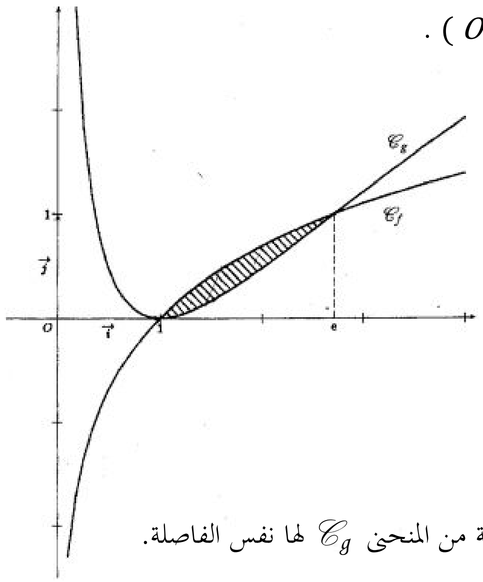
امتحان بكالوريا – فرنسا ـ دورة 19 جوان 2008ـ

شعبة : S

التمرين الأول: (05 نقط)

المنحنيين $\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ المعطيين هما التمثيليان البيانيان على التوالي للدالتين العدديتين f و g المعرفتين على المجال $]\,0\,;+\infty\,[$ كما يلي: $f(x) = \ln x$ و $g(x) = (\ln x)^2$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.



1) نبحث عن المساحة $\mathcal{A}$ (بوحدة المساحة) للحيز المستوي المظلل.

نضع: $I = \int_1^e \ln x \, dx$ و $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

أ) تحقق أن الدالة F المعرفة على المجال $]\,0\,;+\infty\,[$ كما يلي: $F(x) = x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة اللوغاريتم النيبيري. استنتج I.

ب) برهن ، باستعمال مكاملة بالتجزئة، أن: $J = e - 2I$.

ج) استنتج J .

د) أعط قيمة للعدد $\mathcal{A}$.

2) في هذا السؤال، المطلوب من المترشح أن يكتب كل الخطوات حتى لو لم يصل إلى حل.

من أجل كل x من المجال $[1\,;\,e]$، نضع $\mathcal{M}$ النقطة من المنحنى $\mathscr{C}_f$ فاصلتها x و $\mathcal{N}$ النقطة من المنحنى $\mathscr{C}_g$ لها نفس الفاصلة.

من أجل أي قيمة للعدد x المسافة $\mathcal{MN}$ تكون أعظمية؟ أحسب القيمة العظمى للعدد $\mathcal{MN}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ النقط:

$A(1;1;0)$ ؛ $B(1;2;1)$ ؛ $C(3;-1;2)$ ؛ $D(3;2;1)$ و المستوى (P) الذي معادلته: $x - 3z - 4 = 0$

1) أ – تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامية.

ب – برهن أن المستوي (A B C) له معادلة من الشكل: $2x + y - z - 3 = 0$.

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) الذين معادلتين لهما: $x + 2y - z - 4 = 0$ و $2x + 3y - 2z - 5 = 0$ على التوالي.

برهن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم ($\mathcal{D}$)، ذو تمثيل وسيطي: $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$

3) ما هو تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (Q) و (A B C) ؟

4) في هذا السؤال كل رسم للبحث ، حتى و إن كان غير كامل، يأخذ بعين الاعتبار في التنقيط.

أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم($\mathcal{D}$).

التمرين الثالث: (05 نقاط) (لكل المتحنين)

مدة صلاحية؛ معبرة بالساعات، لمفكرة إليكترونية هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

نذكر أنه من أجل كل $t \geq 0$ ، $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

الدالة $\mathcal{R}$ المعرفة على المجال $[\,0\,;+\infty\,[$ كما يلي: $\mathcal{R}(t) = P(X > t)$ تسمى دالة وفاء. - *Fiabilité* -

1) *Restitution organisée des connaissances*

أ) برهن أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا: $\mathcal{R}(t) = e^{-\lambda t}$

ب) برهن أن المتغير X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة، أي أنه من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t + s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

2) في هذا السؤال، نأخذ $\lambda = 0{,}00026$.

أ) أحسب $P(X \leq 1000)$ و $P(X > 1000)$.

ب) علما أن الحادثة $(X > 1000)$ محققة، أحسب احتمال الحادثة $(X > 2000)$

ج) علما أن مفكرة اشتغلت 2000 ساعة، ما احتمال أن تتعطل قبل 3000 ساعة؟ هل يمكن توقع هذه النتيجة؟

التمرين الرابع: (05 نقاط) (للممتحنين الذين لا يدرسون الاختصاص)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}\ ;\vec{v}\ )$، (الوحدة البيانية: 1 cm)

لتكن A ، B ، I نقط المستوي التي لاحقاتها على التوالي $1+i$ ، $3-i$ ، 2.

بكل نقطة $M(z)$ نرفق النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=z^2-4z$. النقطة M' تسمى صورة النقطة M

1) ضع شكل و أتممه أثناء حل التمرين.

2) أحسب لاحقتي النقطتين A' و B' صورتا A و B على التوالي. ماذا تلاحظ ؟

3) عين النقط التي لاحقة صورتها (-5).

4) أ – تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z، $z'+4=(z-2)^2$.

ب– استنتج علاقة بين $|z'+4|$ و $|z-2|$ و لما يكون z مختلف عن 2، علاقة بين $\arg(z'+4)$ و $\arg(z-2)$.

جـ – ما يمكن قوله عن النقطة M' ، لما تمسح النقطة M الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 2 ؟

5) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $2+2e^{i\frac{\pi}{3}}$، J النقطة ذات اللاحقة -4 و E' صورة E.

أ – أحسب المسافة IE و قيس بالراديان للزاوية $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{IE}\ )$.

ب– أحسب المسافة JE' و قيس بالراديان للزاوية $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{JE'}\ )$.

جـ– أنشئ بالمسطرة و المدور النقطة E' ؛ نترك ظاهرا خطوط الإنشاء.

التمرين الرابع: (05 نقاط) (للممتحنين الذين يتابعون التعليم في الاختصاص)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}\ ;\vec{v}\ )$.

لتكن A ، B نقطتان من المستوي لاحقاهما على التوالي $z_A=1-i$ و $z_B=7+\frac{7}{2}i$.

1) نعتبر المستقيم (d) ذو معادلة: $4x+3y=1$.

برهن أن مجموعة نقط المستقيم (d) ذات إحداثيات صحيحة هي مجموعة النقط $M_k(3k+1\ ;\ -4k-1)$ لما يمسح k مجموعة الأعداد الصحيحة

2) عين زاوية و النسبة للتشابه المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى $M_{-1}(-2\ ;\ 3)$.

3) ليكن التحويل s للمستوي الذي يرفق بالنقطة $M(z)$ ، النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\frac{2}{3}iz+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i$.

عين صورة A بالتحويل s ثم أعط الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل s.

4) نرمز B_1 لصورة B بالتحويل s و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، B_{n+1} صورة B_n بالتحويل s .

أ) عين الطول AB_{n+1} بدلالة AB_n.

ب) ابتداءا من أي عدد طبيعي n ، النقطة B_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه A و نصف قطره 10^{-2} ؟

ج) عين مجموعة الأعداد n التي من أجلها تكون النقط A ؛ B_1 ؛ B_n على استقامة واحدة.

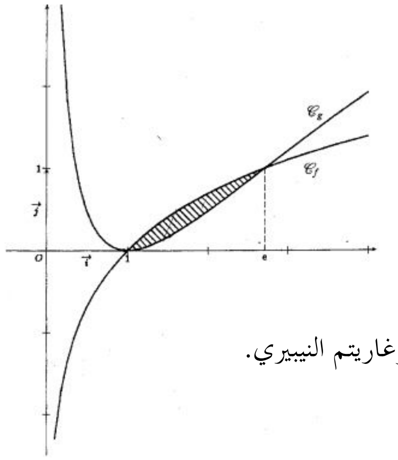
الحل المفصل لامتحان — فرنسا ـ دورة جوان 2008ـ

شعبة : S

التمرين الأول: : (05 نقط)

المنحنيين $\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ المعطيين هما التمثيليان البيانيان على التوالي للدالتين العدديتين f و g المعرفتين على المجال $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ كما يلي:

$f(x) = \ln x$ و $g(x) = (\ln x)^2$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



نبحث عن المساحة $\mathcal{A}$ (بوحدة المساحة) للحيز المستوي المظلل.

نضع: $I = \int_1^e \ln x\, dx$ و $J = \int_1^e (\ln x)^2\, dx$

أ) تحقق أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة اللوغاريتم النيبيري.

$\mathcal{F}$ الدالة المعرفة على المجال $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ كما يلي: $\mathcal{F}(x) = x\ln x - x$

$\mathcal{F}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ و $\mathcal{F}\,'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

و منه الدالة $\mathcal{F}$ المعرفة على المجال $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ كما يلي: $F(x) = x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة اللوغاريتم النيبيري.

ب) استنتاج I. $I = \int_1^e \ln x\, dx = [x\ln x - x]_1^e = 1$

ج) نبرهن أن: $J = e - 2I$: $J = \int_1^e (\ln x)^2\, dx$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

$\begin{cases} y(x) = g(x) = (\ln x)^2 \\ z'(x) = 1 \end{cases}$ يستلزم $\begin{cases} y'(x) = \frac{2\ln x}{x} \\ z(x) = x \end{cases}$

$J = \int_1^e (\ln x)^2\, dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2\ln x\, dx = e - 2I$ و منه $J = e - 2I$

د) استنتاج J : $J = e - 2I = e - 2$

هـ) أعطاء قيمة للعدد $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - g(x)]\, dx = \int_1^e [\ln x - (\ln x)^2]\, dx = \int_1^e \ln x\, dx - \int_1^e (\ln x)^2\, dx = I - J = (3 - e)\ u.a.$

في هذا السؤال، المطلوب من المترشح أن يكتب كل الخطوات حتى لو لم يصل إلى حل.

من أجل كل x من المجال $[\ 1\ ;\ e\ ]$، نضع $\mathcal{M}$ النقطة من المنحنى $\mathscr{C}_f$ فاصلتها x و $\mathcal{N}$ النقطة من المنحنى $\mathscr{C}_g$ لها نفس الفاصلة.

من أجل أي قيمة للعدد x المسافة MN تكون أعظمية؟

نضع: من أجل كل x من المجال $[\ 1\ ;\ e\ ]$، $d(x) = \mathcal{MN} = f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2$

d تقبل الاشتقاق على المجال $[\ 1\ ;\ e\ ]$ و $d\,'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{1 - 2\ln x}{x}$

$d\,'(x) \geq 0$ يكافئ $\begin{cases} 1 - 2\ln x \geq 0 \\ x \in [1\ ;\ e] \end{cases}$ يكافئ $x \in [1\ ;\ \sqrt{e}\,]$

إشارة $d\,'(x)$

x	1	$\sqrt{e}$	e
$d\,'(x)$	+	0	−

جدول التغيرات:

x	1		$\sqrt{e}$		e
$d\,'(x)$		+	0	−	
d	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

تكون أعظمية من أجل $x = \sqrt{e}$

حساب القيمة العظمى للعدد $\mathcal{MN}$: $\mathcal{MN} = \frac{1}{4}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط:

$A(1;1;0)$ ؛ $B(1;2;1)$ ؛ $C(3;-1;2)$ ؛ $D(3;2;1)$ و المستوى **(P)** الذي معادلة له: $x-3z-4=0$

1) أ – تتحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامية:

الشعاعان $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;\,1)$ وَ $\overrightarrow{AC}(2\,;\,-2\,;2)$ غير مرتبطان خطيا يكافئ النقط A، B ، C ليست على استقامية

ب – نبرهن أن المستوي (A B C) له معادلة من الشكل: $2x+y-z-3=0$:

الطريقة الأولى: تتحقق أن إحداثيات النقط A، B ، C تحقق المعادلة $2x+y-z-3=0$

لدينا: $2(1)+(1)-(0)-3=0$ يكافئ A تنتمي إلى المستوي ذو معادلة $2x+y-z-3=0$

$2(1)+(2)-(1)-3=0$ يكافئ B تنتمي إلى المستوي ذو معادلة $2x+y-z-3=0$

$2(3)+(-1)-(2)-3=0$ يكافئ C تنتمي إلى المستوي ذو معادلة $2x+y-z-3=0$

ومنه المستوي (A B C) له معادلة من الشكل: $2x+y-z-3=0$

الطريقة الثانية: يكفي البرهنة أن الشعاع الناظمي $\vec{n}(2\,;1\,;\,(-1)$ للمستوي ذو معادلة $2x+y-z-3=0$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ والبرهنة أن النقطة تنتمي لهذا المستوي أي:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(0)+1(1)-1(1)=0$ يكافئ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(2)+1(-2)-1(2)=0$ يكافئ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$2(1)+(1)-(0)-3=0$ يكافئ A تنتمي إلى المستوي ذو معادلة $2x+y-z-3=0$

ومنه المستوي (A B C) له معادلة من الشكل: $2x+y-z-3=0$

2) نعتبر المستويين (P) وَ (Q) الذين معادلتين لهما: $x+2y-z-4=0$ وَ $2x+3y-2z-5=0$ على التوالي.

نبرهن أن تقاطع المستويين (P) وَ (Q) هو المستقيم (D)،

$$(\mathcal{D}):\begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

نعلم أن تقاطع المستويين (P) وَ (Q) هو المستقيم ذو معادلات: $\begin{cases}x+2y-z-4=0\\ 2x+3y-2z-5=0\end{cases}$ ……… (1)

(1) تكافئ $\begin{cases}2x+4y-2z-8=0\\ 2x+3y-2z-5=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=3\\ x=z-2\end{cases}$

بوضع: $z=t$ مع $t\in\mathbb{R}$ نجد: $\begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\end{cases}$

و بالتالي: تقاطع المستويين (P) وَ (Q) هو المستقيم ($\mathcal{D}$)، ذو تمثيل وسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ $(\mathcal{D}):\begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\end{cases}$

3) تقاطع المستويات الثلاثة (P)، (Q) وَ (A B C):

تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (Q) وَ (A B C) هو تقاطع المستقيم ($\mathcal{D}$) و المستوي (A B C) أي

$$\begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\\ 2x+y-z-3=0\end{cases}\quad \text{يكافئ}\quad \begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\\ 2(-2+t)+(3)-(t)-3=0\end{cases}\quad \text{يكافئ}\quad \begin{cases}t=4\\ x=2\\ y=3\\ z=2\end{cases}$$

تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (Q) وَ (A B C) ي النقطة **E** ذات الإحداثيات **(2 ; 3 ; 4)**

4) في هذا السؤال كل رسم للبحث ، حتى و إن كان غير كامل، يأخذ بعين الاعتبار في التنقيط.

حساب المسافة بين النقطة $\mathcal{A}$ و المستقيم $(\mathcal{D})$:

الطريقة الأولى: المسافة بين النقطة A و المستقيم $(\mathcal{D})$ هي أصغر مسافة بين النقطة A و نقطة كيفي $E(t-2\,;3\,;t)$ من المستقيم $(\mathcal{D})$.

لدينا: $AE = \sqrt{(t-2-1)^2+(3-1)^2+(t-0)^2} = \sqrt{2t^2-6t+13}$ أي $AE^2 = 2t^2-6t+13$

نضع: $f(t) = 2t^2-6t+13$. لندرس الدالة f على $\mathbb{R}$.

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(t) = 4t-6$

t	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات:

t	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{17}{2}$	$\nearrow$	

المسافة بين النقطة A و المستقيم $(\mathcal{D})$ هي: $d(A;(D)) = \sqrt{\frac{17}{2}}$

الطريقة الثانية:

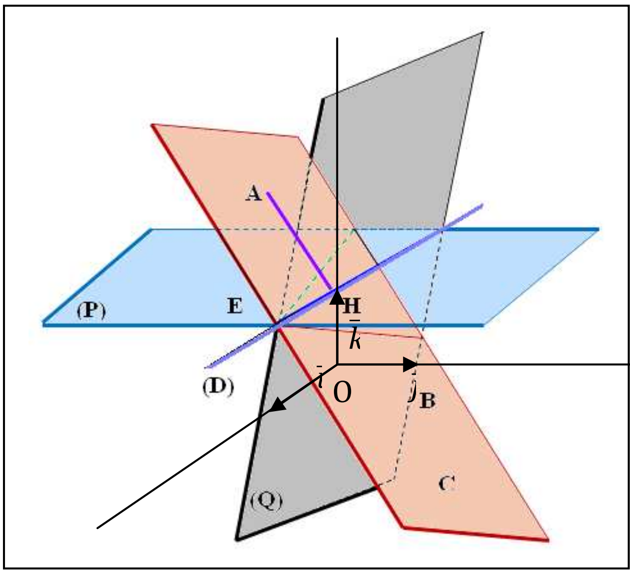
ليكن $\mathcal{H}$ المسقط العمودي للنقطة $A\,(1\,;1\,;0)$ على المستقيم $(\mathcal{D})$.

بما أن $\mathcal{H}$ تنتمي إلى المستقيم (D)، فإن إحداثيات $\mathcal{H}$ هي $(-2+t\,;3\,;t)$، نبحث عن قيمة t التي يكون من أجلها $\mathcal{H}$ المسقط العمودي للنقطة $A\,(1\,;1\,;0)$ على المستقيم $(\mathcal{D})$، لدينا: $\overrightarrow{AH}(t-3\,;2\,;t)$ وَ $\vec{u}(1\,;0\,;1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\mathcal{D})$.

لدينا: $\vec{u} \perp \overrightarrow{AH}$ يكافئ $\vec{u}.\overrightarrow{AH} = 0$ يكافئ $(t-3)(1)+2(0)+t(1)=0$ يكافئ $t-3+t=0$ يكافئ $t = \frac{3}{2}$.

و بالتالي إحداثيات $\mathcal{H}$ هي $\left(-\frac{1}{2}\,;3\,;\frac{3}{2}\right)$

ومنه $(A;(D)) = AH = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+(1-3)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{17}{2}}$



التمرين الثالث: (05 نقاط) (لكل الممتحنين)

مدة صلاحية؛ مُعَبَرة بالساعات، لمفكرة إليكترونية هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

نذكر أنه من أجل كل $t \geq 0$ ، $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

الدالة $\mathcal{R}$ المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $\mathcal{R}(t) = P(X > t)$ تسمى دالة وفاء. - *Fiabilité* -

1) *Restitution organisée des connaissances*

أ) **نبرهن أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا: $R(t) = e^{-\lambda t}$:**

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي $t \geq 0$ ، $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

و منه: $\mathcal{R}(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$

ب) **نبرهن أن المتغير X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة:**

أي نبرهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t + s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

لدينا: $$P_{X>t}(X > t + s) = \frac{P(\{X>t+s\} \cap \{X>t\})}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

ومنه: من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t + s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

2) في هذا السؤال، نأخذ $\lambda = 0,00026$.

أ) **حساب $P(X \leq 1000)$ و $P(X > 1000)$:**

لينا: $P(X \leq 1000) = R(1000) = 1 - e^{-0,00026(1000)} = 1 - e^{-0.26}$

$P(X > 1000) = e^{-0,26}$

ب) **حساب $P_{X>1000}(X > 2000)$**

علما أن الحادثة $(X > 1000)$ محققة، أحسب احتمال الحادثة $(X > 2000)$

ج) علما أن مفكرة اشتغلت *2000* ساعة، ما احتمال أن تتعطل قبل *3000* ساعة؟

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{P(2000<X\leq 3000)}{P(X>2000)} = \frac{\int_{2000}^{3000} \lambda e^{-\lambda x}dx}{R(2000)} = \frac{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{2000}^{3000}}{e^{-2000\lambda}} = \frac{e^{-2000\lambda} - e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}}$$

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-1000\lambda} = 1 - e^{-0.26}$$

د) **هل يمكن توقع هذه النتيجة؟**

نعم يمكن توقع هذه النتيجة لأن المتغير العشوائي X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة

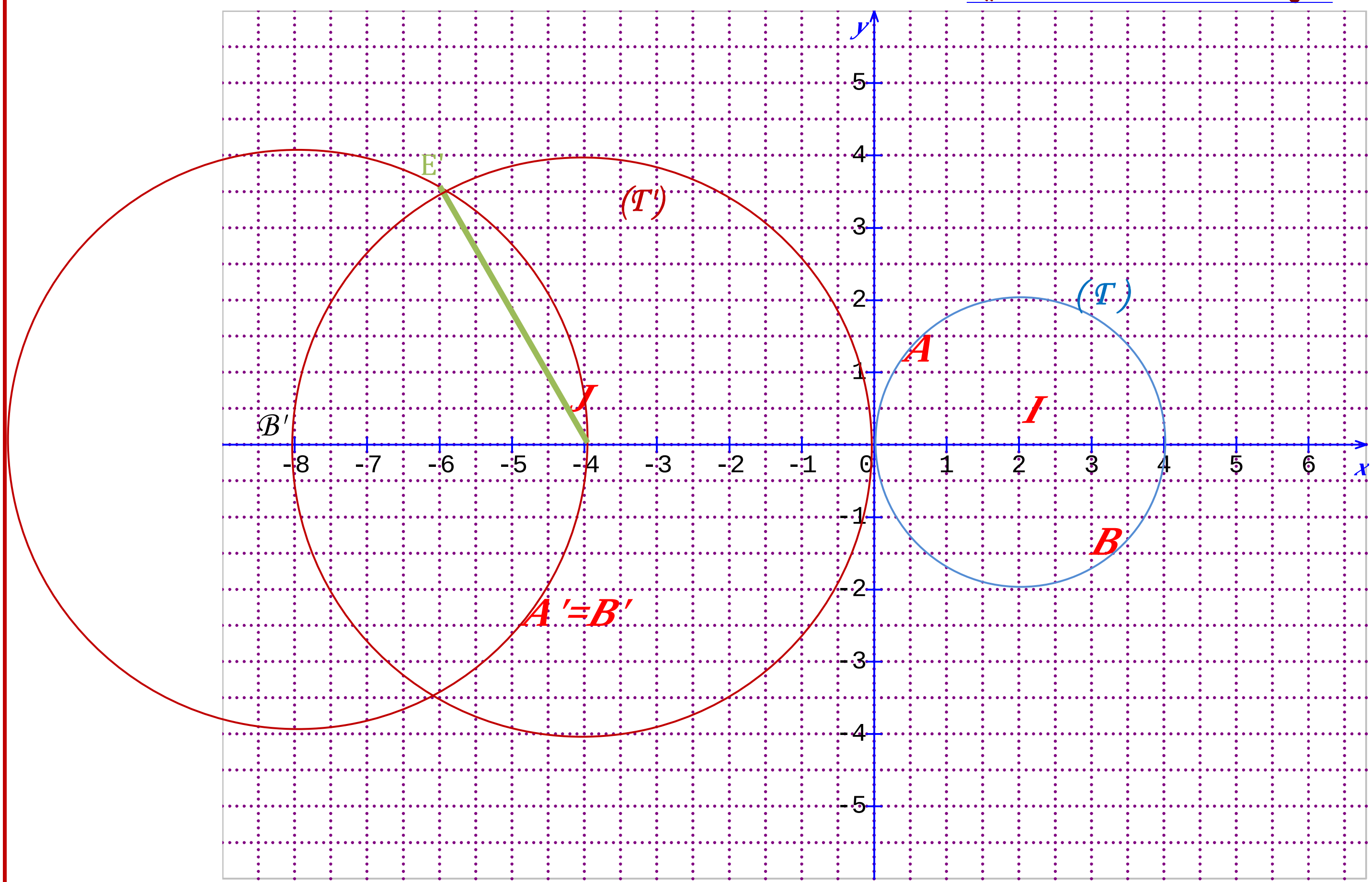
التمرين الرابع: (05 نقاط) (للممتحنين الذين لا يدرسون الاختصاص)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، (الوحدة البيانية: 1 cm)

لتكن A ، B ، I نقط المستوي التي لاحقاتها على التوالي $z_A = 1+i$ ، $z_B = 3-i$ ، $z_I = 2$.

بكل نقطة $\mathcal{M}(z)$ نرفق النقطة $\mathcal{M}'(z')$ حيث: $z' = z^2 - 4z$. النقطة $\mathcal{M}'$ تسمى صورة النقطة $\mathcal{M}$

1) وضع شكل و أتمامه أثناء حل التمرين:



2) حساب لاحقتي النقطتين $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{B}'$ صورتا $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ على التوالي. ماذا تلاحظ ؟

$z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1+i)^2 - 4(1+i) = -4-2i$

$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3-i)^2 - 4(3-i) = -4-2i$

نلاحظ أن: $z_{A'} = z_{B'}$

3) تعيين النقط التي لاحقة صورتها (-5):

نقوم بحل المعادلة: $z^2 - 4z = -5$ أي $z^2 - 4z$

$\Delta' = 4-5 = -1 = i^2$ $z_1 = 2-i$ ؛ $z_2 = 2+i$

لاحقتي النقطتين التين لاحقة صورهما (-5) هي: $z_1 = 2-i$ ؛ $z_2 = 2+i$

4) أ – تتحقق أنه من أجل كل عدد مركب z، $z'+4 = (z-2)^2$:

لدينا: $z' = z^2 - 4z$ يكافئ $z'+4 = z^2 - 4z + 4$ يكافئ $z'+4 = (z-2)^2$

ب – استنتاج علاقة بين $|z'+4|$ و $|z-2|$ و لما يكون z مختلف عن 2، علاقة بين $arg(z'+4)$ و $arg(z-2)$:

لدينا: $z'+4 = (z-2)^2$ يكافئ $\begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ \arg(z'+4) \equiv 2\arg(z-2)[2\pi] \end{cases}$

جـ – ما يمكن قوله عن النقطة $\mathcal{M}'$ ، لما تمسح النقطة $\mathcal{M}$ الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 2 ؟

لتكن (Γ) الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 2 و (Γ') الدائرة التي مركزها $J(-4)$ و نصف قطرها 4.

$M(z)\in(\Gamma)$ يكافئ $|z-2|=2$ يكافئ $|z'+4|=4$ يكافئ $M'(z')\in(\Gamma')$

مجموعة النقط $M'(z')$ هي الدائرة (Γ') التي مركزها $J(-4)$ و نصف قطرها 4.

5) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=2+2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، J النقطة ذات اللاحقة $z_J=-4$ و E' صورة E.

أ – حساب المسافة IE و قيس بالراديان للزاوية $(\vec{u}\,;\overrightarrow{IE})$:

لدينا: $\overrightarrow{IE}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ ومنه: $IE=\left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=2$ وَ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{IE})\equiv\arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ب– حساب المسافة JE' و قيس بالراديان للزاوية $(\vec{u}\,;\overrightarrow{JE'})$

لدينا: $IE=2$ يكافئ $|z_E-2|=2$ يكافئ $|z_{E'}+4|=4$ يكافئ $JE'=4$

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{IE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ يكافئ $\arg(z_E-2)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ يكافئ $\arg(z_{E'}+4)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ يكافئ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{JE'})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

جـ– إنشاء بالمسطرة و المدور النقطة E' ؛ نترك ظاهرا خطوط الإنشاء.

E' تنتمي إلى (Γ') و $(\overrightarrow{JO}\,;\overrightarrow{JE'})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

E' نقطة تقاطع الدائرة (Γ') التي مركزها J النقطة ذات اللاحقة $z_J=-4$ و نصف قطرها 4 و الدائرة التي مركزها $B'(-8\,;0)$ و نصف قطرها 4.

التمرين الرابع: (05 نقاط) (للممتحنين الذين يتابعون التعليم في الاختصاص)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{u}\ ;\vec{v}\ )$.

لتكن A ، B نقطتان من المستوي لاحقاهما على التوالي $z_A = 1 - i$ و $z_B = 7 + \frac{7}{2}\ i$.

1) نعتبر المستقيم (d) ذو معادلة: $4x + 3y = 1$.

نبرهن أن مجموعة نقط المستقيم (d) ذات إحداثيات صحيحة هي مجموعة النقط $M_k(3k + 1\ ;\ -4k - 1)$ لما يمسح k مجموعة الأعداد الصحيحة:

لدينا: من أجل كل عدد صحيح نسبي k ؛ $4(3k + 1) + 3(-4k - 1) = 1$ يكافئ $M_k(3k + 1\ ;\ -4k - 1) \in (d)$

لندرس المسألة العكسية: نقوم بحل المعادلة $4x + 3y = 1$ في $\mathbb{Z}^2$.

لدينا: $4x + 3y = 1$ يكافئ $4x = -3y + 1$ يكافئ $4x \equiv 1[3]$ يكافئ $x \equiv 1[3]$ يكافئ $x = 3k + 1$ مع k عدد صحيح نسبي.

بالتعويض نجد: $y = -4k - 1$

الخلاصة: مجموعة نقط المستقيم (d) ذات إحداثيات صحيحة هي مجموعة النقط $M_k(3k + 1\ ;\ -4k - 1)$ لما يمسح k المجموعة $\mathbb{Z}$.

2) **تعيين زاوية و النسبة للتشابه المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى $M_{-1}(-2\ ;\ 3)$.**

ليكن T التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى $M_{-1}(-2\ ;\ 3)$.

لدينا: $T(M) = M'$ يكافئ $z' = az + b$

$$\begin{cases} T(A) = A \\ T(B) = M_{-1} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 1 - i = a(1 - i) + b \\ -2 + 3i = a\left(7 + \frac{7}{2}\,i\right) + b \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3 - 4i = a\left(-6 - \frac{9}{2}i\right) \\ b = 1 - i - a(1 - i) \end{cases}$$

$T(M) = M'$ يكافئ $z' = \frac{2}{3}i\ z + \frac{1 - 5\,i}{3}$

T التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{2}{3}$ ، زاويته $\frac{\pi}{2}$

3) ليكن التحويل s للمستوي الذي يرفق بالنقطة $M(z)$ ، النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{2}{3}\ i\ z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$.

تعيين صورة A بالتحويل s :

من السؤال السابق نستنتج أن: $S(A) = A$

الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل s:

نلاحظ أن: $s = T$ و بالتالي: s التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{2}{3}$ ، زاويته $\frac{\pi}{2}$

4) نرمز B_1 لصورة B بالتحويل s و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، B_{n+1} صورة B_n بالتحويل s .

لدينا من الأسئلة السابقة: $T(B) = s(B) = M_{-1}$ يكافئ $B_1 = M_{-1}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $B_{n+1} = s(B_n)$ يكافئ $z_{n+1} = \frac{2}{3}\ i\ z_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$ مع z_n لاحقة B_n

أ) **تعيين الطول AB_{n+1} بدلالة AB_n:**

$$AB_{n+1} = |z_{n+1} - 1 + i| = \left|\frac{2}{3}\ i\ z_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i - 1 + i\right| = \left|\frac{2}{3}\ i(\ z_{n-1+i})\right| = \frac{2}{3}AB_n$$

ومنه: $AB_{n+1} = \frac{2}{3}AB_n$

ب) **ابتداء من أي عدد طبيعي n ، النقطة B_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه A و نصف قطره 10^{-2} ؟**

نضع: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n = AB_n$

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $AB_{n+1} = \frac{2}{3}AB_n$ يكافئ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = u_n$

يكافئ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول u_1

حيث: $u_1 = \mathcal{AB}_1 = |-2+3i-1+i| = |-3+4i| = 5$ $\quad = u_n = u_1q^{n-1} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{15}{2}$

$\mathcal{AB}_n = u_n = u_1q^{n-1} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{15}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

النقطة $\mathcal{B}_n$ تنتمي إلى القرص الذي مركزه A و نصف قطره 10^{-2} يكافئ $AB_n \leq 10^{-2}$

يكافئ $\frac{15}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \leq 10^{-2}$ يكافئ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \leq \frac{2\times10^{-2}}{15}$

يكافئ $ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \leq ln\left(\frac{2\times10^{-2}}{15}\right)$ يكافئ $ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \leq ln\left(\frac{2\times10^{-2}}{15}\right)$

يكافئ $n\,ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq ln\left(\frac{2\times10^{-2}}{15}\right)$ يكافئ $n \geq \frac{ln\left(\frac{2\times10^{-2}}{15}\right)}{ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

يكافئ $n \geq 16{,}3$.

و بالتالي: النقطة $\mathcal{B}_n$ تنتمي إلى القرص الذي مركزه A و نصف قطره 10^{-2} ابتداءا من أجل $n \geq 17$.

تعيين مجموعة الأعداد n التي من أجلها تكون النقط $\mathcal{A}$ ؛ $\mathcal{B}_1$ ؛ $\mathcal{B}_n$ على استقامة واحدة:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $\mathcal{B}_{n+1}$ صورة $\mathcal{B}_n$ بالتحويل s

ومنه: $\mathcal{B}_n = s(\mathcal{B}_{n-1}) = s0s(\mathcal{B}_{n-2}) = \ldots = \underbrace{s0s0s0\ldots0s}_{(n-1)\text{ مرة}}(B_1)$

نعلم أن: $\underbrace{s0s0s0\ldots0s}_{(n-1)\text{ مرة}}$ هو التشابه المباشر الذي مركزه $\mathcal{A}$ ، نسبته $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، زاويته $\frac{(n-1)\pi}{2}$

لدينا: $\mathcal{B}_n = \underbrace{s0s0s0\ldots0s}_{(n-1)\text{ مرة}}(B_1)$ ومنه $(\overrightarrow{AB_1}\,;\,\overrightarrow{AB_n}) \equiv \frac{(n-1)\pi}{2}[2\pi]$.

$\mathcal{A}$ ؛ $\mathcal{B}_1$ ؛ $\mathcal{B}_n$ على استقامة واحدة تكافئ $(\overrightarrow{AB_1}\,;\,\overrightarrow{AB_n}) \equiv 0[\pi]$ تكافئ $\frac{(n-1)\pi}{2} = k\boldsymbol{\pi}$ مع $k \in \mathbb{N}$

تكافئ $n = 2k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{A}$ ؛ $\mathcal{B}_1$ ؛ $\mathcal{B}_n$ على استقامة واحدة تكافئ $n = 2k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$ أي n عدد فردي.