo-périodique (présence d'oscillations amorties) de pseudo-période :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Q représente l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations visibles ($Q \gg \frac{1}{2}$).

Remarque : le régime pseudo-périodique est caractérisé par le décrement logarithmique, égal au logarithme népérien du rapport de deux amplitudes successives de la réponse :

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_a)}\right).$$

• $Q < \frac{1}{2}$ ($z > 1$), alors le régime est apériodique (pas d'oscillation) ;

• $Q = \frac{1}{2}$ ($z = 1$), alors le régime est critique (pas d'oscillation).

Le régime critique correspond à la stabilisation, à $x = 0$, la plus rapide des trois régimes.

Hidden page

A.2. Principales méthodes

A.2.1 - Comment résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (amorti ou non) ?

On s'intéresse à un système physique en régime libre dont on a obtenu l'équation différentielle sans second membre. À $t = 0$, il est lâché, écarté de sa position de repos avec une vitesse initiale.

On cherche l'évolution temporelle du système physique.

→ Méthode 1

- 1 Mettre l'équation différentielle sous forme canonique (normalisée) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

en identifiant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q (x est l'écart à la position d'équilibre).

- 2 Obtenir l'équation caractéristique en injectant une solution du type Ce^{rt} (C et r complexes) :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

- 3 La résoudre (solutions r_1 et r_2).
- 4 Écrire la solution de l'équation différentielle en faisant apparaître deux constantes A et B .
- 5 Déterminer A et B à l'aide des conditions initiales.

A.2.2 - Comment déterminer l'expression et le signe d'une force de rappel ?

Une masse ponctuelle m est accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

On veut déterminer l'expression de la force exercée par ce ressort.

→ Méthode 2

- 1 Paramétrer la (les) position(s) du (des) point(s) du système.
- 2 Écrire chaque force de rappel élastique sous la forme :

$$\vec{F} = \pm k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x,$$

avec k la raideur du ressort, ℓ la longueur du ressort et ℓ_0 la longueur à vide du ressort.

Se placer dans un cas particulier, par exemple $\ell > \ell_0$ et regarder si la force \vec{F} est dirigée selon $+\vec{e}_x$ ou $-\vec{e}_x$ (pour le système étudié) ; en déduire l'expression de chaque force.

Remarque : on obtient de la même manière le signe de la force de rappel exercée par l'amortisseur :

$$\vec{F} = \pm \lambda \dot{x} \vec{e}_x.$$

On suppose que \dot{x} est > 0 (ou < 0) et on détermine, pour le système étudié, si la force de rappel (de frottement) est dirigée selon $\pm \vec{e}_x$.

A.2.3 - Comment étudier les positions d'équilibre d'un système conservatif à l'aide de la fonction énergie potentielle ?

Soit un point matériel M de masse m soumis uniquement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Le mouvement est décrit à l'aide d'un unique paramètre. On souhaite étudier les positions d'équilibre du système.

→ Méthode 3

- 1 Si l'expression de l'énergie potentielle n'est pas donnée, faire le bilan des forces appliquées au système étudié (point matériel M).
- 2 Déterminer les énergies potentielles de toutes les forces travaillant lors du mouvement et en déduire l'expression de la fonction énergie potentielle.
- 3 Déterminer les minima de la fonction énergie potentielle (position d'équilibre stable).



On peut aussi déterminer les positions d'équilibre à l'aide du PFS.

A.2.4 - Comment écrire l'équation différentielle des mouvements de faible amplitude autour d'une position d'équilibre (stable) ?

Soit M un point matériel de masse m soumis à des forces conservatives, en mouvement à un degré de liberté dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Ce mouvement se fait autour d'une position d'équilibre stable avec de faibles amplitudes. On cherche à déterminer l'équation différentielle de ce mouvement à partir de la fonction énergie potentielle.

→ Méthode 4

- 1 Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction énergie potentielle.
- 2 Écrire le TEM (conservation de l'énergie mécanique).
- 3 Dériver l'expression précédente par rapport au temps.



Généralement, on utilise cette technique autour d'une position d'équilibre stable, mais on peut aussi l'utiliser autour d'une position d'équilibre instable.

A.2.5 - Comment déterminer la réponse d'un oscillateur harmonique à une excitation sinusoïdale ?

On considère un système physique régi par une équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \psi).$$

On cherche la réponse forcée du système, c'est-à-dire la solution particulière de l'équation différentielle du système.

→ Méthode 5

On utilise la méthode complexe :

① On cherche une solution sinusoïdale, de même pulsation ω que l'excitation ; on pose : $\underline{x} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ et $\underline{F} = \underline{F}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{F}_0 = F_0 e^{j\psi}$.

En remarquant, qu'avec l'écriture complexe, dériver par rapport au temps revient à multiplier par $j\omega$, écrire l'équation complexe reliant les amplitudes complexes \underline{X}_m et \underline{F}_0 .

② En déduire \underline{X}_m puis $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \text{Arg}(\underline{X}_m)$.

③ Écrire la solution : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

A.2.6 - Comment réduire le problème à deux corps ?

Soit deux masses liées par un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 (ou en interaction gravitationnelle).

On cherche à étudier le mouvement de chacune des deux masses.

→ Méthode 6

① Étude du mouvement du centre de masse G : appliquer le TCM dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , puis à l'aide des conditions initiales, déterminer le mouvement de G .

② Définir le mobile réduit à partir des relations obtenues en appliquant le PFD (principe fondamental de la dynamique) à chaque point matériel dans le référentiel \mathcal{R}_g .

③ Résoudre l'équation différentielle vérifiée par le vecteur position \vec{r} du mobile réduit dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système.

④ En déduire les mouvements des deux corps dans le référentiel barycentrique.

Application 1 Vibrations de molécules

Le problème est consacré à l'étude des vibrations rectilignes, forcées par un rayonnement infrarouge, de molécules de CO ; on s'intéresse en particulier à la valeur des fréquences de vibration et à leurs modifications causées par différents effets. On étudie les vibrations de la molécule isolée.

Données numériques :

• Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

• Masse molaire du carbone : $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

• Masse molaire de l'oxygène : $16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Une molécule de CO dont le centre de masse est immobile, est modélisée par deux masses ponctuelles, m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. On ne considérera dans tout le problème que les déplacements rectilignes des atomes le long de l'axe $x'x$ de la molécule à l'équilibre et on négligera la gravitation.

1) Lorsqu'ils sont dans un état lié, l'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique, dite de Morse :

$$V(r) = V_0 [1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2,$$

où r est la distance des noyaux des deux atomes et V_0 , β et r_0 sont des constantes positives avec $\beta r_0 \gg 1$.

a) Tracer un graphe de $V(r)$. Que représentent physiquement les paramètres V_0 et r_0 ? Quelle est la dimension de β ?

b) Montrer qu'il existe un domaine de distances où l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur k que l'on précisera (figure ci-dessous). On conservera cette approximation dans toute la suite du problème.

2) Soient x_1 et x_2 les écarts aux positions d'équilibre des atomes C et O respectivement.

a) Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque atome.



b) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement relatif $s = x_2 - x_1$, puis la résoudre. Exprimer la pulsation propre ω_0 et la fréquence ν_0 correspondante en fonction de k et de la masse réduite μ définie par $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

c) Exprimer que le centre de masse de la molécule est immobile. En déduire le rapport des amplitudes du mouvement de chaque atome et justifier le terme de vibration d'élongation utilisé pour décrire cette vibration.

d) La fréquence ν_0 mesurée pour des molécules de CO isolées est $6,425 \cdot 10^{13}$ Hz, et leur énergie de dissociation est $1,77 \cdot 10^{-18}$ J.

Déterminer les valeurs des constantes k et β .

e) Quelle serait la fréquence ν' de vibration pour la molécule ^{13}CO ?

Sachant que la résolution spectrale en spectroscopie infrarouge est de l'ordre de 10^{11} Hz, peut-on séparer les fréquences de vibration.

3) La molécule de CO est une molécule polaire possédant un moment dipolaire permanent $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}_x$, où \vec{u}_x est le vecteur unitaire de l'axe $x'x$. Dans un modèle simple, on considère que l'atome C porte une charge positive $+\delta$ qui lui est rigidement liée et l'atome O une charge $-\delta$ également rigidement liée. On éclaire la molécule au moyen d'un rayonnement infrarouge dont le champ électrique oscillant à la pulsation ω est donné, dans la notation complexe, par :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega x} = E_0 \vec{u}_x e^{i\omega x}.$$

a) Justifier que le champ \vec{E}_0 est vu comme uniforme par la molécule de CO. On prendra cette approximation dans la suite.

b) Écrire les équations du mouvement de chaque atome.

c) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement relatif $s = x_2 - x_1$. Déterminer sa solution en régime sinusoïdal permanent sous la forme : $s = a e^{i\omega x}$.

Exprimer a en fonction de ω , ω_0 , E_0 , δ et μ .

d) Du fait du déplacement des atomes, le moment dipolaire de la molécule devient $\vec{p}_0 + \vec{p} e^{i\omega x}$, où $\vec{p} e^{i\omega x}$ est le moment dipolaire induit par le champ électrique.

Exprimer \vec{p} en fonction de δ , μ , ω_0 , ω et \vec{E}_0 .

e) On définit la polarisabilité de vibration $\alpha_v(\omega)$ par : $\vec{p} = \alpha_v(\omega) \epsilon_0 \vec{E}_0$.

Exprimer puis tracer schématiquement $\alpha_v(\omega)$ en fonction de ω . À quelle pulsation l'effet du champ électrique sera-t-il le plus grand?

Quelles remarques peut-on faire sur la valeur alors atteinte par la polarisabilité?

Indications

1) e) ^{13}C est un isotope du carbone de masse atomique molaire : $13 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2) a) Longueur d'onde de l'infrarouge : $\lambda \geq 800 \text{ nm}$.

d) Dans ce cas : $\vec{p} = \delta(-s \vec{u}_x) = \delta(x_1 - x_2) \vec{u}_x$.

D'après le concours Polytechnique.

Solution

1) L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est donnée dans l'énoncé :

$$V(r) = V_0[1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2.$$

a) Pour tracer la fonction $r \mapsto V(r)$, établissons son tableau de variation :

$$V(r=0) = V_0[1 - e^{\beta r_0}]^2.$$

La condition $\beta r_0 \gg 1$ montre qu'en fait $V(r \rightarrow 0^+) = +\infty$; $V(r \rightarrow +\infty) = V_0$

$$\text{et } \frac{dV}{dr} = V_0 \times 2[1 - e^{-\beta(r-r_0)}] \times (-e^{-\beta(r-r_0)}) \times (-\beta) = V_0 \times 2[1 - e^{-\beta(r-r_0)}] \times \beta \times e^{-\beta(r-r_0)}$$

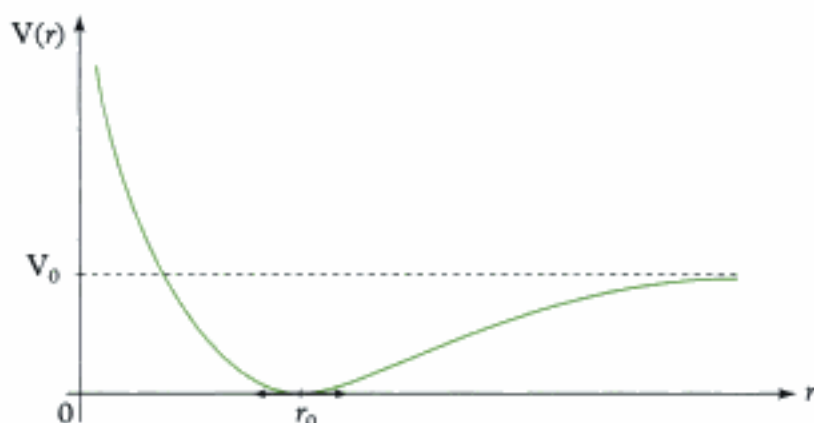
$$\frac{dV}{dr} \geq 0 \text{ entraîne } 1 - e^{-\beta(r-r_0)} \geq 0, \text{ donc } 1 \geq e^{-\beta(r-r_0)}, \text{ puis } 0 \geq -\beta(r-r_0), \text{ donc } r \geq r_0.$$

Donc le tableau de variation de $V(r)$ s'écrit :

r	0	r_0	$+\infty$	
$\frac{dV}{dr}$		-	0	+
$V(r)$	$+\infty$	0	V_0	

$V(r=r_0) = 0$

D'où la représentation graphique de $V(r)$:



Comme βr_0 est sans dimension et que r_0 est en m, on a β en m^{-1} .

Pour $r = r_0$, $V(r)$ est minimum donc $r = r_0$ représente une position d'équilibre.

$$\text{De plus : } \frac{d^2V}{dr^2}(r=r_0) = V_0 \times 2[\beta e^{-\beta(r-r_0)}] \times \beta e^{-\beta(r-r_0)} + V_0 \times 2[1 - e^{-\beta(r-r_0)}] \times (-\beta)^2 e^{-\beta(r-r_0)}.$$

$(uv)' = u'v + uv'$.

$$\frac{d^2V}{dr^2}(r=r_0) = 2V_0\beta^2 > 0; \text{ donc } r = r_0 \text{ représente une position d'équilibre stable de la molécule.}$$

C'est le principe de la méthode 3.

V_0 représente l'énergie nécessaire pour faire passer la molécule de sa position d'équilibre ($V(r=r_0) = 0$) à deux atomes dissociés ($V(r \rightarrow +\infty) = V_0$).

V_0 représente donc l'énergie de dissociation de la molécule.

b) Si on se place au voisinage de la position d'équilibre $r = r_0$, on peut faire un développement limité à l'ordre 2 de $V(r)$:

$$V(r) = V(r_0) + \frac{dV}{dr}(r=r_0) \times (r-r_0) + \frac{d^2V}{dr^2}(r=r_0) \times \frac{(r-r_0)^2}{2}$$

$$V(r) = 0 + 0 \times (r - r_0) + 2V_0\beta^2 \times \frac{(r - r_0)^2}{2} = \frac{1}{2} \times 2V_0\beta^2(r - r_0)^2.$$

Si on modélise l'énergie potentielle d'interaction par celle d'un ressort de raideur k , on a :

$$V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2.$$

Ainsi en identifiant terme à terme, on a, dans un voisinage de r_0 :

$$k = 2V_0\beta^2.$$

2)  La question 2) correspond au principe de la méthode 6.

a) Comme indiqué, appliquons le PFD à C.

Système : atome C (masse m_1).

Référentiel galiléen : $\mathcal{R}(A; \vec{e}_x)$ où A est un point fixe quelconque de l'axe ($x'x$) et $\vec{e}_x = \frac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|}$ (avec $\|\vec{CO}\| = r$).

Forces extérieures appliquées au système :

- poids, négligé ;
- forces d'interaction $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = +k(r - r_0)\vec{e}_x$.

 Voir la méthode 2.

 Attention au signe de la force de rappel.

Équation du PFD :

$$m_1 \left(\frac{d^2 \vec{AC}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = +k(r - r_0)\vec{e}_x. \quad (1)$$

À l'équilibre :

$$m_1 \left(\frac{d^2 \vec{AC}_e}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}. \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } m_1 \left(\frac{d^2 \vec{C}_e \vec{C}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = k(r - r_0)\vec{e}_x \quad \text{soit} \quad m_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} (x_1 \vec{e}_x) \right)_{/\mathcal{R}} = k(r - r_0)\vec{e}_x.$$

En projetant sur \vec{e}_x : $m_1 \ddot{x}_1 = k(r - r_0)$.

De plus : $r - r_0 = x_2 - x_1$. Donc l'équation différentielle s'écrit :

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1).$$

On effectue la même démarche sur l'atome O :

$$m_2 \left(\frac{d^2 \vec{AO}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = -k(r - r_0)\vec{e}_x.$$

 Attention au signe de la force de rappel.

Soit avec les informations à l'équilibre : $m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$.

b) Les deux équations différentielles s'écrivent :

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) \quad (4)$$

(4) – (3) donne :

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1), \text{ soit } \ddot{s} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)s.$$

Si on pose $\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}$, on peut écrire :

$$\ddot{s} = -\frac{k}{\mu}s, \text{ soit } \ddot{s} + \frac{k}{\mu}s = 0.$$

La pulsation propre s'écrit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$; et la fréquence propre $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

c) G est défini par :

$$\vec{AG} = \frac{m_1 \vec{AO} + m_2 \vec{AC}}{m_1 + m_2}, \quad (5)$$

À l'équilibre :

$$\vec{AG}_e = \frac{m_1 \vec{AO}_e + m_2 \vec{AC}_e}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

$$(5) - (6) \text{ donne : } \vec{G}_e \vec{G} = \frac{m_1 \vec{O}_e \vec{O} + m_2 \vec{C}_e \vec{C}}{m_1 + m_2}.$$

Comme G est fixe (voir l'énoncé) $\vec{G}_e \vec{G} = \vec{0}$ donc :

$$\vec{0} = \frac{m_1 x_1 \vec{e}_x + m_2 x_2 \vec{e}_x}{m_1 + m_2} \text{ soit } \frac{x_2}{x_1} = -\frac{m_1}{m_2}.$$

De plus, on introduisant $s = x_2 - x_1$, on a :

$$0 = m_1 x_1 + m_2 x_2, \text{ soit } 0 = m_1(x_2 - s) + m_2 x_2, \text{ d'où } 0 = (m_1 + m_2)x_2 - m_1 s.$$

$$\text{Donc : } x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} s.$$

Et $0 = m_1 x_1 + m_2(s + x_1)$, soit $0 = (m_1 + m_2)x_1 + m_2 s$. Donc :

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} s.$$

Les mouvements de C(x_1) et O(x_2) se déduisent du mouvement de la particule réduite (de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, distante de s du point G).

C et O vibrent donc à la fréquence ν_0 , en opposition de phase $\left(\frac{x_2}{x_1} < 0\right)$. Leurs mouvements sont homothétiques et c'est l'atome le plus léger qui a l'amplitude de vibration la plus importante $\left(\frac{x_2}{x_1} = -\frac{m_1}{m_2}\right)$.

d) $m_1 = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 2 \cdot 10^{-26}$ kg et $m_2 = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 2,66 \cdot 10^{-26}$ kg, donc :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 1,14 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, on peut déterminer numériquement $k = 4\pi^2 \nu_0^2 \mu$:

$$k = 4\pi^2 \nu_0^2 \mu = 1\,856 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

De plus $k = 2\nu_0\beta^2$, donc $\beta = \sqrt{\frac{k}{2\nu_0}} = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$.

e) Si on prend la molécule ^{13}CO :

$$m'_1 = \frac{13}{12}m_1 = 2,2 \cdot 10^{-26} \text{ kg}, \quad \text{donc} \quad \mu' = \frac{m'_1 m_2}{m'_1 + m_2} = 1,19 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

$$\text{On a } \nu' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{1\,856}{1,19 \cdot 10^{-26}}} = 6,275 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu' = 6,425 \cdot 10^{13} - 6,275 \cdot 10^{13} = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ Hz}.$$

Si la résolution est de l'ordre de 10^{11} Hz , on pourra donc séparer les fréquences de vibration des isotopes.

3) a) Le rayonnement qui éclaire la molécule est un rayonnement infrarouge dont la longueur d'onde est : $\lambda \geq 800 \text{ nm}$.

λ représente la longueur caractéristique de la variation spatiale du champ électrique.

$$\text{Si on prend } r_0\beta \# 100, \text{ alors } r_0 \# \frac{100}{\beta} = 4,53 \cdot 10^{-9} \text{ m} \text{ et } \frac{\lambda}{r_0} = \frac{800 \cdot 10^{-9}}{4,35 \cdot 10^{-8}} \# 200 \gg 1;$$

donc on peut considérer que le champ électrique \vec{E}_0 est vu comme uniforme par la molécule.

b) On reprend la même procédure qu'en 2) a) en rajoutant les forces extérieures dues au champ électrique (c'est-à-dire $\pm \delta \vec{E}$) ; on obtient :

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + \delta \vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - \delta \vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x \quad (8)$$

c) Par analogie avec 2) b), $\frac{(7)}{m_1} - \frac{(8)}{m_2}$ donne :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 &= \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) + \frac{\delta}{m_1} E_0 e^{i\omega t} + \frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{\delta}{m_2} E_0 e^{i\omega t} \\ -\ddot{s} &= \frac{k}{\mu} s + \frac{\delta}{\mu} E_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \ddot{s} + \frac{k}{\mu} s = -\frac{\delta}{\mu} E_0 e^{i\omega t}.$$

En posant $s = a e^{i\omega t}$, on obtient :

$$-\omega^2 a e^{i\omega t} + \frac{k}{\mu} a e^{i\omega t} = -\frac{\delta}{\mu} E_0 e^{i\omega t}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{-\frac{\delta}{\mu} E_0}{\frac{k}{\mu} - \omega^2}.$$

$$\text{Or } \omega_0^2 = \frac{k}{\mu}, \quad \text{donc} \quad a = \frac{\frac{\delta}{\mu} E_0}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$



C'est la procédure classique pour l'étude d'un régime forcé : voir la méthode 5.

d) On a : $\vec{p}_T = \vec{p}_0 - \delta s \vec{u}_x = \vec{p}_0 - \delta a e^{i\omega t} \vec{u}_x$, donc $\vec{p} = -\delta a \vec{u}_x$.

$$\text{Donc : } \vec{p} = -\delta \frac{\frac{\delta}{\mu} E_0 \vec{u}_x}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{\delta^2}{\mu} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

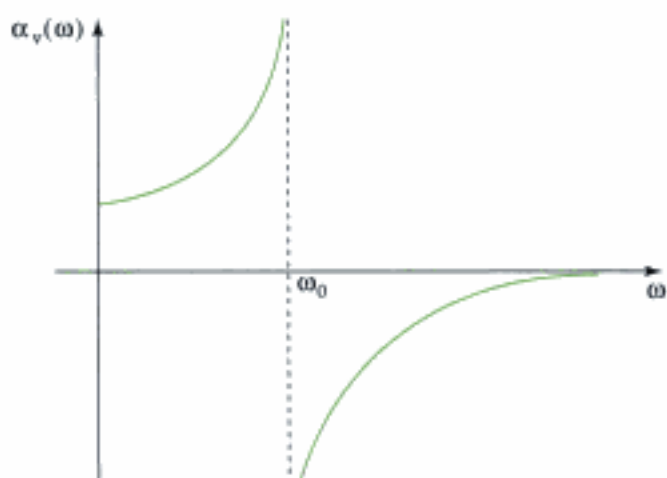
e) Si \vec{p} s'écrit $\vec{p} = \alpha_v \epsilon_0 \vec{E}_0$, on peut identifier avec l'expression retrouvée dans la question précédente :

$$\alpha_v \epsilon_0 = \frac{\delta^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_v(\omega) = \frac{\delta^2}{\mu \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

dont la représentation schématique est donnée ci-contre.

L'effet du champ électrique est le plus grand (ici infini) pour $\omega = \omega_0$. Cette valeur infinie n'est évidemment pas physique. Un phénomène dissipatif n'a pas été pris en compte ; ceci aurait permis d'obtenir une valeur de la polarisabilité finie pour toute valeur de ω avec un maximum pour une valeur proche (cette fois) de ω_0 .



B. Forces centrales, planètes, satellites

B.1. L'indispensable

B.1.1 - Forces centrales conservatives

• Considérons un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ constamment dirigée vers un point O , appelé centre de force, fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; cette force ne dépend que de la distance $r = \|\vec{OM}\|$ entre le centre de force O et le point M .

Cette force est conservative et dérive donc d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ qui ne dépend que de r , ainsi :

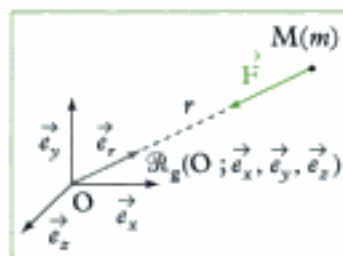


Fig. 2 - Le point M est soumis à \vec{F} .

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\mathbf{r}}$$

F	force (N)
\mathcal{E}_p	énergie potentielle (J)
r	distance (m)

• Force newtonienne :

$$\vec{F}_g = -\frac{G m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

\vec{F}_g	force (N)
G	constante de gravitation universelle ($G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)
m_0 et m	masses du centre de force O et du point M (kg)
r	distance OM (m)

$$\left(\mathcal{E}_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r} \right)$$

- Force coulombienne :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

\vec{F}_e	force (N)
ϵ_0	permittivité du vide ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$)
q_0 et q	charges du centre de force O et du point M (C)
r	distance OM (m)

$$\left(\mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} \right)$$

- Conservation du moment cinétique : $\vec{L}_O(M) = \vec{c}te$

\Rightarrow le mouvement est plan.

$C = r^2 \dot{\theta}^2 = cte$ est la constante des aires

$\Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$ (**loi des aires**) : en présence d'une force centrale passant par le point O, l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} est proportionnelle au temps.

- Conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{K}{r} = cte, \text{ avec } K = -G m_0 m \text{ ou } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q.$$

B.1.2 - Lois de Kepler

- Chaque planète se déplace sur une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers (fig. 3).

- Le vecteur rayon allant du Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des temps égaux.

- Le carré des périodes de révolution est proportionnel aux cubes des longueurs des demi-grands axes des ellipses :

$$\frac{T^2}{a^3} = cte \quad \left| \begin{array}{l} T \text{ période de révolution} \\ a \text{ demi-grand axe de l'ellipse} \end{array} \right.$$

B.1.3 - Étude des trajectoires

(cas d'une force newtonienne)

- Dans le cas d'une trajectoire circulaire, savoir retrouver rapidement :

$$v = \sqrt{\frac{G m_0}{r}} \quad (\text{à l'aide du PFD}) ;$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{G m_0 m}{2r} \quad (\text{à partir de } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m_0 m}{r}) ;$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0} \quad (\text{à partir de } T = \frac{2\pi r}{v}).$$

- Pour retrouver les formules d'une trajectoire elliptique, on remplace r par a , où a est le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{G m_0 m}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0}.$$

- Afin de caractériser une trajectoire, on utilise le signe de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m (voire la valeur de l'excentricité e) (fig. 4).

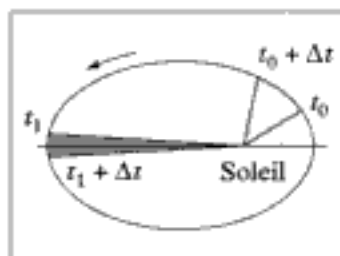


Fig. 3 - Trajectoire elliptique d'une planète.

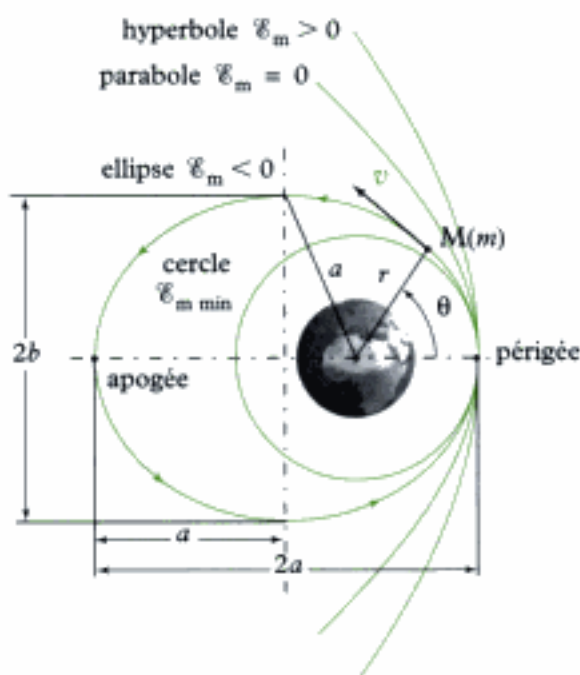


Fig. 4 - Différentes trajectoires selon \mathcal{E}_m .

Énergie mécanique \mathcal{E}_m	Excentricité e	Trajectoire
$\mathcal{E}_m < 0$	$e = 0$	cercle*
	$0 < e < 1$	ellipse
$\mathcal{E}_m = 0$	$e = 1$	parabole
$\mathcal{E}_m > 0$	$e > 1$	hyperbole

* Pour que la trajectoire soit un cercle, il faut que la vitesse en un point soit $v = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}}$ et que, en ce point, le vecteur vitesse \vec{v} soit orthogonal au rayon $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

B.2. Principales méthodes

B.2.1 - Comment déterminer les paramètres (vitesse, énergie, période) d'une orbite circulaire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sur une orbite circulaire sous l'action d'une force centrale newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne le rayon r_0 . On souhaite déterminer la vitesse, l'énergie mécanique et la période de révolution du satellite constitué par ce point M.

→ Méthode 7

- ① Exprimer la vitesse du point matériel M à l'aide du PFD.
- ② En déduire l'énergie mécanique du point matériel M(m).
- ③ Calculer la période de révolution.

B.2.2 - Comment déterminer la nature de la trajectoire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale conservative newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne la vitesse v_0 et la distance r_0 au centre de force O en un point de la trajectoire. On souhaite déterminer la nature de la trajectoire du point M.

→ Méthode 8

- ① Exprimer puis calculer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m au point matériel M(m).
- ② Conclure selon le signe de \mathcal{E}_m .

B.2.3 - Comment déterminer la position et la vitesse aux points caractéristiques d'une trajectoire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale conservative newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne le vecteur position $\overrightarrow{OM_0}$ et le vecteur vitesse \vec{v}_0 en un point M_0 de la trajectoire. On souhaite déterminer les positions et vitesses aux points caractéristiques :

- à l'apocentre et au péricentre (P) pour une ellipse ;
- au point d'approche minimal (P) pour les parabole et hyperbole.

→ Méthode 9

- 1 Écrire la conservation du moment cinétique (ou de la constante des aires C) à l'aide des conditions initiales (en M_0),
(pour les points caractéristiques considérés, $\dot{r} = 0$ donc $\overrightarrow{OM} \perp \vec{v}$).
- 2 Écrire la conservation de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m à l'aide des conditions initiales (en M_0).
- 3 Résoudre le système de deux équations à deux inconnues ($r ; v$) obtenu.

Application 2 Les mouvements cométaires

Il y a de cela environ 65 millions d'années, les dinosaures et de nombreuses autres espèces vivantes, terrestres et aquatiques, animales et végétales, ont été victimes d'une extinction massive et brutale (événement K/T, à la limite des périodes crétacée (K) et tertiaire (T)).

Parmi les diverses hypothèses proposées, celle qui recueille à l'heure actuelle le plus de suffrages dans la communauté scientifique est celle de l'impact d'une comète à la surface de la Terre. Ce problème examine quelques-uns des aspects de la description mécanique d'un tel impact.

Un ensemble d'astéroïdes de faible dimension se trouve vraisemblablement réparti, dans le système solaire, à grande distance du Soleil (au-delà de l'orbite de Pluton).

La masse totale de ces astéroïdes (nuage de Oort) représente environ le tiers de la masse totale des neuf planètes et de leurs satellites.

Lorsqu'un de ces astéroïdes est suffisamment dévié de sa trajectoire quasi-circulaire par l'effet gravitationnel d'autres astéroïdes et planètes pour s'approcher à très courte distance du Soleil, il prend le nom de comète.

Nous étudions ici les caractéristiques du mouvement d'une comète hypothétique, qui pourrait, à certains égards, ressembler à celle qui fut peut-être responsable de l'événement K/T.

Cette comète C , de masse $m = 2,5 \cdot 10^{15}$ kg, est considérée comme sphérique, de rayon $r_c = 10^4$ m ; sa trajectoire autour du Soleil est une ellipse très allongée.

La comète C est aussi caractérisée par une distance maximale au Soleil : $d_{\max} = 5 \cdot 10^4 a$, où $a = 1,5 \cdot 10^{11}$ m est le rayon de la trajectoire terrestre (supposée circulaire) autour du Soleil (a est appelé unité astronomique).

Elle est enfin caractérisée par une période de mouvement notée T . On note T_0 la période du mouvement terrestre autour du Soleil.

- 1) Déterminer numériquement la vitesse v_0 de la Terre sur son orbite circulaire autour du Soleil.
- 2) On note G la constante de la gravitation universelle et M_s la masse du Soleil. Exprimer le produit GM_s en fonction de v_0 et a .

3) La distance minimale de C au Soleil est notée d_{\min} .

Exprimer, en fonction de d_{\max} , d_{\min} , a et v_0 , les vitesses maximales v_{\max} et minimale v_{\min} de C sur son orbite.

On pourra utiliser des relations de conservation.

4) Quelle relation doivent vérifier d_{\min} et a pour qu'un impact de C sur la surface de la Terre puisse être envisagé ?

En déduire une évaluation numérique de la plus petite valeur possible pour v_{\max} .

5) On choisira dans la suite $d_{\min} = a$.

Quelles sont les valeurs extrêmes possibles de la vitesse relative de la Terre et de C (vitesse d'impact) au moment du choc de C sur la Terre ?

D'après le concours Mines Ponts.

Solution



La question 1) et 2) reprennent le principe de la méthode 7.

1) La Terre tourne autour du Soleil sur une orbite circulaire ; elle est soumise à une force centrale \vec{F} (force d'interaction gravitationnelle) qui dérive d'une énergie potentielle. Soit $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel galiléen de Kepler.

L'énergie de mécanique de la Terre dans \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}M_T v_0^2 - \frac{GM_S M_T}{a} = \text{cte},$$

où M_T est la masse de la Terre.

Ici $a = \text{cte}$ (trajectoire circulaire) donc $v_0 = \text{cte}$.

De plus $T_0 = \frac{2\pi a}{v_0} = \frac{\text{circonférence}}{\text{vitesse}}$, donc :

$$v_0 = \frac{2\pi a}{T_0}.$$

A.N. $v_0 = \frac{2\pi \times 1,5 \times 10^{11}}{365 \times 24 \times 3\,600} = 29\,900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 29,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$

2) Pour trouver la relation demandée, il faut appliquer le PFD :

- à la Terre ;
- dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

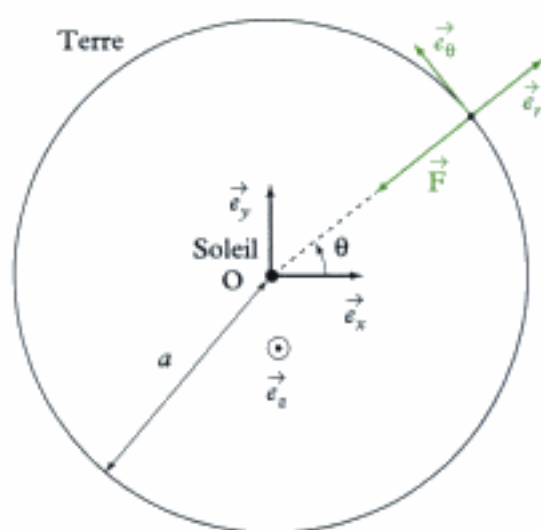
$$M_T \vec{a}(\text{Terre})_{/\mathcal{R}} = \vec{F}.$$

$$\text{Or } \vec{v}(\text{Terre})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(a\vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v_0\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}(\text{Terre})_{/\mathcal{R}} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{a}\vec{e}_r.$$

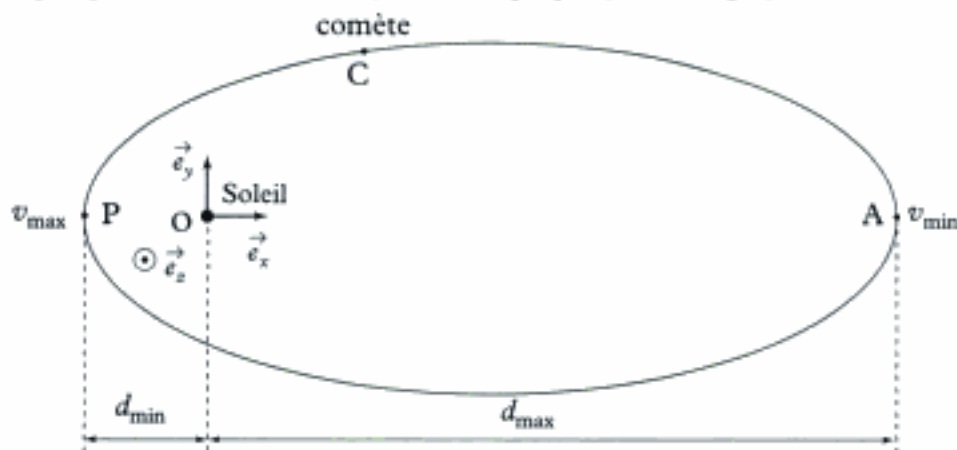
De plus $\vec{F} = -\frac{GM_S M_T}{a^2}\vec{e}_r$ (interaction gravitationnelle entre la Terre et le Soleil).

$$\text{Donc l'équation de PFD s'écrit : } M_T \left(-\frac{v_0^2}{a} \right) \vec{e}_r = -\frac{GM_S M_T}{a^2} \vec{e}_r.$$

$$\text{Soit en projection sur } \vec{e}_r : -M_T \frac{v_0^2}{a} = -\frac{GM_S M_T}{a^2}, \text{ soit } \mathbf{GM_S = a v_0^2}.$$



3) L'énoncé indique que la comète a une trajectoire elliptique (très allongée) autour du Soleil :



 Voir la méthode 9.

Pour répondre à la question, on nous suggère d'utiliser des relations de conservation qui sont :

- la conservation du moment cinétique ;
- la conservation de l'énergie ;

et qui donnent 2 équations qui nous permettent de déterminer les inconnues v_{\min} et v_{\max} .

Conservation du moment cinétique

$$\vec{e}_z \cdot \vec{L}_0(C)_{/\mathcal{R}} = \text{cte} = d_{\max} m v_{\min} = d_{\min} m v_{\max}.$$

 En effet, au niveau des points de distances minimale et maximale, la vitesse est purement orthoradiale donc orthogonale au rayon.

Ainsi :
$$d_{\max} v_{\min} = d_{\min} v_{\max} \quad (1)$$

Conservation de l'énergie

$$\mathcal{E}_m = \text{cte} = \frac{1}{2} m v_{\min}^2 - \frac{GM_S m}{d_{\max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - \frac{GM_S m}{d_{\min}}, \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{2} v_{\min}^2 - \frac{GM_S}{d_{\max}} = \frac{1}{2} v_{\max}^2 - \frac{GM_S}{d_{\min}} \quad (2)$$

 Quand d est maximum, v est minimum et quand d est minimum, v est maximum.

À l'aide des équations (1) et (2) précédentes et en faisant disparaître v_{\min} , on obtient :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d_{\min}}{d_{\max}} v_{\max} \right)^2 - \frac{GM_S}{d_{\max}} = \frac{1}{2} v_{\max}^2 - \frac{GM_S}{d_{\min}}.$$

$$v_{\max}^2 \left[\left(\frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right)^2 - 1 \right] = 2GM_S \left(\frac{1}{d_{\max}} - \frac{1}{d_{\min}} \right), \text{ soit } v_{\max}^2 \frac{d_{\min}^2 - d_{\max}^2}{d_{\max}^2} = 2GM_S \left(\frac{d_{\min} - d_{\max}}{d_{\min} d_{\max}} \right)$$

$$v_{\max}^2 = 2GM_S \times \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \times \frac{1}{d_{\min} + d_{\max}}$$

or $GM_S = a v_0^2$ (question 2)) donc :

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{2a \frac{d_{\max}}{d_{\min} (d_{\min} + d_{\max})}}.$$

 Comme v_0 est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, a , d_{\max} et d_{\min} en m , cette expression est homogène :

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{\text{m} \times \text{m}}{\text{m} \times \text{m}}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

De la même manière, on obtient :

$$v_{\min} = v_0 \sqrt{2a \frac{d_{\min}}{d_{\max}(d_{\max} + d_{\min})}}$$



Il suffit pour cela de remplacer les indices min par max et les indices max par min.

4) Pour qu'un impact de la comète sur la Terre soit possible, il faut que : $d_{\min} < a$.

Ceci implique :

$$d_{\min} + d_{\max} < a + d_{\max} \text{ soit } \frac{1}{d_{\min} + d_{\max}} > \frac{1}{a + d_{\max}} \text{ et } \frac{1}{d_{\min}} > \frac{1}{a}$$

Or $v_{\max} = v_0 \sqrt{2a \frac{d_{\max}}{d_{\min}(d_{\min} + d_{\max})}}$ donc :

$$v_{\max} > v_0 \sqrt{2a \frac{d_{\max}}{a(a + d_{\max})}}, \text{ soit } v_{\max} > v_0 \sqrt{\frac{2d_{\max}}{a + d_{\max}}}$$

De plus, $d_{\max} \gg a$; on peut donc écrire plus simplement :

$$v_{\max} > v_0 \sqrt{\frac{2d_{\max}}{d_{\max}}}, \text{ soit } v_{\max} > \sqrt{2} v_0.$$

A.N. $v_{\max} > \sqrt{2} \times 29,9 = 42,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

5) Si $d_{\min} = a$, la collision a lieu au périégée, quand v est maximale :

• si la comète a une vitesse opposée à celle de la Terre alors :

$$v_{\text{impact}} = v_0 + \sqrt{2} v_0;$$

• si la comète a une vitesse de même sens que celle de la Terre :

$$v_{\text{impact}} = \sqrt{2} v_0 - v_0.$$

Ainsi : $(\sqrt{2} - 1)v_0 \leq v_{\text{impact}} \leq (\sqrt{2} + 1)v_0$.

A.N. $12,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_{\text{impact}} \leq 72,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

C. Référentiels galiléen et non galiléen, changement de référentiels

C.1. L'indispensable

C.1.1 - Cinématique

• Loi de composition des vitesses (fig. 5) :

$$\vec{v}(\text{M})_{/\mathbb{R}} = \vec{v}(\text{M})_{/\mathbb{R}'} + \vec{v}(\text{M} \in \mathbb{R}')_{/\mathbb{R}}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

absolue relative entraînement

• Loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(\text{M})_{/\mathbb{R}} = \vec{a}(\text{M})_{/\mathbb{R}'} + \vec{a}(\text{M} \in \mathbb{R}')_{/\mathbb{R}} + 2\vec{\Omega}_{\mathbb{R}'/\mathbb{R}} \wedge \vec{v}(\text{M})_{/\mathbb{R}'}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

absolue relative entraînement Coriolis

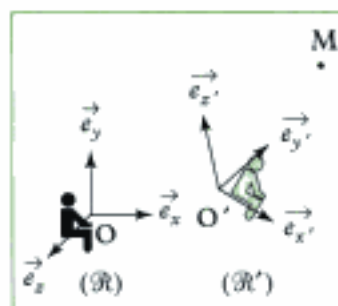


Fig. 5 - Référentiels \mathbb{R} et \mathbb{R}' .

Hidden page

Hidden page

→ Méthode 10

- ❶ Bien préciser les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_g qui vont être utilisés. S'assurer que \mathcal{R}_g est galiléen.
- ❷ Calculer l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis.
- ❸ En déduire \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{ic} . Vérifier les unités.

Application 3 Composition de deux rotations

Une circonférence (\mathcal{C}) de centre O' et de rayon a , située dans le plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz , d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega}$ (voir schéma 1 et 2).

Un anneau M de masse m , assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $O'M$ avec la verticale descendante passant par O' . θ est compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas ci-dessous.

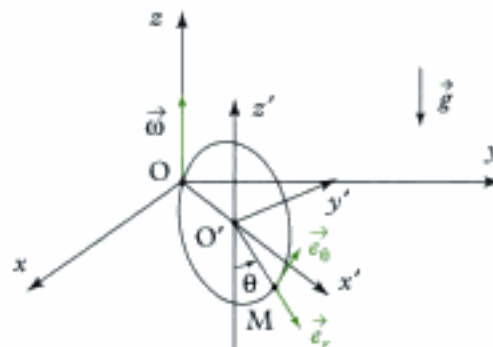


Schéma 1 : cas d'une position quelconque de la circonférence (\mathcal{C}).



Schéma 2 : cas où le plan de la circonférence (\mathcal{C}) est confondu avec le plan (yOz).

A) Étude du mouvement de M sur (\mathcal{C}) par plusieurs méthodes

1) Utilisation de la relation fondamentale de la dynamique

a) Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'(Ox'y'z')$ lié au cercle et en rotation dans le repère galiléen $\mathcal{R}(Oxyz)$. On notera \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{ic} les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, et \vec{R} la réaction de (\mathcal{C}) sur M .

b) Montrer que \vec{F}_{ie} est colinéaire à $\vec{e}_{x'}$, et exprimer sa norme en fonction de θ , m , a et ω (norme du vecteur rotation autour de Oz).

Montrer que \vec{F}_{ic} est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$, et exprimer sa norme en fonction de m , θ , ω et v où v est la norme de la vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R}' .

Hidden page

Hidden page

donc :
$$\overrightarrow{L_{O'}}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} = a\vec{e}_r \wedge ma\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ma^2\dot{\theta}(-\vec{e}_y).$$

Donc
$$\overrightarrow{L_{O'}}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} = -ma^2\dot{\theta}\vec{e}_y.$$

b) On démontre le TMC en dérivant le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{O'}}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} &= \left(\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'}\right]\right)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{O'M})\right)_{/\mathcal{R}'} \wedge m\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\left(\frac{d}{dt}\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} \\ &= \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} \wedge m\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} . \end{aligned}$$

Or le PFD dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$m\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic},$$

donc
$$\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{O'}}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge (\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}).$$

 Le 2nd terme de l'égalité représente le moment des forces extérieures et forces d'inertie appliquées à M.

c) On veut retrouver l'équation différentielle du mouvement, il faut pour cela faire disparaître \vec{R} ; or comme il n'y pas de frottement \vec{R} n'a pas de composante sur \vec{e}_θ donc $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{R}$ (son moment en O') n'a pas de composante sur \vec{e}_y : on va donc projeter la relation vectorielle du TMC sur \vec{e}_y .

On a donc :
$$\vec{e}_y \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{O'}}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'}\right]_{/\mathcal{R}'} = \vec{e}_y \cdot [\overrightarrow{O'M} \wedge (\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})].$$

Or
$$\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{O'}}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(-ma^2\dot{\theta}\vec{e}_y)\right)_{/\mathcal{R}'} = -ma^2\ddot{\theta}\vec{e}_y.$$

 \vec{e}_y est fixe dans \mathcal{R}' donc $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = 0$.

Par ailleurs :

- $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{P} = a\vec{e}_r \wedge (-mg\vec{e}_z) = -mga \sin(\pi - \theta)(-\vec{e}_y) = +mga \sin\theta\vec{e}_y$;

- $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_{ie} = a\vec{e}_r \wedge m\omega^2 a(1 + \sin\theta)\vec{e}_x = m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(-\vec{e}_y)$

$$= -m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta) \cos\theta\vec{e}_y ;$$

- $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_{ic}$ n'a pas de composante sur \vec{e}_y car le résultat du produit vectoriel est orthogonal à $\overrightarrow{O'M}$ ($\equiv \vec{e}_r$) et orthogonal à \vec{F}_{ic} ($\equiv \vec{e}_y$).

Ainsi la projection sur \vec{e}_y du TMC s'écrit :

$$-ma^2\ddot{\theta} = mga \sin\theta - m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta) \cos\theta$$

soit
$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 a(1 + \sin\theta) \cos\theta - g \sin\theta.$$

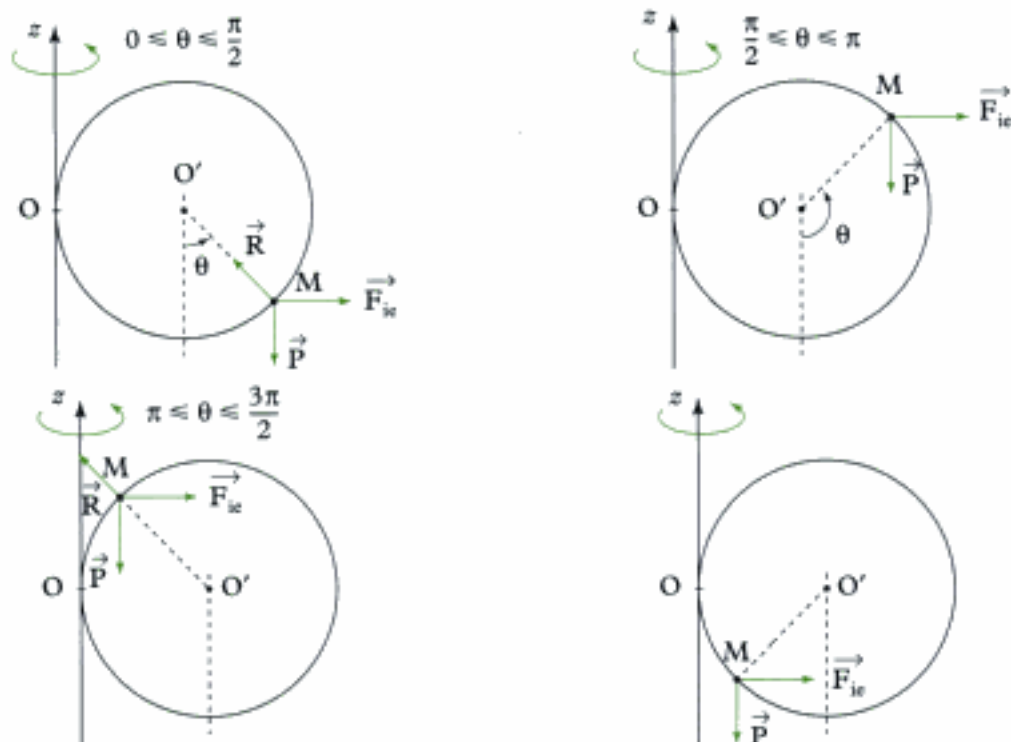
3) a) On sait que le lien entre énergie potentielle et force est : $\vec{F}_{ie} = -\frac{dU_1}{dx'}\vec{e}_x$ où $x' = HM$.

Or $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 HM = m\omega^2 x'\vec{e}_x$.

Donc $-\frac{dU_1}{dx'} = m\omega^2 x'$ soit : $U_1 = -m\omega^2 \frac{x'^2}{2} + cte_1$.

Hidden page

2) Les trois forces mises en jeu sont : \vec{P} , \vec{R} et \vec{F}_{ic} .



On voit que dans les cas $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ et $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ quelle que soit la direction de \vec{R} , il ne pourra y avoir équilibre.

Inversement les cas $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ montrent qu'un équilibre relatif est possible.

Les positions d'équilibre se trouvent dans les intervalles $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3) On peut retrouver ce résultat à l'aide de B.1) en effet les positions d'équilibre vérifient.

$$a\omega^2(1 + \sin\theta) = g\tan\theta, \quad \text{soit} \quad a\frac{\omega^2}{g}(1 + \sin\theta) = \tan\theta.$$

On peut donc tracer l'allure des deux fonctions :

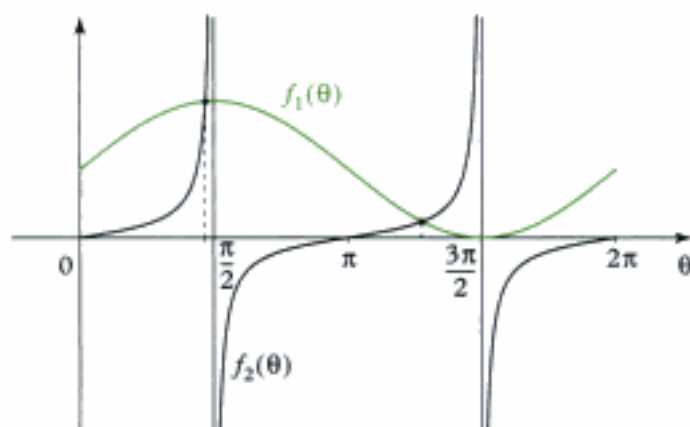
- $f_1(\theta) = \frac{a\omega^2}{g}(1 + \sin\theta)$;

- $f_2(\theta) = \tan\theta$;

et vérifier les domaines où ces deux courbes se croisent.

Ainsi on voit que les points d'intersections des deux courbes c'est-à-dire les positions d'équilibre se trouvent dans les intervalles :

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$



4) a) On veut que $\theta_0 = 30^\circ$ soit une position d'équilibre donc :

$$a\omega^2(1 + \sin\theta_0) = g\tan\theta_0 \quad \text{soit} \quad a\omega^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = g \times \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{2\sqrt{3}}{9}}.$$

A.N. $\omega = \sqrt{\frac{10}{0,2} \times \frac{2\sqrt{3}}{9}} \approx 4,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$

b) On cherche $\frac{df}{d\theta}$ sachant que $f = \omega^2 a(1 + \sin\theta) \cos\theta - g\sin\theta.$

$$\frac{df}{d\theta}(\theta) = \omega^2 a[(1 + \sin\theta)(-\sin\theta) + \cos\theta \cos\theta] - g\cos\theta.$$

Donc :

$$\frac{df}{d\theta}(\theta = \theta_0 = 30^\circ) = \omega^2 a[(1 + \sin\theta_0)(-\sin\theta_0) + \cos^2\theta_0] - g\cos\theta_0.$$

Numériquement : $\frac{df}{d\theta}(\theta_0 = 30^\circ) = 4,4^2 \times 0,2 \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right] - 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = -8,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$

Ainsi : $\frac{df}{d\theta}(\theta_0) = -k$ avec $k > 0.$

L'équation du mouvement linéarisée autour de θ_0 s'écrit alors :

$$a\ddot{\theta} - (-k)(\theta - \theta_0) = 0, \quad \text{soit} \quad a\ddot{\theta} + k\theta = k\theta_0, \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{k}{a}\theta = \frac{k}{a}\theta_0.$$

On peut poser : $\Omega^2 = \frac{k}{a} > 0$; donc :

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = \Omega^2\theta_0.$$

Cette équation différentielle admet une solution sinusoïdale.

Le point M écarté de sa position d'équilibre va donc osciller autour de celle-ci, donc :

la position $\theta = \theta_0$ est une position d'équilibre stable.

Index

A, B

- accélération, 15
- actions mécaniques, 96
 - de contact, 99
 - extérieures, 96
 - intérieures, 96
 - puissance, 150
- Amontons-Coulomb, lois de, 99
- apogée, 256
- association solide-référentiel, 17
- axe instantané de rotation, 25
- base, 8
- bras de levier, 98

C

- centre
 - de masse, 61
 - d'inertie, 61
 - de gravité, 98
 - instantané de rotation, 25
- champ des vitesses d'un solide, 18
- cinématique, 7, 21
 - du contact, 21
- cinétique, 59
- CIR, 25
- coefficient
 - d'amortissement, 244
 - de frottement, 99
- composition des vitesses, 19, 260
- cône de frottement, 99
- conservation de l'énergie mécanique, 162
- contact entre deux solides,
21, 99, 155
- Copernic, 261
- Coulomb-Amontons (lois de), 99
- couple, 97

D

- décroissement logarithmique, 244
- demi-grand axe (de la trajectoire elliptique), 255
- dérivée vectorielle, 12
- dynamique, 95

E

- efforts, 96
 - extérieurs, 96
 - intérieurs, 96
 - puissances, 152
- énergétique, 149
- énergie
 - cinétique, 67
 - potentielle, 159, 245, 247, 254
 - mécanique, 161
- équilibre (repos, statique) du solide, 104
- équiprojectivité, 18

F

- facteur qualité, 244
- FFCS, 17
- force(s)
 - coulombienne, 255
 - de rappel élastique, 246
 - de frottement (de glissement),
99
 - d'inertie de Coriolis, 261
 - d'inertie d'entraînement, 261
 - newtonienne, 254
 - centrales, 254
 - centrales conservatives, 254
 - conservatives, 159
 - puissance, 150
- formule
 - de changement de point pour le moment, 65
 - de Varignon, 13
 - fondamentale de la cinématique du solide (FFCS), 17
- foyer d'une ellipse, 255

G, I, K

- glissement, 22, 99
 - vitesse de, 22
 - roulement sans, 23
- glisseur, 97, 153
 - moment, 98

- inter-efforts, puissance, 154
- intérieures (forces), 96
- Kepler, 255
- Koenig, théorèmes, 65

L

- liaison
 - parfaite, 157
 - pivot, 100, 157
 - rotule, 101, 157
 - sans frottement, 157
- loi
 - de composition des accélérations, 260
 - de composition des vitesses, 19, 260
 - des aires, 255
 - d'Amontons-Coulomb, 99
 - de Kepler, 255

M

- masse, 60
- moment
 - cinétique en un point, 64
 - cinétique par rapport à un axe, 66
 - d'inertie, 69
 - d'un glisseur, 98
 - d'une force, 98
- mouvement
 - de rotation, 13
 - de rotation autour d'un axe de direction fixe, 72, 106, 163
 - de rotation autour d'un axe fixe, 19, 68, 105, 153, 162
 - de translation, 19, 73, 153
 - quelconque, 20

N, O, P

- non glissement, 99
- oscillateur harmonique
 - amorti par frottement fluide,
244
 - non amorti, 244

oscillations
 – forcées, 245
 – libres, 244
 périégée, 256
 période de révolution, 255
 PFD, 101, 261
 pivot (liaison), 100
 pivotement, 22
 planètes, 254
 poids, 97, 154, 158
 – énergie potentielle, 160
 – puissance, 152
 point
 – coïncidant, 18, 22
 – de contact (géométrique), 21, 99
 – élément d'un solide (naturellement), 17, 21
 positions d'équilibre, 247
 principe fondamental de la dynamique, 101, 261
 principe des actions réciproques (3^e loi de Newton), 102, 103
 problème à deux corps, 248
 produit
 – scalaire, 9
 – vectoriel, 9
 puissance des actions mécaniques, 150
 – de pesanteur (du poids), 154
 – extérieures, 152
 – extérieures pour un contact ponctuel, 156
 – extérieures pour un glisseur, 153
 – extérieures pour un couple, 153
 – intérieures, 154
 – intérieures pour un contact ponctuel, 155
 pulsation propre, 244

Q, R

quantité de mouvement, 63
 réaction
 – d'axe, 99
 – normale, 99

– tangentielle, 99,
 référentiel, 8
 – barycentrique, 62, 248
 – de Copernic, 261
 – de Kepler, 261
 – galiléen, 260
 – géocentrique, 261
 – terrestre, 262
 régime
 – apériodique, 244
 – critique, 244
 – pseudo-périodique, 244
 repère, 8
 résonance, 245
 résultante
 – cinétique, 63
 – des forces, 96
 rotation
 – autour d'un axe fixe, 19, 68, 105, 153, 162
 – autour d'un axe de direction fixe, 72, 106, 163
 rotule (liaison), 100
 roulement, 22
 – sans glissement, 23, 99
 RSG, 23

S

satellites, 254
 Soleil, 255
 solide, 17, 59
 – en rotation autour d'un axe fixe, 19, 68, 105, 153, 162
 – en rotation autour d'un axe de direction fixe, 72, 106, 163
 – en translation, 19, 73, 153
 stabilité, 245
 statique, 104
 système
 – matériel, 59
 – matériel fermé, 60

T

TCM, 101, 102
 TEC, 161, 261
 TEM, 162

terme de marée, 261
 théorèmes de Koenig, 65
 – premier théorème, 65
 – deuxième théorème, 67
 théorème
 – du centre de masse (TCM), 102
 – de la puissance cinétique (TPC), 160, 261
 – de l'énergie cinétique (TEC), 161, 261
 – de l'énergie mécanique (TEM), 162
 – des actions réciproques, 103
 – du moment cinétique (TMC), 103
 – de la résultante cinétique (TRC), 102

TMC

– barycentrique, 105
 – en un point, 104
 – par rapport à un axe, 105

torseur

– cinématique, 18
 – cinétique, 65
 – des actions de contact entre deux solides, 99
 – des efforts, 96
 – particulier : couple, 97
 – particulier : glisseur, 97

TPC, 160, 261

trajectoire

– circulaire, 255
 – elliptique, 255
 – hyperbolique, 256
 – parabolique, 256

translation (solide en), 73, 153

travail

– d'un ensemble de forces, 158
 – du poids, 158

TRC, 101

V

Varignon, 13

vecteur

– accélération, 15
 – position, 8
 – rotation instantané, 13
 – vitesse, 14

vitesse (champ de), 17

Bréal, l'éditeur des prépas



En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.



Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.



Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.



Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).



Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand (*Journ'allemand Vocabulaire et exercices*), en espagnol (*Journal'isimo Vocabulaire et exercices*) et en italien (*Journal'italien*).



Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site : www.editions-breial.fr



**Titres disponibles en deuxième année
dans les filières MP et PC...**

En Mathématiques

Analyse MP
Analyse PC
Algèbre et géométrie MP
Algèbre et géométrie PC

En Chimie

Chimie MP-PT
Chimie organique PC
Thermodynamique-Matériaux PC

En Physique

Optique MP-PC-PSI-PT
Mécanique MP-PC
Électromagnétisme MP
Électromagnétisme PC-PSI
Électronique MP
Physique des ondes PC-PSI
Thermodynamique MP
Thermodynamique PC-PSI
Mécanique des fluides PC-PSI

Livres d'exercices

Mathématiques MP / Mathématiques PC-PSI
Physique MP / Physique PC

LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la **collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL. L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0371
ISBN : 2-7495-0438-4
www.editions-breal.fr



Copyrighted material