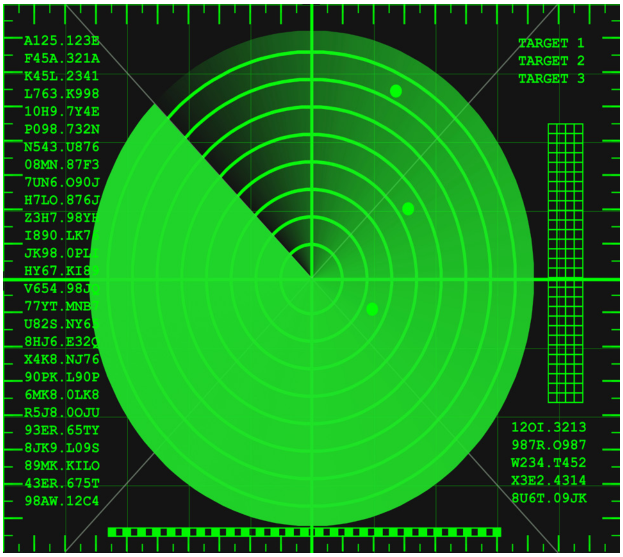
8. ÜNİTE

ÇEMBER VE DAİRE

8.1 : Çemberin Temel Elemanları
8.2 : Çemberde Açılar
8.3 : Çemberde Teğet
8.4 : Dairenin Çevresi ve Alanı



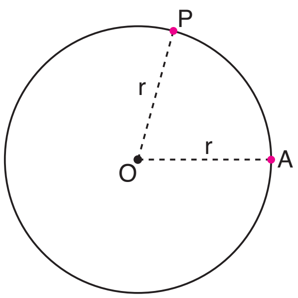
İnsanoğlu; çember dediğimiz kendine özgü, düzgün yuvarlak şeklin farkına birçok şeyin keşfinden önce varmıştır. Bu şekli diğer insanların ve başka canlıların gözbebeklerinde ve gökyüzündeki Güneş ve Dolunay'da görmüştür. Tekerleğin icadından sonra çember ve çembersel bölge(daire) üzerine araştırmalarını artırmış; bir çemberin çevresinin uzunluğunun, çemberin en büyük kiriş uzunluğuna oranının sabit olduğunu bulmuştur. Bu sabit değer daha sonraları Yunanca'da çevre(çember) anlamına gelen kelimelerin ilk harfi olan "π" ile gösterilmiştir.

Çember ve daire üzerine yapılan çalışmaların bilimsel nitelik kazanması MÖ 3000 yıllarında Mezopotamya topraklarında gerçekleşmiştir. Astronomi çalışması yapan Mezopotamyalılar Dünya'nın Güneş etrafındaki yörüngesini merkezinde Güneş olan bir çember gibi kabul ederek Dünya'nın izlediği yolu 12 istasyona, her bir istasyonu da bir günlük konaklamalarla 30 durağa ayırmışlardır. Her istasyonda bulunan takımyıldızların dizilişini doğadaki bir canlıya benzeterek bugünkü burçların isimlendirmesini yapmışlardır. Mezopotamyalıların, dairenin merkezini esas alarak daireyi 360 dilime bölmeleri, çemberin açı ve kiriş özelliklerinin bulunmasında temel teşkil etmiştir.

Kaynak: Kısa Matematik Tarihi

8.1 : ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

ÇEMBER VE ÇEMBERİN ELEMANLARI

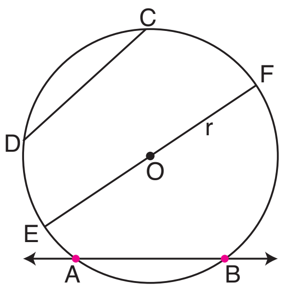


Düzlemde sabit bir O noktasına sabit r birim uzaklıktaki noktaların kümesine O merkezli r yarıçaplı çember denir ve (O, r) ile gösterilir. Şekilde çemberin her P noktası için $|OP| = r$ birimdir.

Merkezi ve yarıçap uzunluğu verilen bir çember çizilebilir. Düzlemde bütün çemberler birbirine benzerdir.

Yarıçap uzunlukları eşit çemberlere eş çemberler denir.

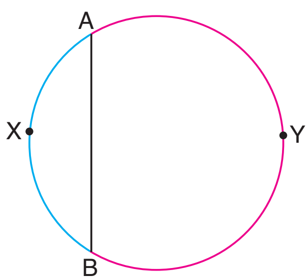
Çemberde Kiriş, Çap ve Kesen



Çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına kiriş, merkezden geçen kirişe ise çap denir. Şekilde [CD] kiriş, [EF] ise çaptır.

Çemberin iki noktasından geçen şekildeki AB doğrusuna kesen adı verilir.

Çemberde Yay

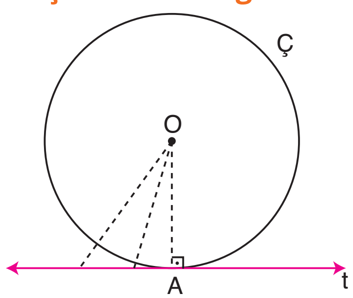


Çemberin bir parçasına yay adı verilir.

Şekildeki [AB] kirişi çemberi $\overset{\frown}{AXB}$ ve $\overset{\frown}{AYB}$ yaylarına ayırmıştır.

Bu yayların ölçüleri toplamı $m(\overset{\frown}{AXB}) + m(\overset{\frown}{AYB}) = 360°$ olur.

Çemberde Teğet



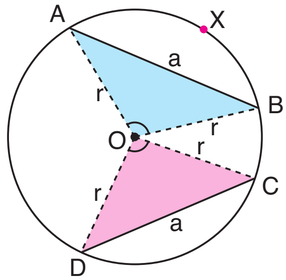
Çemberin yalnız bir noktasından geçen doğruya teğet denir. Şekilde Ç çember kümesi ve t doğrusu için $Ç \cap t = \{A\}$ ise, t doğrusuna çemberin teğeti, A noktasına da değme noktası denir.

t teğetinin çemberin merkezine en yakın noktası değme noktası olduğundan şekilde $AO \perp t$ olur.

Örnek

Çemberde eş kirişlerin yaylarının da eş olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekildeki çemberde $|AB| = |CD| = a$ ise

$m(\overset{\frown}{AXB}) = m(\overset{\frown}{CYD})$ olduğunu göstermeliyiz.

$[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ ve $[OD]$ yarıçapları çizilirse

$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$ olduğundan

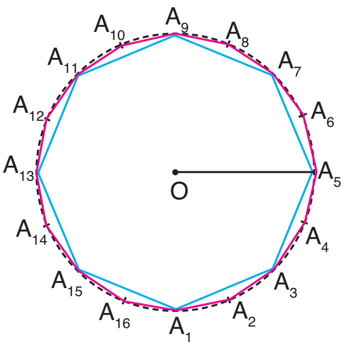
K.K.K. eşlik kuralına göre,

$\widehat{AOB} \cong \widehat{COD} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{AXB}) = m(\overset{\frown}{CYD})$ olur.

Örnek

Çember yardımı ile bir düzgün sekizgen ve bir de düzgün onaltıgen çizerek, hangisinin çevre uzunluğunun çemberin çevresine daha yakın olduğunu görelim.

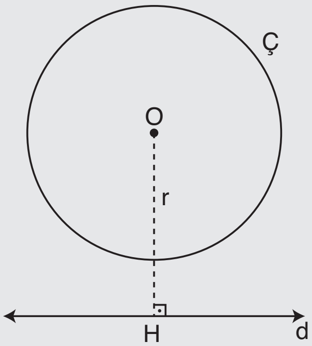
Çözüm



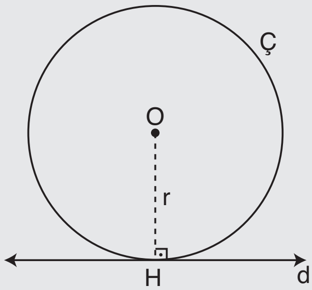
Çemberi birbirine eş 16 yay parçasına ayırsak eş yayların kirişleri de eş olacağından $A_1A_2A_3 \ldots A_{16}$ bir düzgün onaltıgen ve $A_1A_3A_5 \ldots A_{15}$ bir düzgün sekizgen olur. Dikkat edilirse düzgün onaltıgenin çevre uzunluğu düzgün sekizgene göre çemberin çevre uzunluğuna daha yakındır. Eğer bu çemberde 32 kenarlı bir düzgün çokgen çizilecek olsa, çevre uzunluğu çemberin çevresine daha da yakın olur. Buna göre, bir düzgün çokgenin kenar sayısı sınırsız arttırılırsa bir çember oluşacağını söyleyebiliriz.

İnceleyerek Öğrenelim

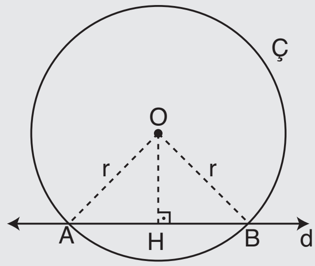
Düzlemde Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları



1. Şekil



2. Şekil

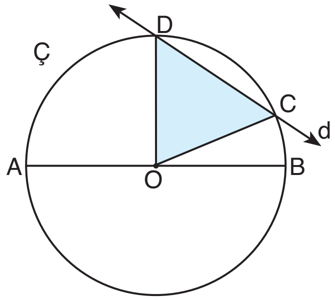


3. Şekil

Düzlemde O merkezli, r yarıçaplı Ç çemberi ve d doğrusu için $[OH] \perp d$ olsun.

1. $|OH| > r$ ise doğru ile çember kesişmez. 1. şekilde $d \cap Ç = \varnothing$ olur.
2. $|OH| = r$ ise doğru çembere teğettir. 2. şekilde $d \cap Ç = \{H\}$ olur.
3. $|OH| < r$ ise doğru çemberi farklı iki noktada keser. 3. şekilde $d \cap Ç = \{A, B\}$ olur.

Örnek

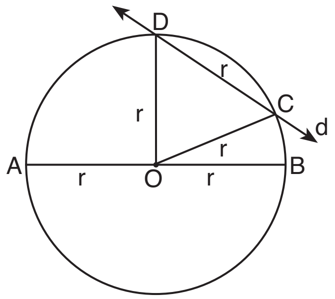


Şekildeki O merkezli Ç çemberinde

[AB] çap , $d \cap Ç = \{C, D\}$, $|AB| = 2|CD|$ ve $A(\widehat{OCD}) = \sqrt{3}\ cm^2$

olduğuna göre, bu çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.

Çözüm



$|AB| = 2|CD|$ olduğundan $|AB| = 2r$ alınırsa

$|CD| = r$ olur.

$|OC| = |OD| = r$ olduğundan OCD eşkenar üçgendir.

Bir kenar uzunluğu r olan eşkenar üçgenin alanı,

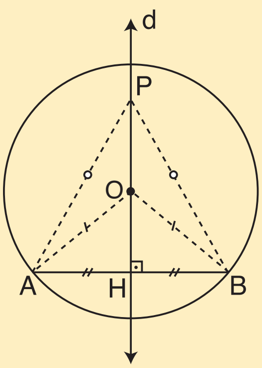
$$\frac{r^2 . \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

çemberin yarıçap uzunluğu olur.

ÇEMBERDE KİRİŞ ÖZELLİKLERİ

Etkinlik

I.



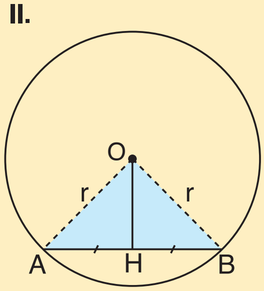
- Pergelinizle bir (O, r) çemberi ve bunun [AB] kirişini çiziniz.
- Cetvel yardımı ile [AB] nın orta dikmesi olan d doğrusunu çiziniz.
- d doğrusunun her P noktası içi $|PA| = |PB|$ olur mu? Nedenini yazınız.
- Çalıştığınız düzlemde A ve B noktasına eşit uzaklıktaki bütün noktalar d doğrusu üzerinde midir? Tartışınız.

Araç ve Gereçler

- Pergel
- Cetvel

■ Çemberin merkezi O ve $|OA| = |OB| = r$ olduğundan $O \in d$ olur mu? İnceleyiniz.

II.

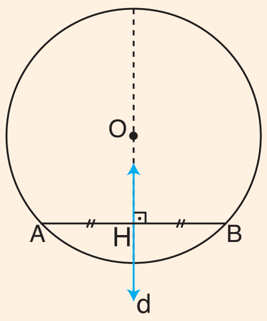


- Pergelinizle bir (O, r) çemberi ve bunun bir [AB] kirişini çiziniz.
- Cetvelinizle [AB] kirişini orta noktasını bularak H ile isimlendiriniz.
- [OA] , [OB] ve [OH] nı çiziniz. $\widehat{OAB}$ ikizkenar mıdır? İnceleyiniz.

■ OAB ikizkenar üçgeninin tepesi olan O noktasını, tabanın orta noktası olan H noktasına birleştiren [OH], [AB] na dik olur mu? Nedenini yazınız.

Bunları Bilelim

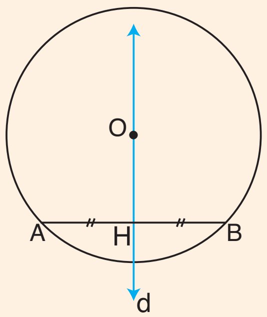
1\.



Bir çemberde, kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer. Şekildeki O merkezli çemberde,

$|AH| = |BH|$ ve $d \perp [AB] \Rightarrow O \in d$ olur.

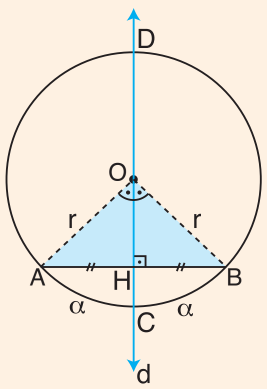
2\.



Bir çemberde kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru kirişe diktir. Şekildeki O merkezli çemberde,

$|AH| = |BH| \Rightarrow HO \perp [AB]$ olur.

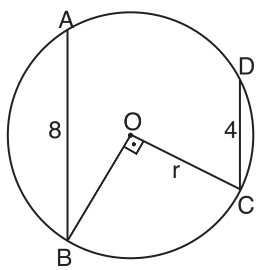
3\.



Bir çemberde merkezden kirişe çizilen dikme, kirişi ve yaylarını ortalar. Çünkü şekildeki OAB ikizkenar üçgeninde $OH \perp [AB]$ ise

$|AH| = |BH|$ ve $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOC})$ olur.

Örnek

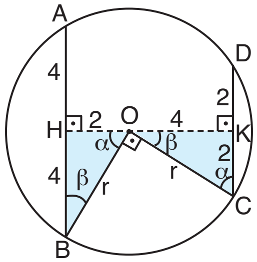


Şekildeki O merkezli çemberde,

$[BO] \perp [CO]$, $[AB] // [CD]$, $|AB| = 8$ cm ve $|CD| = 4$ cm

olduğuna göre, çemberin yarıçap uzunluğu r kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Birbirine paralel [AB] ve [CD] kirişlerine O noktasından geçen [HK] dikmesi çizilirse,

|AH| = |BH| = 4 cm , |CK| = |DK| = 2 cm ve

$\alpha + \beta = 90°$ olmak üzere,

$m(\widehat{HOB}) = m(\widehat{DCO}) = \alpha$, $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{KOC}) = \beta$ olur.

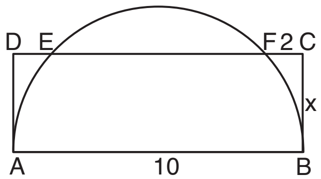
|BO| = |CO| = r olduğundan A.K.A. eşlik kuralına göre,

$\widehat{OKC} = \widehat{BHO}$ $\Rightarrow$ |BH| = |KO| = 4 cm ve |HO| = |CK| = 2 cm olur.

Sonuçta CKO dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden

$r^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$ cm bulunur.

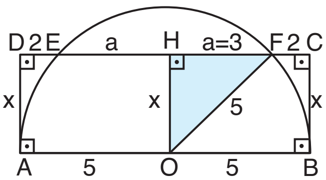
Örnek



ABCD dikdörtgen, |AB| = 10 cm , |CF| = 2 cm dir.

Yanda verilen [AB] çaplı çember [CD] kenarını E ve F noktalarında kestiğine göre, |BC| = x kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



[OH] ⊥ [CD] çizilirse, AOHD, BCHO dikdörtgen ve [EF] kirişi iki eş parçaya ayrılacağından,

|AD| = |BC| = |OH| = x

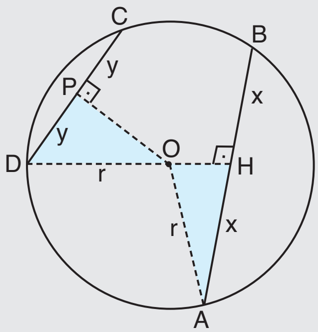
|FH| = |EH| = a, |CF| = |DE| = 2 ve a + 2 = 5 ⇒ a = 3 cm olur.

[OF] yarıçapı çizildiğinde OHF dik üçgeninde,

$5^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x = 4$ cm bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim

1. Bir çemberde farklı uzunlukta iki kirişten uzun olanın merkeze daha yakın olduğunu gösterelim.



Şekildeki O merkezli r yarıçaplı çemberde [AB] ve [CD] birer kiriş ve ICDI < IABI olsun.

[AB] ve [CD] kirişlerine sırasıyla [OH] ve [OP] dikmelerini daha sonra da [OD] ve [OA] yarıçaplarını çizelim.

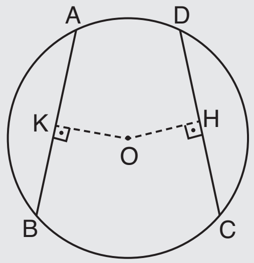
IAHI = IBHI = x , IDPI = ICPI = y ve 2y < 2x ⇒ y < x olur.

AHO ve DPO dik üçgenlerinde Pisagor Teoremi kullanılırsa,

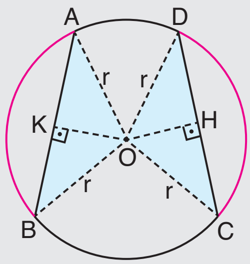
$|HO|^2 = r^2 - x^2$, $|PO|^2 = r^2 - y^2$ ve $y < x \Rightarrow r^2 - x^2 < r^2 - y^2$

$|HO|^2 < |PO|^2 \Rightarrow$ IHOI < IPOI elde edilir. Sonuçta |AB| > |CD| olduğundan [AB] kirişi merkeze daha yakındır.

2.



Bir çemberde veya eş çemberlerde birbirine eş iki kirişin merkeze olan uzaklıklarının eşit olduğunu ve bu kirişlerin yay ölçülerinin de eşit olduğunu gösterelim.



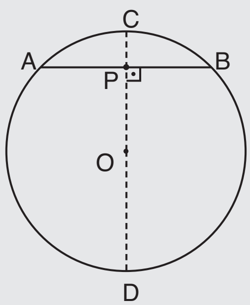
Şekildeki O merkezli r yarıçaplı çemberde |AB| = |CD| olsun. [AO], [BO], [CO] ve [DO] yarıçaplarını çizersek K.K.K. Eşlik kuralına göre,

$\widehat{ABO} \cong \widehat{CDO}$ olduğundan,

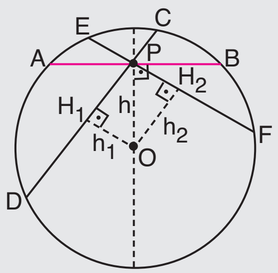
$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$

ve karşılıklı kenarların yükseklikleri |OK| = |OH| olur.

3.



Çember içindeki herhangi bir P noktasından geçen en kısa kirişin P den geçen çapa dik olan kiriş olduğunu gösterelim.

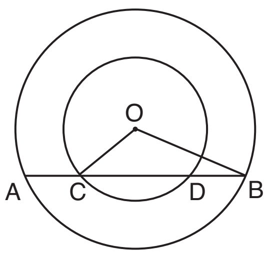


Çemberin içindeki bir P noktasından geçen sonsuz sayıda kiriş çizilebilir. Bunlar arasında P den geçen çapa, dik olan [AB] kirişini ve [CD] ile [EF] kirişlerini çizelim. Merkezden bu kirişlere çizilen dikmeler sırasıyla h, h_1 ve h_2 olsun.

Şekilde oluşacak OH_1P, OH_2P, … dik üçgenlerinin tümünde h kenarı hipotenüs olacaktır. Bir dik üçgende hipotenüs uzunluğu daima dik kenar uzunluklarından büyük olacağından, $h_1 < h$, $h_2 < h$, … elde edilir.

Sonuçta merkezden h kadar uzunluktaki [AB] kirişi P den geçen kirişler arasında merkezden en uzakta olan kiriştir. Dolayısıyla P den geçen en kısa kiriş P den geçen çapa dik olan [AB] kirişidir.

Örnek

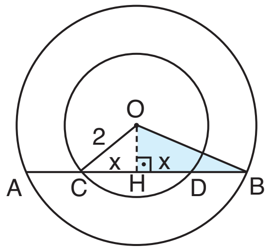


Yanda verilen şekilde O çemberlerin merkezi,

|CO| = 2 cm , |BO| = $\sqrt{13}$ cm ve |BC| = $3\sqrt{3}$ cm dir.

Büyük çemberin [AB] kirişi küçük çemberi C ve D noktalarında kestiğine göre, |AB| kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



$[OH] \perp [AB]$ çizelim.

$|CH| = |DH| = x$ ve $|BH| = 3\sqrt{3} - x$

olacağından OCH ve OBH

dik üçgenlerinde Pisagor Teoremi ile

$|OC|^2 - |CH|^2 = |OH|^2 = |BO|^2 - |BH|^2$

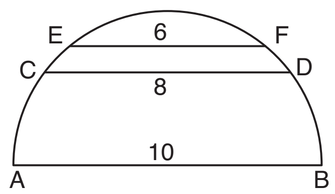
$4 - x^2 = 13 - (3\sqrt{3} - x)^2 \Rightarrow 4 - x^2 = 13 - (27 - 6\sqrt{3}x + x^2)$

$4 - x^2 = 13 - 27 + 6\sqrt{3}x - x^2 \Rightarrow 18 = 6\sqrt{3}x \Rightarrow x = \sqrt{3}$ olur.

$|BD| = |AC| = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ cm ve sonuçta

$|AB| = |BC| + |AC| = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm bulunur.

Örnek

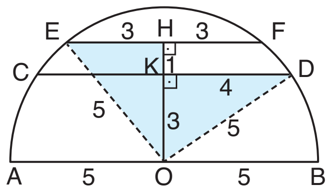


Şekildeki [AB] çaplı yarım çemberde,

$|AB| = 10$ cm , $|CD| = 8$ cm ve $|EF| = 6$ cm dir.

[AB] // [CD] // [EF] olduğuna göre, [EF] ve [CD] kirişleri arasındaki uzaklık kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Çemberin O merkezinden birbirine paralel,

[CD] ve [EF] kirişlerine [OH] dikmesini çizersek,

$|CK| = |DK| = 4$ cm, $|EH| = |FH| = 3$ cm,

Pisagor Teoremi ile DKO dik üçgeninde $|OK| = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm

ve HEO dik üçgeninde $|HO| = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm olur.

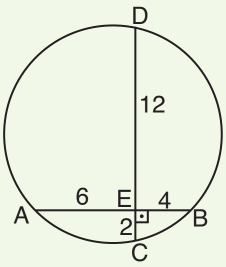
Sonuçta $|HK| = 4 - 3 = 1$ cm bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun kelimeleri yazınız.

- Çember içindeki bir P noktasından geçen en kısa kiriş, P den geçen çapa ....
- Çemberin merkezinden bir kirişine indirilen dikme kirişi ve kirişin yayını ....
- Merkezden eşit uzaklıktaki kirişler ....
- Çemberde eş kirişlerin yayları da ....
- Çemberde en uzun kiriş ....

2.



Şekilde verilen çemberde

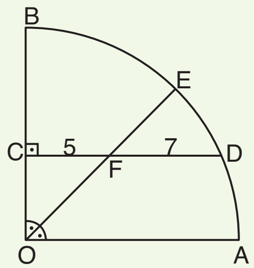
$[AB] \cap [CD] = \{E\}$

$[AB] \perp [CD]$, $|DE| = 12$ cm , $|AE| = 6$ cm,

$|BE| = 4$ cm ve $|CE| = 2$ cm dir.

Buna göre, bu çemberin yarıçapı kaç cm dir?

3.



Şekilde O çeyrek çemberin merkezi

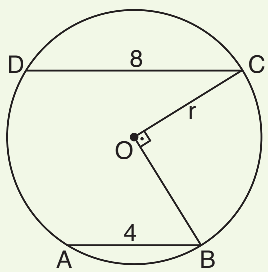
$[CD] \perp [BO]$, $[CD] \cap [EO] = \{F\}$

$m(\widehat{AOE}) = m(\widehat{BOE})$, $|CF| = 5$ cm , $|DF| = 7$ cm

olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaç cm dir?

4. O merkezli ve 8 cm yarıçaplı bir çemberin içindeki bir P noktasının merkeze uzaklığı $|OP| = 4$ cm dir. Buna göre P den geçen en kısa kirişin uzunluğunu bulunuz?

5.

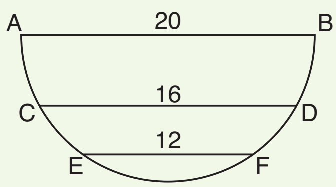


O merkezli çemberde

$[CO] \perp [BO]$, $[AB] // [CD]$, $|AB| = 4$ cm ve

$|CD| = 8$ cm olduğuna göre yarıçap uzunluğunu bulunuz.

6.



Şekildeki [AB] çaplı yarım çemberde

$|AB| = 20$ cm, $|CD| = 16$ cm ve $|EF| = 12$ cm dir.

$[AB] // [CD] // [EF]$

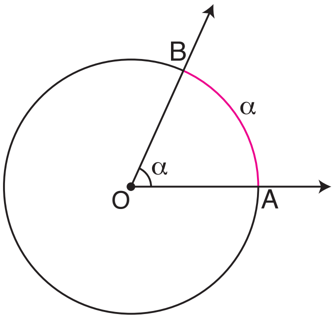
olduğuna göre [CD] ile [EF]

kirişleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

8.2 : ÇEMBERDE AÇILAR

8.2.1: Çemberde Merkez Açı, Çevre Açı, Teğet-Kiriş Açı, İç Açı ve Dış Açı

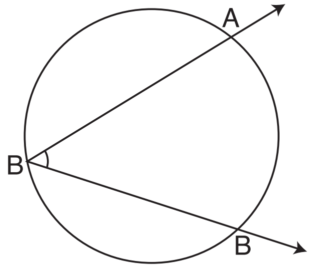
Merkez Açı



Köşesi çemberin merkezinde olan açıdır. Merkez açının ölçüsü kolları arasındaki yayın ölçüsüne eşittir. Şekilde

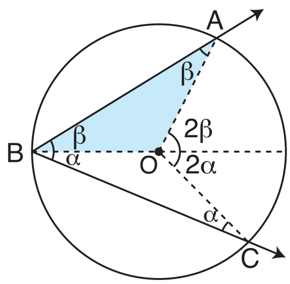
$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$ olur.

Çevre Açı



Köşesi çember üzerinde ve kenarları çemberin keseni olan açıya çevre açı denir.

Bir çevre açının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsünün (aynı yayı gören merkez açı ölçüsünün) yarısı olduğunu gösterelim.



Şekildeki gibi [BD] çapı ve [OA] , [OB] , [OC] yarıçapları çizilirse

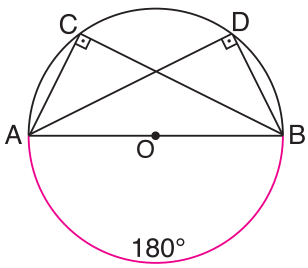
$|OA| = |OB| = |OC| = r$ olduğundan

$\overset{\triangle}{OAB}$ ve $\overset{\triangle}{OBC}$ ikizkenardır.

$m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = \beta \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 2\beta$ ve

$m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{COD}) = 2\alpha$ olduğundan

$m(\widehat{AOC}) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = m(\overset{\frown}{ADC}) = 2m(\widehat{ABC})$ bulunur.



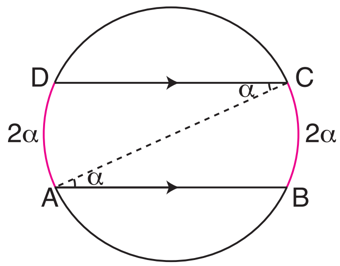
Yarım çemberin ölçüsü 180° olduğundan çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olur. Şekilde,

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADB}) = \dfrac{180°}{2} = 90°$ bulunur.

Örnek

Bir çemberde paralel iki kirişin ayırdığı yay parçalarının eş olduğunu gösterelim.

Çözüm



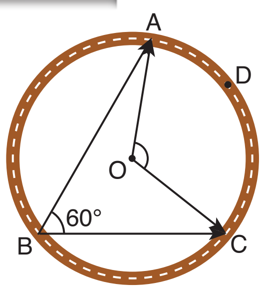
Şekildeki çemberde [AB] // [CD] olsun.

[AC] çizilirse iç ters açılardan,

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha \Rightarrow m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 2\alpha$

bulunur.

Örnek

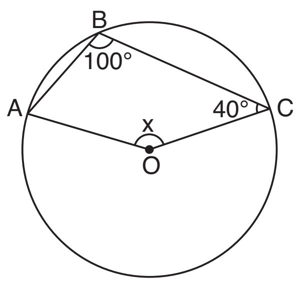


O merkezli çembersel bir yarış pistinin $\overset{\frown}{ADC}$ bölümü B noktasındaki 60° lik görüş açısına sahip bir kamera ile izlenmektedir. Aynı yeri O merkezinden görüntüleyecek kameranın görüş açısı kaç derece olmalıdır? Bulalım.

Çözüm

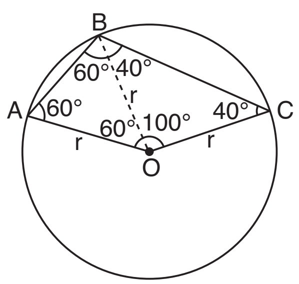
Çemberde merkez açı ölçüsü aynı yayı gören çevre açı ölçüsünün iki katı olduğundan O merkezine konulan kameranın görüş açısı 120° olmalıdır.

Örnek



Şekilde O çemberin merkezi ve ABCO bir dörtgendir. $m(\widehat{ABC}) = 100°$, $m(\widehat{BCO}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{AOC}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

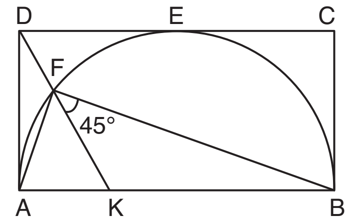


Şekildeki gibi [OB] yarıçapı çizilirse, |AO| = |BO| = |CO| = r olduğundan BCO ve ABO üçgenleri ikizkenar üçgendir. Buna göre,

$m(\widehat{CBO}) = m(\widehat{BCO}) = 40° \Rightarrow m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{AOB}) = 60°$ ve

Sonuçta $m(\widehat{AOC}) = 100° + 60 = 160°$ bulunur.

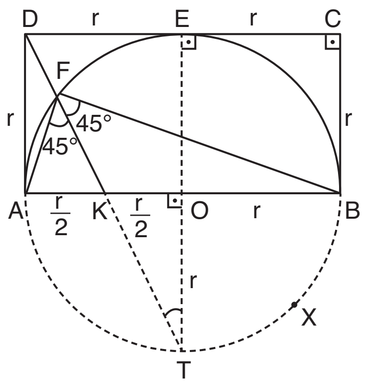
Örnek



Şekilde [AB] çaplı yarım çember ABCD dikdörtgeninin kenarlarına A, B ve E noktalarında teğettir.

D, F, K doğrusal noktalar ve $m(\widehat{KFB}) = 45°$ olduğuna göre, $\dfrac{|AF|}{|FB|}$ oranını bulalım.

Çözüm



O merkezli AEB yarım çemberinin tamamını çizip [EO ışınının çemberi kestiği noktaya T dersek, E değme noktası merkeze birleştiğinden;

$[TE] \perp [CD] \Rightarrow [TE] \perp [AB]$

ve buradan $m(\widehat{BXT}) = 90°$ bulunur.

$m(\widehat{BFK}) = 45°$ verildiğinden [FK ışını da T noktasından geçer.

Dikkat edilirse BCEO ve ADEO birer karedir.

A.A. benzerlik kuralına göre,

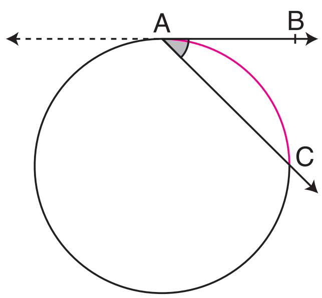
$$\overset{\triangle}{TOK} \sim \overset{\triangle}{TED} \Rightarrow \frac{|TO|}{|TE|} = \frac{|OK|}{|DE|} \Rightarrow \frac{r}{2r} = \frac{|OK|}{r}$$

$|OK| = \dfrac{r}{2} \Rightarrow |AK| = \dfrac{r}{2}$ bulunur. Diğer yandan,

$$m(\widehat{AFB}) = \frac{m(\widehat{ATB})}{2} = \frac{180°}{2} = 90° \Rightarrow m(\widehat{AFT}) = 45°$$ olduğundan

ABF üçgeninde [FK] açıortay olur. Buradan $\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{|AK|}{|BK|} = \dfrac{\frac{r}{2}}{r + \frac{r}{2}} = \dfrac{\frac{r}{2}}{\frac{3r}{2}} = \dfrac{1}{3}$ elde edilir.

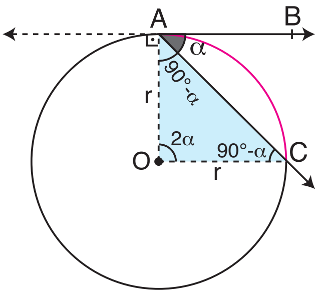
Teğet-Kiriş Açı



Köşesi çember üzerinde olan ve bir teğet ile bir kirişin belirlediği açıya teğet-kiriş açı denir.

Bir teğet kiriş açının ölçüsü kenarları arasında kalan yayın ölçüsünün yarısıdır. Şekildeki çemberde,

$m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2}$ olur. Gösterelim.



Şekildeki gibi [OA] ve [OC] çizilirse

[OA] ⊥ AB ve |AO| = |CO| = r olur.

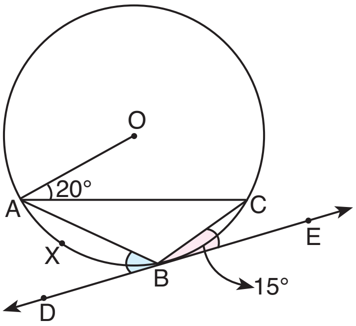
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olsun. Bu durumda AOC üçgeninde

$m(\widehat{CAO}) = m(\widehat{ACO}) = 90° - \alpha \Rightarrow m(\widehat{AOC}) = 2\alpha = m(\overset{\frown}{AC})$

bulunur.

Dikkat edilirse bir teğet-kiriş açının ölçüsü, çevre açıda olduğu gibi gördüğü yay ölçüsünün yarısıdır.

Örnek

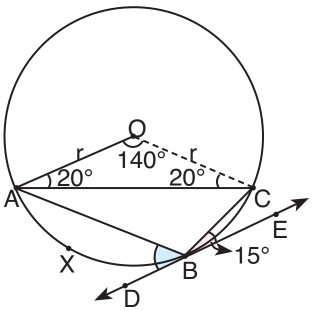


Şekildeki O merkezli çemberde DE doğrusu çembere B noktasında teğettir.

$m(\widehat{CAO}) = 20°$, $m(\widehat{CBE}) = 15°$

olduğuna göre, $m(\widehat{DBA})$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



[OC] yarıçapını çizersek ACO ikizkenar üçgeninde,

$m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{CAO}) = 20° \Rightarrow m(\widehat{AOC}) = 140° = m(\overset{\frown}{ABC})$

bulunur.

$m(\widehat{CBE}) = 15° = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} \Longrightarrow m(\overset{\frown}{BC}) = 30°$ olduğundan,

$m(\overset{\frown}{AXB}) = m(\overset{\frown}{ABC}) - m(\overset{\frown}{BC}) = 140° - 30° = 110°$ bulunur.

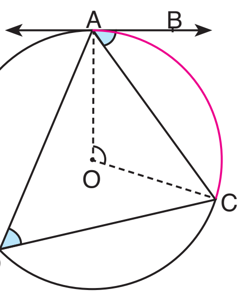
Sonuçta $m(\widehat{DBA}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AXB})}{2} = \dfrac{110°}{2} = 55°$

elde edilir.

Örnek

Bir çemberde aynı yayı gören çevre açı ile teğet kiriş açının ölçülerinin eşit olduğunu gösterelim.

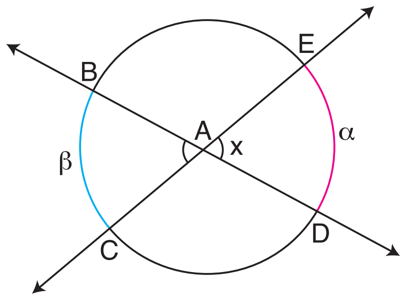
Çözüm



Şekilde AB doğrusu çembere A noktasında teğet olsun. BAC teğet kirişi açısı ile ADC çevre açısı aynı AC yayını görür. Bu durumda,

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ olur.

İç Açı

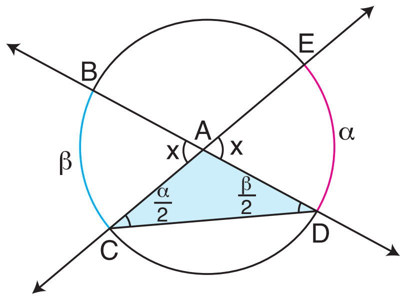


Çemberin içinde bir A noktasında kesişen iki doğrunun meydana getirdiği açılara iç açı denir.

Şekilde $CE \cap BD = \{A\}$,

$m(\widehat{DAE}) = x$, $m(\widehat{DE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{BC}) = \beta$ olsun.

$x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ olur. Gösterelm.



Şekildeki gibi [CD] çizilirse elde edilen çevre açıların ölçüsü,

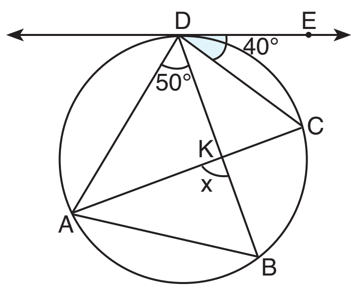
$m(\widehat{ECD}) = \dfrac{\alpha}{2}$ ve $m(\widehat{CDB}) = \dfrac{\beta}{2}$,

olur. ACD üçgeninde dış açı ölçüsü,

$x = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ bulunur.

Sonuçta bir iç açının ölçüsü gördüğü yay ölçüleri toplamının yarısına eşittir.

Örnek

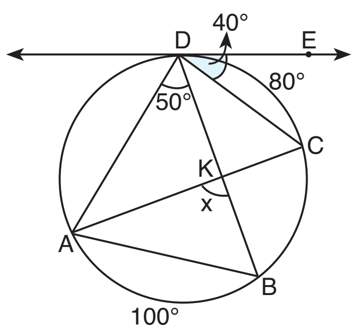


Şekildeki çemberde DE doğrusu D noktasında teğet,

$[AC] \cap [BD] = \{K\}$ $m(\widehat{CDE}) = 40°$ ve $m(\widehat{ADB}) = 50°$ ise,

$m(\widehat{AKB}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



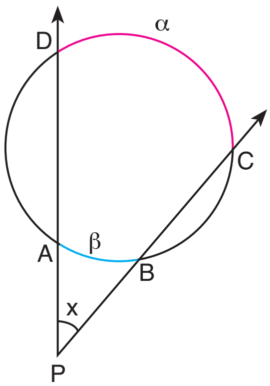
Çevre açının ölçüsü $m(\widehat{ADB}) = 50° \Rightarrow m(\widehat{AB}) = 100°$ ve

teğet – kiriş açının ölçüsü $m(\widehat{CDE}) = 40° \Rightarrow m(\widehat{CD}) = 80°$ olur.

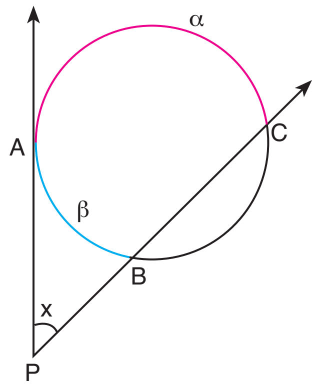
Sonuçta AKB iç açısının ölçüsü,

$x = \dfrac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2} = \dfrac{100° + 80°}{2} = 90°$ bulunur.

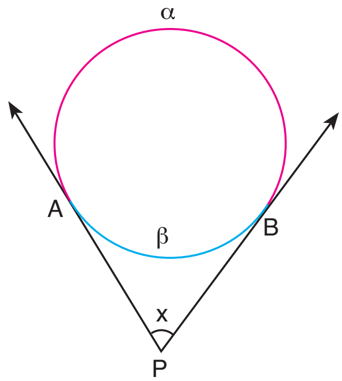
Dış Açı



1. Şekil



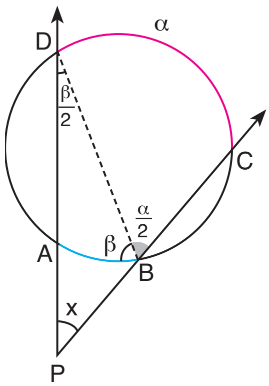
2. Şekil



3. Şekil

Köşesi çemberin dışında olan ve kenarları çemberi kesen veya teğet olan açılara dış açı denir.

Yukarıdaki şekillerde verilen $\widehat{P}$ çemberde bir dış açıdır. Bir dış açının gördüğü büyük yayın ölçüsü α , küçük yayın ölçüsü β ve bu dış açının ölçüsü $m(\widehat{P}) = x$ ise $x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ olur. Bunu 1. şekilde gösterelim.



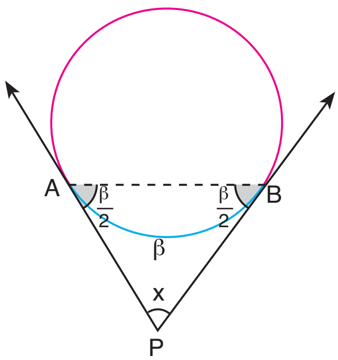
Şekilde $m(\widehat{P}) = x$, $m(\overset{\frown}{CD}) = \alpha$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = \beta$ olsun.

[BD] çizilirse oluşan çevre açıların ölçüsü

$m(\widehat{DBC}) = \dfrac{\alpha}{2}$ ve $m(\widehat{PDB}) = \dfrac{\beta}{2}$ olur.

PDB üçgeninde dış açı ölçüsü,

$\dfrac{\alpha}{2} = x + \dfrac{\beta}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ bulunur.



3. şekilde olduğu gibi bir APB dış açısının kenarları çembere A ve B noktasında teğet,

$m(\overset{\frown}{AB}) = \beta$ ve $m(\widehat{P}) = x$ ise $\mathbf{x + \beta = 180°}$ olur.

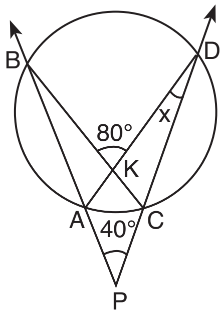
Çünkü şekilde [AB] çizilirse

$m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{ABP}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{\beta}{2}$ ve

PAB üçgeninde iç açı ölçüleri toplamından,

$\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\beta}{2} + x = 180° \Rightarrow \beta + x = 180°$ bulunur.

Örnek



Şekildeki çemberde,

$[AD] \cap [BC] = \{K\}$,

$m(\widehat{BPD}) = 40°$, $m(\widehat{BKD}) = 80°$ ise,

$m(\widehat{ADP}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

Çevre açının ölçüsü $m(\widehat{ADC}) = x$ ise gördüğü yayın ölçüsü $m(\overset{\frown}{AC}) = 2x$ ve köşesi K olan iç açının ölçüsü,

$$80° = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2} = \frac{2x + m(\overset{\frown}{BD})}{2}$$

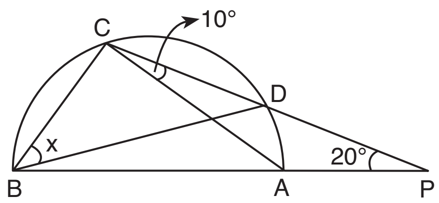
$$160° = 2x + m(\overset{\frown}{BD}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{BD}) = 160° - 2x$$

bulunur. Köşesi P olan dış açının ölçüsü,

$$m(\widehat{P}) = \frac{m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2} \Rightarrow 40° = \frac{160° - 2x - 2x}{2} \Rightarrow 40° = 80° - 2x \Rightarrow 2x = 40° \Rightarrow x = 20°$$

bulunur.

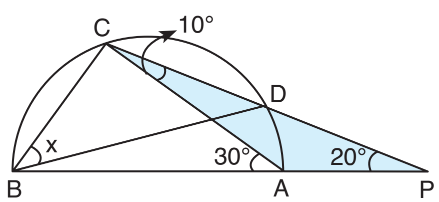
Örnek



Şekilde [AB] çaplı yarım çember ile BCP üçgeni verilmiştir.

$m(\widehat{PCA}) = 10°$, $m(\widehat{BPC}) = 20°$ ise, $m(\widehat{CBD}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



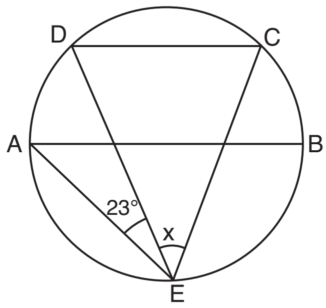
ACP üçgeninde dış açı ölçüsü

$m(\widehat{BAC}) = 20° + 10° = 30° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BC}) = 60°$ bulunur.

$m(\overset{\frown}{CD}) = 2x$ ve $m(\overset{\frown}{AD}) = 20°$ olduğundan yarım çemberin ölçüsü $60° + 2x + 20° = 180°$

$2x = 100° \Rightarrow x = 50°$ bulunur.

Örnek

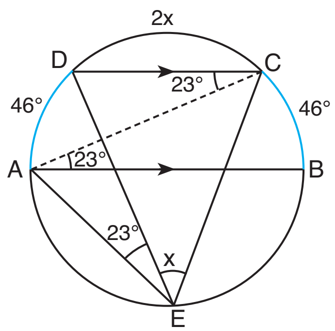


[AB] çaplı çemberde [AB] // [CD],

$m(\widehat{AED}) = 23°$ ise, $m(\widehat{CED}) = x$

kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



[AC] çizilirse aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit

olacağından, $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{AED}) = 23°$ ve

$[AB] \,//\, [CD] \Rightarrow m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BAC}) = 23°$ olur.

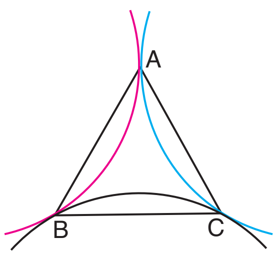
Buradan $m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 46°$

$m(\overset{\frown}{CD}) = 2x$ olduğundan yarım çemberin ölçüsü,

$m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{BC}) = 180° \Rightarrow 46° + 2x + 46° = 180°$

$2x + 92° = 180° \Rightarrow 2x = 88° \Rightarrow x = 44°$ bulunur.

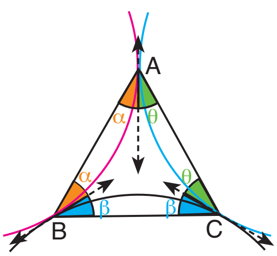
Örnek



Şekildeki çember yayları birbirlerine A, B ve C noktalarında teğet olduğuna göre,

$m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 180°$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

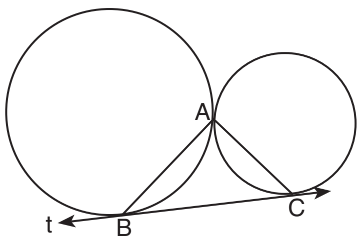


A, B ve C noktalarındaki ortak teğetler çizilirse aynı yayı gören teğet – kiriş açıların ölçüleri eşit olduğundan şekildeki ABC üçgeninde iç açı ölçüleri toplamı,

$2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180° \Rightarrow m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 180°$

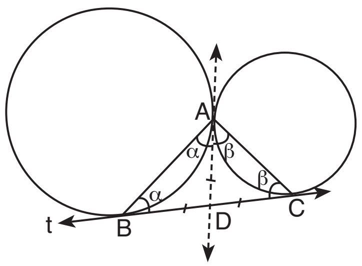
bulunur.

Örnek



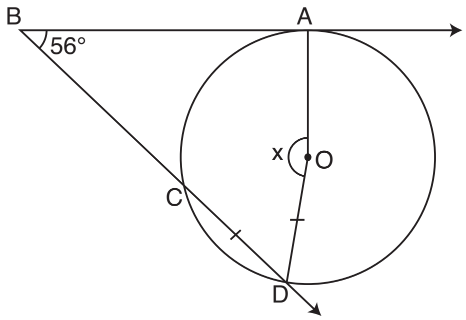
Şekildeki çemberler birbirlerine A noktasında dıştan teğettir. t doğrusu çemberlere B ve C noktalarında teğet ise $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olur. Gösterelim.

Çözüm



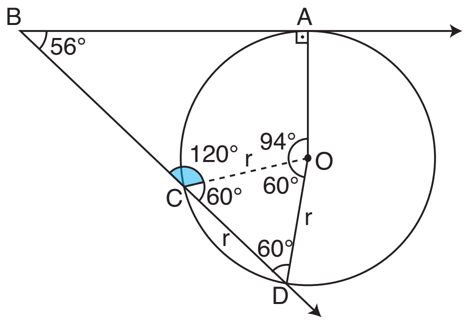
A noktasındaki AD ortak teğeti çizilirse $AD \cap BC = \{D\}$ olsun.
D noktasından çemberlere çizilen teğet parçaları,
$|DA| = |DB| = |DC|$ olur. Şekildeki ikizkenar üçgenlerde,
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BCA}) = \beta$ olacağından, ABC üçgeninde iç açı ölçüleri toplamı
$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° = m(\widehat{BAC})$ bulunur.

Örnek



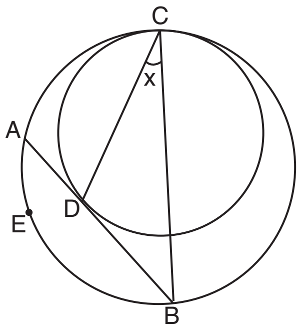
Şekilde O merkezli çemberde [BA A noktasında teğet ve [BC çemberi C ve D noktalarında kesmektedir.
$m(\widehat{ABD}) = 56°$, $|CD| = |DO|$ olduğuna göre, $m(\widehat{AOD}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



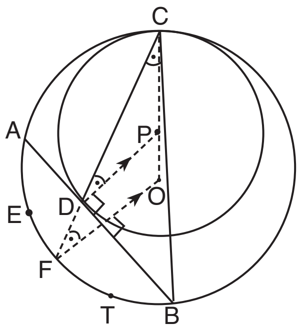
Bir teğet değme noktasından geçen yarıçapa dik olduğundan şekilde $m(\widehat{A}) = 90°$ olur. [OC] yarıçapı çizilirse
$|CD| = |DO| = |CO| = r$ olacağından CDO eşkenar üçgendir.
Buna göre $m(\widehat{OCD}) = 60° \Rightarrow m(\widehat{BCO}) = 180° - 60° = 120°$ olur.
ABCO dörtgeninde iç açı ölçüleri toplamı 360° olacağından şekilde $90° + 56° + 120° + m(\widehat{AOC}) = 360°$ ve
$m(\widehat{AOC}) = 360° - 266° = 94°$ bulunur.
Sonuçta $m(\widehat{AOD}) = x = 94° + 60° = 154°$ olur.

Örnek



Şekilde [AB] kirişi içteki çembere D noktasında teğet ve $m(\overset{\frown}{AEB}) = 100°$ verilmiştir. Çemberler C noktasında içten teğet olduğuna göre, $m(\widehat{BCD}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Çemberlerin merkezleri O ve P olsun O, P, C doğrusaldır.

[CD ışını çemberi F noktasında kessin. [PD] ve [OF] yarıçapları çizilirse |PC| = |PD| ve |OF| = |OC| olur.

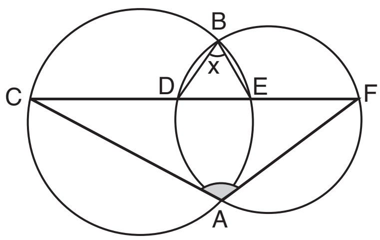
$m(\widehat{OCF}) = m(\widehat{OFC}) = m(\widehat{CDP}) \Rightarrow$ [DP] // [OF] olur. Diğer yandan D değme noktasını P merkezine birleştiren yarıçap,

$[DP] \perp [AB] \Rightarrow [OF] \perp [AB]$ elde edilir. O merkezinden [AB] kirişine çizilen dikme kirişi ve yayını iki eş parçaya böldüğünden,

$$m(\overset{\frown}{AEF}) = m(\overset{\frown}{FTB}) = \frac{m(\overset{\frown}{AEB})}{2} = \frac{100°}{2} = 50° \Rightarrow m(\widehat{FCB}) = x = \frac{m(\overset{\frown}{FTB})}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$$

bulunur.

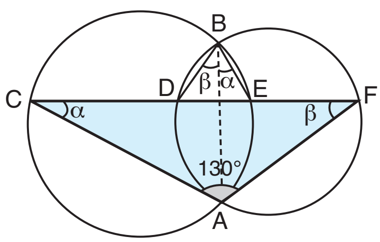
Örnek



Şekilde A ve B çemberlerin kesim noktaları, ACF bir üçgendir.

$m(\widehat{CAF}) = 130°$ ise $m(\widehat{DBE}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



[AB] ortak kirişini çizersek aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olacağından,

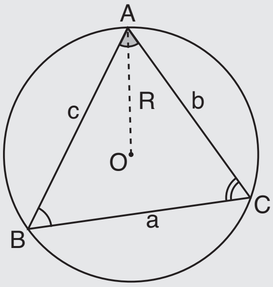
$m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{ABE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{ABD}) = \beta$ olur.

ACF üçgeninde $\alpha + \beta = 50°$ olduğundan,

$m(\widehat{DBE}) = \alpha + \beta = 50°$ bulunur.

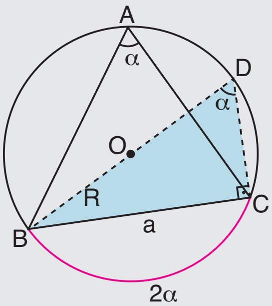
İnceleyerek Öğrenelim

Üçgende Sinüs Teoremi



ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve O merkezli çevrel çemberin yarıçapı R olmak üzere,

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R$$ olur. Gösterelim.



Yandaki şekilde $m(\widehat{A}) = \alpha \Rightarrow m(\overset{\frown}{BC}) = 2\alpha$ olur.

$O \in [BD]$ olmak üzere $\widehat{BCD}$ çizilirse [BD] çemberin çapı olduğundan $m(\widehat{BCD}) = 90°$ bulunur.

BCD dik üçgeninde,

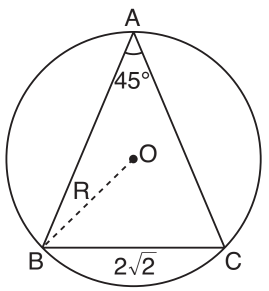
$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \quad \text{ve}$$

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin(\widehat{A}) = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R \quad \text{olur.}$$

Benzer şekilde $\frac{b}{\sin(\widehat{B})} = 2R$ ve $\frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R$ olacağından,

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R$$ bulunur.

Örnek



ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 45°$ ve $a = 2\sqrt{2}$ cm olduğuna göre, bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapını bulalım.

Çözüm

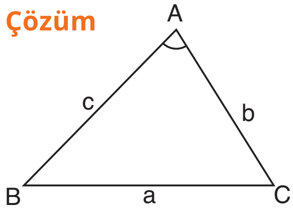
ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R olsun.

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = R \Rightarrow R = 2\,\text{cm}$$ bulunur.

Örnek

ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve çevrel çemberin yarıçapı R olsun. $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{abc}{4R}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

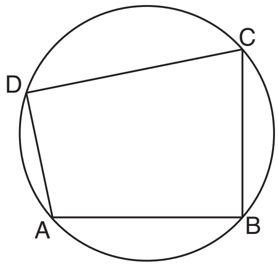


ABC üçgeninde sinüs teoremine göre

$\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R \Rightarrow \sin(\widehat{A}) = \dfrac{a}{2R}$ olduğundan,

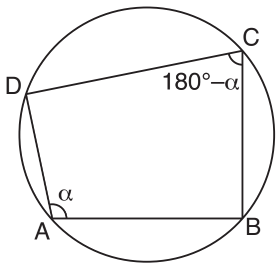
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{1}{2} b\,c \cdot \sin(\widehat{A}) = \dfrac{1}{2} b \cdot c\left(\dfrac{a}{2R}\right) = \dfrac{abc}{4R}$ bulunur.

Örnek



Köşeleri bir çember üzerinde olan şekildeki ABCD dörtgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ve $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180°$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



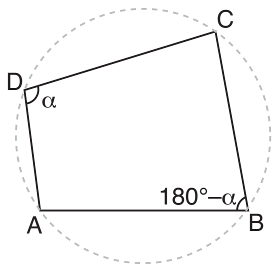
Şekildeki ABCD dörtgeninde çevre açının ölçüsü

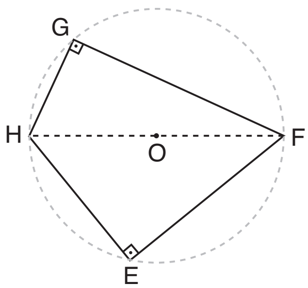
$m(\widehat{A}) = \alpha \Rightarrow m(\overset{\frown}{BCD}) = 2\alpha \Rightarrow m(\overset{\frown}{BAD}) = 360° - 2\alpha$ olduğundan

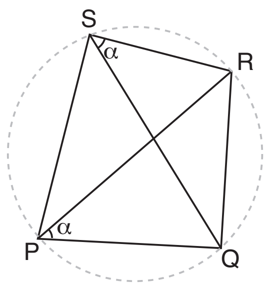
$m(\widehat{C}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2} = \dfrac{360° - 2\alpha}{2} = 180° - \alpha \Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180°$ olur.

Benzer şekilde $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180°$ olduğu görülür.

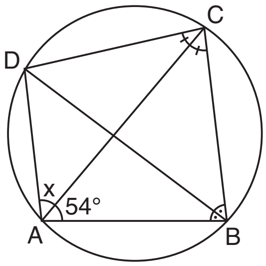
Aşağıda köşeleri çember üzerinde olan dörtgenlerde verilen açıları inceleyiniz.







Örnek



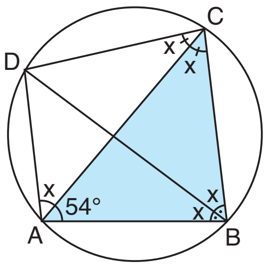
Şekildeki ABCD dörtgeninde,

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACB})$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD})$ ve

$m(\widehat{CAB}) = 54°$ olduğuna göre, $m(\widehat{CAD}) = x$

kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan şekilde,

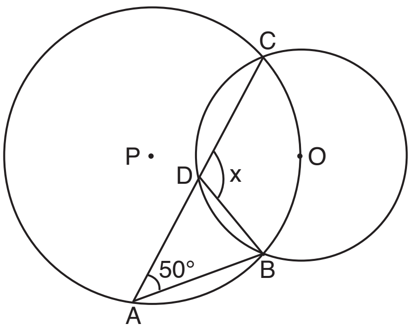
$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CAD}) = x = m(\widehat{ABD})$ ve

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABD}) = x = m(\widehat{ACB})$ olur.

ABC üçgeninde $54° + 2x + x + 180° \Rightarrow 3x = 126° \Rightarrow x = 42°$

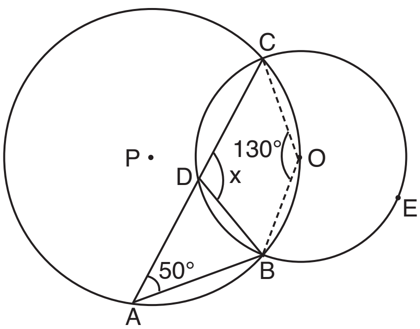
bulunur.

Örnek



Şekildeki çemberler B ve C noktalarında kesişmektedir.
$m(\widehat{BAC}) = 50°$ ve P merkezli çember küçük çemberin O merkezinden geçtiğine göre, $m(\widehat{BDC}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



O merkezli çemberin [BO] ve [CO] yarıçapları çizilirse,
ABOC dörtgeninin köşeleri P merkezli çember üzerinde olur.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{O}) = 180° \Rightarrow 50° + m(\widehat{O}) = 180°$

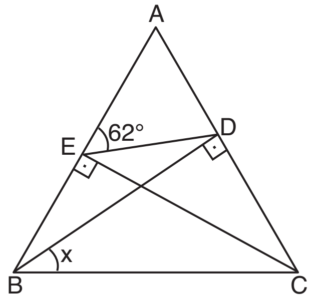
$m(\widehat{O}) = 130°$ bulunur.

O merkezli çemberde merkez açının ölçüsü,

$m(\widehat{BOC}) = 130° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BDC}) = 130° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BEC}) = 360° - 130° = 230° \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = x = \dfrac{230°}{2} = 115°$

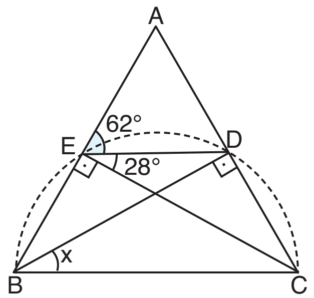
bulunur.

Örnek



ABC üçgeninde [BD] ⊥ [AC], [CE] ⊥ [AB] ve
$m(\widehat{AED}) = 62°$ olduğuna göre,
$m(\widehat{CBD}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



BCDE dörtgeninde [BD] ve [CE] köşegenleri ve kenarlarla oluşan açılarda,

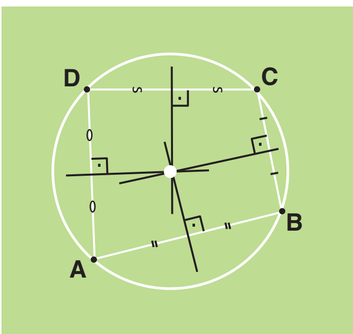
$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BDC}) = 90°$ olduğundan BCDE dörtgeninin köşeleri [BC] çaplı çember üzerinde olur.

Buna göre $m(\widehat{DEC}) = 90 - 62 = 28°$ ve aynı yayı gören çevre açılar eş olduğundan $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CED}) = x = 28°$ bulunur.

Örnek

Resimdeki futbol sahasının orta yuvarlağının (çemberinin) merkezinin bulunduğu yeri (başlama noktasını) çemberde kiriş özelliklerini kullanarak bulalım.

Çözüm

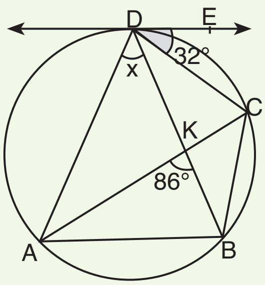


Orta yuvarlağın çemberi üzerinde A, B, C, D gibi herhangi dört noktaya kazıklar çakıp, kazıklara bağlı gergin bir iple ABCD dörtgenini oluşturalım. Çemberde kirişlerin orta dikmeleri merkezden geçtiğinden [AB] ve [AD] kirişlerinin orta dikmelerinin kesim noktası orta yuvarlak çemberinin merkezi olur (başlama noktası).

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun kelimeleri yazınız.

- Bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü ....
- Çemberde paralel kirişler arasında kalan yayların ölçüsü ....
- Aynı yayı gören çevre açı ve teğet kiriş açılar ....

2. 

Köşeleri çember üzerinde olan ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegen,

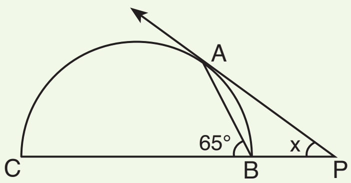
[AC] ∩ [BD] = {K},

$m(\widehat{CDE}) = 32°$

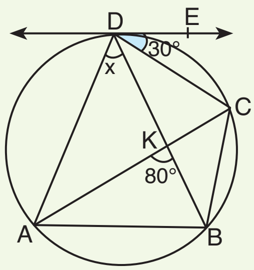
$m(\widehat{AKB}) = 86°$

$m(\widehat{ADB}) = x$ dir.

Şekilde DE doğrusu çembere D noktasında teğet olduğuna göre, x kaç derecedir?

3. 

Şekildeki [BC] çaplı yarım çembere [PA A noktasında teğettir. $m(\widehat{ABC}) = 65°$ ise, $m(\widehat{APC}) = x$ kaç derecedir?

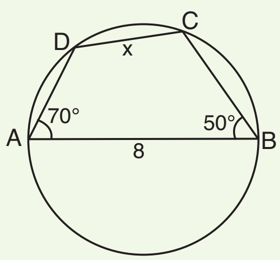
4. 

Şekilde A, B, C ve D çembersel noktalar [AC] ∩ [BD] = {K}

$m(\widehat{AKB}) = 80°$, $m(\widehat{CDE}) = 30°$ ve

DE doğrusu çembere D noktasında teğet ise,

$m(\widehat{ADB}) = x$ kaç derecedir?

5. 

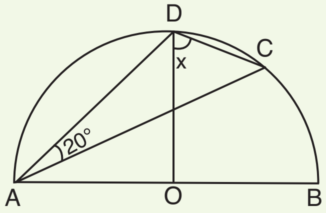
[AB] çaplı çemberde

$m(\widehat{ABC}) = 50°$,

$m(\widehat{BAD}) = 70°$,

|AB| = 8 cm ise, |CD| = x kaç cm dir?

6.

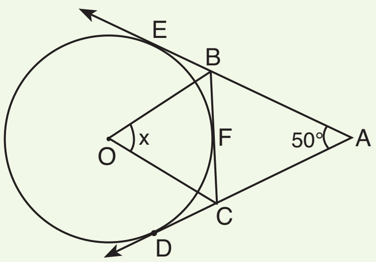


O merkezli yarım çemberde

$m(\widehat{CAD}) = 20°$ ise,

$m(\widehat{CDO}) = x$ kaç derecedir?

7.

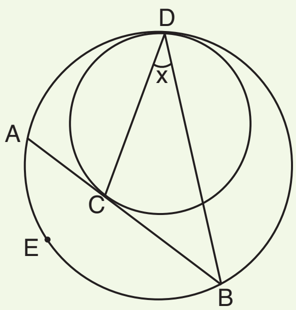


Şekilde [AE, [AD ve [BC] çembere sırasıyla E, D ve F noktalarında teğettir.

$m(\widehat{DAE}) = 50°$ ise,

$m(\widehat{COB}) = x$ kaç derecedir?

8.

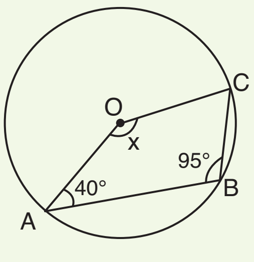


Şekildeki çemberler D noktasında içten teğettir. İçteki çemberin bir C noktasındaki teğeti [AB] ve

$m(\overset{\frown}{AEB}) = 140°$ ise,

$m(\widehat{BDC}) = x$ kaç derecedir?

9.



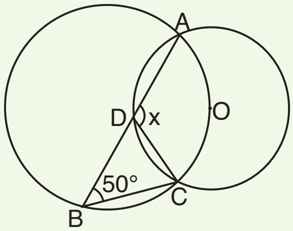
Şekildeki O merkezli çemberde

$m(\widehat{BAO}) = 40°$,

$m(\widehat{ABC}) = 95°$ ise,

$m(\widehat{AOC}) = x$ kaç derecedir?

10.



A ve C çemberlerin kesim noktaları,

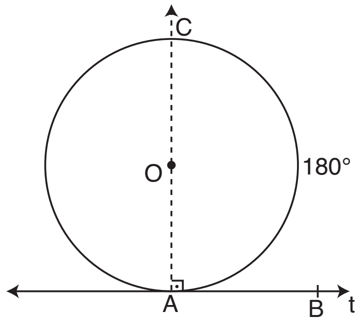
$m(\widehat{ABC}) = 50°$ ve $m(\widehat{ADC}) = x$ olsun.

Şekildeki büyük çember küçük çemberin O merkezinden geçtiğine göre, x kaç derecedir?

8.3 : ÇEMBERDE TEĞET

8.3.1: Çemberde Teğetin Özellikleri

1.



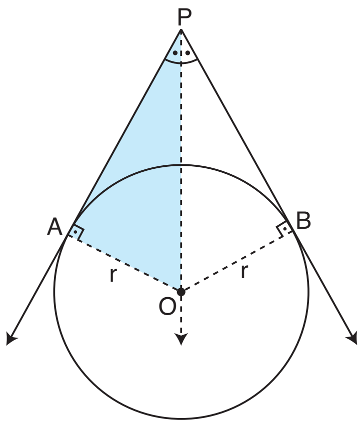
Şekildeki t doğrusu O merkezli çembere A noktasında teğet olsun.

Teğetin değme noktasını merkeze birleştiren doğru AC ise $m(\overset{\frown}{AC}) = 180°$ ve $\widehat{CAB}$ bir teğet-kiriş açı olduğundan,

$$m(\widehat{CAB}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \frac{180°}{2} = 90° \quad \text{bulunur.}$$

Böylece çemberin herhangi bir noktasındaki teğetinin, değme noktasından geçen yarıçapa dik olduğu bir kez daha görülür.

2.



Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

Şekilde [PA ve [PB çembere A ve B noktalarında teğet ise

$|PA| = |PB|$ ve [PO açıortaydır. Gösterelim.

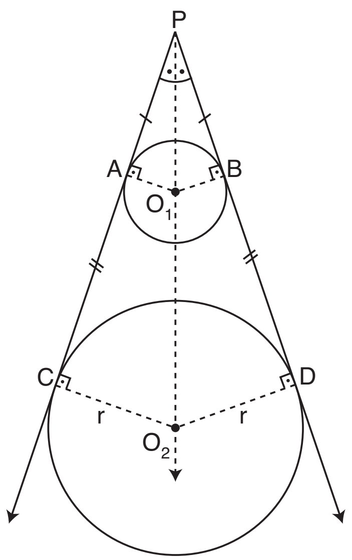
Yandaki PAO ve PBO dik üçgenlerinde Pisagor Teoremi ile

$|PA|^2 = |PO|^2 - r^2 = |PB|^2 \Rightarrow |PA| = |PB|$ bulunur.

K.K.K. eşlik kuralına göre $\widehat{PAO} \cong \widehat{PBO} \Rightarrow m(\widehat{OPA}) = m(\widehat{OPB}) = \alpha$

olduğundan şekilde [PO açıortaydır.

3.



İki çemberin ortak dış teğet parçaları eştir.

Şekilde O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin dış ortak teğetleri AC ve BD doğruları için $AC \cap BD = \{P\}$ olsun. A, B, C ve D değme noktaları ise $|AC| = |BD|$; P, O_1, O_2 noktaları doğrusal ve [PO açıortay olur. Gösterelim.

Şekilde [PA ve [PB O_1 merkezli çembere teğet olduğundan

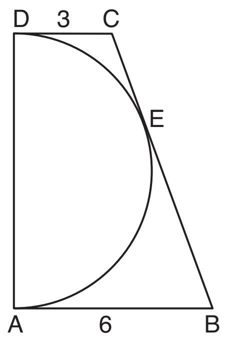
$|PA| = |PB|$...(1) olur.

[PA ve [PB ışınları O_2 merkezli çembere C ve D noktalarında teğet olduğundan $|PC| = |PD|$...(2) olduğundan (2) ve (1) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$|PC| - |PA| = |PD| - |PB| \Rightarrow |AC| = |BD|$ bulunur.

$[PO_2$ açıortay olduğundan $O_1 \in [PO_2$ olmalıdır.

Örnek

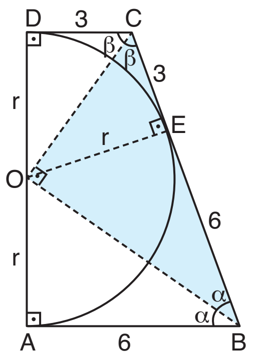


ABCD yamuk, [AB] // [CD]

|AB| = 6 cm, |CD| = 3 cm dir.

Şekildeki [AD] çaplı yarım çember, yamuğun üç kenarına A, D ve E noktalarında teğet olduğuna göre yarım çemberin çapı kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Çemberin bir teğeti değme noktasından geçen yarıçapa dik olduğundan şekildeki O merkezli yarım çemberde;

$[AB] \perp [AD]$, $[CD] \perp [AD]$ ve $[OE] \perp [BC]$ dır.

Çembere dışındaki B ve C noktalarından teğetler çizildiğinden;

|CD| = |CE| = 3 cm, |BA| = |BE| = 6 cm ve

$m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{OCB}) = \beta$, $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OBC}) = \alpha$ olur.

[AB] // [CD] olduğundan, $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ ve

BOC dik üçgendir. Bu dik üçgende Öklid Bağıntısı kullanılırsa,

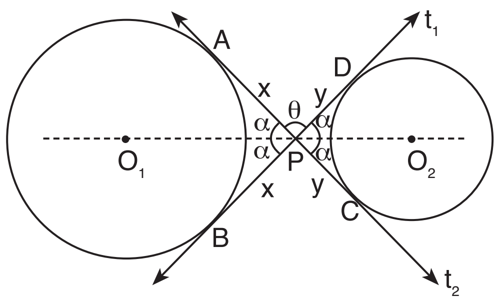
$r^2 = 3.6 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$ cm ve çemberin çapı,

$|AD| = 2r = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm bulunur.

Örnek

İki çemberin ortak iç teğet parçalarının eşit uzunlukta ve merkezler ile teğetlerin kesim noktasının aynı doğru üzerinde olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekilde O_1 ve O_2 merkezli çemberlere B ve D noktasında teğet olan t_1 teğeti ve A ile C noktalarında teğet olan t_2 teğeti verilmiştir.

Bu teğetler iki merkezin arasından geçtiği için **ortak iç teğet** adını alır.

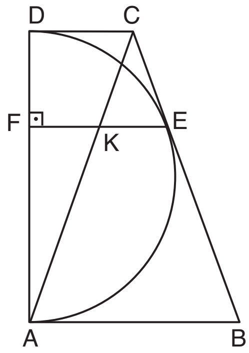
$t_1 \cap t_2 = \{P\}$ ve teğet parçalarının eşliğinden |PA| = |PB| = x, |PC| = |PD| = y olduğundan ortak iç teğet parçalarının uzunluğu |AC| = |BD| = x + y bulunur.

$[PO_1$ ile $[PO_2$ açıortay ve A, P, C noktaları doğrusal olduğundan şekilde,

$\theta + 2\alpha = 180° \Rightarrow m(\widehat{O_1PO_2}) = \alpha + \theta + \alpha = \theta + 2\alpha = 180°$

ve sonuçta O_1, P, O_2 noktaları doğrusal olur.

Örnek



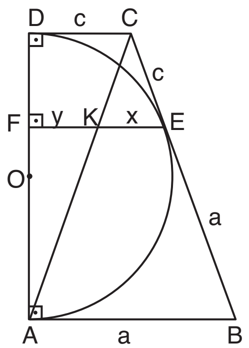
Şekildeki [AD] çaplı yarım çember ABCD dörtgeninin kenarlarına A, D ve E noktalarında teğettir.

$[AC] \cap [EF] = \{K\}$,

[AB] // [EF] olduğuna göre,

|EK| = |FK| olduğunu gösterelim.

Çözüm



[AD] çap, A, D ve E teğetlerin değme noktaları olduğundan, ABCD dik yamuk olur.

Teğet parçaları |AB| = |BE| = a, |CD| = |CE| = c

|EK| = x ve |FK| = y olsun.

[EF] // [AB] // [CD] olduğundan,

A.A. benzerlik kuralına göre,

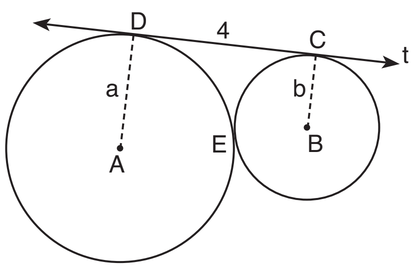
$\widehat{CKE} \sim \widehat{CAB}$ ve $\widehat{AKF} \sim \widehat{ACD}$ olur. Temel Orantı Teoremi'nden

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|CK|}{|AK|} = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} |CK| = c.k \\ |AK| = a.k \end{cases} \Rightarrow |AC| = |AK| + |CK| = (a+c)k \quad \text{olacağından,}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{|CK|}{|CA|} = \frac{ck}{(a+c)k} \Rightarrow x = \frac{ac}{a+c} \quad \text{ve} \quad \frac{y}{c} = \frac{|AK|}{|AC|} = \frac{ak}{(a+c)k} = \frac{a}{a+c} \Rightarrow y = \frac{ac}{a+c} \quad \text{ve}$$

$x = y = \dfrac{ac}{a+c}$ bulunur $(k \in \mathbb{R}^+)$.

Örnek



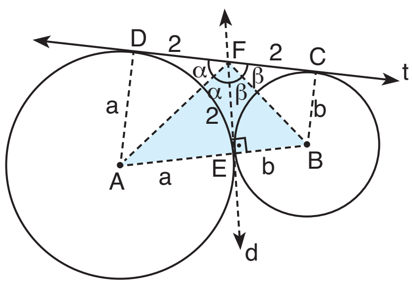
A ve B merkezli çemberler E noktasında dıştan teğettir. t ortak teğetinin değme noktaları C ve D olmak üzere,

|AD| = a,

|BC| = b ve

|CD| = 4 cm ise a.b çarpımını bulalım.

Çözüm

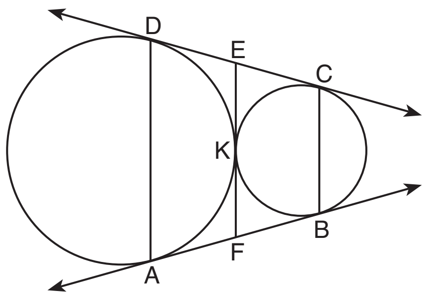


E noktasındaki iç ortak d teğeti çizilirse $CD \cap d = \{F\}$ olsun. Çemberlere F noktasından çizilen teğet parçaları,

|FD| = |FE| = |FC| = 2 cm ve [FA] ile [FB] açıortay olur. Şekilde, $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ ve

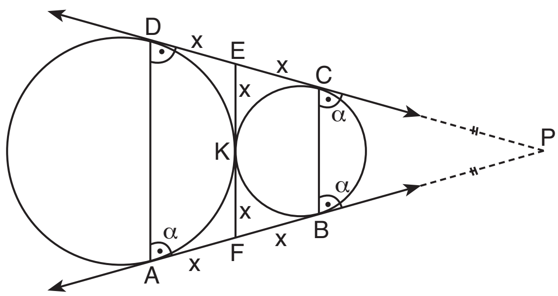
$EF \perp [AB]$ olduğundan ABF dik üçgeninde Öklid Bağıntısı ile $|FE|^2 = |AE|.|BE| \Rightarrow 4 = a.b$ bulunur.

Örnek



Şekildeki yarıçapları farklı çemberler K noktasında dıştan teğet, AB, CD ve [EF] ortak teğetlerdir. A, B, C, D, K değme noktaları ve |EF| = 4 cm olduğuna göre, Ç(ABCD) kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Çemberlerin yarıçapları farklı olduğundan CD ve AB teğetleri bir P noktasında kesişir. P noktasından çemberlere çizilen teğet parçaları için;

|PC| = |PB|, |PD| = |PA| ⇒ |AB| = |CD| olur.

Benzer şekilde E ve F noktalarından çemberlere çizilen teğet parçaları,

|ED| = |EK| = |EC| = |FA| = |KF| = |FB| = x

olacağından |EF| = 2x = 4 ⇒ |AB| = |CD| = 2x = 4 cm bulunur.

Şekilde $\frac{|PC|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|AB|}$ olduğundan Temel Orantı Teoremi'nin karşıtı gereği [AD] // [BC] olur. Bu durumda ABCD bir yamuk ve [EF] bu yamuğun orta tabanıdır.

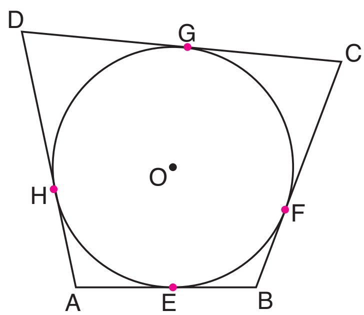
$$|EF| = \frac{|AD| + |BC|}{2} \Rightarrow |AD| + |BC| = 2.|EF| = 2.4 = 8 \text{ cm} \quad \text{ve}$$

sonuçta Ç(ABCD) = |AD| + |BC| + |AB| + |CD|

= 8 + 4 + 4

= 16 cm bulunur.

Örnek



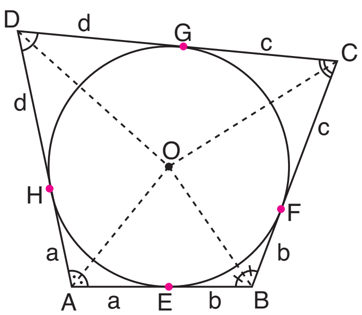
Şekilde tüm kenarları O merkezli çembere teğet olan ABCD dörtgeninde;

a. Karşılıklı kenar uzunlukları toplamının eşit olduğunu,

b. İç açı ortayların çemberin merkezinden geçtiğini gösterelim.

Çözüm

a.



Şekilde O merkezli çembere dışındaki A, B, C ve D noktalarından teğetler çizildiğinde,

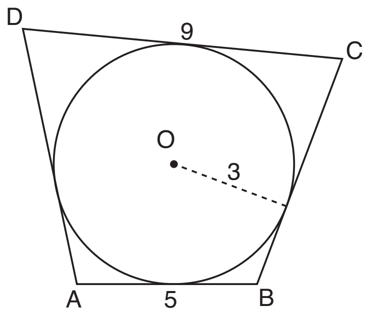
|AH| = |AE| = a , |BE| = |BF| = b , |CF| = |CG| = c ,

|DG| = |DH| = d olduğundan ABCD dörtgeninde karşılıklı kenar uzunlukları toplamı

|AB| + |CD| = |AD| + |BC| = a + b + c + d olur.

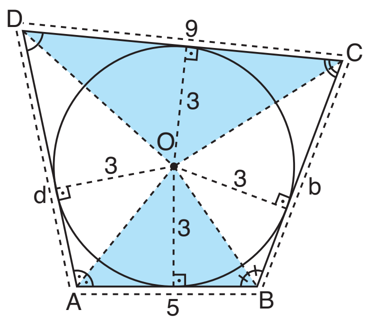
b. Bir çembere dışındaki bir noktadan iki teğet çizildiğinde bu noktayı merkeze birleştiren doğru açıortay olduğundan şekilde [AO] , [BO] , [CO] ve [DO] ABCD dörtgeninin iç açıortaylarıdır.

Örnek



Kenarları O merkezli 3 cm yarıçaplı çembere teğet olan şekildeki ABCD dörtgeninde |AB| = 5 cm ve |CD| = 9 cm olduğuna göre A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



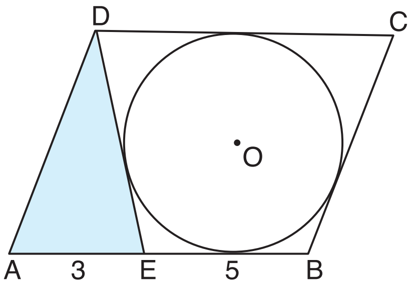
Şekilde görüldüğü gibi [AO], [BO], [CO] ve [DO] yarıçapları çizilirse

$A(ABCD) = A(\overset{\frown}{ABO}) + A(\overset{\frown}{BCO}) + A(\overset{\frown}{CDO}) + A(\overset{\frown}{ADO})$ olur. Bu ABCD dörtgeninde karşılıklı kenar uzunlukları toplamı eşit olacağından |AB| + |CD| = |AD| + |BC| $\Rightarrow$ 5 + 9 = b + d $\Rightarrow$ b + d = 14 olur. Buna göre

$$A(ABCD) = \frac{5.3}{2} + \frac{b.3}{2} + \frac{9.3}{2} + \frac{d.3}{2} = \left(\frac{5+b+9+d}{2}\right).3 = \left(\frac{14+b+d}{2}\right).3 = \left(\frac{14+14}{2}\right).3 = 42 \text{ cm}^2$$

bulunur.

Örnek



Yanda verilen şekilde ABCD paralelkenar ve BCDE dörtgeninin tüm kenarları O merkezli çembere teğettir.

|AE| = 3 cm ve |BE| = 5 cm ise,

ADE üçgeninin çevre uzunluğu kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm

ABCD paralelkenar olduğundan, |AB| = |CD| = 3 + 5 = 8 cm ve |AD| = |BC| olur.

BCDE dörtgeninin kenarları çembere teğet olduğundan |BE| + |CD| = |BC| + |DE| ⇒ 5 + 8 = |BC| + |DE|

|BC| + |DE| = 13 cm ⇒ |AD| + |DE| = 13 cm olur.

Sonuçta $Ç(\widehat{ADE})$ = |AE| + |AD| + |DE| = 3 + 13 = 16 cm bulunur.

Örnek

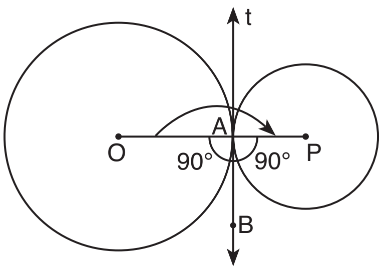
Birbirine teğet iki çemberin değme noktaları ile merkezleri aynı doğru üzerindedir. Gösterelim.

Çözüm

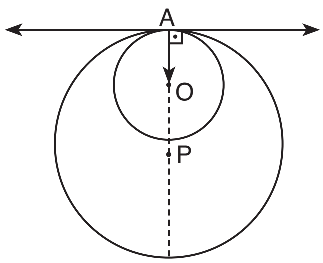
O ve P merkezli çemberler 1. şekildeki gibi A noktasında dıştan teğet olsun. Bu çemberlerin A noktasındaki ortak teğeti t çizilirse, $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{PAB}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{OAP}) = 180°$ bulunur ($B \in t$).

Buradan O, A ve P noktalarının doğrusal olduğunu söyleyebiliriz.

Çemberler 2. şekildeki gibi içten bir A noktasında teğet olursa, değme noktasından teğete dik çizilen ışın her iki çemberin de merkezinden geçmek zorunda olduğundan yine A, O ve P doğrusal noktalar olur.

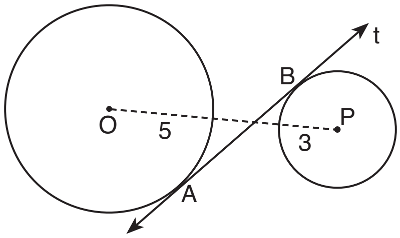


1. Şekil



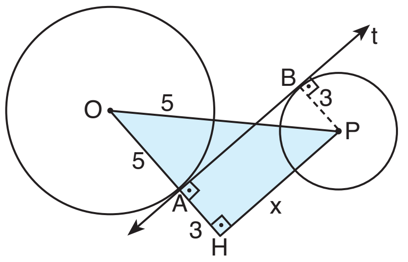
2. Şekil

Örnek



Şekildeki O ve P merkezli çemberlerin yarıçapları 5 cm ve 3 cm dir. |OP| = 10 cm ise, iç ortak teğet parçasının uzunluğu |AB| kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



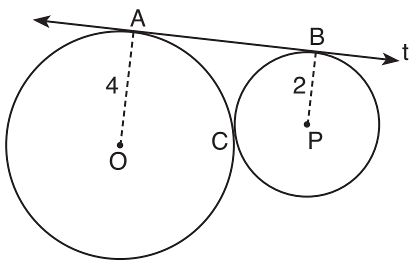
Değme noktalarını merkeze birleştiren yarıçaplar teğete dik olduğundan şekilde OHP dik üçgeni oluşturulduğunda ABPH dikdörtgen olur. Bu durumda;

$|BP| = |AH| = 3$ cm, $|AB| = |PH| = x$, $|OH| = 5 + 3 = 8$ cm olur. OPH dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni kullanırsak,

$|OP|^2 = |OH|^2 + |PH|^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + x^2$

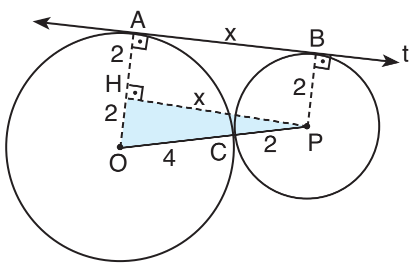
$|AB| = |PH| = x = 6$ cm bulunur.

Örnek



Şekildeki O ve P merkezli 2 cm ve 4 cm yarıçaplı çemberler C noktasında dıştan teğettir. t ortak teğetinin değme noktaları A ve B ise, |AB| kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Teğet çemberlerde merkezler ve değme noktası doğrusal olduğundan,

[OP] ve [PH] ⊥ [AO] çizilirse,

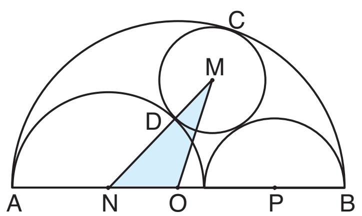
AHPB dikdörtgen, OHP dik üçgen ve

$|BP| = |AH| = |OH| = 2$ cm, $|OP| = 6$ cm olur.

OPH dik üçgeninde Pisagor Teoremi ile

$x^2 = 6^2 - 2^2 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ cm bulunur.

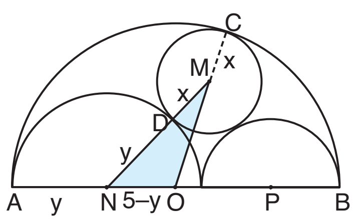
Örnek



Şekildeki M, N, O ve P merkezli çemberlerden her biri diğer üçüne teğettir. A, B, C, D değme noktaları,

[AB] çap ve $|AB| = 10$ cm ise, MNO üçgeninin çevresinin uzunluğu kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



M ve O merkezli çemberler C noktasında içten teğet olduğundan C, M ve O noktaları doğrusaldır.

[OC] yarıçapını çizelim. $|AO| = |BO| = |CO| = 5$ cm olur.

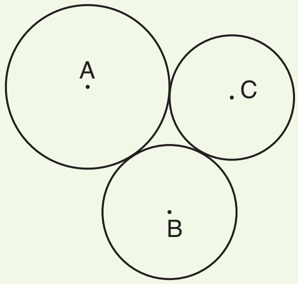
M merkezli çemberin yarıçap uzunluğu $|CM| = |DM| = x$ ve N merkezli çemberin yarıçap uzunluğu, $|AN| = |DN| = y$ olsun. M ve N merkezli çemberler D noktasında dıştan teğet olduğundan M, D ve N doğrusal noktalar olur.

Bu durumda $|NO| = 5 - y$ ve $|OM| = 5 - x$ olur. Sonuçta,

$Ç(\widehat{MNO}) = |MN| + |ON| + |OM| = (x + y) + (5 - y) + (5 - x) = 10$ cm bulunur.

Alıştırmalar

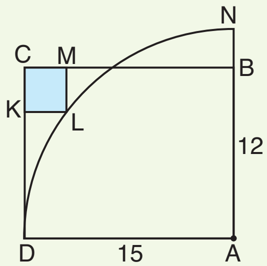
1.



Şekilde verilen A, B ve C merkezli çemberlerden her biri diğer ikisine dıştan teğettir.

|AB| = 10 cm , |BC| = 6 cm ve |AC| = 8 cm olduğuna göre bu çemberlerin yarıçap uzunluklarını bulunuz.

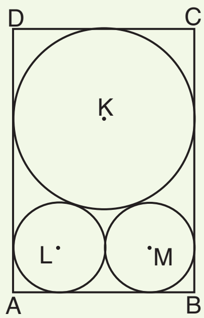
2.



ABCD dikdörtgen; CKLM kare, |AB| = 12 cm, |AD| = 15 cm dir.

Şekilde $\overset{\frown}{DLN}$, A merkezli 15 cm yarıçaplı bir çember yayı olduğuna göre, CKLM karesinin alanı kaç cm^2 olur?

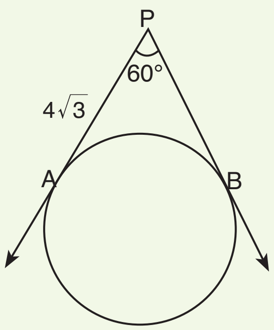
3.



ABCD dikdörtgen; |AB| = 12 cm, L ve M merkezli, çemberler eş çemberlerdir.

Şekilde K, L ve M merkezli çemberler birbirlerine ve dikdörtgenin kenarlarına teğet olduğuna göre, köşeleri K, L ve M olan üçgenin çevresi kaç cm dir?

4.

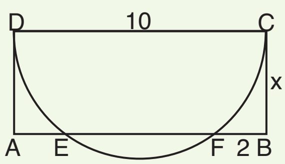


A ve B teğetlerin değme noktaları $m(\widehat{APB}) = 60°$,

$|PA| = 4\sqrt{3}$ cm dir.

Şekildeki çemberin P noktasından en uzakta olan noktası C olduğuna göre, |PC| kaç cm olur?

5.



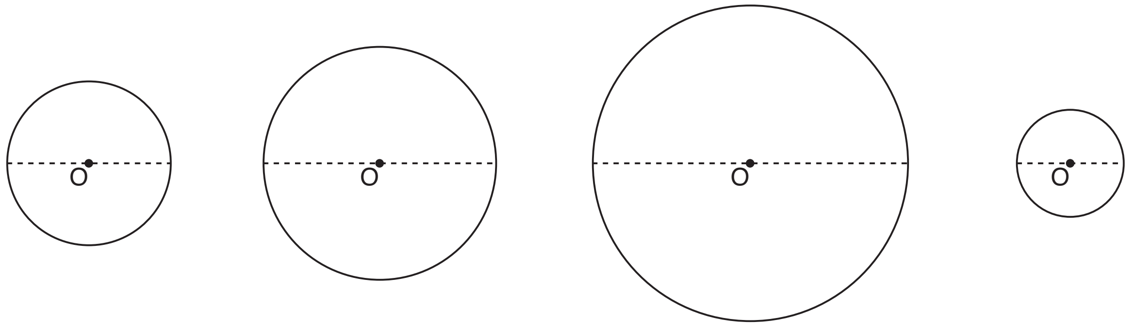
Şekilde ABCD dikdörtgen, |CD| = 10 cm ve

|FB| = 2 cm dir. [CD] çaplı yarım çember [AB] kenarını E ve F noktalarında kestiğine göre, |BC| = x kaç cm olur?

8.4 : DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

8.4.1: Dairenin Çevresi ve Alanı

DAİRENİN ÇEVRESİ



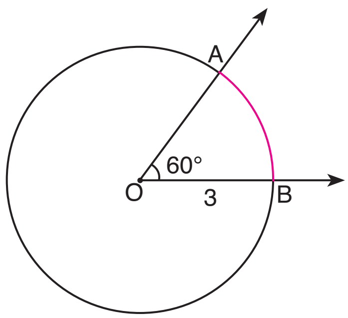
Bütün çemberler birbirine benzerdir. Benzer şekillerde karşılıklı uzunluklar oranı sabit bir sayı olduğundan herhangi bir çemberde,

$$\frac{\text{Çevre uzunluğu}}{\text{Çap uzunluğu}} = 3{,}141592...$$

sabit sayısı olur. Bu sabit sayı Yunanca'da çevre (çember) anlamına gelen kelimelerin ilk harfi olan "π" ile gösterilir. $\pi = 3{,}141592...$ sayısı rasyonel olmayan bir gerçek sayıdır.

Buna göre r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğu Ç ise $\frac{Ç}{2r} = \pi \Rightarrow$ **Ç = 2πr** bulunur.

Örnek



O merkezli $r = 3$ cm yarıçaplı bir çemberde ölçüsü $60°$ olan AOB açısının gördüğü yayın uzunluğunu bulalım.

Çözüm

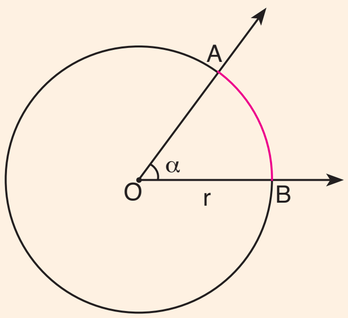
Çemberin çevresi $Ç = 2\pi.3 = 6\pi$ cm ve tam açı

$360° \longrightarrow 6\pi$ uzunluğunda yayı görürse

$60° \longrightarrow |\overset{\frown}{AB}|$ görür, orantısıyla $|\overset{\frown}{AB}| = \dfrac{6\pi.60°}{360°} = \dfrac{6\pi}{6} = \pi$ birim bulunur.

Bunları Bilelim

Çemberde Yay Uzunluğu



O merkezli r yarıçaplı çemberde bir merkez açının ölçüsü,

$m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olsun.

$360° \rightarrow 2\pi r$

$\alpha \rightarrow |\overset{\frown}{AB}|$

orantısı ile şekildeki AB yayının uzunluğu

$|\overset{\frown}{AB}| = \dfrac{2\pi r}{360}.\alpha$ olur.

Örnek

Resimdeki lokomotifin büyük tekerleğinin yarıçapı öndeki küçük tekerleğin yarıçapının 2 katıdır. Büyük tekerlek 6 tam dönme (tur) yaptığında küçük tekerlek kaç tur yapar? Bulalım.

Çözüm 1

Küçük tekerleğin yarıçapı r ise büyük tekerleğin yarıçapı 2r ve büyük tekerleğin çevresi,

$Ç_1 = 2\pi(2r) = 4\pi r$ olduğundan büyük tekerlek 6 tur attığında lokomotif $6(4\pi r) = 24\pi r$ kadar yol alır.

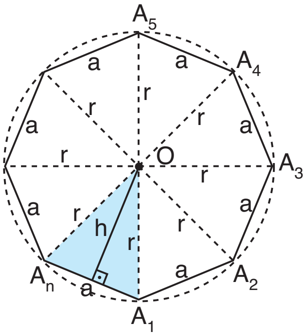
Küçük çemberin çevresi $Ç_2 = 2\pi r$ olduğundan küçük tekerlek bu yolu almak için $\dfrac{24\pi r}{2\pi r} = 12$ tur yapmalıdır.

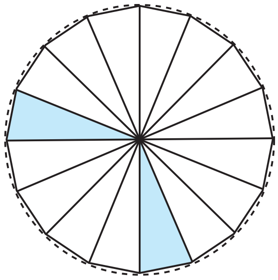
Çözüm 2

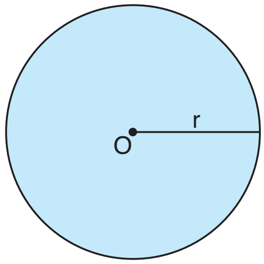
Hareket eden bir araçta tekerleklerin belli bir yolu almak için yaptıkları turların sayısı yarıçapları ile ters orantılı olduğundan bu problemi, $2r \rightarrow 6$ tur

$r \rightarrow x$ tur

ters orantısından $2r.6 = r.x \Rightarrow x = 12$ tur olarak da bulabiliriz.







$n \geq 3$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n kenarlı bir düzgün çokgen ile bunun O merkezli çevrel çemberini düşünelim. Bu düzgün çokgenin; bir kenar uzunluğu a, iç teğet çemberinin yarıçapı h ve çevrel çemberinin yarıçapı da r olsun. Buna göre düzgün çokgenin çevresi Ç = n.a ve

düzgün çokgenin alanı $S = n\left(\frac{ah}{2}\right) = (n \cdot a)\frac{h}{2} = Ç \cdot \frac{h}{2}$ olur.

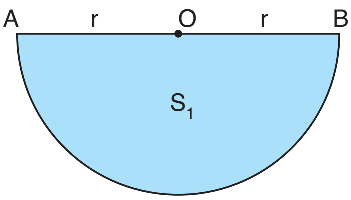
n sayısının sınırsız büyüdüğünü düşünürsek bu durumda;

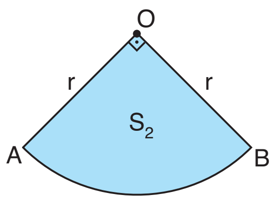
$$n \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{Düzgün çokgenin çevresi} \to \text{Çemberin çevresine} \\ \text{Düzgün çokgenin alanı} \to \text{Dairenin alanına} \\ \text{İç teğet çember yarıçapı h} \to \text{Çevrel çemberin yarıçapı r sayısına} \end{cases}$$

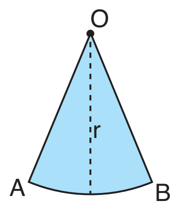
dönüşeceğinden dairenin alanı,

$$S = (\text{Çevre uzunluğu}).\frac{r}{2} = (2\pi r).\frac{r}{2} = \pi r^2$$

olur. Bunun bir sonucu olarak,







yarım dairenin alanı,

$$S_1 = |\overset{\frown}{AB}|\frac{r}{2}$$

$$= \pi r \cdot \frac{r}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}$$

çeyrek dairenin alanı,

$$S_2 = |\overset{\frown}{AB}|\frac{r}{2}$$

$$= \frac{\pi r}{2} \cdot \frac{r}{2}$$

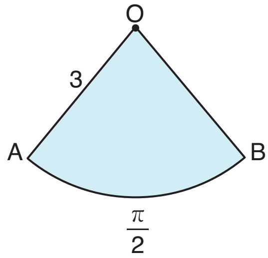
$$= \frac{\pi r^2}{4}$$

α derecelik daire diliminin alanı,

$$S = |\overset{\frown}{AB}|\frac{r}{2} \text{ veya } S = \frac{\pi r^2}{360°} \cdot \alpha$$

olarak bulunur.

Örnek



Yandaki şekilde verilen O merkezli daire diliminde

$|\overset{\frown}{AB}| = \frac{\pi}{2}$ cm ve yarıçap $r = 3$ cm dir.

Buna göre, OAB daire diliminin alanını bulalım.

Çözüm

Şekildeki daire diliminin alanı üçgende alan hesabına benzer biçimde,

$S = |\overset{\frown}{AB}| \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{4}$ br^2 bulunur.

Örnek

Merkez açılarının ölçüleri 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° ve yarıçapları $r = 2\sqrt{6}$ cm olan daire dilimlerinin alanlarını bulalım.

Çözüm

α derecelik daire diliminin alanı $S = \frac{\pi r^2}{360°}.\alpha$ olduğuna göre;

30° lik daire diliminin alanı $S_1 = \frac{\pi(2\sqrt{6})^2}{360°}.30° = \frac{\pi.24}{12} = 2\pi \text{ cm}^2$,

45° lik daire diliminin alanı $S_2 = \frac{24\pi}{8} = 3\pi \text{ cm}^2$,

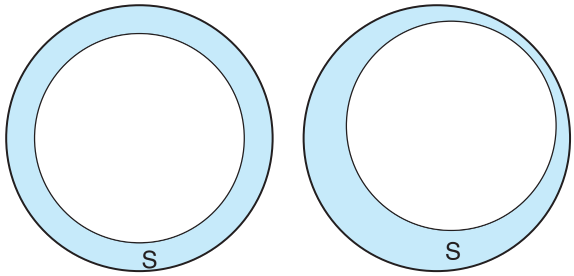
60° lik daire diliminin alanı $S_3 = \frac{24\pi}{6} = 4\pi \text{ cm}^2$,

90° lik daire diliminin alanı $S_4 = \frac{24\pi}{4} = 6\pi \text{ cm}^2$,

120° lik daire diliminin alanı $S_5 = \frac{24\pi}{3} = 8\pi \text{ cm}^2$,

150° lik daire diliminin alanı $S_6 = \frac{24\pi}{12}.5 = 10\pi \text{ cm}^2$ bulunur.

Örnek



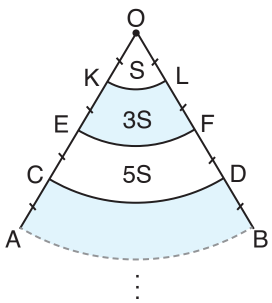
Aynı merkezli veya farklı merkezli şekillerdeki gibi daireler verilsin. Her iki şekilde de büyük dairenin yarıçapı r_1, küçük dairenin yarıçapı r_2 olduğuna göre, taralı halka alanlarını r_1 ve r_2 cinsinden bulalım.

Çözüm

Büyük dairenin alanından, küçük dairenin alanını çıkarırsak şekillerdeki taralı halkanın alanı,

$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ olur.

Örnek



Şekilde $|AC| = |CE| = |EK| = |KO|$ ise, aynı merkezli

$\overset{\frown}{KL}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AB}$, … çember yaylarının belirttiği alanların

S, 3S, 5S, …

değerinde olduğunu gösterelim.

Çözüm

Tüm çemberler birbirine, merkez açısı eşit olan tüm daire dilimleri de birbirine benzer olduğundan şekilde $OKL \sim OEF$ ve benzerlik oranı $\dfrac{|OK|}{|OE|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\dfrac{A(OKL)}{A(OEF)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ olur.

$A(OKL) = S$ ise, $A(OEF) = 4S$ ve buradan halka parçasının alanı $A(EFLK) = 4S - S = 3S$ bulunur.

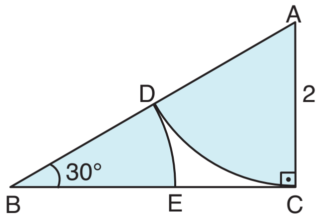
$OKL \sim OCD$ ve benzerlik oranı $\dfrac{|OK|}{|OC|} = \dfrac{1}{3}$ olduğundan bu daire dilimlerinin alanları oranı

$\dfrac{A(OKL)}{A(OCD)} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ olur. Buna göre,

$A(OKL) = S \Rightarrow A(OCD) = 9S \Rightarrow A(CDFE) = A(OCD) - A(OEF) = 9S - 4S = 5S$ bulunur.

Bu şekilde devam edilirse şekilde belirtilen bölgelerin alan değerleri yukarıdan aşağıya doğru S, 3S, 5S, 7S, ... sayıları olur ($S \in \mathbb{R}^+$).

Örnek

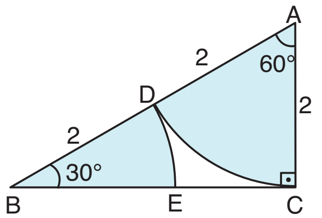


ABC dik üçgeninde [AC] ⊥ [BC]

$m(\widehat{ABC}) = 30°$ ve |AC| = 2 cm dir.

A merkezli, 2 cm yarıçaplı çember yayı ile B merkezli çember yayı D noktasında teğet olduğuna göre, taralı alanlar toplamı kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



ABC özel dik üçgeninde

|AC| = 2 cm ise, |AB| = 4 cm ve

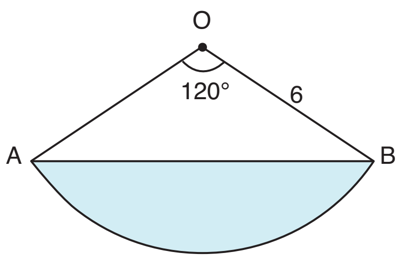
|AD| = 2 cm olduğundan

|BD| = 4 – 2 = 2 cm bulunur.

A ve B merkezli daire dilimlerinin yarıçapları eşit ve 2 cm, merkez açı ölçüleri toplam 30° + 60° = 90° olur. O hâlde taralı alan 2 cm yarıçaplı bir çeyrek dairenin alanına eşittir.

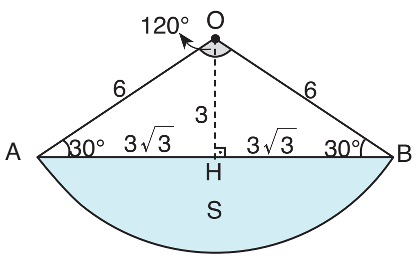
Sonuçta bu alan $S = \dfrac{\pi 2^2}{4} = \pi \text{ cm}^2$ bulunur.

Örnek



O merkezli 6 cm ve yarıçaplı AOB daire diliminin merkez açı ölçüsü 120° olduğuna göre, taralı daire parçasının alanını bulalım.

Çözüm



r = 6 cm yarıçaplı 120 derecelik daire diliminin alanı,

$A(AOB) = \dfrac{\pi 6^2}{3} = 12\pi \text{ cm}^2$ olur.

ABO üçgeninde [HO] yüksekliği çizildiğinde özel dik üçgenlerden,

|HO| = 3 cm ve $|AH| = |BH| = 3\sqrt{3}$ cm olur. Buna göre, üçgensel bölgesinin alanı

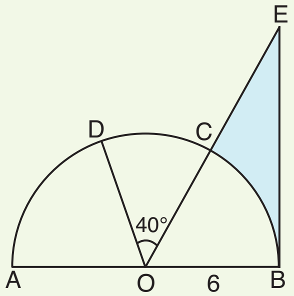
$A(\widehat{ABO}) = \dfrac{6\sqrt{3}.3}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ve taralı alan $S = 12\pi - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ bulunur.

Alıştırmalar

1.

Şekilde bisikletin büyük tekerleğinin yarıçapı, küçük tekerleğin yarıçapının 2 katıdır. Bisiklet yola giderken büyük tekerlek 6 devir(tam dönme) yaptığında küçük tekerlek kaç devir yapar? Bulunuz.

2.



Şekilde [AB] O merkezli yarım dairenin çapı;

OBE dik üçgen, $[AB] \perp [BE]$,

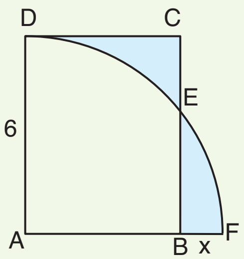
$m(\widehat{DOE}) = 40°$,

$|BO| = 6$ cm,

$|\widehat{BCD}| = |BE|$ olduğuna göre,

taralı alan kaç cm^2 dir?

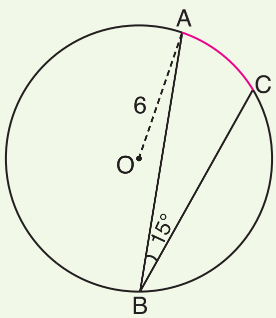
3.



ABCD dikdörtgen, A noktası 6 cm yarıçaplı çeyrek çemberin merkezi ve $|AD| = 6$ cm dir.

Şekildeki taralı alan değerleri eşit olduğuna göre, $|FB| = x$ kaç cm dir?

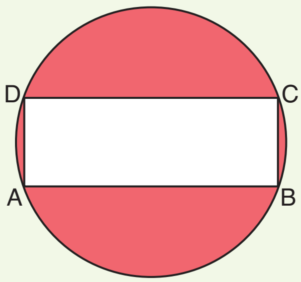
4.



Şekildeki O merkezli 6 cm yarıçaplı çemberde

$m(\widehat{ABC}) = 15°$ olduğuna göre $|\widehat{AC}|$ kaç cm dir?

5.



Resimdeki trafik levhasında ABCD dikdörtgeninin köşeleri çember üzerindedir. $|AB| = 30$ cm, $|BC| = 10$ cm ise,

Kırmızı renkle boyanmış bölgenin alanı kaç cm^2 olur?